

150132

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

150132

**TİP-2 BULANIK MANTIK SİSTEMLERİN BENZETİMİ İÇİN
YAZILIM GELİŞTİRME**

Müzeyyen BULUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK-BİLGİSAYAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2004

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TİP-2 BULANIK MANTIK SİSTEMLERİN BENZETİMİ İÇİN YAZILIM GELİŞTİRME

Müzeyyen BULUT

Yüksek Lisans Tezi

Elektronik-Bilgisayar Eğitimi Anabilim Dalı

Bu seminer, 17.08.2004 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Z. Hakan AKPOLAT

Üye: Yrd. Doç. Dr. Zafer AYDOĞMUŞ

Üye: Doç. Dr. Hanifi Güdemir

Bu seminerin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24./08./2004. tarih ve 34/2 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŐEKKÖR

Bu çalışmanın başından sonuna kadar konuları tartışmamda, çalışmayı yönlendirici kritiklerinden ve tez çalışma sürecindeki sıcak ilgilerinden dolayı sayın danışman hocam Doç Dr. Z. Hakan AKPOLAT'a, bugüne kadar maddi ve manevi imkanlarıyla beni destekleyen aileme teőekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER.....	I
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	III
TABLolar LİSTESİ.....	V
SİMGELER LİSTESİ.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII

1. GİRİŞ

1.1. Tez Çalışmasının Amacı.....	1
1.2. Tez Çalışmasına Genel Bir Bakış.....	2

2.TİP-2 BULANIK MANTIK

2.1. Tip-2 Üyelik Fonksiyonları	3
2.2. Tip-2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler.....	14
2.2.1. Genel Tip-2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler.....	15
2.2.1.1. Teorik İşlemler.....	15
2.2.1.2. Cebirsel İşlemler.....	18
2.2.2. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler.....	18
2.2.2.1. Teorik İşlemler.....	18
2.2.2.2. Cebirsel İşlemler.....	19
2.3. Tip-2 Bulanık İlişkiler Ve Bileşimler.....	20
2.3.1. Aynı Çarpım Uzayında İlişki Ve Bileşimler.....	20
2.3.2. Farklı Çarpım Uzayında İlişki Ve Bileşimler.....	21
2.3.3. Bulanık Kümelerin Kartezyen Çarpımı.....	21
2.3.4. İma İşlemi.....	22
2.4. Tip-2 Bulanık Kümelerin Ağırlık Merkezi: Tip İndirgeme.....	22
2.4.1. Genel Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Tip İndirgeme.....	25
2.4.1.1. Ağırlık Merkezi Yöntemi ile Tip-İndirgeme.....	25
2.4.1.2. Merkezlerin Toplamı Yöntemi ile Tip-İndirgeme.....	26
2.4.1.3. Yükseklik Yöntemi ile Tip-İndirgeme.....	27
2.4.1.4. Değiştirilmiş Yükseklik Yöntemi ile Tip İndirgeme.....	28
2.4.1.5. Kümelerin Merkezi Yöntemi ile Tip İndirgeme.....	29
2.4.2. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Tip İndirgeme.....	30

2.4.2.1. Ağırlık Merkezi Yöntemi ile Tip İndirgeme.....	30
2.4.2.2. Merkezlerin Toplamı Yöntemi ile Tip-İndirgeme.....	31
2.4.2.3. Yükseklik Yöntemi ile Tip-İndirgeme.....	31
2.4.2.4. Değiştirilmiş Yükseklik Yöntemi ile Tip-İndirgeme.....	31
2.4.2.5. Kümelerin Merkezi Yöntemi ile Tip İndirgeme.....	31

3. TİP-2 BULANIK MANTIK SİSTEMLER

3.1. Singleton Tip-2 Bulanık Mantık Sistemler.....	35
3.2. Tip-1 Non-Singleton Tip-2 Bulanık Mantık Sistemler.....	39
3.3. Tip-2 Non-Singleton Tip-2 Bulanık Mantık Sistemler.....	45
3.4. Tip-2 TSK Bulanık Mantık Sistemler.....	52
3.4.1. Birinci Dereceden Tip-2 Tsk Bulanık Mantık Sistemler.....	53
3.4.2. Aralıklı Tip-2 Tsk Bulanık Mantık Sistemler.....	53
3.4.3. Normalleştirilmemiş Aralıklı Tip-2 Tsk Bulanık Mantık Sistemler.....	54

4. GELİŞTİRİLEN YAZILIM: FUZZY2 TOOLBOX

4.1. Fuzzy2 Toolbox Menüleri ve Metotları.....	55
4.2. Fuzzy2 Toolbox Pencereleeri.....	56
4.2.1. Fis Editor.....	56
4.2.2. Membership Function Editor.....	57
4.2.3. Rule Editor.....	59
4.2.4. Rule Viewer.....	60
4.2.5. Surface Viewer.....	61
4.3. Type2 Fuzzy Logic Controller Bloğu.....	61

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar.....	63
5.2. Öneriler.....	63

KAYNAKLAR.....	65
-----------------------	-----------

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. Tip-1 üyelik fonksiyonları.....	4
Şekil 2.2.a. Tip-1 üyelik fonksiyonu.....	4
Şekil 2.2.b. Bulanıklaştırılmış tip-1 üyelik fonksiyonu.....	4
Şekil 2.2.c. FOU.....	4
Şekil 2.3. Örnek bir ayrık tip-2 üyelik fonksiyonu.....	5
Şekil 2.4.a. Tip-2 bulanık kümesi için FOU	8
Şekil 2.4.b. Aralıklı küme olan ikinci üyelik fonksiyonları.....	8
Şekil 2.5. Şekil 2-1'deki üyelik fonksiyonları için FOU'lar.....	8
Şekil 2.6. Tip-2 bulanık kümesi içinde gömülü tip-1 küme örneği.....	9
Şekil 2.7. İç içe girmiş tip-2 kümeler örneği.....	10
Şekil 2.8. Tip-1 bulanık kümeler için dilsel etiketler.....	11
Şekil 2.9. Tip-2 bulanık kümeler için dilsel etiketler.....	12
Şekil 2.10.a. Aralıklı tip-2 küme için FOU.....	23
Şekil 2.10.b. Örnek bağımsız değişken ve ayrıklaştırılmış birincil üyelik.....	23
Şekil 2.10.c. Gömülü tip-1 kümesi örneği.....	23
Şekil 2.11.a. Tip-1 üyelik fonksiyonu.....	24
Şekil 2.11.b. Tip-2 bölümlerinin FOU'sı.....	24
Şekil 2.11.c. Tip-2 üyelik fonksiyonunun ağırlık merkezi.....	24
Şekil 2.12.a. Alt üyelik fonksiyonu.....	25
Şekil 2.12.b. Üst üyelik fonksiyonu.....	25
Şekil 2.12.c. c_i değerleri.....	25
Şekil 2.12.d. c_r değerleri.....	25
Şekil 2.13. Tip indirgeme metotlarının hesaplanma güçlüğü.....	30
Şekil 3.1. Tip-2 Bulanık Mantık Sistem Yapısı.....	33
Şekil 3.2.a. Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistem için minimum t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	38
Şekil 3.2.b. Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistem için çarpım t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	38
Şekil 3.3.a. Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistem için minimum t-norm ile consequent işlemi.....	38

Şekil 3.3.b. Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistem için çarpım t-norm ile consequent işlemi.....	38
Şekil 3.4. Şekil 3.3'deki çıkış kümelerinin birleştirilmiş gösterimi.....	39
Şekil 3.5.a. Aralıklı tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistem için minimum t-norm ile consequent işlemi.....	43
Şekil 3.5.b. Aralıklı tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistem için çarpım t-norm ile consequent işlemi.....	43
Şekil 3.6. Giriş tip-1 Gaussian üyelik fonksiyonunun farklı konumlarının antecedent FOU ile ilişkisi.....	45
Şekil 3.7.a. Aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için minimum t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	49
Şekil 3.7.b. Aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için çarpım t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	49
Şekil 3.8.a. Singleton tip-1 bulanık mantık sistemler için çarpım t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	50
Şekil 3.8.b. Singleton olmayan tip-1 bulanık mantık sistemler için çarpım t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	50
Şekil 3.8.c. Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistemler için çarpım t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	50
Şekil 3.8.d. Aralıklı tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için çarpım t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	50
Şekil 3.8.e. Aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için çarpım t-norm ile giriş antecedent işlemi.....	50
Şekil 3.9. Giriş FOU'nun farklı konumlarının antecedent FOU ile ilişkisi.....	51
Şekil 4.1. Fis Editor penceresi	57
Şekil 4.2. Membership Function Editor penceresi.....	58
Şekil 4.3. Rule Editor penceresi	59
Şekil 4.4. Rule Viewer penceresi	60
Şekil 4.5. Surface Viewer penceresi	61
Şekil 4.6. Type2 Fuzzy Logic bloğu	62

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1. Şekil 3.6 için $\bar{x}_{k,\max}^{-l}$ değerleri.....	44
Tablo 3.2. Şekil 3.6 için çarpım t-norm'a bağlı olarak $\underline{x}_{k,\max}^l$ değerleri.....	44
Tablo 3.3. Şekil 3.6 için minimum t-norm'a bağlı olarak $\underline{x}_{k,\max}^l$ değerleri.....	45
Tablo 3.4. Şekil 3.9 için $\bar{x}_{k,\max}^{-l}$ değerleri.....	51
Tablo 3.5. Şekil 3.9 için çarpım t-norm'a bağlı olarak $\underline{x}_{k,\max}^l$ değerleri.....	52
Tablo 3.6. Şekil 3.9 için minimum t-norm'a bağlı olarak $\underline{x}_{k,\max}^l$ değerleri.....	52

SİMGELER LİSTESİ

μ	:	Üyelik fonksiyonu
$\overline{\mu}$	:	Üst üyelik fonksiyonu
$\underline{\mu}$	:	Alt üyelik fonksiyonu
$\star$	:	t-norm işlemi
$\neg$	:	Olumsuzluk (negation) işlemi
Π	:	Buluşma (meet) işlemi
$\sqcup$	:	Katılma (join) işlemi
$\tilde{A}$	:	$\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesi
$\tilde{B}$	:	$\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümesi
f^{cg}	:	İkinci derece üyelik fonksiyonunun ağırlık merkezi
c_A	:	A tip-1 bulanık kümesinin ağırlık merkezi
$C_{\tilde{A}}$	:	$\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin ağırlık merkezi
$Y_c(x)$	:	Ağırlık merkezi yöntemini kullanan tip-indirgeyicinin çıkışı
$Y_a(x)$	:	Merkezlerin toplamı yöntemini kullanan tip-indirgeyicinin çıkışı
$Y_h(x)$	:	Yükseklik yöntemini kullanan tip-indirgeyicinin çıkışı
$Y_{mh}(x)$	:	Değiştirilmiş yükseklik yöntemini kullanan tip-indirgeyicinin çıkışı
$Y_{cos}(x)$	:	Kümelerin merkezi yöntemini kullanan tip-indirgeyicinin çıkışı
$Y_{TSK2}(x)$	:	Sugeno sistemlerin çıkışı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TİP-2 BULANIK MANTIK SİSTEMLERİN BENZETİMİ İÇİN BİR YAZILIM GELİŞTİRME

Müzeyyen BULUT

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi

Ana Bilim Dalı

2004, Sayfa: 67

Tip-2 bulanık küme kavramı, ilk olarak klasik (tip-1) bulanık kümelerin bir uzantısı olarak sunulmuştur. Tip-2 bulanık kümeler, bir bulanık küme için tam bir üyelik fonksiyonunun belirlenemediği durumlarda oldukça kullanışlıdır; dolayısıyla, bu kümeler, belirsizliklerin üstesinden gelmede çok etkindir. Ancak, tip-2 bulanık kümeleri anlamak ve kullanmak tip-1 bulanık kümelerden daha zordur. Bu zorluklara rağmen, tip-2 bulanık kümeler bir çok konuda uygulama alanı bulmuştur. Şu anda, Tip-1 bulanık mantık sistemlerin benzetiminin kolayca yapıldığı MATLAB/SIMULINK 'in 'Fuzzy Logic Toolbox'ı gibi bazı ticari yazılım programları bulunmasına karşın tip-2 bulanık mantık sistemlerin benzetimi için böyle bir ticari yazılım mevcut değildir. Bu nedenle, bu tez çalışmasında MATLAB programlama dilinde yazılmış, MATLAB ve SIMULINK 'de doğrudan tip-2 bulanık mantık uygulamalarının yapılacağı, yeni bir 'Type-2 Fuzzy Logic Toolbox' tasarlanmıştır. Ayrıca SIMULINK'de kullanmak amacıyla 'Type-2 Fuzzy Logic Controller Block' da hazırlanmıştır. Genel tip-2 bulanık mantık sistemler çok karmaşık olmaları nedeniyle uygulamalarda tercih edilmemişlerdir. Bu nedenle, sunulan 'Type-2 Fuzzy Logic Toolbox' da sadece aralıklı tip-2 bulanık mantık sistemler dikkate alınmıştır. Geliştirilen yazılım paketindeki tüm menüler, 'MATLAB-Fuzzy Logic Toolbox'ınki ile aynı formattadır ve uluslararası kullanım için İngilizce olarak hazırlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Tip-2 bulanık mantık, tip-2 bulanık kümeler, aralıklı kümeler, tip-2 bulanık mantık alet kutusu.

ABSTRACT

Masters Thesis

A SOFTWARE DEVELOPMENT FOR THE SIMULATION OF TYPE-2 FUZZY LOGIC SYSTEMS

Müzeyyen BULUT

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electronic and Computer Education

2004, Page: 67

The concept of type-2 fuzzy set was initially proposed as an extension of classical (type-1) fuzzy sets. Type-2 fuzzy sets are very useful in circumstances where it is difficult to determine an exact membership function for a fuzzy set; hence they are very effective for dealing with uncertainties. However, type-2 fuzzy sets are more difficult to use and understand than type-1 fuzzy sets. Even in the face of these difficulties, type-2 fuzzy logic has found applications in many fields. Currently, there are some commercial software programs like Fuzzy Logic Toolbox of MATLAB/SIMULINK in which the simulation of type-1 fuzzy logic systems can be done easily but, there is no such a commercial software program for the simulation of type-2 fuzzy logic systems. Therefore, in this thesis, a new Type-2 Fuzzy Logic Toolbox written in MATLAB programming language is designed for direct applications of type-2 fuzzy logic in MATLAB and SIMULINK. Type-2 Fuzzy Logic Controller Block is also prepared for use in SIMULINK. Since general type-2 fuzzy logic systems are very complicated, they are not preferred in applications. Thus, only interval type-2 fuzzy logic systems are considered in the proposed Type-2 Fuzzy Logic Toolbox. All the menus of the developed software package are in the same format with MATLAB Fuzzy Logic Toolbox and are prepared in English for international use.

Keywords: Type-2 Fuzzy Logic, type-2 fuzzy sets, interval sets, type-2 fuzzy logic toolbox.

1. GİRİŞ

Gerçek bir olay, insanın düşünce sisteminde ve zihninde yaklaşık olarak canlandırılarak yorumlanır. Bilgisayarların kullandığı klasik mantıktan farklı olarak; insanın yaklaşıklık ve belirsizlik içeren veri ve bilgi ile işlem yapabilme yeteneği vardır. Bulanık mantık kavramı, kesin sonuçları değil yaklaşık kriterleri göz önüne alır. Örneğin; “hava sıcak” denildiğinde, “sıcak” kelimesinin ifade ettiği anlam olarak birbirinden farklı olabilir. Kutuplarda bulunan bir kişinin sıcak için 1 dereceyi algılamasına karşın; ekvator civarındaki bir kişi için bu 35 dereceyi bulabilir. Bu, kesin değildir; ancak belirsizdir. Bu şekilde kelimelerin ima ettikleri belirsizliklere bulanık (fuzzy) denmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, “sıcak” kelimesinin ne kadar fazla sayısal dereceler topluluğunu temsil ettiğidir. Bu topluluğa da fuzzy kümesi adı verilmektedir. Bazı insanların sıcaklığı, 15 derece; bazılarının ise 35 derece gibi oldukça farklı sayısal biçimde algılanmasına rağmen; bu insanlar arasında bir farklılık bulunmaz. Ancak klasik mantıkta sadece “sıcak” ve “soğuk” vardır. İşte bulanık mantığın avantajı da budur. Zadeh, insan düşüncesindeki belirleyici fikirlerin sayılar olmayıp bulanık kümelerin seviyeleri olduğunu gözlemlemiş ve bulanık mantık üzerindeki çalışmalarını yoğunlaştırmıştır [1]. Sosyal bilimlerden mühendislik uygulamalarına kadar hemen her alanda bulanık mantığa yönelik bir uygulama örneği bulmak mümkündür [2-4]. Uygulamalar kamera, çamaşır makinesi, mikrodalga fırın gibi tüketici ürünlerinden endüstriyel süreç kontrolü, tıbbi aletler, karar-destek sistemleri ve portföy seçimine kadar uzanmaktadır.

Bulanık mantık uygulamalarının tasarım ve benzetiminde oldukça yaygın olarak kullanılan MATLAB Fuzzy Logic Toolbox paket programı, bulanık sistemleri grafiksel bir arayüz ile oluşturup düzenleyebilme imkanı sunar ve işlemleri büyük oranda kolaylaştırır. Ancak bu araç kutusu (Fuzzy Logic Toolbox), tip-2 bulanık mantık uygulamalarını gerçekleştirecek şekilde hazırlanmamıştır. Tip-2 bulanık mantık uygulamalarını daha rahat yapabilmek için yeni bir alet-kutusu (toolbox) hazırlamanın ve MATLAB/Simulink yazılımları ile uyumlu bir şekilde çalışmasının sağlanmasının tip-2 bulanık mantık konusunda çalışacak araştırmacılara büyük kolaylık sağlayacağı bir gerçektir.

1.2 Tez Çalışmasının Amacı

MATLAB, sayısal ve sembolik hesaplamalar, veri çözümlemesi, gerçek ortamda test ve ölçüm yapabilme, çok gelişmiş çizim işlemleri, algoritma geliştirme, ileri seviye programlama, C/C++ ile tümleşik çalışabilmesi, mühendislik ve bilimsel uygulamaları ile tüm dünyada birçok alanda yaygın olarak kullanılan yazılımdır.

Matlab yazılımı, kullanıcıya çok kolay ve etkin uygulama geliştirme olanağı verir. Özellikle toolbox adı verilen ve hemen hemen birçok matematiksel ve mühendislik alanını kapsayan alt modülleri ile ilgili her konuda kolayca ve pratik bir şekilde uygulamalar yapılabilir. Gün geçtikçe gelişen Simulink ise gerçek zamanlı uygulamaların benzetimini gerçekleştirmeyi olanaklı hale getirmiştir.

Bu tez çalışmasının temel amacı, Matlab yazılımının olanaklarından faydalanan hazırlanan fuzzy2 toolbox ve simulink bloğunu tasarlayarak eğitim ve araştırmaya yönelik gereksinimleri karşılayacak olan teknik programlama ortamı sayesinde tip-2 bulanık mantık alanında kullanıcının isteklerine özgü uygulamalar geliştirmesini sağlamaktır.

1.3 Tez Çalışmasına Genel Bir Bakış

Bu çalışmada sırasıyla 2. Bölüm’de Tip-2 Bulanık Mantık kavramına, 3. Bölüm’de Tip-2 Bulanık Mantık Sistemlere, 4. Bölüm’de geliştirilen Fuzzy2 toolbox’ın tanıtımına, 5. Bölüm’de ise tez çalışmasından elde edilen genel sonuçlara ve önerilere değinilecektir.

2. TİP-2 BULANIK MANTIK

Bilindiği gibi istatistikte ve olasılık kuramında, belirsizliklerle değil kesinliklerle çalışılır ama insanın yaşadığı ortam daha çok belirsizliklerle doludur. Bu nedenle insanoğlunun sonuç çıkarabilme yeteneğini anlayabilmek için belirsizliklerle çalışmak gereklidir.

Bulanık mantık sistemlerde, kelimelerin farklı insanlar için farklı anlamlarının olması, bilginin aynı görüşte olmayan uzman grubundan alınması, bulanık mantık sistemleri harekete geçiren ölçümlerin gürlütlü olması gibi nedenlerden dolayı belirsizlikler vardır [5,6].

Bulanık mantığın yeni bir açılımı olan bir tip-2 bulanık mantık üyelik fonksiyonunun bulanık olmasından ve üçüncü boyutundan dolayı belirsizlikleri modelleyip etkisini azaltabilir. Belirsizlikler kaybolduğunda da tip-2 bulanık mantık tip-1 bulanık mantığa indirgenebilir. Ancak üçüncü boyuttan dolayı çizimin zorlaşması, hesaplamaların daha karmaşık olması gibi nedenlerden tip-2 bulanık kümeleri anlamak tip-1 bulanık kümeleri anlamaktan daha zordur [7].

Bu bölümde, literatürde kullanılan temel kavram ve tanımlar verilerek çeşitli örneklerle tip-2 bulanık mantık ve özellikleri anlatılmaya çalışılmıştır.

2.1. Tip-2 Üyelik Fonksiyonları

Bulanık mantık sistemlerde üyelik fonksiyonları, giriş ve çıkışlarla ilişkili olarak kuralların varsayım (antecedent) ve sonuç (consequent) kısımlarında yer alır. Bulanık kümeleri tanımlayan üyelik fonksiyonları tip-1 ve tip-2 olmak üzere ikiye ayrılabilir. Belirsizliği daha iyi ifade edebilme gücü olan tip-2 bulanık mantık için tanımlanan üyelik fonksiyonları, klasik bulanık mantık olarak bilinen tip-1 üyelik fonksiyonlarından yola çıkılarak incelenecektir.

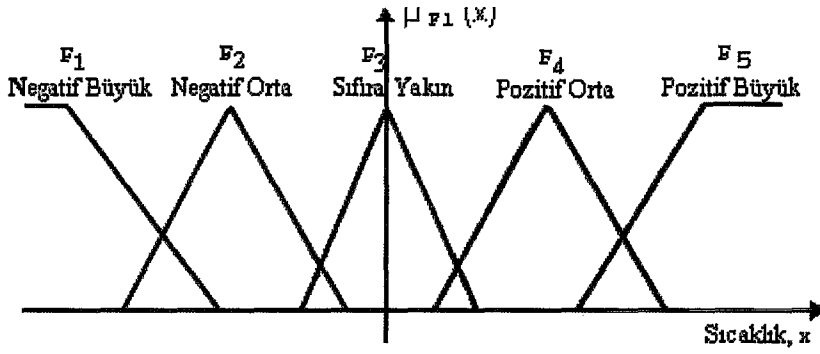
Tek değişkenli A tip-1 bulanık kümesi

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid \forall x \in X\} \quad (2-1)$$

olarak gösterilir.

Tüm $x \in X$ 'ler için tip-1 üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$, 0 ile 1 arasında olmalıdır. Tip-1 üyelik fonksiyonu iki boyutludur.

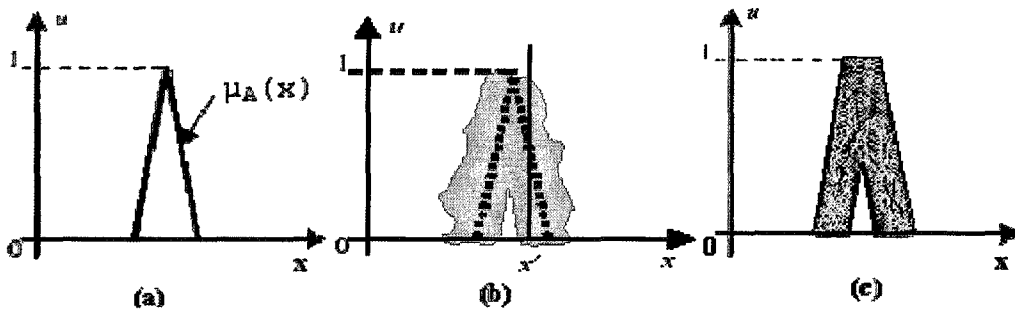
Üyelik fonksiyonundaki dilsel etiketlerin seçimi serbesttir. Örneğin Şekil 2.1'de sıcaklık için beş tane dilsel etiket tanımlanmıştır (Negatif Büyük, Negatif Orta, Sıfıra Yakın, Pozitif Orta, Pozitif Büyük). Ayrıca üçgen şeklinde üyelik fonksiyonları kullanılmıştır. Üyelik fonksiyonlarını çizerken üçgenlerin merkezlerinin nerede olacağı, taban genişliklerinin ne kadar olacağı, ne kadar üst üste binecekleri gibi kararlar önemlidir. Tip-2 bulanık küme ve üyelik fonksiyonlarının belirsizliği modelleme özelliğinden dolayı bu kararların çoğuna ihtiyaç duyulmamaktadır.



Şekil 2.1 Tip-1 üyelik fonksiyonları

Elemanların üyeliği 0 veya 1 olarak belirlenemediğinde tip-1 bulanık kümeler kullanılır. Benzer şekilde koşullar çok bulanıksa yani üyelik derecesini $[0, 1]$ arasında belirlemede problem yaşıyorsa, tip-2 bulanık kümeler kullanılır. (Bu fikir ilk kez 1975 yılında Zadeh tarafından ileri sürülmüştür) [2]. Ancak bu görüş tip-2 kümeleri kullanmak için olağanüstü bulanık koşullara sahip olunması gerektiği anlamında değildir. Eğer belirsizliğin tam değeri belirlenemiyorsa (üyelik derecesi net olarak belirlenemiyorsa), tip-1 yerine tip-2 bulanık kümeleri kullanmak daha doğru olacaktır. Bu şekilde düşünüldüğünde, belirsizliği sonlu tipte bir bulanık kümenin temsil edemeyeceği söylenebilir. Bu durumda, belirsizliği tamamen göstermek için tip- ∞ bulanık kümesini kullanma ihtiyacı duyulur. Ancak pratikte bu mümkün değildir. Bu yüzden bazı sonlu tip bulanık kümeler kullanılır.

Şekil 2.2 (a)'daki tip-1 üyelik fonksiyonu üçgenin solundan ve sağından çeşitli miktarlarda noktaları kaydırılarak bulanıklaştırılmış olsun. Şekil 2.2 (b)'ye bakılırsa x 'de dikey çizginin bulanık kısımla kesiştiği noktalarda üyelik fonksiyonu birden fazla değer almıştır. Bu değerler aynı ağırlığa sahip olmak zorunda değildir ve bu noktalara bir genlik dağılımı uygulanabilir. Bu bütün $x \in X$ için yapılırsa tip-2 bulanık kümeleri tanımlayan üç boyutlu üyelik fonksiyonu yani tip-2 üyelik fonksiyonu elde edilir.



Şekil 2.2 (a) Tip-1 üyelik fonksiyonu (b) Bulanıklaştırılmış tip-1 üyelik fonksiyonu (c) FOU(Belirsizliğin Ayak İzi)

Bir tip-2 bulanık kümesi $\tilde{A}$ ile gösterilir ve $x \in X$, $u \in J_x \subseteq [0,1]$ olmak üzere tip-2 üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ şeklinde tanımlanır, yani

$$\tilde{A} = \{((x,u), \mu_{\tilde{A}}(x,u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1] \} \quad 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x,u) \leq 1 \quad (2-2)$$

olarak ifade edilir.

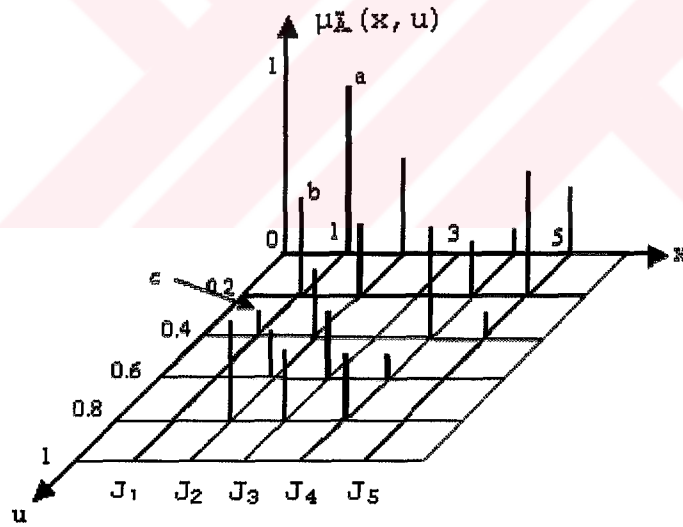
$\tilde{A}$ ayrıca

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x,u) / (x,u) \quad J_x \subseteq [0,1] \quad (2-3)$$

şeklinde de gösterilebilir.

Denklem (2-3)'teki $\int \int$ x ve u'nun birleşimini gösterir.

Örnek 2-1: Şekil 2.3 ayrık x ve u için $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ 'i gösterir. Burada $X=\{1,2,3,4,5\}$ $U=\{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$ $J_1=\{0,0.2,0.4\}$ $J_2=\{0,0.2,0.4,0.6,0.8\}$ $J_3=\{0.6,0.8\}$ $J_4=J_2$ $J_5=J_1$ dir. Bu değerler $\mu_{\tilde{A}}(x,u) \neq 0$ olduğu durumlar için verilmiştir. Her dikey çizgi (x,u) çiftine karşılık gelen $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ değerini temsil eder.



Şekil 2.3 Örnek bir ayrık tip-2 üyelik fonksiyonu

Denklem (2-2)'deki $\forall u \in J_x \subseteq [0,1]$ sınırlaması tip-1 üyelik fonksiyonundaki $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ ile aynıdır. Yani bulanıklaştırma olmazsa, $u = \mu_A(x)$ ve $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ şartıyla tip-2 üyelik fonksiyonu tip-1 üyelik fonksiyonuna indirgenebilir.

Tanım 2-1: x 'in her değerinde $(x = x')$, u ve $\mu_{\tilde{A}}(x', u)$ eksenleri $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ 'in dikey parçasıdır. $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ 'in dikey parçası ikincil üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} f_{x'}(u) / u \quad J_{x'} \subseteq [0,1], \quad 0 \leq f_{x'}(u) \leq 1 \quad (2-4)$$

Tip-1 bulanık küme olan ikincil üyelik fonksiyonu, ikincil küme olarak da gösterilebilir. Bu görüşe dayanarak tip-2 bulanık küme tüm ikincil kümelerin birleşimi olarak

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid \forall x \in X \} \quad (2-5)$$

veya

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x \quad J_x \subseteq [0,1] \quad (2-6)$$

şekillerinde de tanımlanabilir [8].

Tanım 2-2: İkincil üyelik fonksiyonunun domeni x 'in birincil üyeliği olarak adlandırılır. Denklem (2-6)'da $\forall x \in X$ için $J_x \subseteq [0,1]$ 'de x 'in birincil üyeliği J_x 'dir.

Tanım 2-3: İkincil üyelik fonksiyonunun genliği ikinci derece (seviye) olarak adlandırılır. Denklem (2-6)'da $f_x(u)$, denklem (2-2)'de $\mu_{\tilde{A}}(x', u')$ ($x' \in X, u' \in J_{x'}$) ikinci derecedir.

Eğer X ve J_x ayrılırsa, denklem (2-6)'nın sağ tarafı

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \sum_{x \in X} \left[\sum_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\sum_{u \in J_{x_i}} f(x_i(u) / u \right] / x_i \\ &= \left[\sum_{k=1}^{M_1} f_{x_1}(u_{1k}) / u_{1k} \right] / x_1 + \dots + \left[\sum_{k=1}^{M_N} f_{x_N}(u_{Nk}) / u_{Nk} \right] / x_N \end{aligned} \quad (2-7)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde x , N değere ve her bir u değeri de M_i değere ayrılmıştır. Eğer ayırma işleminde u_{ik} 'lar eşitse $M_1=M_2=\dots=M_N=M$ olur.

İkincil üyelik fonksiyonlarını tanımlamada çok sayıda seçenek vardır. Genelde ikincil üyelik fonksiyonunun ismi ile tip-2 üyelik fonksiyonunun ismi birlikte kullanılır. Örneğin ikincil üyelik fonksiyonu Gaussian ise $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ Gaussian tip-2 üyelik fonksiyonu olarak söylenir.

Ayrıca tip-1 bulanık kümeler $1/\mu_F(x)/x$ veya $1/\mu_F(x) \quad \forall x \in X$ şeklinde tip-2 bulanık kümeler olarak da gösterilebilir. $1/\mu_F(x)$ 'in anlamı, ikinci derece=1 olduğunda ikincil üyelik fonksiyonunun domeninde ($\mu_F(x)$ birincil üyeliğinde) sadece bir değere sahip olmasıdır.

Örnek 2-2: Şekil 2.3'den görüldüğü gibi $x=1$ 'de ikincil üyelik fonksiyonu $a/0+b/0.2+c/0.4$, birincil üyelik değerleri $u=0,0.2,0.4$ ve ikinci dereceleri sırasıyla a,b,c 'dir.

Örnek 2-3: $\forall x \in X$ için $f_x(u) = 1, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]$ ise ikincil üyelik fonksiyonu aralıklı (interval) kümedir. Aralıklı ikincil üyelik fonksiyonları x 'in birincil üyeliğindeki belirsizliği yansıtır.

Aralıklı kümeler alan aralığıyla $[l,r]$ veya $[c-s,c+s]$ şeklinde ifade edilir.

$$l \rightarrow \text{sol bitiş noktası} \quad c=(l+r)/2$$

$$r \rightarrow \text{sağ bitiş noktası} \quad s=(r-l)/2$$

Tanım 2-4: Tip-2 bulanık kümenin her ikincil üyelik fonksiyonunun, 1 değerine eşit sadece bir tane ikinci derecesi olduğu farz edilirse, temel (principal) üyelik fonksiyonu tüm bu noktaların birleşimi olarak kabul edilir.

$$\mu_{\text{principal}}(x) = \int_{x \in X} u / x, \quad f_x(u) = 1 \quad (2-8)$$

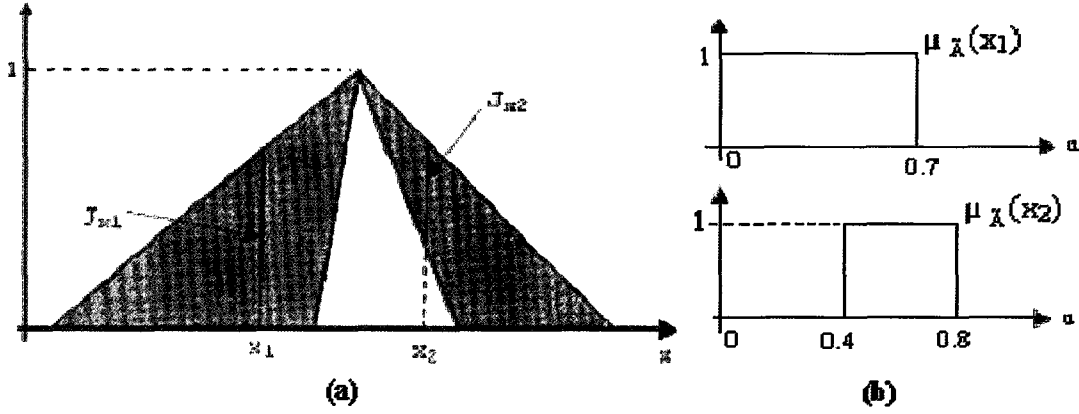
Aralıklı ikincil üyelik fonksiyonları için temel üyelik fonksiyonu ise, birincil üyeliklerin orta noktalarının birleşimi olarak tanımlanabilir.

Tanım 2-5: $\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin birincil üyeliğindeki belirsizlik, *Belirsizliğin Ayakizi* (Footprint of Uncertainty, FOU) olarak adlandırdığımız sınırlı bir bölgeden oluşmuştur. FOU, tüm birincil üyeliklerin birleşimidir.

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (2-9)$$

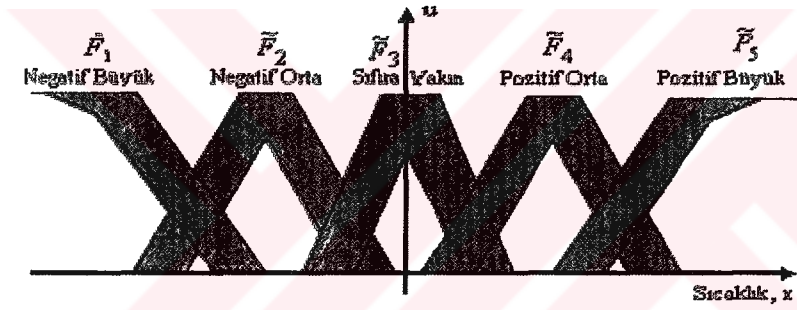
FOU çok kullanışlıdır, çünkü FOU sadece tip-2 üyelik fonksiyonuna özgü doğal belirsizliklere dikkat çekmez aynı zamanda tip-2 üyelik fonksiyonunun tüm ikinci dereceleri için çok uygun tanımlama olanağı sağlar.

Örnek 2-4: Şekil 2.4'deki taralı bölge bir FOU örneğidir. Taralı FOU bölgesi aralıklı tip-2 bulanık kümeyi ($\mu_{\tilde{A}}(x,u)$) göstermektedir. Ayrıca şekil 2.4 iki noktada birincil ve ikincil üyelik fonksiyonlarını da göstermektedir.



Şekil 2.4 (a) Tip-2 bulanık kümesi için FOU (taralı bölge), J_{x_1} ve J_{x_2} birincil üyelikleri ile $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$ ve $\mu_{\tilde{A}}(x_2)$ ikincil üyelik fonksiyonlarının x_1 ve x_2 noktalarında gösterimi **(b)** Aralıklı küme olan ikincil üyelik fonksiyonları

Şekil 2.5'te şekil 2.1'in belirsiz versiyonu görülmektedir.



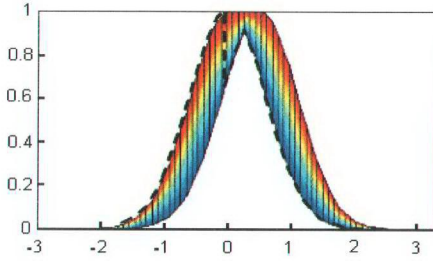
Şekil 2.5 Şekil 2.1'deki üyelik fonksiyonları için FOU'lar

Tanım 2-6: $\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin, gömülü (iç içe girmiş) kümeler olarak adlandıracağımız $\tilde{A}_e$ tip-2 bulanık kümelerinin birleşiminden (toplanarak bir araya getirilmesinden) oluştuğu düşünülebilir [2]. Burada tip-2 bulanık küme

$$\tilde{A}_e = \int_{x \in X} [f_x(\theta) / \theta] / x \quad \theta \in J_x \subseteq U = [0,1] \quad (2-10)$$

olarak ifade edilir.

$\tilde{A}_e$, x 'in her değerinde sadece bir tane birincil üyeliğe (θ) sahiptir. $f_x(\theta)$ ikinci derece ve $\theta \in J_x$ 'dir. $\tilde{A}_e$ üyelik fonksiyonunun çizimi üç boyutlu kıvrımlı bir düzleme benzer. Şekil 2.6'da aralıklı tip-2 kümesi için iç içe girmiş tip-2 kümesi örnek gösterilmiştir.



Şekil 2.6 Tip-2 bulanık kümesi içinde gömülü tip-1 küme örneği (ince çizgi)

Ayrık X ve U için, $\tilde{A}_e$ iç içe girmiş tip-2 kümesi N elemanlıdır ve $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_N}$ 'den $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ olarak $f_{x_1}(\theta_1), f_{x_2}(\theta_1), \dots, f_{x_N}(\theta_N)$ ikinci derecelerine sahip bir eleman içermektedir.

$$\tilde{A}_e = \sum_{i=1}^N [f_{x_i}(\theta_i) / \theta_i] \bigg/ x_i \quad \theta_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1] \quad (2-11)$$

$\tilde{A}$ içine yerleştirilmiş $\tilde{A}_e$ kümesi $\prod_{i=1}^N M_i \tilde{A}_e$ 'nin toplamıdır.

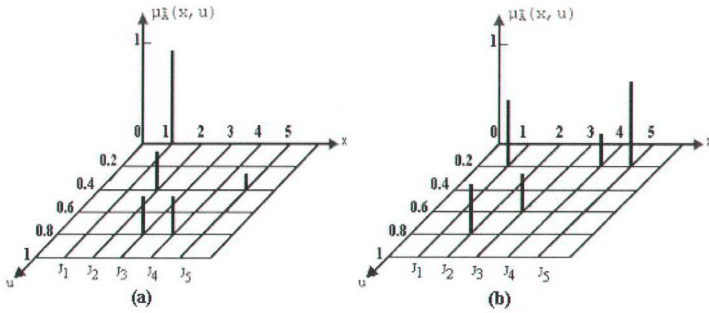
Örnek 2-5: Şekil 2.7, şekil 2.6'da gösterilen tip-2 üyelik fonksiyonu için 450 iç içe girmiş tip-2 kümeden iki tanesini göstermektedir.

Ayrık X ve U için, iç içe girmiş tip-1 kümesi A_e

$$A_e = \int_{x \in X} \theta / x \quad \theta \in J_x \subseteq U = [0,1] \quad (2-12)$$

olarak ifade edilir.

A_e kümesi denklem (2-10)'daki $\tilde{A}_e$ kümesinin tüm birincil üyeliklerinin birleşimidir ve çok sayıda A_e vardır.



Şekil 2.7 İç içe girmiş tip-2 kümeler örneği

Ayrık X ve U için, iç içe girmiş tip-1 kümesi A_e , $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_N}$ 'in her birinden N elemana sahiptir $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$.

$$A_e = \sum_{i=1}^N \theta_i / x_i \quad \theta_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1] \quad (2-13)$$

A_e kümesi denklem (2-11)'deki $\tilde{A}_e$ kümesinin tüm birincil üyeliklerinin birleşimidir ve $\prod_{i=1}^N M_i A_e$ 'nin toplamı kadardır.

Örnek 2-6: Şekil 2.7'de gösterilen iki iç içe girmiş tip-2 kümenin, tip-1 kümelerle birleştirilmiş şekli $0/1+0.4/2+0.8/3+0.8/4+0.4/5$ ve $0.2/1+0.8/2+0.6/3+0.2/4+0.2/5$ 'dir.

Tanım 2-7: FOU, üst ve alt üyelik fonksiyonları olarak adlandırılan fonksiyonlarla da tanımlanabilir. Üst ve alt üyelik fonksiyonları $\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin FOU'sının sınırları olan iki tane tip-1 üyelik fonksiyonudur. Üst üyelik fonksiyonu $FOU(\tilde{A})$ 'nin üst sınırır ve $\forall x \in X$ için $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde gösterilir. Alt üyelik fonksiyonu $FOU(\tilde{A})$ 'nin alt sınırır ve $\forall x \in X$ için $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde gösterilir.

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \overline{FOU(\tilde{A})} \quad \forall x \in X \text{ ve } \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \underline{FOU(\tilde{A})} \quad \forall x \in X \quad (2-14)$$

İkinci üyelik fonksiyonunun alanı $[0,1]$ arasında olması gerektiğinden üst ve alt üyelik fonksiyonları her zaman vardır.

Denklem (2-9)'dan $\overline{FOU(\tilde{A})} = \bigcup_{x \in X} \overline{J_x}$ ve $\underline{FOU(\tilde{A})} = \bigcup_{x \in X} \underline{J_x}$ olur. $\overline{J_x}$ ve $\underline{J_x}$ 'in

üst ve alt sınırlarını gösterir. Bundan dolayı $\forall x \in X$ için $\overline{\mu_{\tilde{A}}}(x) = \overline{J_x}$ ve $\underline{\mu_{\tilde{A}}}(x) = \underline{J_x}$ 'dir.

Denklem (2-6), alt ve üst üyelik fonksiyonları ile

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x, u) &= \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x \\ &= \int_{x \in X} \left[\int_{u \in [\underline{\mu_{\tilde{A}}}(x), \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x)]} f_x(u) / u \right] / x \end{aligned} \quad (2-15)$$

şeklinde ifade edilebilir.

İkincil üyelik fonksiyonları aralıklı küme ise denklem (2-15),

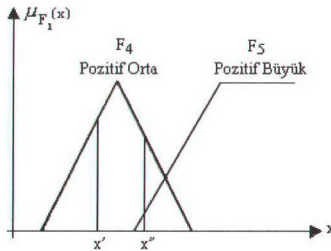
$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} 1/u \right] / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in [\underline{\mu_{\tilde{A}}}(x), \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x)]} 1/u \right] / x \quad (2-16)$$

olarak gösterilir.

Tip-2 üyelik fonksiyonları için dilsel etiketler, alt ve üst üyelik fonksiyonlarından faydalanılarak ifade edilir. Şekil 2.8'de gösterilen $x = x'$ elemanında tip-1 durumu incelendiğinde, $x = x'$ durumunda bir belirsizlik yoktur. Çünkü x 'in bu değeri sadece F_4 =Medium Positive (Pozitif Orta) bulanık kümesinde değer almıştır. Ancak $x = x''$ elemanı, F_5 =Very Positive (Pozitif Büyük) ve F_4 =Medium Positive (Pozitif Orta) kümelerinin ikisinde de değer aldığından $x = x''$ elemanında durum farklıdır. Konuşma sırasında bu durum ifade edilirken, F_5 'in bu kadar üyesi F_4 'ün bu kadar üyesidir denilemez. Bunun yerine hangisinin daha fazla üyesi ise o üyelik fonksiyonuyla söylenir.

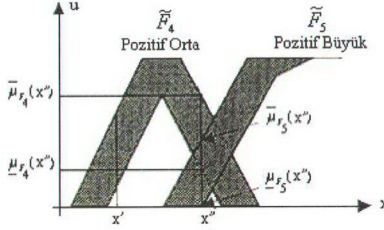
Verilen P tane bulanık küme için;

$$L(x') = \arg \max_{\forall F_i} [\mu_{F_1}(x'), \mu_{F_2}(x'), \dots, \mu_{F_P}(x')] \text{ 'dir.} \quad (2-17)$$



Şekil 2.8 Tip-1 bulanık kümeler için dilsel etiketler

Aynı şekilde şekil 2.9'da verilen $x = x'$ elemanında tip-2 durumu incelendiğinde, $x = x'$ durumunda yine bir sorun yoktur, dilsel etiket verilebilir. $x = x''$ iki bulanık kümenin de üyesidir ve bu şekilde tanımlamak zordur. Tanımlama için şöyle bir yaklaşım izlenmiştir:



Şekil 2.9 Tip-2 bulanık kümeler için dilsel etiketler

$\mu_{\tilde{F}_4}(x, u)$ ve $\mu_{\tilde{F}_5}(x, u)$ tip-2 üyelik fonksiyonlarının FOU'ları sırasıyla $FOU(\tilde{F}_4)$ ve $FOU(\tilde{F}_5)$ şeklinde tanımlanır. $\overline{\mu}_{\tilde{F}_4}$ ve $\underline{\mu}_{\tilde{F}_4}$ $\tilde{F}_4$ 'ün, $\overline{\mu}_{\tilde{F}_5}$ ve $\underline{\mu}_{\tilde{F}_5}$ $\tilde{F}_5$ 'in üst ve alt fonksiyonlarıdır. $x = x''$ dikey çizgisinin, $\tilde{F}_4$ 'ün FOU'sı ile kesiştiği kısım incelenerek $f_{x''}(u) \forall u \in [\underline{\mu}_{\tilde{F}_4}(x''), \overline{\mu}_{\tilde{F}_4}(x'')]$ ilişkisi kurulursa ikinci derece üyelik fonksiyonunun ağırlık merkezi $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_4)$ ile gösterilir. Aynı şekilde $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_5)$ de bulunur ve $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_4)$ ve $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_5)$ karşılaştırılır. Eğer $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_4) > f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_5)$ ise $x'' \tilde{F}_4$ 'ün, değilse $\tilde{F}_5$ 'in üyesidir denir.

Verilen P tane tip-2 bulanık kümesi için;

$$L(x') = \arg \max_{\forall \tilde{F}_i} [f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_1), f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_2), \dots, f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_p)] \text{ 'dir.} \quad (2-18)$$

Örnek 2-7: Aralıklı ikincil üyelik fonksiyonları için $f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_i)$ 'i bulmak kolaydır.

$$f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_i) = \frac{1}{2} [\overline{\mu}_{\tilde{F}_i}(x') + \underline{\mu}_{\tilde{F}_i}(x')] \quad (2-19)$$

Tip-2 bulanık kümeler tip-1 bulanık kümelere indirgenildiğinde, $\overline{\mu}_{\tilde{F}_i}(x') = \underline{\mu}_{\tilde{F}_i}(x')$ ise denklem (2-18) denklem (2-17)'ye indirgenir.

Tanım 2-8: Bulanık kümeler birden fazla değişkenle de tanımlanabilir. Birden fazla değişkenle tanımlanan çok değişkenli üyelik fonksiyonları, tip-1 ve tip-2 üyelik fonksiyonları için ayrı ayrı incelenebilir.

• **Çok Değişkenli Tip-1 Üyelik Fonksiyonları:** x_1 ve x_2 iki değişkeni için A_x tip-1 bulanık kümesinde kartezyen çarpımı $(X_1 \times X_2)$,

$$A_x = \{((x_1, x_2), \mu_{A_x}(x_1, x_2)) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \{(x, \mu_{A_x}(x)) \mid x \in X_1 \times X_2\} \quad (2-20)$$

olarak tanımlanır.

$\mu_{A_x}(x_1, x_2)$ x_1 ve x_2 'nin genel fonksiyonudur. A_x $X_1 \times X_2$ sürekli ise,

$$A_x = \int_{x_1 \in X_1} \int_{x_2 \in X_2} \mu_{A_x}(x_1, x_2) / (x_1, x_2) \quad (2-21)$$

$X_1 \times X_2$ ayrık ise,

$$A_x = \sum_{x_1 \in X_1} \sum_{x_2 \in X_2} \mu_{A_x}(x_1, x_2) / (x_1, x_2) \quad (2-22)$$

olarak yazılabilir.

$\mu_{A_x}(x_1, x_2)$ üyelik fonksiyonu ayrılabilirse,

$$\mu_{A_x}(x_1, x_2) = \mu_{A_{x_1}}(x_1) \star \mu_{A_{x_2}}(x_2) \quad (2-23)$$

değişkenlerin sayısı ikiden fazla ve üyelik fonksiyonu ayrılabilirse,

$$\mu_{A_x}(x) = \mu_{A_{x_1}}(x_1) \star \mu_{A_{x_2}}(x_2) \star \dots \star \mu_{A_{x_p}}(x_p) \quad (2-24)$$

yada

$$\mu_{A_x}(x) = \mu_{X_1}(x_1) \star \mu_{X_2}(x_2) \star \dots \star \mu_{X_p}(x_p) \quad (2-25)$$

şekillerinde ifade edilir.

$\star$ minimum veya çarpma şeklinde t-norm'u göstermektedir.

• **Çok Değişkenli Tip-2 Üyelik Fonksiyonları:** $\tilde{A}_x$ $X_1 \times X_2$ sürekli ise,

$$\tilde{A}_x = \int_{x_1 \in X_1} \int_{x_2 \in X_2} \mu_{\tilde{A}_x}(x_1, x_2) / (x_1, x_2) \quad (2-26)$$

olarak tanımlanır.

İkincil üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}_x}(x_1, x_2)$ ayrılabilir ise,

$$\mu_{\tilde{A}_x}(x_1, x_2) = \mu_{\tilde{A}_{x_1}}(x_1) \prod \mu_{\tilde{A}_{x_2}}(x_2) \quad (2-27)$$

değişkenlerin sayısı ikiden fazla ise:

$$\mu_{\tilde{A}_r}(x) = \mu_{\tilde{A}_{r1}}(x_1) \prod \mu_{\tilde{A}_{r2}}(x_2) \prod \dots \prod \mu_{\tilde{A}_{rp}}(x_p) \quad (2-28)$$

yada

$$\mu_{\tilde{A}_r}(x) = \mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \prod \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \prod \dots \prod \mu_{\tilde{A}_p}(x_p) \quad (2-29)$$

şeklinde ifade edilir.

$\prod$, tip-2 bulanık kümelerin kesişimine denk gelen buluşma (meet) işlemini gösterir.

2.2. Tip-2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

Üyelik fonksiyonları $\mu_{F_1}(y)$ ve $\mu_{F_2}(y)$ ile tanımlı F_1 ve F_2 tip-1 bulanık kümeleri ile maximum t-norm ve minumum t-norm kullanarak yapılan birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri,

$$F_1 = \int_{y \in Y} \mu_{F_1}(y) / y \quad (2-30)$$

$$F_2 = \int_{y \in Y} \mu_{F_2}(y) / y \quad (2-31)$$

$$\mu_{F_1 \cup F_2}(y) = \max[\mu_{F_1}(y), \mu_{F_2}(y)] \quad \forall y \in Y \quad (2-32)$$

$$\mu_{F_1 \cap F_2}(y) = \min[\mu_{F_1}(y), \mu_{F_2}(y)] \quad \forall y \in Y \quad (2-33)$$

$$\mu_{\bar{F}_1}(y) = 1 - \mu_{F_1}(y) \quad \forall y \in Y \quad (2-34)$$

$$\mu_{\bar{F}_2}(y) = 1 - \mu_{F_2}(y) \quad \forall y \in Y \quad (2-35)$$

şeklinde ifade edilir [2-4].

Cebirsel çarpma da, diğer bir t-norm işlemidir. Genellikle bulanık kümelerin mühendislik uygulamalarında ve lojikte kullanılır.

$$\mu_{F_1 \cap F_2}(y) = \mu_{F_1}(y) \times \mu_{F_2}(y) \quad \forall y \in Y \quad (2-36)$$

Genişleme İlkesi: Zadeh'in Genişleme İlkesi tip-2 bulanık kümelerin birleşim, kesişim ve tümleyen hesabında kullanılan bir araçtır [9].

$A_1, A_2, \dots, A_r$ sırasıyla $X_1, X_2, \dots, X_r$ 'de tip-1 bulanık kümeler ve $B = f(A_1, A_2, \dots, A_r)$ olsun. Zadeh'in Genişleme İlkesine göre:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)\} & \text{'dir.} \\ 0 & \text{if } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (2-37)$$

$y = f(x_1, \dots, x_r)$ olduğundan, $f^{-1}(y)$ $x_1 \in X_1, \dots, x_r \in X_r$ noktalarının kümesini gösterir.

Denklem (2-37)'i elde etmek için önce $y = f(x_1, \dots, x_r)$ için $(x_1, \dots, x_r)$ değerleri sonra da $\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)$ ve $\min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)\}$ değerleri bulunmalıdır. Eğer $(x_1, \dots, x_r)$ 'den oluşan birden fazla küme $y = f(x_1, \dots, x_r)$ 'yi sağlarsa, bu prosedür diğerleri için de tekrarlanır ve $\mu_B(y)$ için minimaların en büyüğü seçilir.

Zadeh'in Genişleme İlkeleri minimum t-norm ve maximum t-norm'u kullanarak tanımlanmıştır. $f(A_1, \dots, A_r)$ 'yi bulmak için çarpma, toplama işlemleri kullanılmamaktadır. Bunun yerine doğrudan denklem (2-37)'den çıkarılan, birleşim için maximum işlemi ve minimum için de genel t-norm ($\star$) kullanılır.

$$f(A_1, \dots, A_r) = \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_r \in X_r} \mu_{A_1}(x_1) \star \dots \star \mu_{A_r}(x_r) / f(x_1, \dots, x_r) \quad (2-38)$$

2.2.1. Genel Tip-2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

Genel tip-2 bulanık kümelerin teorik ve cebirsel işlemleri için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümeleri,

$$\tilde{A} = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_x \left[\int_{J_x^u} f_x(u) / u \right] / x \quad J_x^u \subseteq [0,1] \quad (2-39)$$

$$\tilde{B} = \int_x \mu_{\tilde{B}}(x) / x = \int_x \left[\int_{J_x^w} g_x(w) / w \right] / x \quad J_x^w \subseteq [0,1] \quad (2-40)$$

şeklinde tanımlanabilir.

2.2.1.1. Teorik İşlemler

Burada $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümelerinin birleşim, kesişim ve tümleyen formülleri verilecektir.

- **Tip-2 Bulanık Kümelerinin Birleşimi**

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümelerinin birleşimi, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümelerinden farklı bir tip-2 bulanık kümedir.

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x, v) = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{v \in J_x^u \subseteq [0,1]} h_x(v) / v \right] / x \quad (2-41)$$

$$\int_{v \in J_x^u \subseteq [0,1]} h_x(v) / v = \varphi \left(\int_{u \in J_x^u} f_x(u) / u, \int_{w \in J_x^w} g_x(w) / w \right) = \varphi(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad (2-42)$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ tip-1 bulanık kümelerdir. φ , ikincil üyelik fonksiyonunun t-conorm fonksiyonudur. t-conorm fonksiyonu olmasının nedeni, denklem (2-32)'den de görüldüğü gibi iki tane tip-1 bulanık kümenin birleşiminin üyelik fonksiyonunun t-conorm'a eşit olmasıdır.

Denklem (2-38)'den,

$$\varphi \left(\int_{u \in J_x^u} f_x(u) / u, \int_{w \in J_x^w} g_x(w) / w \right) = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / \varphi(u, w) \quad (2-43)$$

ve denklem (2-41), (2-43)'den;

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \int_{v \in J_x^u \subseteq [0,1]} h_x(v) / v = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / (u \vee w) \quad x \in X \quad (2-44)$$

olarak bulunur.

Denklemdeki $\star$ minimum veya çarpmayı, $\int \int$ ise $J_x^u \times J_x^w$ 'nin birleşimini gösterir.

Denklem (2-44),

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / v \equiv \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x) \quad x \in X \quad (2-45)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Denklem (2-45)'de $v \equiv u \vee w$ ve $\sqcup$ katılma (join) işlemini gösterir.

• Tip-2 Bulanık Kümelerin Kesişimi

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümelerinin kesişimi $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümelerinden farklı bir tip-2 bulanık kümedir.

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x, v) = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) / x \quad (2-46)$$

$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x)$ denklemi $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x)$ denklemi ile benzer şekilde

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / (u \wedge w) \quad x \in X \quad (2-47)$$

olarak bulunur.

Denklem (2-47),

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / v \equiv \mu_{\tilde{A}}(x) \Pi \mu_{\tilde{B}}(x) \quad x \in X \quad (2-48)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Denklem (2-48)'de $v \equiv u \vee w$ ve Π buluşma işlemini gösterir.

• **Tip-2 Bulanık Kümesinin Tümleyeni**

$\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin tümleyeni, $\tilde{A}$ kümesinden farklı bir tip-2 bulanık kümedir.

$$\tilde{\tilde{A}} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x, v) = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x \quad (2-49)$$

Denklem (2-34) ve (2-38)'den,

$$\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = \int_{u \in J_x^u} f_x(u) / (1 - u) \equiv \neg \mu_{\tilde{A}}(x) \quad x \in X \quad (2-50)$$

olarak bulunur.

$\neg$ olumsuzluk (negation) işlemini gösterir.

Örnek 3-1: $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5/0 + 0.7/0.1$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x) = 0.3/0.4 + 0.9/0.8$ olsun.

Denklem (2-45)'den

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x) = (0.5/0 + 0.7/0.1) \sqcup (0.3/0.4 + 0.9/0.8)$$

$$= \frac{0.5 \wedge 0.3}{0 \vee 0.4} + \frac{0.5 \wedge 0.9}{0 \vee 0.8} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{0.1 \vee 0.4} + \frac{0.7 \wedge 0.9}{0.1 \vee 0.8}$$

$$= 0.3/0.4 + 0.5/0.8 + 0.3/0.4 + 0.7/0.8$$

$$= \max\{0.3, 0.3\}/0.4 + \max\{0.5, 0.7\}/0.8$$

$$= 0.3/0.4 + 0.7/0.8$$

Denklem (2-48)'den

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \Pi \mu_{\tilde{B}}(x) = (0.5/0 + 0.7/0.1) \Pi (0.3/0.4 + 0.9/0.8)$$

$$= \frac{0.5 \wedge 0.3}{0 \wedge 0.4} + \frac{0.5 \wedge 0.9}{0 \wedge 0.8} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{0.1 \wedge 0.4} + \frac{0.7 \wedge 0.9}{0.1 \wedge 0.8}$$

$$= 0.3/0 + 0.5/0 + 0.3/0.1 + 0.7/0.1$$

$$= \max\{0.3, 0.5\}/0 + \max\{0.3, 0.7\}/0.1$$

$$=0.5/0+0.7/0.1$$

Denklem (2-50)'den

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \neg\mu_{\bar{A}}(x) = 0.5/(1-0)+0.7/(1-0.1)=0.5/1+0.7/0.9 \text{ olarak bulunur.}$$

2.2.1.2. Cebirsel İşlemler

Çarpma ve toplama gibi cebirsel işlemler genişleme ilkesinden faydalanılarak tanımlanmıştır [10-14].

- **Toplama İşlemi**

F ve G bulanık kümelerinin toplamı,

$$F = \int_{u \in U} f(u) / u \quad G = \int_{w \in W} g(w) / w$$

$$F + G = \int_{u \in U} \int_{w \in W} [f(u) \star g(w)] / (u + w) \quad (2-51)$$

olarak ifade edilir.

★ t-norm minimum veya çarpmayı gösterir.

- **Çarpma İşlemi**

F ve G bulanık kümelerinin çarpımları,

$$F \times G = \int_{u \in U} \int_{w \in W} [f(u) \star g(w)] / (u \times w) \quad (2-52)$$

olarak ifade edilir.

★ t-norm minimum veya çarpmayı gösterir.

2.2.2. Aralıklı Tip-2 bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

Aralıklı tip-2 bulanık kümeler, işlemlerinin kolay olması nedeniyle tip-2 bulanık kümelerden daha çok kullanılırlar [14].

2.2.2.1. Teorik İşlemler

Burada aralıklı tip-2 bulanık kümeler için katılma ve buluşma işlemleri verilecektir.

- **Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Katılma (Join) İşlemi**

F ve G $[l_f, r_f]$, $[l_g, r_g]$ aralığında tanımlı iki aralıklı tip-1 bulanık küme olsun. F ve G arasındaki katılma işlemi, $J_x^u = [l_f, r_f]$ ve $J_x^w = [l_g, r_g]$ olarak belirtilirse,

$$F \sqcup G = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} 1/(u \vee w) \quad (2-53)$$

şeklinde ifade edilir.

$n=k$ ise:

$$F_1 \sqcup F_2 \sqcup \dots \sqcup F_k = \int_{q \in [(I_1 \vee I_2 \vee \dots \vee I_k), (r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_k)]} 1/q \quad (2-54)$$

$n=k+1$ ise:

$$\begin{aligned} F_1 \sqcup F_2 \sqcup \dots \sqcup F_{k+1} &= (F_1 \sqcup F_2 \sqcup \dots \sqcup F_k) \sqcup F_{k+1} \\ &= \left[\int_{q \in [(I_1 \vee I_2 \vee \dots \vee I_k), (r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_k)]} 1/q \right] \sqcup \left[\int_{w \in [I_{k+1}, r_{k+1}]} 1/w \right] \\ &= \left[\int_{g \in [(I_1 \vee I_2 \vee \dots \vee I_k) \vee I_{k+1}, (r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_k) \vee r_{k+1}]} 1/g \right] \\ &= \left[\int_{g \in [(I_1 \vee I_2 \vee \dots \vee I_k \vee I_{k+1}), (r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_k \vee r_{k+1})]} 1/g \right], \text{dir.} \end{aligned} \quad (2-55)$$

- **Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Buluşma (Meet) İşlemi**

F ve G arasındaki buluşma işlemi, $J_x^u = [I_f, r_f]$ ve $J_x^w = [I_g, r_g]$ olarak tanımlanırsa t-norm çarpma işlemi kullanılarak,

$$F \sqcap G = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} (1 \times 1)/(uw) \quad (2-56)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.2.2.2. Cebirsel İşlemler

Aralıklı tip-2 bulanık kümelerin cebirsel işlemleri için toplama ve çarpma işlemleri incelenecektir.

- **Toplama İşlemi**

F, $[I_f, r_f]$ ve G, $[I_g, r_g]$ aralığında tanımlı iki aralıklı tip-1 bulanık küme olsun.

Denklem (2-51) kullanılarak F ve G'nin cebirsel toplamı

$$F + G = \int_{u \in [I_f, r_f]} \int_{w \in [I_g, r_g]} 1 \star 1/(u + w) \quad (2-57)$$

olarak bulunur.

- **Çarpma İşlemi**

Denklem (2-56) çarpma işlemi için geçerlidir.

2.3. Tip-2 Bulanık İlişkiler Ve Bileşimler

$R(A_1, \dots, A_n)$, n tane bulanık olmayan küme $(A_1, \dots, A_n)$ arasındaki ilişkiyi gösterir.

$R(A_1, \dots, A_n)$, $A_1 \times \dots \times A_n$ kartezyen çarpımının alt kümesidir $(R(A_1, \dots, A_n) \subset A_1 \times \dots \times A_n)$.

Bulanık olmayan ilişki,

$$\mu_R(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} 1, & (a_1, \dots, a_n) \in R(A_1, \dots, A_n) \\ 0, & (a_1, \dots, a_n) \notin R(A_1, \dots, A_n) \end{cases} \text{ ise} \quad (2-58)$$

şeklinde gösterilebilir.

$F(A_1, \dots, A_n)$ tip-1 bulanık ilişkisi, $A_1, \dots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpım alanında tanımlı tip-1 bulanık kümedir.

$$F(A_1, \dots, A_n) = \int_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \mu_F(a_1, a_2, \dots, a_n) / (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad a_i \in A_i \quad (2-59)$$

$\tilde{F}(A_1, \dots, A_n)$ tip-2 bulanık ilişkisi, $A_1, \dots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpım alanında tanımlı tip-2 bulanık kümedir.

$$\tilde{F}(A_1, \dots, A_n) = \int_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \mu_{\tilde{F}}(a_1, a_2, \dots, a_n) / (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad a_i \in A_i \quad (2-60)$$

2.31. Aynı Çarpım Uzayında İlişki Ve Bileşimler

$\tilde{R}(u, v)$ ve $\tilde{S}(u, v)$ aynı çarpım uzayında tanımlı iki tip-2 bulanık ilişkisi olsun.

$\tilde{R}(u, v)$ ve $\tilde{S}(u, v)$ 'nin elemanları tip-1 bulanık kümelerdir.

$$\tilde{R}(u, v) = \int_{U \times V} \mu_{\tilde{R}}(u, v) / (u, v) = \int_{U \times V} \left[\int_{\alpha \in J_{(u,v)}^\alpha} r_{(u,v)}(\alpha) / \alpha \right] / (u, v) \quad (2-61)$$

$$\tilde{S}(u, v) = \int_{U \times V} \mu_{\tilde{S}}(u, v) / (u, v) = \int_{U \times V} \left[\int_{\beta \in J_{(u,v)}^\beta} s_{(u,v)}(\beta) / \beta \right] / (u, v) \quad (2-62)$$

$$(J_{(u,v)}^\alpha, J_{(u,v)}^\beta \subseteq [0, 1])$$

Denklem (2-45) ve (2-48)'den,

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{R} \cup \tilde{S}}(u, v) &= \mu_{\tilde{R}}(u, v) \sqcup \mu_{\tilde{S}}(u, v) \\ &= \int_{\alpha \in J_{(u,v)}^\alpha} \int_{\beta \in J_{(u,v)}^\beta} r_{(u,v)}(\alpha) / \alpha \star s_{(u,v)}(\beta) / (\alpha \vee \beta) \quad \forall (u, v) \in U \times V \end{aligned} \quad (2-63)$$

ve

$$\mu_{\tilde{R} \cap \tilde{S}}(u, v) = \mu_{\tilde{R}}(u, v) \sqcap \mu_{\tilde{S}}(u, v)$$

$$= \int_{\alpha \in J_{(u,v)}^a} \int_{\beta \in J_{(u,v)}^b} r_{(u,v)}(\alpha) / \alpha \star s_{(u,v)}(\beta) / (\alpha \wedge \beta) \quad \forall (u,v) \in U \times V \quad (2-64)$$

denklemleri elde edilir.

2.3.2. Farklı Çarpım Uzayında İlişki Ve Bileşimler

Ortak kümeyi paylaşan iki farklı çarpım uzayı $U \times V$ ve $V' \times W$ 'yi inceleyelim. $R(U,V)$ ve $S(U,V)$ bu alanlarda iki ilişki olsun. Bu ilişkilerin bileşimi, $(v,w) \in S$ ve $(u,v) \in R$ ise $U \times W$ $T(U,W)$ 'nin alt kümesidir şeklinde tanımlanmıştır $(u,w \in T)$.

Bu maximum-minimum, maximum-çarpım yada sup-star bileşimi ile ifade edilebilir. $\star$ uygun t-normu gösterir.

$$\mu_{R \circ S}(u,w) = \sup_{v \in V} [\mu_R(u,v) \star \mu_S(v,w)] \quad u \in U, w \in W \quad (2-65)$$

Örneğin R ve S iki ilişki olsun. En az bir $v \in V$ için $\mu_R(u,v)=1$ ve $\mu_S(u,v)=1$ ise (u,w) çiftinin üyeliği 1'e eşittir. Bu durum sup-star bileşiminin 1'e eşit olmasına denk gelir.

Bulanık alana girdiğimizde, kümelerin üyelikleri 0 veya 1'den ziyade $[0,1]$ aralığındadır.

Eğer R ve S $U \times W$ ve $V \times W$ 'de iki tip-1 bulanık ilişki ve en az bir $v \in V$ için $\mu_R(u,v) \neq 0$ ve $\mu_S(u,v) \neq 0$ ise (u,w) çiftinin üyeliği sıfır değildir.

Eğer $\tilde{R}$ ve $\tilde{S}$ ve $V \times W$ 'de iki tip-2 bulanık ilişki ve en az bir $v \in V$ için $\mu_{\tilde{R}}(u,v) \neq 1/0$ ve $\mu_{\tilde{S}}(u,v) \neq 1/0$ ise (u,w) çiftinin üyeliği sıfır değildir. Bu durum, genişletilmiş sup-star bileşiminin

$$\mu_{R \circ S}(u,w) = \sqcup_{v \in V} [\mu_R(u,v) \sqcap \mu_S(v,w)] \quad u \in U, w \in W \quad (2-66)$$

denklemleri ifade edilebilir.

2.3.3. Bulanık Kümelerin Kartezyen Çarpımı

Tip-1 bulanık kümelerin kartezyen çarpımı,

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \star \mu_{A_2}(x_2) \star \dots \star \mu_{A_n}(x_n) \quad (2-67)$$

denklemleri ile tip-2 bulanık kümelerin kartezyen çarpımı,

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \sqcap \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \sqcap \dots \sqcap \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \quad (2-68)$$

denklemleri ifade edilir.

(2-67) ve (2-68) denklemlerinde $(x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n)$ için Π buluşma, $\star$ t-norm (minimum veya çarpma) işlemini gösterir.

2.3.4. İma İşlemi

Tip-2 bulanık sistemlerin kural yapısı, tip-1 bulanık sistemlerden farklı değildir. Sadece tip-1 bulanık kümeler yerine tip-2 bulanık kümeler kullanılmaktadır.

$$R^l : IF \ x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^l \text{ and } x_2 \text{ is } \tilde{F}_2^l \text{ and...and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^l \text{ THEN } y \text{ is } \tilde{G}^l \quad (2-69)$$

$$R^l : \tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l = \tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l \quad l = 1, \dots, M \quad (2-70)$$

Tip-1 ima işlemi, tip-2 ima işlemi için genelleştirilirse:

$$\begin{aligned} \mu_{R^l}(x, y) &= \mu_{\tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l}(x, y) = \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \Pi \dots \Pi \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \Pi \mu_{\tilde{G}^l}(y) \\ &= [\prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i)] \Pi \mu_{\tilde{G}^l}(y) \end{aligned} \quad (2-71)$$

şeklinde ifade edilir.

2.4. Tip-2 Bulanık Kümelerin Ağırlık Merkezi: Tip İndirgeme

Tip-2 bulanık mantık sistemin işlevini tam olarak yerine getirmesi için tip-2 bulanık kümenin ağırlık merkezini hesaplayacak tip indirgeyiciye ihtiyaç duyulur [15]. Tip indirgeyici, tip-2 bulanık kümeleri tip-1 bulanık kümelere dönüştürür.

$x \in X$ için alanı N noktaya ayrılmış A tip-1 bulanık kümesinin ağırlık merkezi,

$$c_A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)} \quad (2-72)$$

denklemleri ile bulunur.

Benzer şekilde, x-alanı N noktaya ayrılmış $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ tip-2 bulanık kümesinin ağırlık merkezi ise,

$$C_{\tilde{A}} = \frac{\int \dots \int [f_{x_1}(\theta_1) \star \dots \star f_{x_N}(\theta_N)] \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (2-73)$$

denkleminde hesaplanabilir. Denklem (2-73)'de $C_{\tilde{A}}$ tip-1 bulanık kümedir.

$$a(\theta) \equiv \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (2-74)$$

ve

$$b(\theta) \equiv f_{x_1}(\theta_1) * \dots * f_{x_N}(\theta_N) \quad (2-75)$$

olarak tanımlanırsa:

$$C_{\bar{A}} = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \dots \int_{\theta_N \in J_{x_N}} b(\theta) / a(\theta) \quad (2-76)$$

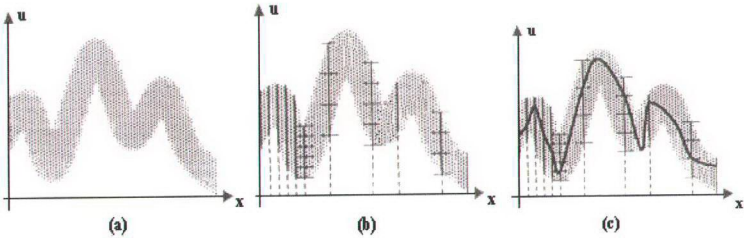
şeklinde ifade edilebilir.

$C_{\bar{A}}$ 'yı hesaplamanın pratik sırası,

- 1) x -alanı N noktaya ayrılır ($x_1, x_2, \dots, x_N$).
- 2) x_j 'nin birincil üyeliği J_{x_j} uygun sayıda noktaya ayrılır (M_j gibi $j=1, \dots, N$).
- 3) Tüm iç içe girmiş tip-1 kümeler birer birer sayılır. (Sonuç $\prod_{j=1}^N M_j$ olacaktır.)
- 4) Denklem (2-76) kullanılarak ağırlık merkezi, denklem (2-74) ve (2-75) kullanılarak α defa (a_k, b_k) hesaplanır ($k=1, 2, \dots, \prod_{j=1}^N M_j$).

olarak belirlenmiştir [16].

Anlatılanlar şekil 2.10'da aralıklı tip-1 kümeler için gösterilmiştir.



Şekil 2.10 Aralıklı tip-2 kümenin ağırlık merkezi hesabı (a) Aralıklı tip-2 küme için FOU (b) Örnek bağımsız değişken ve ayrıklaştırılmış birincil üyelik (c) İç içe girmiş tip-1 küme örneği (Koyu renkli eğri) (FOU'nun alt ve üst fonksiyonları da iç içe girmiş kümelerdendir ve iç içe girmiş tip-1 kümelerin sayısı $\prod_{j=1}^N M_j$ kadardır.)

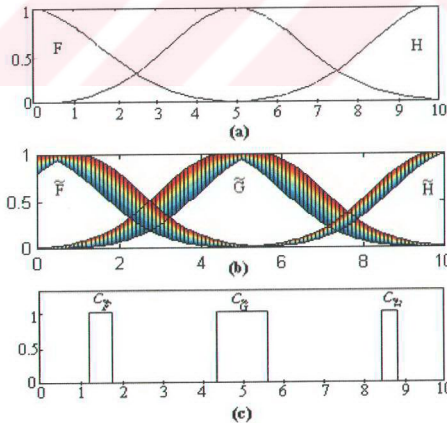
Ancak denklem (2-75)'de t-norm'un hesaplanmasında, teknik problemler (tip-2 bulanık kümenin x-alanı sürekli ve ikincil üyelik fonksiyonu aralıklı küme ise) ortaya çıkabilir. Böyle bir durumdan sakınmak için t-norm işlemi olarak çarpım seçilmelidir.

Aralıklı tip-2 bulanık kümeler için denklem (2-73),

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1 \in J_{N1}} \cdots \int_{\theta_N \in J_{NN}} 1 / \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} = [c_l, c_r] \quad (2-77)$$

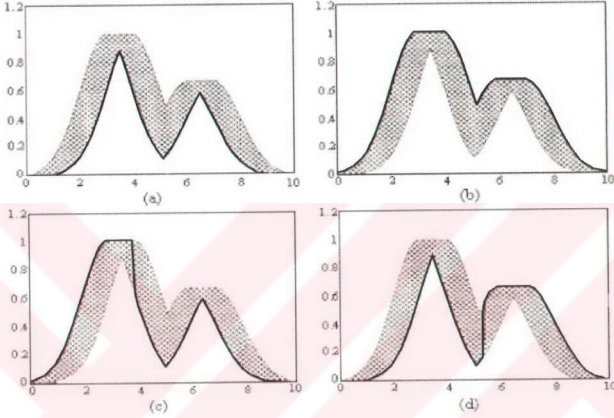
olarak ifade edilir.

Örnek 5-1: Şekil 2.11 (a)'da tip-1 üyelik fonksiyonları gösterilen [0,10] aralığındaki üç ifadeyi birleştirelim. F, G ve H tip-1 üyelik fonksiyonlarının ağırlık merkezleri sırasıyla $c_F = 1.3213$, $c_G = 5$ ve $c_H = 8.6787$ 'dir. Gaussian üyelik fonksiyonlarının ağırlık merkezindeki bu belirsizlikten dolayı Şekil 2.11 (b)'de gösterilen FOU bulunur. Tip-2 bulanık kümelerin ağırlık merkezlerinin aralıkları Şekil 2.11 (c)'de gösterilmiştir. Her ağırlık merkezi üç bulanık küme için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Örneğin $C_{\tilde{F}}$ 'nin aralık kümesi $C_{\tilde{F}} = [1.2058, 1.7617]$ 'dir. Bu ağırlık merkezinin orta noktası c_F 'den farklı olarak 1.4838'dir. Bu belirsizliklere önem verilmediği zaman sonuçlar farklı bulunabilir. Bu gözlem, tip-2 bulanık kümelerin durultulmasında önem taşımaktadır.



Şekil 2.11 (a) Tip-1 üyelik fonksiyonu (b) Tip-2 bölümlerinin FOU'sı (c) Tip-2 üyelik fonksiyonunun ağırlık merkezi

Örnek 5-2: Şekil 2.12 aralıklı tip-2 bulanık kümenin FOU'nı ve 4 tane iç içe girmiş tip-1 bulanık kümesini göstermektedir. İç içe girmiş tip-1 kümelerin ağırlık merkezleri $c_{(a)}=4.6504$, $c_{(b)}=4.6860$, $c_{(c)}=3.9851$ ve $c_{(d)}=5.3695$ 'dir. $c_l=c_{(c)}$ ve $c_r=c_{(d)}$ 'dir. Bu nedenle bu örnek tip-2 üyelik fonksiyonunun ağırlık merkezinin son noktasının, alt ve üst fonksiyonların ağırlık merkezine denk geldiğine dair yanlışlığı gidermelidir.



Şekil 2.12 FOU ve 4 gömülü tip-1 bulanık küme (a) alt üyelik fonksiyonu (b) üst üyelik fonksiyonu (c) c_l değerleri (d) c_r değerleri

2.4.1. Genel Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Tip İndirgeme

$R' : IF \ x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^l \text{ and } x_2 \text{ is } \tilde{F}_2^l \text{ and...and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^l \text{ THEN } y \text{ is } \tilde{G}^l$ tip-2 kuralı yardımıyla tip indirgeyici tüm çıkış kümelerini birleştirir ve tip-2 bulanık kümenin ağırlık merkezini hesaplama işlemini gerçekleştirir.

Belirsizlikler kaybolduğunda, tip-indirgeme kümesi durultma formülüne indirgenir. Bu temel tasarım kriteri, tip-2 bulanık kümesindeki belirsizlik kaybolduğunda tip-1 bulanık kümesine indirgenmelidir kriteri ile de birbirini tutmaktadır.

2.4.1.1. Ağırlık Merkezi Yöntemi ile Tip-İndirgeme

Ağırlık merkezi yöntemini kullanan durultucu t-conorm kullanarak tip-1 kümelerin çıkışı birleştirir, sonra da bu kümenin ağırlık merkezini bulur. Çıkış bulanık kümesini B ile gösterirsek, ağırlık merkezi yöntemini kullanan durultucu,

$$y_c(x) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \mu_B(y_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_B(y_i)} \quad (2-78)$$

olarak ifade edilir. Denklem (2-78)'de B çıkış kümesi N noktaya ayrılmıştır.

Ağırlık merkezi yöntemini kullanan tip-indirgeyici, her kuralın çıkış kümesini bileşim formülünü uygulayarak birleştirir.

$$\bigcup_{l=1}^M \tilde{B}^l \equiv \tilde{B} \text{ ve } \mu_{\tilde{B}}(y) = \bigcup_{l=1}^M \mu_{\tilde{B}^l}(y) \quad \forall y \in Y \quad (2-79)$$

Ağırlık merkezi yöntemini kullanan tip-indirgeyici $\tilde{B}$ 'nin ağırlık merkezini,

$$Y_c(x) = \int_{\theta_1 \in J_{y_1}} \cdots \int_{\theta_N \in J_{y_N}} [f_{y_1}(\theta_1) * \cdots * f_{y_N}(\theta_N)] \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (2-80)$$

denklemleri ile hesaplar.

$Y_c(x)$ 'i hesaplamanın pratik sırası,

1) Denklem (2-79) kullanılarak $\mu_{\tilde{B}}(y)$ hesaplanır.

2) Y-alanı n noktaya ayrılır ($y_1, \dots, y_N$).

3) Her J_{y_i} uygun sayıda noktaya ayrılır (M_i gibi $i = 1, \dots, N$).

4) $\tilde{B}$ 'nin tüm iç içe girmiş kümeleri birer birer sayılır. (Sonuç $\prod_{i=1}^N M_i$ olacaktır.)

5) Denklem (2-80) kullanılarak ağırlık merkezi yöntemini kullanan tip-indirgeme kümesi hesaplanır. İç içe girmiş tüm tip-1 kümelerin merkezi hesaplanıp, üyelik dereceleri atanır.

olarak belirlenmiştir.

Ağırlık merkezi ve üyelik hesaplama işlemleri $\prod_{i=1}^N M_i$ kez tekrarlanır. Bu yüzden işlemler yoğun hesaplamalar içerir.

2.4.1.2. Merkezlerin Toplamı Yöntemi ile Tip-İndirgeme

Merkezlerin toplama yöntemini kullanan durultucu, çıkış tip-1 bulanık kümelerini

$$\mu_B(y) = \sum_{l=1}^M \mu_{B^l}(y) \quad (2-81)$$

denklemindeki gibi toplayarak birleştirdikten sonra kümenin merkezini hesaplar. Durultucunun çıkışı,

$$y_a(x) = \frac{\sum_{l=1}^M c_{B^l} a_{B^l}}{\sum_{l=1}^M a_{B^l}} \quad (2-82)$$

olarak ifade edilir. c_{B^l} l . çıkış kümesinin merkezini ve a_{B^l} kümenin alanını göstermektedir.

Merkezlerin toplama yöntemini kullanan tip-indirgeyici, ikincil üyelik fonksiyonlarını toplayarak tip-2 kural çıkış kümesini birleştirir ve tip-2 kümenin merkezini bulur. Denklem (2-82) bu durultucu için geçerli değildir. $Y_a(x)$ 'i hesaplamadan en doğru yolu, çıkış ikincil üyelik fonksiyonlarının toplamını bulmaktan geçer. $Y_c(x)$ 'i hesaplamak için takip edilen işlem sırası, $Y_a(x)$ için de geçerlidir. Aradaki tek fark 1. adımda $Y_c(x)$ için denklem (2-79) kullanılırken $Y_a(x)$ için denklem (2-81)'in kullanılmasıdır.

$$\mu_{\bar{B}}(y) = \sum_{l=1}^M \mu_{\bar{B}^l}(y) \quad (2-83)$$

2.4.1.3. Yükseklik Yöntemi ile Tip-İndirgeme

Yükseklik yöntemine dayalı durultucu, her kural çıkış kümesini tek çubuklar (singleton) ile çıkış kümesinde maximum üyeliğe sahip noktada yeniler ve tek çubuklar içeren tip-1 kümenin ağırlıklı merkezini hesaplar. Yükseklik yöntemini kullanan durultucunun çıkışı,

$$y_h(x) = \frac{\sum_{l=1}^M y^{-l} \mu_{B^l}(y^{-l})}{\sum_{l=1}^M \mu_{B^l}(y^{-l})} \quad (2-84)$$

olarak ifade edilir.

y^{-l} l . çıkış kümesinde maximum üyeliğe sahip noktadır. (Bu tip noktaların sayısı birden fazla ise ortalamaları y^{-l} olarak alınabilir.) y^{-l} 'nin l . çıkış kümesinde üyelik derecesi ise,

$$\mu_{B^l}(y^{-l}) = \mu_{G^l}(y^{-l}) \star \bigwedge_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i) \quad (2-85)$$

olarak bulunur.

$\star$ ve $\bigwedge$ t-norm'un seçildiğini gösterir.

Tip-2 durumunda ise y^{-l} 'nin üyelik derecesi,

$$\mu_{\bar{B}^l}(y^{-l}) = \mu_{G^l}(y^{-l}) \cap \left[\bigwedge_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i) \right] \quad (2-86)$$

denklemleri ile ifade edilir. $D^l = \mu_{B^l}(y^{-l})$ olarak seçilirse:

$$Y_h(x) = \int_{\theta_1} \int_{\theta_2} \dots \int_{\theta_M} \left[\mu_{D^1}(\theta_1) \star \dots \star \mu_{D^M}(\theta_M) \right] \left/ \frac{\sum_{l=1}^M y^{-l} \theta_l}{\sum_{l=1}^M \theta_l} \right. \text{ olur.} \quad (2-87)$$

$l = 1, \dots, M$ için $\theta_l \in D^l$ 'dir.

$Y_h(x)$ 'i hesaplamanın pratik sırası,

1) $l = 1, \dots, M$ 'ye her çıkış kümesi için y^{-l} seçilir ve $\mu_{B^l}(y^{-l})$ hesaplanır.

2) Her $\mu_{B^l}(y^{-l})$ alanı uygun sayıda noktaya ayrılır. (Ağırlık merkezi yöntemi ile tip-indirgmeden farkı dikey eksenin N yerine M noktaya ayrılmasıdır.)

3) $\theta_l \in \mu_{B^l}(y^{-l})$ olmak üzere $\{\theta_1, \dots, \theta_M\}$ tüm birleşimler sayılır. $\mu_{B^l}(y^{-l})$ N_l noktaya ayrılmışsa $\prod_{j=1}^M N_j$ tane birleşim olacaktır.

4) Denklem (2-87) kullanılarak yüksek tip-indirgeme kümesi bulunur.

olarak belirlenmiştir.

2.4.1.4. Değiştirilmiş Yükseklik Yöntemi ile Tip İndirgeme

Değiştirilmiş yükseklik yöntemi ile durultma işlemi, yükseklik yöntemine çok benzer.

Aradaki fark (2.88) denkleminde de görüldüğü gibi δ^{l^2} değişkenidir. y^{-l} ve $\mu_{B^l}(y^{-l})$ değişkenleri, (2-84) denklemi ile aynı değerleri taşımaktadır.

$$y_{mh}(x) = \frac{\sum_{l=1}^M y^{-l} \mu_{B^l}(y^{-l}) / \delta^{l^2}}{\sum_{l=1}^M \mu_{B^l}(y^{-l}) / \delta^{l^2}} \quad (2.88)$$

Değiştirilmiş yükseklik yöntemini kullanan tip-indirgeyici de yükseklik yöntemini kullanan tip-indirgeyiciden δ^{l^2} değişkeni yönüyle farklıdır. (δ^l , 1. consequent kümesinin temel üyelik fonksiyonunun sigması olarak alınabilir.) Bu tip-indirgeyicinin çıkışı

$$Y_{mh}(x) = \int_{\theta_1 \in J_{y^{-1}}} \dots \int_{\theta_M \in J_{y^{-M}}} \left[f_{y^{-1}}(\theta_1) \star \dots \star f_{y^{-M}}(\theta_M) \right] \left/ \frac{\sum_{l=1}^M y^{-l} \theta_l / \delta^{l^2}}{\sum_{l=1}^M \theta_l / \delta^{l^2}} \right. \quad (2.89)$$

denklemleriyle hesaplanabilir.

2.4.1.5. Kümelerin Merkezi Yöntemi ile Tip İndirgeme

Kümelerin-merkezi yöntemi ile durultma işleminde, her kural çıkış kümesi ağırlık merkezine yerleşmiş singletonlar ile yenilenir ve singletonlar içeren tip-1 kümenin ağırlık merkezi hesaplanır. Çıkış,

$$y_{\cos}(x) = \frac{\sum_{l=1}^M c^l T_{l=1}^p \mu_{F_l^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^M T_{l=1}^p \mu_{F_l^l}(x_i)} \quad (2-90)$$

olarak hesaplanır.

T t-norm seçildiğini ve c^l ise l . çıkış kümesinin ağırlık merkezini gösterir. $l = 1, \dots, M$ için sonuç kümesi simetrik, normal, konveks, $c^l = y^{-l}$ ve $\mu_{G^l}(y^{-l}) = 1$ ise $y_{\cos}(x) = y_h(x)$ 'dir.

Tip-2 durumunda:

$$Y_{\cos}(x) = \frac{\int_{d_l} \cdots \int_{d_M} \int_{e_1} \cdots \int_{e_M} T_{l=1}^M \mu_{C_l}(d_l) \star T_{l=1}^M \mu_{E_l}(e_l)}{\sum_{l=1}^M d_l e_l} \quad (2-91)$$

T ve $\star$ t-norm seçildiğini gösterir. $d_l \in C_l = C_{G^l}$ l . sonuç kümesinin ağırlık merkezidir.

$Y_{\cos}(x)$ 'i hesaplamanın pratik sırası,

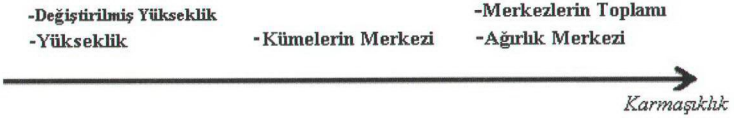
- 1) Y çıkış alanı uygun sayıda noktaya ayrılır ve her sonuç kümesinin ağırlık merkezi C_{G^l} hesaplanır. Bu sonuç ağırlık merkezi kümelerinin sonraki değerleri hesaplanıp ilerde kullanmak için saklanabilir.
- 2) $E^l = \prod_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i)$ bulunur.
- 3) Her C_{G^l} alanı uygun sayıda noktaya ayrılır (M_l gibi $l = 1, 2, \dots, M$).
- 4) Her E_l alanı uygun sayıda noktaya ayrılır (N_l gibi $l = 1, 2, \dots, M$).

5) $d_i \in C_{\tilde{G}^i}$ ve $e_i \in E_i$ olmak üzere $\{c_1, \dots, c_M, e_1, \dots, e_M\}$ tüm birleşimler sayılır.

Birleşimlerin toplam sayısı $\prod_{j=1}^M M_j N_j$ olacaktır.

6) (2-91) denklemi kullanılarak tip-indirgeme kümesi bulunur.

olarak belirlenmiştir.



Şekil 2.13 Tip indirgeme metodlarının hesaplanma güçlüğü

Tip-1 bulanık mantık sistemlerde, yükseklik yöntemi ile durultma iyi sonuçlar verir ve hesaplamalar şekil 2.13 den de görüldüğü gibi daha kolaydır. Tip-2 bulanık mantık sistemlerde, yükseklik yöntemi ile tip indirgeme iyi sonuç vermeyip, kümelerin merkezi yöntemi daha iyi performans gösterebilir.

$$\begin{aligned}
 Y_h(x) &= \int_{\theta_i} \mu_{D^i}(\theta_i) \cdot \frac{y^{-i} \theta_i}{\theta_i} \\
 &= [\sup_{\theta_i} \mu_{D^i}(\theta_i)] / y^{-i} = 1 / y^{-i} = y^{-i} \quad (2-92)
 \end{aligned}$$

Denklem (2-92)'den görüldüğü gibi tek kural oluşturulmuşsa, yüksek tip-indirgeme kümesi tek noktaya düşer. Ancak bu istenen bir durum değildir çünkü çıkışla birleşen belirsizlik yoktur. Bu problemten kurtulmak için kümelerin merkezi tip-indirgeyicisi kullanılır.

2.4.2. Aralıklı Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Tip İndirgeme

Genel tip-2 bulanık mantık sistemlerin tip-indirgeme işlemleri oldukça karmaşıktır. Ancak ikincil üyelik fonksiyonları aralıklı küme olarak seçildiğinde işlemler kolaylaşır. Burada aralıklı tip-2 kümeler için tip-indirgeme yöntemleri gösterilecektir.

2.4.2.1. Ağırlık Merkezi Yöntemi ile Tip İndirgeme

Ağırlık merkezi yöntemini kullanan tip indirgeyici her kuralın çıkış kümesini bileşim formülünü uygulayarak birleştirdiğinde, denklem (2-80) aralıklı kümeler için

$$Y_c(x) = \int_{\theta_1} \cdots \int_{\theta_N} 1 \left/ \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \right. \quad (2-93)$$

olarak ifade edilir.

2.4.2.2. Merkezlerin Toplamı Yöntemi ile Tip-İndirgeme

Aralıklı kümeler için bu yöntemde,

$$Y_a(x) = \int_{\theta_1} \cdots \int_{\theta_N} 1 \left/ \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \right. \quad (2-94)$$

denklemi kullanılır.

2.4.2.3. Yükseklik Yöntemi ile Tip-İndirgeme

Aralıklı kümeler için denklem (2-87),

$$Y_h(x) = \int_{\theta_1} \int_{\theta_2} \cdots \int_{\theta_M} 1 \left/ \frac{\sum_{l=1}^M y^{-l} \theta_l}{\sum_{l=1}^M \theta_l} \right. \quad (2-95)$$

olarak ifade edilir.

2.4.2.4. Değiştirilmiş Yükseklik Yöntemi ile Tip-İndirgeme

Aralıklı kümeler için denklem (2-89),

$$Y_{mh}(x) = \int_{\theta_1} \cdots \int_{\theta_M} \left/ \frac{\sum_{l=1}^M y^{-l} \theta_l / \delta^{l^2}}{\sum_{l=1}^M \theta_l / \delta^{l^2}} \right. \quad (2-96)$$

olarak ifade edilir.

2.4.2.5. Kümelerin Merkezi Yöntemi ile Tip İndirgeme

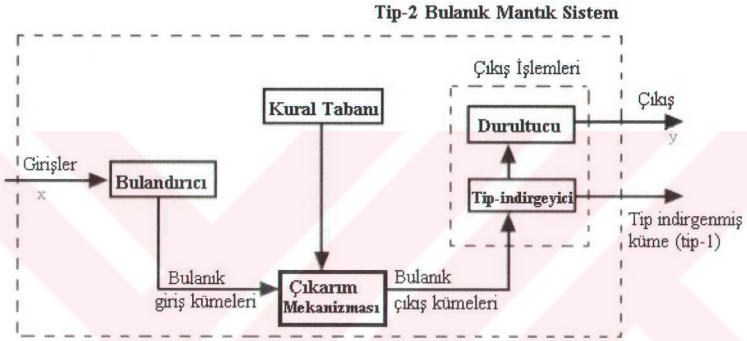
Aralıklı kümeler için denklem (2-91),

$$Y_{\cos}(x) = \int_{d_1} \cdots \int_{d_M} \int_{e_1} \cdots \int_{e_M} 1 \left/ \frac{\sum_{l=1}^M d_l e_l}{\sum_{l=1}^M e_l} \right. \quad (2-97)$$

olarak ifade edilir.

3. TIP-2 BULANIK MANTIK SİSTEMLER

Bu bölümde tip-2 bulanık mantık sistem çeşitleri ve bu sistemlerin yapısı incelenecektir. Anlatılacak bu sistemlere temel oluşturacak tip-2 bulanık mantık sistemin yapısı şekil 3.1’de gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi tip-2 bulanık mantık sistem, tip-1 bulanık mantık sisteme çok benzemektedir. Tip-2 bulanık mantık sistemin yapısal farklılığı çıkış bloğundadır. Tip-1 bulanık mantık sistemin çıkış bloğunda sadece durultucu bulunurken, tip-2 bulanık mantık sistemin çıkış bloğunda tip-indirgeyici ve durultucu birlikte yer almaktadır [17-19].



Şekil 3.1 Tip-2 Bulanık Mantık Sistem Yapısı

Bulanık mantığın ilkeleri, tip-1’den tip-2’ye geçerken değişme göstermemiş olup tip-n için de değişmesi beklenmemektedir [20]. Yüksek tip sayısı bulanıklığın yükseklik derecesini göstermektedir. Yüksek tip, üyelik fonksiyonunun yapısını değiştirdiği için üyelik fonksiyonlarına bağlı işlemler değişecektir. Bulanık mantığın basit ilkeleri, üyelik fonksiyonu yapısından bağımsız olduğu için ilkelere değişiklik olmayacaktır.

Bu tezde anlatılan tip-2 bulanık mantık sistemlerde, kurallardaki tüm varsayım (antecedent) ve sonuç (consequent) kümeleri tip-2 olarak alınmıştır. Ancak pratikte böyle bir zorunluluk yoktur. Bir bulanık mantık sistemin tip-2 olması için kuraldaki varsayım ve sonuç kümelerinden birinin tip-2 olması yeterlidir.

Tip-1’de kural yapısı:

$$R^l: IF \ x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^l \text{ and...and } x_p \text{ is } F_p^l \text{ THEN } y \text{ is } G^l \quad l=1,..,M \quad (3-1)$$

şeklindedir.

Tip-2’de kural yapısı tip-1 ile aynı kalmaktadır. Sadece kuraldaki bir veya daha fazla küme tip-2 olmaktadır. P tane girişi olan $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$, tek çıkışlı, M tane kurala sahip tip-2 bulanık mantık sistemde l . kural

$$R^l: IF \ x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^l \text{ and } x_2 \text{ is } \tilde{F}_2^l \text{ and..and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^l \text{ THEN } y \text{ is } \tilde{G}^l \quad l=1, \dots, M \quad (3-2)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu kural $X_1 \times \dots \times X_p$ giriş uzayı ve Y çıkış uzayı arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Tip-2 bulanık mantık sistemde çıkarım mekanizmasının işleyişi, tip-1 bulanık sistemle paralellik göstermektedir. Tip-1 bulanık mantık sistemde çıkarım mekanizması, bulandırıcının çıkışlarını (üyelik derecelerini) ve kural tabanını kullanarak bir bulanık küme oluşturur. Bu bulanık küme, durultucu tarafından denetleyicinin çıkışını hesaplamak için kullanılacaktır. Kuraldaki varsayımlar t-norm ile bağlıdır. Giriş kümelerindeki üyelik dereceleri çıkış kümesindeki üyelik dereceleri ile sup-star yöntemi kullanılarak birleştirilir. Benzer şekilde tip-2 bulanık mantık sistemde de üyelik dereceleri, genişletilmiş sup-star yöntemi kullanılarak birleştirilmektedir.

Denklem (3-2)’den görüldüğü gibi her kural, tip-2 bulanık ima işlemini açıklamaktadır.

$$\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l = \tilde{A}^l \text{ olarak alınırsa denklem (3-2),}$$

$$R^l: \tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l = \tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l \quad l=1, \dots, M \quad (3-3)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

R^l , $\mu_{R^l}(x, y) = \mu_{R^l}(x_1, \dots, x_p, y)$ üyelik fonksiyonuyla tanımlanmıştır.

$$\mu_{R^l}(x, y) = \mu_{\tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l}(x, y) \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned} \mu_{R^l}(x, y) &= \mu_{\tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l}(x, y) = \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \Pi \dots \Pi \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \Pi \mu_{\tilde{G}^l}(y) \\ &= \left[\Pi_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i) \right] \Pi \mu_{\tilde{G}^l}(y) \end{aligned} \quad (3-5)$$

Buluşma işlemi için sadece çarpım ve minimum t-norm kullanılmıştır.

P tane giriş için $\tilde{A}_x$ tip-2 bulanık kümesi,

$$\mu_{\tilde{A}_x}(x) = \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \Pi \dots \Pi \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) = \Pi_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \quad (3-6)$$

şeklinde gösterilmektedir. Her kural (R^l) , $\tilde{B}^l = \tilde{A}_x \circ R^l$ ile tip-2 bulanık ilişkisini belirlemektedir.

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \mu_{\tilde{A}_x \circ R^l}(y) = \sqcup_{x \in X} \left[\mu_{\tilde{A}_x}(x) \Pi \mu_{R^l}(x, y) \right] \quad y \in Y \quad l=1, \dots, M \quad (3-7)$$

Denklem (3-7), şekil 3.1’deki giriş-çıkış ilişkisini göstermektedir. (3-5), (3-6) ve (3-7) denklemleri, yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{B}'}(y) &= \sqcup_{x \in X} [\mu_{\tilde{A}_x}(x) \sqcap \mu_{R'}(x, y)] \\
&= \sqcup_{x \in X} \{ [\sqcap_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i)] \sqcap [\sqcap_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i}(x_i)] \sqcap \mu_{\tilde{G}'}(y) \} \\
&= \sqcup_{x \in X} \{ [\sqcap_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \sqcap \mu_{\tilde{F}_i}(x_i)] \sqcap \mu_{\tilde{G}'}(y) \} \\
&= \mu_{\tilde{G}'}(y) \sqcap \{ [\sqcup_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1}(x_1)] \sqcap \\
&\quad \dots \sqcap [\sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p}(x_p)] \}, y \in Y
\end{aligned} \tag{3-8}$$

denklemini elde edilir.

3.1. Singleton Tip-2 Bulanık Mantık Sistemler

Bu alt bölümde kuralların varsayım ve sonuç kısımlarındaki belirsizliği açıklayan singleton tip-2 bulanık mantık sistemlerin yapısı anlatılacaktır. Singleton tip-2 bulanık mantık sistem ismini bulandırıcısının singleton olmasından almıştır.

Bilindiği gibi bulandırıcı, giriş değişkenlerinin değerlerini çıkarım mekanizmasında kolayca kullanılabilecek bilgilere dönüştüren giriş birimidir ve giriş değişkenlerinin aldığı her değere, ilgili giriş değişkeni için tanımlanan tüm bulanık kümeler için bir üyelik derecesi hesaplar. Singleton bulandırıcı, $x = (x_1, \dots, x_p)^T \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p \equiv X$ ve $\tilde{A}_x$ X 'de bir tip-2 bulanık küme olmak üzere

$x = x'$ için $\mu_{\tilde{A}_x}(x) = 1/1$ ve $x \neq x'$ için $\mu_{\tilde{A}_x}(x) = 1/0$ ise $\tilde{A}_x$ tip-2 bulanık singleton ifadesi ile tanımlanır.

Bulandırıcının singleton olmasından dolayı bu sistemlerde, bulanık çıkarım mekanizmasında kullanılan denklem (3-8)

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{B}'}(y) &= \mu_{\tilde{G}'}(y) \sqcap \{ [\sqcup_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1}(x_1)] \sqcap \\
&\quad \dots \sqcap [\sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p}(x_p)] \} \\
&= \mu_{\tilde{G}'}(y) \sqcap \{ [\mu_{\tilde{X}_1}(x'_1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1}(x'_1)] \sqcap \dots \sqcap [\mu_{\tilde{X}_p}(x'_p) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p}(x'_p)] \} \\
&= \mu_{\tilde{G}'}(y) \sqcap \{ [(1/1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1}(x'_1)] \sqcap \dots \sqcap [(1/1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p}(x'_p)] \} \\
&= \mu_{\tilde{G}'}(y) \sqcap [\sqcap \mu_{\tilde{F}_i}(x'_i)], y \in Y
\end{aligned} \tag{3-9}$$

denklemini ile daha basite indirgenir. Ancak bu denklemi hesaplamak yeterince kolay değildir.

Denklem (3-9)'dan görüldüğü gibi genel tip-2 bulanık mantık sistemlerde buluşma, tip

indirgeme gibi işlemler oldukça karmaşıktır. Bölüm 2’de anlatılan aralıklı tip-2 kümelerle işlem yapmak ise daha kolay olduğundan bu kümeleri seçmemek için mantıklı bir neden yoktur [21].

Bölüm 2’ de anlatılan üst ve alt üyelik fonksiyonları, aralıklı kümeler için işlemleri basite indirgemedi kilit görevi görmektedir. Bu bölümde kullanılacak bazı kavramlar:

1. *Üyelik Fonksiyonu* $\mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k) : \mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k)$ ikinci üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k) = \int_{w^l \in [\underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k), \bar{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k)]} 1/w^l \quad (3-10)$$

şeklinde gösterilebilir. $\underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k)$ ve $\bar{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k)$ alt ve üst üyelik fonksiyonlarını, $l = 1, \dots, M$ kural sayısını, $k = 1, \dots, p$ varsayım sayısını göstermektedir.

2. *Merkezi Belirsiz Gaussian Birincil Üyelik Fonksiyonu*: Çok kullanılan bir üyelik fonksiyonudur.

$$\mu_k^l(x_k) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - m_k^l}{\sigma_k^l}\right)^2\right] \quad m_k^l \in [m_{k1}^l, m_{k2}^l] \quad (3-11)$$

$l = 1, \dots, M$ kural sayısını, $k = 1, \dots, p$ varsayım sayısını göstermektedir. Üst üyelik fonksiyonu $\bar{\mu}_k^l(x_k)$,

$$\bar{\mu}_k^l(x_k) = \begin{cases} N(m_{k1}^l, \sigma_k^l; x_k) & x_k < m_{k1}^l \\ 1 & m_{k1}^l \leq x_k \leq m_{k2}^l \\ N(m_{k2}^l, \sigma_k^l; x_k) & x_k > m_{k2}^l \end{cases} \quad (3-12)$$

ve alt üyelik fonksiyonu $\underline{\mu}_k^l(x_k)$,

$$\underline{\mu}_k^l(x_k) = \begin{cases} N(m_{k2}^l, \sigma_k^l; x_k) & x_k \leq \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} \\ N(m_{k1}^l, \sigma_k^l; x_k) & x_k > \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} \end{cases} \quad (3-13)$$

3. *Standart Sapması Belirsiz Gaussian Birincil Üyelik Fonksiyonu*: Çok kullanılan bir diğer üyelik fonksiyonudur.

$$\mu_k^l(x_k) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - m_k^l}{\sigma_k^l}\right)^2\right] \quad \sigma_k^l \in [\sigma_{k1}^l, \sigma_{k2}^l] \quad (3-14)$$

$l = 1, \dots, M$ kural sayısını, $k = 1, \dots, p$ varsayım sayısını göstermektedir. Üst üyelik fonksiyonu $\bar{\mu}_k^l(x_k)$,

$$\bar{\mu}_k^l(x_k) = N(m_k^l, \sigma_{k2}^l; x_k) \quad (3-15)$$

ve alt üyelik fonksiyonu $\underline{\mu}_k^l(x_k)$,

$$\underline{\mu}_k^l(x_k) = N(m_k^l, \sigma_{k1}^l; x_k) \quad (3-16)$$

olarak tanımlanmıştır.

Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistemin bulanık çıkarım mekanizması için temel sonuçlar:

a) Giriş-varsayım işlemi sonucu (kuralın kesinlik derecesi/AND işlemi sonucu):

$$F^l(x') = [\underline{f}^l(x'), \overline{f}^l(x')] \equiv [\underline{f}^l, \overline{f}^l] \quad (3-17)$$

$$\underline{f}^l(x') = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) * \dots * \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x'_p) \quad (3-18)$$

ve

$$\overline{f}^l(x') = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) * \dots * \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x'_p) \quad (3-19)$$

b) İma işlemi sonucu:

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \int_{b^l \in [\underline{f}^l * \underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y), \overline{f}^l * \overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)]} 1/b^l, \quad y \in Y \quad (3-20)$$

$\overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)$ ve $\underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)$, $\mu_{\tilde{G}^l}(y)$ 'nin üst ve alt üyelik dereceleridir.

c) İma işlemi sonucu birleştirilmiş çıkış-sonuç kümeleri: (M kuraldan N tanesi kullanılmıştır.)

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \int_b \in [\underline{f}^1 * \underline{\mu}_{\tilde{G}^1}(y)] \vee \dots \vee [\underline{f}^N * \underline{\mu}_{\tilde{G}^N}(y)] [\overline{f}^1 * \overline{\mu}_{\tilde{G}^1}(y)] \vee \dots \vee [\overline{f}^N * \overline{\mu}_{\tilde{G}^N}(y)]] 1/b, \quad y \in Y \quad (3-21)$$

Örnek 3-1: Şekil 3-2'de giriş-varsayım işlemi iki varsayım, tek sonuç kümesi, minumum ve çarpım t-norm için gösterilmiştir.

$$\underline{f}^l = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) * \underline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x'_2) \quad \text{ve} \quad \overline{f}^l = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) * \overline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x'_2) \quad (3-22)$$

minumum t-norm için,

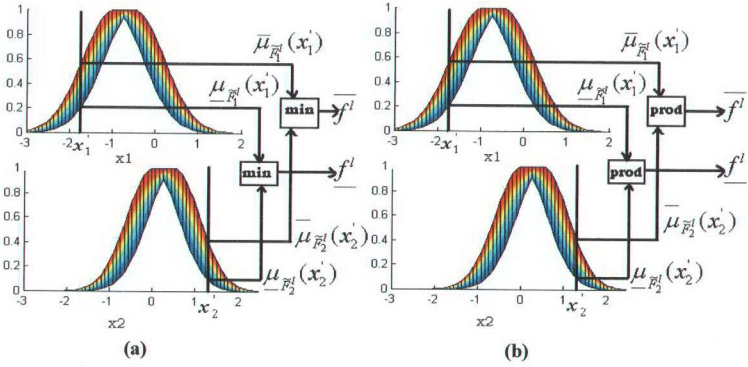
$$\underline{f}^l = \min[\underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1), \underline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x'_2)] \quad (3-23)$$

$$\overline{f}^l = \min[\overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1), \overline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x'_2)] \quad (3-24)$$

çarpım t-norm için,

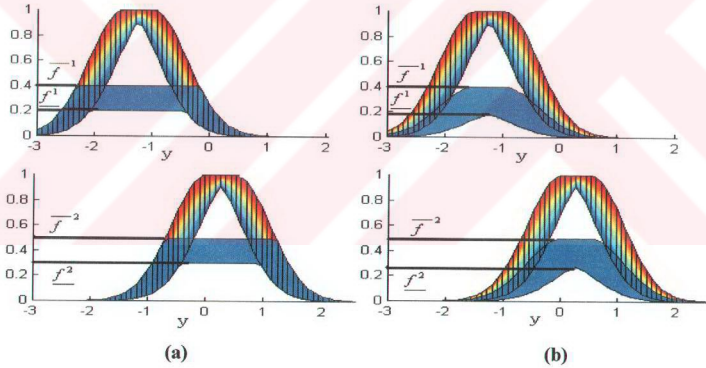
$$\underline{f}^l = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) \times \underline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x'_2) \quad (3-25)$$

$$\overline{f}^l = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) \times \overline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x'_2) \quad (3-26)$$



Şekil 3.2 Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistem için giriş-varsayım işlemi
(a) minimum t-norm ile (b) çarpım t-norm ile

Şekil 3.3'de çıkış-sonuç (ima) işlemi (minimum ve çarpım t-norm için) gösterilmiştir.

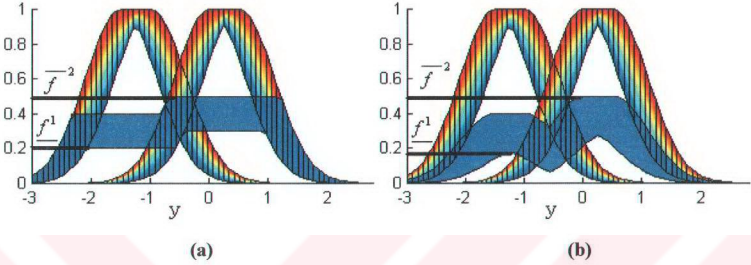


Şekil 3.3 Aralıklı singleton tip-2 bulanık mantık sistem için çıkış-sonuç işlemi
(a) minimum t-norm ile (b) çarpım t-norm ile

Şekil 3-1'den görüldüğü gibi bulandırıcıyı, çıkarım mekanizması, tip-indirgeme ve durultma izler. Giriş-varsayım işleminin sonucu aralıklı tip-1 kümedir. Şekil 3.4'den görüldüğü gibi $\underline{f}^l$ ve $\overline{f}^l$ sol en yüksek ve sağ en yüksek noktalarını göstermektedir. Aralıklı çıkış kümesi, denklem (3-21)'den bulunabilir. Tip-indirgeme yöntemi olarak bölüm 2'deki

yöntemlerden biri seçilir. Elde edilen aralıklı küme, y^l ve y^r 'nin aritmetik ortalaması alınarak durultulur.

$$y(x) = f_{s2}(x) = \frac{y_l + y_r}{2} \quad (3-27)$$



Şekil 3.4 Şekil 3.3 'deki çıkış kümelerinin birleştirilmiş gösterimi

3.2. Tip-1 Non-Singleton Tip-2 Bulanık Mantık Sistemler

Girişleri tip-1 bulanık kümelerle modellenen tip-1 non-singleton tip-2 bulanık mantık sistemlerin yapısı, Şekil 3.1'de görülmektedir. Çıkarım mekanizması, durultucu, tip-indirgeyici ve kural yapısı singleton tip-2 bulanık mantık sistemlerde olduğu gibidir. Ancak girişlerinin tip-1 bulanık kümeler olması, bu sistemleri singleton tip-2 bulanık mantık sistemlerden ayırır.

Bu sistemlerde kullanılan bulandırıcılar singleton olmayan bulandırıcılardır. Bu tip bulandırıcı,

$$x = x_i' \text{ için } \mu_{x_i}(x_i') = 1 \text{ ve } x_i, x_i' \text{ 'den uzaklaştıkça } \mu_{x_i}(x_i) < 1, \quad (i = 1, \dots, p)$$

şeklinde tanımlanır. Bulandırıcıda kullanılabilecek üyelik fonksiyonlarına,

1. Gaussian: $\mu_{x_i}(x_i) = \exp\left[-(x_i - x_i')^2 / 2\sigma^2\right]$
2. Üçgen: $\mu_{x_i}(x_i) = \max(0.1 - |(x_i - x_i') / c|)$
3. İsimli: $\mu_{x_i}(x_i) = 1 / (1 + |(x_i - x_i') / c|^n)$

örnek gösterilebilir. x_i' bulanık kümenin merkez değeri ve $\sigma(c)$ bu kümenin yayılımını (sigmasını) göstermektedir.

Bu sistemlerin bulanık çıkarım mekanizması için denklem (3-8)'den yola çıkılabilir. Denklem (3-28), denklem (3-8)'in son iki satırından ibarettir.

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}^l}(y) &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \Pi \left\{ \sqcup_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \Pi \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right\} \Pi \\ &\dots \Pi \left\{ \sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \Pi \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right\}, y \in Y\end{aligned}\quad (3-28)$$

Tip-1 singleton olmayan bulandırıcı için denklem (3-28), tip-2 giriş kümeleri yerine tip-1 kümeler yazılarak,

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}^l}(y) &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \Pi \left\{ \sqcup_{x_1 \in X_1} \mu_{X_1}(x_1) \Pi \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right\} \Pi \\ &\dots \Pi \left\{ \sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{X_p}(x_p) \Pi \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right\}, y \in Y\end{aligned}\quad (3-29)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

$$\mu_{\tilde{Q}^l}(x_k) \equiv \mu_{X_k}(x_k) \Pi \mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \quad (3-30)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}^l}(y) &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \Pi \left\{ \sqcup_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{Q}_1^l}(x_1) \right\} \Pi \dots \Pi \left\{ \sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{Q}_p^l}(x_p) \right\} \\ &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \Pi \left\{ \sqcup_{x \in X} \left[\prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) \right] \right\}, y \in Y\end{aligned}\quad (3-31)$$

olur.

$$\mu_{\tilde{Q}^l}(x) \equiv \prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) \quad (3-32)$$

olarak tanımlanırsa,

$$F^l(x') \equiv \sqcup_{x \in X} \left[\prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) \right] = \sqcup_{x \in X} \mu_{\tilde{Q}^l}(x) \quad (3-33)$$

ve

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \mu_{\tilde{G}^l}(y) \Pi F^l(x'), y \in Y \quad (3-34)$$

elde edilir. Bu denklem tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için temel denklemdir [22].

Genel olarak, keyfî tip-2 bulanık kümeler için denklem (3-34)'ü hesaplamak çok zor olduğundan aralıklı tip-2 kümeler kullanılmaktadır. Aralıklı tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistem için temel sonuçlar:

a)Giriş-varsayım işlemi sonucu (kuralın kesinlik derecesi/AND işlemi sonucu):

$$F^l(x') = [\underline{f}^l(x'), \overline{f}^l(x')] = [\underline{f}^l, \overline{f}^l] \quad (3-35)$$

$$\begin{aligned}\underline{f}^l(x') &= \sup_x \int \dots \int_{x_1 \in X_1 \dots x_p \in X_p} [\mu_{X_1}(x_1) \star \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1)] \star \\ &\dots \star [\mu_{X_p}(x_p) \star \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p)] \Big/ x\end{aligned}\quad (3-36)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{f}^l(x') = \sup_x \int \dots \int_{x_1 \in X_1, x_p \in X_p} [\mu_{X_1}(x_1) * \bar{\mu}_{\bar{F}_1^l}(x_1)] * \\ \dots * [\mu_{X_p}(x_p) * \bar{\mu}_{\bar{F}_p^l}(x_p)] \Big/ x \end{aligned} \quad (3-37)$$

b) İma işlemi sonucu:

$$\mu_{\bar{B}^l}(y) = \int_{b^l \in [\underline{f}^l * \underline{\mu}_{\bar{Q}^l}(y), \bar{f}^l * \bar{\mu}_{\bar{Q}^l}(y)]} 1/b^l, \quad y \in Y \quad (3-38)$$

$\bar{\mu}_{\bar{Q}^l}(y)$ ve $\underline{\mu}_{\bar{Q}^l}(y)$, $\mu_{\bar{Q}^l}(y)$ 'nin üst ve alt üyelik dereceleridir.

c) İma işlemi sonucu birleştirilmiş çıkış sonuç kümeleri: (M kuraldan N tanesi kullanılmıştır.)

$$\mu_{\bar{B}}(y) = \int_{b \in [\underline{f}^1 * \underline{\mu}_{\bar{Q}^1}(y)] \vee \dots \vee [\underline{f}^N * \underline{\mu}_{\bar{Q}^N}(y)] } 1/b, \quad y \in Y \quad (3-39)$$

Denklem (3-33) kullanılarak $F^l(x')$ 'i hesaplamak için, önce denklem (3-30)'dan $\mu_{\bar{Q}_k^l}(x_k)$ sonra denklem (3-32)'den $\mu_{\bar{Q}^l}(x)$ bulunur. Aralıklı tip-1 singleton olmayan tip-2

bulanık mantık sistemler için,

$$\mu_{X_k}(x_k) = [\underline{\mu}_{X_k}(x_k), \bar{\mu}_{X_k}(x_k)] \Big|_{\mu_{X_k}(x_k) = \bar{\mu}_{X_k}(x_k)} \quad (3-40)$$

ve

$$\mu_{\bar{F}_k^l}(x_k) = \int_{w^l \in [\underline{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k), \bar{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)]} 1/w^l, \quad y \in Y \quad (3-41)$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{Q}_k^l}(x_k) &= \mu_{X_k}(x_k) \Pi \mu_{\bar{F}_k^l}(x_k) \\ &= \int_{q^l \in [\mu_{X_k}(x_k) * \underline{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k), \mu_{X_k}(x_k) * \bar{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)]} 1/q^l \\ &= [\mu_{X_k}(x_k) * \underline{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k), \mu_{X_k}(x_k) * \bar{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)] \quad \forall x_k \in X_k \end{aligned} \quad (3-42)$$

elde edilir. Tip-1 giriş kümesi ve tip-2 varsayım kümesi arasında t-norm (çarpım veya minimum) işareti kullanılmıştır. Denklem (3-42)'den $\mu_{\bar{Q}_k^l}(x_k)$ 'nin alt $\underline{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(x_k)$ ve üst

$\bar{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(x_k)$ fonksiyonlarının

$$\underline{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(x_k) = \int_{x_k \in X_k} [\mu_{X_k}(x_k) * \underline{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)] \Big/ x_k \quad (3-43)$$

$$\bar{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(x_k) = \int_{x_k \in X_k} [\mu_{X_k}(x_k) * \bar{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)] \Big/ x_k \quad (3-44)$$

olduğu görülmektedir. Denklem (3-32)'ye göre alt ve üst üyelik fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x) = & \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} \left[\mu_{X_1}(x_1) \star \bar{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ & \dots \star \left[\mu_{X_p}(x_p) \star \bar{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] \Big/ x \end{aligned} \quad (3-45)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x) = & \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} \left[\mu_{X_1}(x_1) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ & \dots \star \left[\mu_{X_p}(x_p) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] \Big/ x \end{aligned} \quad (3-46)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Denklem (3-35)'den

$$\begin{aligned} \bar{f}^l(x') = \sup_x \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} & \left[\mu_{X_1}(x_1) \star \bar{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ & \dots \star \left[\mu_{X_p}(x_p) \star \bar{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] \Big/ x \end{aligned} \quad (3-47)$$

bulunur. $\bar{f}^l(x')$ 'nin sağ en büyük noktası $\bar{f}^l(x')$, $\bar{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x)$ 'nin maximum değerini (supremum) göstermektedir. Denklem (3-46)'dan

$$\begin{aligned} \underline{f}^l(x') = \sup_x \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} & \left[\mu_{X_1}(x_1) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ & \dots \star \left[\mu_{X_p}(x_p) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] \Big/ x \end{aligned} \quad (3-48)$$

bulunur. $\underline{f}^l(x')$ 'nin sol en büyük noktası $\underline{f}^l(x')$, $\underline{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x)$ 'nin maximum değerini (supremum) göstermektedir.

$$\underline{f}_k^l(x_k') \equiv \sup_{x_k} \int_{x_k \in X_k} \left[\mu_{X_k}(x_k) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \right] \Big/ x_k = \sup_{x_k} \underline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) \quad (3-49)$$

$$\bar{f}_k^l(x_k') \equiv \sup_{x_k} \int_{x_k \in X_k} \left[\mu_{X_k}(x_k) \star \bar{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \right] \Big/ x_k = \sup_{x_k} \bar{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) \quad (3-50)$$

$k = 1, \dots, p$ için denklem (3-36) ile (3-49) ve denklem (3-37) ile (3-50) birbirine denktir.

Supremum için $\underline{x}_{k,\max}^l$ ve $\bar{x}_{k,\max}^l$ değişkenleri atanırsa,

$$\underline{f}_k^l(x_k') = \underline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(\underline{x}_{k,\max}^l) \quad (3-51)$$

ve

$$\bar{f}_k^l(x_k') = \bar{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(\bar{x}_{k,\max}^l) \quad (3-52)$$

olur. (3-36) ve (3-37) denklemlerinin son hali

$$\underline{f}^I(x') = T_{k=1}^p \underline{f}_k^I(x_k') = T_{k=1}^p \underline{\mu}_{\tilde{Q}_k^I}(x_{k,\max}^I) \quad (3-53)$$

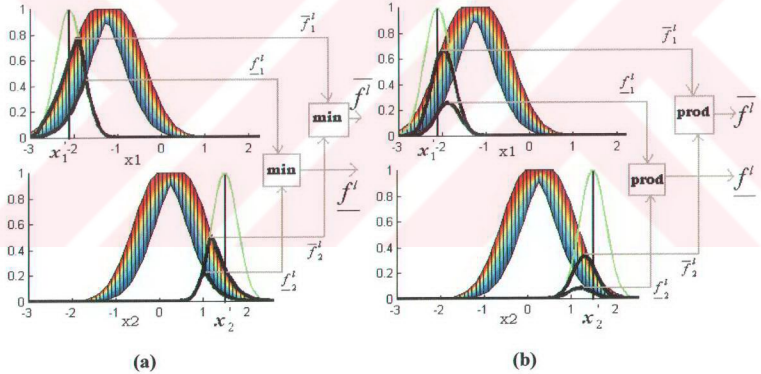
$$\overline{f}^I(x') = T_{k=1}^p \overline{f}_k^I(x_k') = T_{k=1}^p \overline{\mu}_{\tilde{Q}_k^I}(x_{k,\max}^I) \quad (3-54)$$

şeklinde dir.

Örnek 3-2: Şekil 3.5'de giriş-varsayım işlemleri ((3-49)-(3-54) denklemleri), iki varsayım bir sonuca sahip kural ve minumum, çarpım t-norm için gösterilmiştir. İşlem sonucu aralıklı kümedir ($[\underline{f}^I, \overline{f}^I]$).

$$\underline{f}^I = \underline{f}_1^I \star \underline{f}_2^I \quad \text{ve} \quad \overline{f}^I = \overline{f}_1^I \star \overline{f}_2^I \quad (3-55)$$

$\mu_{X_k}(x_k)$ 'nin merkezi $x_k = x_k'$ 'dir. Denklem (3-49)'a göre $\underline{f}_k^I$, $\mu_{X_k}(x_k)$ ile $\underline{\mu}_{\tilde{F}_k^I}(x_k)$ arasındaki t-norm işleminin ve denklem (3-50)'ye göre $\overline{f}_k^I$, $\mu_{X_k}(x_k)$ ile $\overline{\mu}_{\tilde{F}_k^I}(x_k)$ arasındaki t-norm işleminin maximum değeridir ($k = 1, 2$).



Şekil 3.5 Aralıklı tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistem için çıkış-sonuç işlemi
(a) minimum t-norm ile (b) çarpım t-norm ile

Örnek 3-3: Şekil 3.6'da,

$$\mu_k^I(x_k) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - m_k^I}{\sigma_k^I}\right)^2\right] \quad m_k^I \in [m_{k1}^I, m_{k2}^I]$$

denkleminin sahip varsayım (merkezi belirsiz gaussian birincil üyelik fonksiyonu) ile

$$\mu_{X_k}(x_k) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_k - x'_k}{\sigma_{X_k}} \right)^2 \right]$$

denkleminde sahip merkezleri farklı giriş (gaussian tip-1 üyelik fonksiyonu) üyelik fonksiyonları görülmektedir. Giriş üyelik fonksiyonunun merkezinin farklı yerlerde bulunmasına bağlı olarak yapılan $\underline{x}_{k,\max}^{-l}$ ve $\underline{x}_{k,\max}^l$ hesaplamaları tablo 3.1, tablo 3.2, tablo 3.3 'den takip edilebilir.

Tablo 3.1 Şekil 3.6 için $\underline{x}_{k,\max}^{-l}$ değerleri

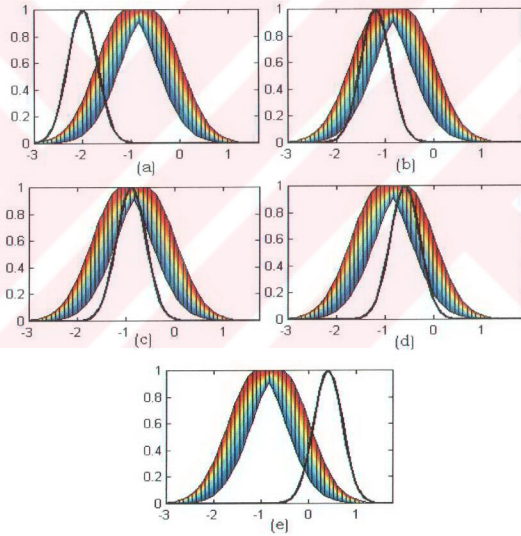
Durumlar	x'_k 'nin yeri	Çarpım t-norm	Minumum t-norm
Şekil 3.6 (a)	$x'_k \leq m_{k1}^l$	$\underline{x}_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{X_k}^2 m_{k1}^l + \sigma_k^{l^2} x'_k}{\sigma_{X_k}^2 + \sigma_k^{l^2}}$	$\underline{x}_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{X_k} m_{k1}^l + \sigma_k^l x'_k}{\sigma_{X_k} + \sigma_k^l}$
Şekil 3.6 (b)-(d)	$x'_k \in [m_{k1}^l, m_{k2}^l]$	$\underline{x}_{k,\max}^{-l} = x'_k$	$\underline{x}_{k,\max}^{-l} = x'_k$
Şekil 3.6 (e)	$x'_k \geq m_{k2}^l$	$\underline{x}_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{X_k}^2 m_{k2}^l + \sigma_k^{l^2} x'_k}{\sigma_{X_k}^2 + \sigma_k^{l^2}}$	$\underline{x}_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{X_k} m_{k2}^l + \sigma_k^l x'_k}{\sigma_{X_k} + \sigma_k^l}$

Tablo 3.2 Şekil 3.6 için çarpım t-norm'a bağlı olarak $\underline{x}_{k,\max}^l$ değerleri

Durumlar	x'_k 'nin yeri	Çarpım t-norm
Şekil 3.6 (a) ve (b)	$x'_k < \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{X_k}^2 (m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}}$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{X_k}^2 m_{k2}^l + \sigma_k^{l^2} x'_k}{\sigma_{X_k}^2 + \sigma_k^{l^2}}$
Şekil 3.6 (c)	$x'_k \in \left[\frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{X_k}^2 (m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}}, \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{X_k}^2 (m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}} \right]$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2}$
Şekil 3.6 (d) ve (e)	$x'_k > \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{X_k}^2 (m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}}$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{X_k}^2 m_{k1}^l + \sigma_k^{l^2} x'_k}{\sigma_{X_k}^2 + \sigma_k^{l^2}}$

Tablo 3.3 Şekil 3.6 için minimum t-norm'a bağlı olarak x_k^l değerleri

Durumlar	x_k' 'nin yeri	Çarpım t-norm
Şekil 3.6 (a) ve (b)	$x_k' < \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{X_k}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l}$	$x_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{X_k} m_{k2}^l + \sigma_k^l x_k'}{\sigma_{X_k} + \sigma_k^l}$
Şekil 3.6 (c)	$x_k' \in \left[\frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{X_k}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l}, \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{X_k}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l} \right]$	$x_{k,\max}^l = \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2}$
Şekil 3.6 (d) ve (e)	$x_k' > \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{X_k}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l}$	$x_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{X_k} m_{k1}^l + \sigma_k^l x_k'}{\sigma_{X_k} + \sigma_k^l}$



Şekil 3.6 Giriş tip-1 Gaussian üyelik fonksiyonunun farklı konumlarının varsayım FOU ile ilişkisi (Giriş üyelik fonksiyonunun merkezi x_k' gibi bir noktadır.)

3.3. Tip-2 Non-Singleton Tip-2 Bulanık Mantık Sistemler

Bu alt bölümde, girişleri tip-2 bulanık kümelerle modellenen tip-2 bulanık mantık sistemler anlatılacaktır. Bu sistemler, zaman serisi tahmininde kullanılabilir.

Tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler, tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler ile aynı diagramla (Şekil 3.1) tanımlanabilir. Bu sistemlerin tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemlerden tek farklı özelliği, bulandırıcıda kullanılan üyelik fonksiyonlarıdır. Sistemde bulunan singleton olmayan bulandırıcıların üyelik fonksiyonları tip-2'dir.

Bu sistemlerin bulanık çıkarım mekanizması için tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemlere ait denklemlerin incelenmesinde yarar vardır. Tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemlere ait denklem (3-29), (3-30), (3-31) ve tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemlere ait denklem (3-56), (3-57), (3-58) karşılaştırılırsa, tip-1 giriş kümelerinin yerini tip-2 giriş kümelerinin aldığı görülür.

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}'}(y) &= \mu_{\tilde{G}'}(y) \Pi \left\{ \sqcup_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \Pi \mu_{\tilde{F}_1'}(x_1) \right\} \Pi \\ &\dots \Pi \left\{ \sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \Pi \mu_{\tilde{F}_p'}(x_p) \right\}, y \in Y\end{aligned}\quad (3-56)$$

$$\mu_{\tilde{Q}_k'}(x_k) \equiv \mu_{\tilde{X}_k}(x_k) \Pi \mu_{\tilde{F}_k'}(x_k) \quad (3-57)$$

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}'}(y) &= \mu_{\tilde{G}'}(y) \Pi \left\{ \sqcup_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{Q}_1'}(x_1) \right\} \Pi \dots \Pi \left\{ \sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{Q}_p'}(x_p) \right\} \\ &= \mu_{\tilde{G}'}(y) \Pi \left\{ \sqcup_{x \in X} \left[\prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{Q}_k'}(x_k) \right] \right\}, y \in Y\end{aligned}\quad (3-58)$$

Tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemlerde olduğu gibi,

$$\mu_{\tilde{Q}_k'}(x) \equiv \prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{Q}_k'}(x_k) \quad (3-59)$$

olarak tanımlanırsa

$$F^I(x') \equiv \sqcup_{x \in X} \left[\prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{Q}_k'}(x_k) \right] = \sqcup_{x \in X} \mu_{\tilde{Q}'}(x) \quad (3-60)$$

denklem (3-58)

$$\mu_{\tilde{B}'}(y) = \mu_{\tilde{G}'}(y) \Pi F^I(x'), y \in Y \quad (3-61)$$

şeklinde yeniden tanımlanabilir. Bu denklem tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için temel denklemdir [22].

İşlem yükünün az olması için yine aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler üzerinde durulacaktır.

Aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistem için temel sonuçlar:

a) Giriş-varsayım işlemi sonucu (kuralın kesinlik derecesi/AND işlemi sonucu):

$$F^I(x') = \left[\underline{f}^I(x'), \overline{f}^I(x') \right] \equiv \left[\underline{f}^I, \overline{f}^I \right] \quad (3-62)$$

$$\underline{f}^l(x') = \sup_x \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x_1) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1)] \star \dots \star [\underline{\mu}_{\tilde{X}_p}(x_p) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p)] / x \quad (3-63)$$

ve

$$\overline{f}^l(x') = \sup_x \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} [\overline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x_1) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1)] \star \dots \star [\overline{\mu}_{\tilde{X}_p}(x_p) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p)] / x \quad (3-64)$$

b) İma işlemi sonucu:

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \int_{b^l \in [\underline{f}^l \star \underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y), \overline{f}^l \star \overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)]} 1/b^l, \quad y \in Y \quad (3-65)$$

c) İma işlemi sonucu birleştirilmiş çıkış-sonuç kümeleri: (M kuraldan N tanesi kullanılmıştır.)

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \int_{b \in [\underline{f}^l \star \underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)] \vee \dots \vee [\underline{f}^N \star \underline{\mu}_{\tilde{G}^N}(y)] \cap [\overline{f}^l \star \overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)] \vee \dots \vee [\overline{f}^N \star \overline{\mu}_{\tilde{G}^N}(y)] } 1/b, \quad y \in Y \quad (3-66)$$

Denklem (3-60) kullanılarak $F^l(x')$ 'i hesaplamak için, önce denklem (3-57)'den $\mu_{\tilde{Q}_k^l}(x_k)$ sonra denklem (3-59)'dan $\mu_{\tilde{Q}^l}(x)$ bulunur. Aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için,

$$\mu_{\tilde{X}_k}(x_k) = \int_{v \in [\underline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k), \overline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k)]} 1/v, \quad y \in Y \quad (3-67)$$

ve

$$\mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k) = \int_{w^l \in [\underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k), \overline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k)]} 1/w^l, \quad y \in Y \quad (3-68)$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) &= \mu_{\tilde{X}_k}(x_k) \cap \mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \\ &= \int_{q^l \in [\underline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k), \overline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k)]} 1/q^l \\ &= [\underline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k), \overline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k)] \quad \forall x_k \in X_k \end{aligned} \quad (3-69)$$

elde edilir. Tip-2 giriş kümesi ve tip-2 varsayım kümesi arasında t-norm (çarpım veya minimum) işareti kullanılmıştır. Denklem (3-69)'dan $\underline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k)$ 'nin alt $\underline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k)$ ve üst $\overline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k)$ fonksiyonlarının

$$\underline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) = \int_{x_k \in X_k} \left[\underline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \right] / x_k \quad (3-70)$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) = \int_{x_k \in X_k} \left[\overline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \right] / x_k \quad (3-71)$$

olduğu görülmektedir. Denklem (3-59)'a göre alt ve üst üyelik fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x) &= \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} \left[\overline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x_1) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ &\quad \dots \star \left[\overline{\mu}_{\tilde{X}_p}(x_p) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] / x \end{aligned} \quad (3-72)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x) &= \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} \left[\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x_1) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ &\quad \dots \star \left[\underline{\mu}_{\tilde{X}_p}(x_p) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] / x \end{aligned} \quad (3-73)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Denklem (3-72)'den

$$\begin{aligned} \overline{f}^l(x') &= \sup_x \int \dots \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} \left[\overline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x_1) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ &\quad \dots \star \left[\overline{\mu}_{\tilde{X}_p}(x_p) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] / x \end{aligned} \quad (3-74)$$

bulunur. $F^l(x')$ 'nin sağ en büyük noktası $\overline{f}^l(x')$, $\overline{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x)$ 'nin maximum değerini (supremum) göstermektedir. Denklem (3-73)'den

$$\begin{aligned} \underline{f}^l(x') &= \sup_x \int \dots \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_p \in X_p} \left[\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x_1) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \star \\ &\quad \dots \star \left[\underline{\mu}_{\tilde{X}_p}(x_p) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] / x \end{aligned} \quad (3-75)$$

bulunur. $F^l(x')$ 'nin sol en büyük noktası $\underline{f}^l(x')$, $\underline{\mu}_{\tilde{Q}^l}(x)$ 'nin maximum değerini (supremum) göstermektedir.

$$\underline{f}_k^l(x_k') \equiv \sup_{x_k} \int_{x_k \in X_k} \left[\underline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \right] / x_k = \sup_{x_k} \underline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) \quad (3-76)$$

$$\overline{f}_k^l(x_k') \equiv \sup_{x_k} \int_{x_k \in X_k} \left[\overline{\mu}_{\tilde{X}_k}(x_k) \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \right] / x_k = \sup_{x_k} \overline{\mu}_{\tilde{Q}_k^l}(x_k) \quad (3-77)$$

$k = 1, \dots, p$ için denklem (3-63) ile (3-76) ve denklem (3-64) ile (3-77) birbirine denktir.

Supremum için $\underline{x}_{k, \max}^l$ ve $\bar{x}_{k, \max}^l$ değişkenleri atanırsa,

$$\underline{f}_k^l(x_k^l) = \underline{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(\underline{x}_{k, \max}^l) \quad (3-78)$$

ve

$$\bar{f}_k^l(x_k^l) = \bar{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(\bar{x}_{k, \max}^l) \quad (3-79)$$

olur. (3-63) ve (3-64) denklemlerinin son hali

$$\underline{f}^l(x^l) = T_{k=1}^p \underline{f}_k^l(x_k^l) = T_{k=1}^p \underline{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(\underline{x}_{k, \max}^l) \quad (3-80)$$

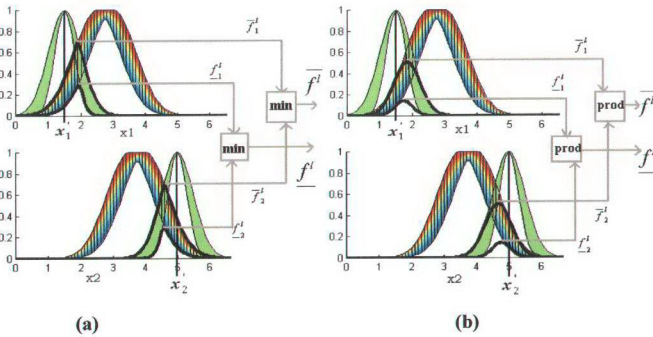
$$\bar{f}^l(x^l) = T_{k=1}^p \bar{f}_k^l(x_k^l) = T_{k=1}^p \bar{\mu}_{\bar{Q}_k^l}(\bar{x}_{k, \max}^l) \quad (3-81)$$

şeklindeir.

Örnek 3-4: Şekil 3.7’de giriş-varsayım işlemleri ((3-76)-(3-81) denklemleri), iki varsayım bir sonuca sahip kural ve minimum, çarpım t-norm için gösterilmiştir. İşlem sonucu aralıklı kümedir $([\underline{f}^l, \bar{f}^l])$.

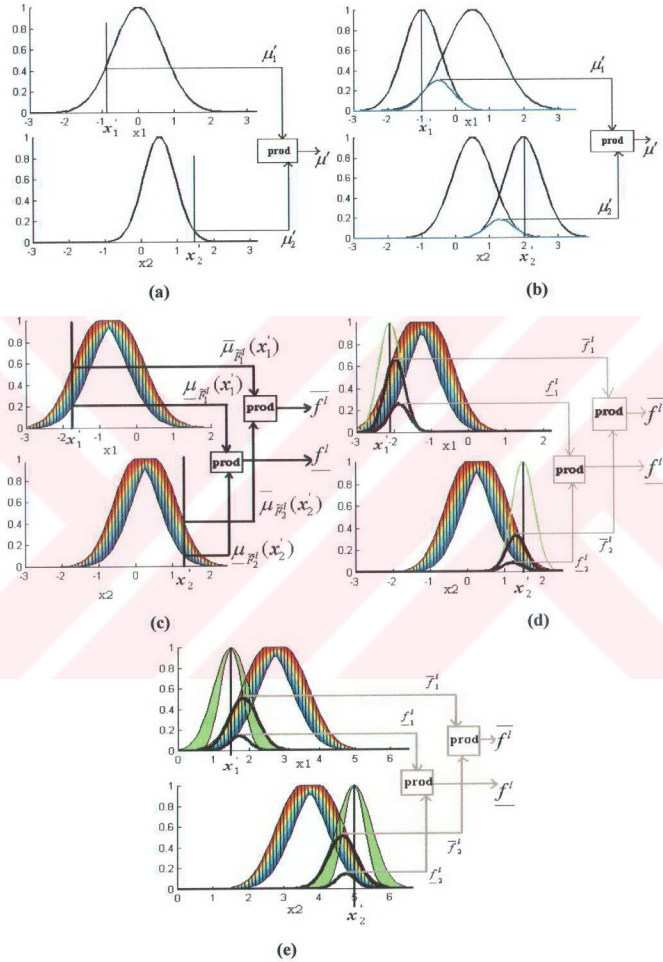
$$\underline{f}^l = \underline{f}_1^l \star \underline{f}_2^l \quad \text{ve} \quad \bar{f}^l = \bar{f}_1^l \star \bar{f}_2^l \quad (3-82)$$

$\mu_{\bar{X}_k}(x_k)$ ’nin merkezi $x_k = x_k^l$ ’dir. Denklem (3-76)’ya göre $\underline{f}_k^l$, $\mu_{\bar{X}_k}(x_k)$ ile $\underline{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)$ arasındaki t-norm işleminin ve denklem (3-77)’ye göre $\bar{f}_k^l$, $\mu_{\bar{X}_k}(x_k)$ ile $\bar{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)$ arasındaki t-norm işleminin maximum değeridir ($k = 1, 2$).



Şekil 3.7 Aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistemler için giriş-varsayım işlemi (a) minimum t-norm ile (b) çarpım t-norm ile

Şekil 3.8, tip-1 ve tip-2 sistemlerin giriş-varsayım işlemlerinin karşılaştırılarak daha iyi kavratılması amacıyla çizilmiştir.



Şekil 3.8 Çarpım t-norm ile giriş-varsayım işlemleri (a) singleton tip-1 bulanık mantık sistem için (b) singleton olmayan tip-1 bulanık mantık sistem için (c) aralıklı singleton tip-2 için (d) aralıklı tip-1 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistem için (e) aralıklı tip-2 singleton olmayan tip-2 bulanık mantık sistem için

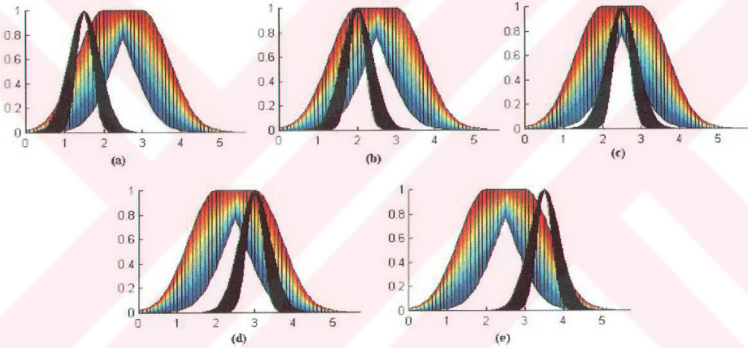
Örnek 3-5: Şekil 3.9’da

$$\mu'_k(x_k) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - m'_k}{\sigma_k^l}\right)^2\right] \quad m'_k \in [m_{k1}^l, m_{k2}^l]$$

denklemine sahip varsayım (merkezi belirsiz gaussian birincil üyelik fonksiyonu) ile

$$\mu'_k(x_k) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - m'_k}{\sigma_k^l}\right)^2\right] \quad \sigma_k^l \in [\sigma_{k1}^l, \sigma_{k2}^l]$$

denklemine sahip merkezleri farklı giriş (standart sapması belirsiz gaussian birincil üyelik fonksiyonu) üyelik fonksiyonları görülmektedir. Giriş üyelik fonksiyonunun merkezinin farklı yerlerde bulunmasına bağlı olarak yapılan $x_{k,\max}^{-l}$ ve $x_{k,\max}^l$ hesaplamaları tablo 1,2,3 'den takip edilebilir.



Şekil 3.9 Giriş FOU’nun farklı konumlarının varsayım FOU ile ilişkisi (Renkli olan FOU varsayım aittirken siyah renkli FOU giriş aittir. Girişe ait FOU’nun merkezi x'_k gibi bir noktadır.)

Tablo 3.4 Şekil 3.9 için $x_{k,\max}^{-l}$ değerleri

Durumlar	x'_k 'nin yeri	Çarpım t-norm	Minumum t-norm
Şekil 3.9 (a)	$x'_k \leq m_{k1}^l$	$x_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{k2}^2 m_{k1}^l + \sigma_k^{l2} x'_k}{\sigma_{k2}^2 + \sigma_k^{l2}}$	$x_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{k2} m_{k1}^l + \sigma_k^l x'_k}{\sigma_{k2} + \sigma_k^l}$
Şekil 3.9 (b)-(d)	$x'_k \in [m_{k1}^l, m_{k2}^l]$	$x_{k,\max}^{-l} = x'_k$	$x_{k,\max}^{-l} = x'_k$
Şekil 3.9 (e)	$x'_k \geq m_{k2}^l$	$x_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{k2}^2 m_{k2}^l + \sigma_k^{l2} x'_k}{\sigma_{k2}^2 + \sigma_k^{l2}}$	$x_{k,\max}^{-l} = \frac{\sigma_{k2} m_{k2}^l + \sigma_k^l x'_k}{\sigma_{k2} + \sigma_k^l}$

Tablo 3.5 Şekil 3.9 için çarpım t-norm'a bağlı olarak $\underline{x}_{k,\max}^l$ değerleri

Durumlar	x'_k 'nin yeri	Çarpım t-norm
Şekil 3.9 (a) ve (b)	$x'_k < \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{k1}^2(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}}$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{k1}^2 m_{k2}^l + \sigma_k^{l^2} x'_k}{\sigma_{k1}^2 + \sigma_k^{l^2}}$
Şekil 3.9 (c)	$x'_k \in \left[\frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{k1}^2(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}}, \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{k1}^2(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}} \right]$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2}$
Şekil 3.9 (d) ve (e)	$x'_k > \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{k1}^2(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^{l^2}}$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{k1}^2 m_{k1}^l + \sigma_k^{l^2} x'_k}{\sigma_{k1}^2 + \sigma_k^{l^2}}$

Tablo 3.6 Şekil 3.9 için minimum t-norm'a bağlı olarak $\underline{x}_{k,\max}^l$ değerleri

Durumlar	x'_k 'nin yeri	Çarpım t-norm
Şekil 3.9 (a) ve (b)	$x'_k < \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{k1}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l}$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{k1} m_{k2}^l + \sigma_k^l x'_k}{\sigma_{k1} + \sigma_k^l}$
Şekil 3.9 (c)	$x'_k \in \left[\frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} - \frac{\sigma_{k1}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l}, \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{k1}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l} \right]$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2}$
Şekil 3.9 (d) ve (e)	$x'_k > \frac{m_{k1}^l + m_{k2}^l}{2} + \frac{\sigma_{k1}(m_{k2}^l - m_{k1}^l)}{2\sigma_k^l}$	$\underline{x}_{k,\max}^l = \frac{\sigma_{k1} m_{k1}^l + \sigma_k^l x'_k}{\sigma_{k1} + \sigma_k^l}$

3.4. Tip-2 TSK (Takagi Sugeno Kang) Bulanık Mantık Sistemler

Bugün en çok kullanılan iki bulanık sistem Mamdani ve Sugeno'dur. Bu iki bulanık sistem, IF-THEN kuralları ile karakterize edilir ve aynı varsayım yapısına sahiptir. Sugeno sistemleri Mamdani sistemlerden ayıran en büyük fark kuralların sonuç kısımlarının bulanık kümelerle değil de giriş değişkenlerinin fonksiyonları türünden ifade edilmesidir.

3.4.1. Birinci Dereceden Tip-2 Tsk Bulanık Mantık Sistemler

p tane girişi $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$, tek çıkışa $y \in Y$ sahip tip-2 TSK bulanık mantık sistemin kural yapısı:

$$\begin{aligned} R^i : & \text{IF } x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^i \text{ and...and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^i, \\ \text{THEN } & Y^i = C_0^i + C_1^i x_1 + C_2^i x_2 + \dots + C_p^i x_p \end{aligned} \quad (3-83)$$

şeklindedir. ($i = 1, \dots, M$ için C_j^i ($j = 1, \dots, p$) sonuç tip-1 bulanık kümeleridir.) Bu yapı ayrıca sistemin giriş ve çıkışı arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Tip-2 sugeno bulanık mantık sistemlerde, i. kuralın and işleminin sonucu $F^i(x)$

$$F^i(x) = \prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{F}_k^i}(x_k) \quad (3-84)$$

denklemlle bulunur. Sistemin çıkışı genişleme ilkeleri uygulanarak,

$$Y_{TSK2}(x) = \int_{y^1 \in Y^1} \dots \int_{y^M \in Y^M} \int_{f^1 \in F^1} \dots \int_{f^M \in F^M} \left[T_{l=1}^M \mu_{Y^i}(y^i) \star T_{l=1}^M \mu_{F^i}(f^i) \right] \left/ \frac{\sum_{l=1}^M f^i y^i}{\sum_{l=1}^M f^i} \right. \quad (3-85)$$

denkleminde hesaplanabilir. $Y^i = C_0^i + C_1^i x_1 + C_2^i x_2 + \dots + C_p^i x_p$ tip-1 bulanık kümedir.

Denklem (3-85), kümelerin merkezi yöntemi ile tip-indirgemenin formülüne benzemektedir. Ancak tip-2 sugeno bulanık mantık sistemler için tip-indirgeme kullanılmamaktadır [23].

3.4.2. Aralıklı Tip-2 Tsk Bulanık Mantık Sistemler

Tip-2 sugeno bulanık mantık sistem kurallarında, varsayım için aralıklı tip-2 bulanık kümeler ve sonuç için aralıklı tip-1 bulanık kümeler kullanıldığında,

$$\mu_{\tilde{F}_k^i}(x_k) = \left[\underline{\mu}_{\tilde{F}_k^i}(x_k), \overline{\mu}_{\tilde{F}_k^i}(x_k) \right] \quad (k = 1, \dots, p) \quad (3-86)$$

$$C_j^i = \left[c_j^i - s_j^i, c_j^i + s_j^i \right] \quad (3-87)$$

olarak ifade edilir. c_j^i , C_j^i 'nin merkezini ve s_j^i , C_j^i 'nin standart sapmasını göstermektedir.

Kümeler aralıklı olduğunda $F^i(x)$ 'i hesaplamak daha kolay olacaktır.

$$F^i(x) = \left[\underline{f}^i(x), \overline{f}^i(x) \right] \quad (3-88)$$

$$\underline{f}^i(x) = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^i}(x_1) \star \dots \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^i}(x_p) \quad (3-89)$$

ve

$$\overline{f}^i(x) = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^i}(x_1) \star \dots \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^i}(x_p) \quad (3-90)$$

Kuralın sonuç kısmı aralıklı bir kümedir $Y^i = [y_l^i, y_r^i]$.

$$y_l^i = \sum_{k=1}^p c_k^i x_k + c_0^i - \sum_{k=1}^p |x_k| s_k^i - s_0^i \quad (3-91)$$

$$y_r^i = \sum_{k=1}^p c_k^i x_k + c_0^i + \sum_{k=1}^p |x_k| s_k^i + s_0^i \quad (3-92)$$

Aralık kümeler için denklem (3-85),

$$Y_{TSK,2}(x) = [y_l, y_r] = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \dots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \overline{f}^1]} \dots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \overline{f}^M]} 1 \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \quad (3-93)$$

şeklindedir. $\underline{f}^i$, $\overline{f}^i$, y_l^i ve y_r^i ifadeleri (3-89)-(3-92) denklemlerinden hesaplanmaktadır.

Aralıklı tip-2 sugeno bulanık mantık sistemlerde Y , aralıklı tip-1 bulanık küme olduğundan sistem çıkışı y_l ve y_r 'nin aritmetik ortalaması alınarak

$$Y_{TSK,2}(x) = \frac{y_l + y_r}{2} \quad (3-94)$$

şeklinde bulunur.

3.4.3. Normalleştirilmemiş Aralıklı Tip-2 Tsk Bulanık Mantık Sistemler

TSK bulanık mantık sistemlerin çıkışını normalleştirmek, sistemin karmaşıklığını artırır ve bazı durumlarda gereksizdir. Normalleştirilmemiş aralıklı tip-2 sugeno bulanık mantık sistemin çıkışı

$$Y_{TSK,2}(x) = [y_l, y_r] = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \dots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \overline{f}^1]} \dots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \overline{f}^M]} 1 \bigg/ \sum_{i=1}^M f^i y^i \quad (3-95)$$

şeklindedir.

4. GELİŞTİRİLEN YAZILIM: FUZZY2 TOOLBOX

Fuzzy2 toolbox, tip-2 bulanık mantık tabanlı sistemlerin tasarımı için m-dosyaları ile oluşturulmuş fonksiyon topluluğudur. Bu alet-kutusu ile üçüncü bölümde anlatılan singleton tip2 mamdani, tip-1 non-singleton tip-2 mamdani, tip-2 non-singleton tip-2 mamdani ve tip-2 sugeno bulanık mantık sistemler tasarlanabilir, grafiksel ortamda hazırlanan bu sistemler SIMULINK ortamında kullanılabilir.

Fuzzy2 toolbox, uluslararası kullanıma sunulmak ve fuzzy toolbox kullanımına alışkın olan kullanıcıların zorlanmaması amacıyla İngilizce olarak hazırlanmıştır.

4.1. Fuzzy2 Toolbox Menüleri ve Metotları

Tasarlanan alet-kutusu pencerelerinin menü çubuğunda fuzzy toolbox'da da kullanılan *file*, *edit* ve *view* menüleri bulunmaktadır. Ancak fuzzy toolbox'ın *file* menüsündeki tip-1 sistemlerin yerini tip-2 sistemler almıştır.

- File menüsü

New Singleton Type-2 Mamdani FIS... Singleton Type-2 Mamdani tipte tasarlanacak bulanık sistem için Untitled isimli yeni bir pencere açar.

New Type-1 Non-Singleton Type-2 Mamdani FIS... Type-1 Non-Singleton Type-2 Mamdani tipte tasarlanacak bulanık sistem için Untitled isimli yeni bir pencere açar.

New Type-2 Non-Singleton Type-2 Mamdani FIS... Type-2 Non-Singleton Type-2 Mamdani tipte tasarlanacak bulanık sistem için Untitled isimli yeni bir pencere açar.

New Type-2 Sugeno FIS... Type-2 Sugeno tipte tasarlanacak bulanık sistem için Untitled isimli yeni bir pencere açar.

Open from disk... Diskte kayıtlı olan .fis uzantılı dosyalara ulaşmak için kullanılır.

Save to disk... Varolan sistemi, .fis uzantısıyla disk üzerine kaydeder.

Save to disk as... Varolan sistemi, .fis uzantısıyla disk üzerine farklı bir isim kullanarak farklı bir yere kaydetmek amacıyla kullanılır.

Open from workspace... Çalışma alanındaki belirli FIS yapı değişkeninden sistemi yükler.

Save to workspace... Sistemi, varolan ismi ile çalışma alanındaki FIS yapı değişkenine kaydeder.

Save to workspace as... Sistemi farklı bir isim ile çalışma alanındaki FIS yapı değişkenine kaydeder.

Close window... Kullanılan pencereyi kapatır.

- Edit menüsü

Add input... Varolan sisteme yeni bir giriş ekler.

Add output... Varolan sisteme yeni bir çıkış ekler.

Remove variable... Seçili olan değişkeni siler.

Undo... Son yapılan değişikliği geri alır.

- View menüsü

Edit membership functions... Membership Function Editor penceresini açar.

Edit rules... Rule Editor penceresini açar.

View rules... Rule Viewer penceresini açar.

View surface... Surface Viewer penceresini açar.

Tip-2 bulanık mantık sistemlerin tasarımı için hazırlanan fuzzy2 toolbox pencerelerinde altı metod bulunmaktadır. Bu metodlar için,

1. *And method*: min, prod veya Custom
2. *Or method*: max, Custom
3. *Implication method*: min, prod veya Custom (Sugeno tipi sistemler için bu metod pasiftir.)
4. *Aggregation method*: max, sum veya Custom (Sugeno tipi sistemler için bu metod pasiftir.)
5. *Type-Reduction method*: Mamdani tipi sistemler için center_of_sets, center_of_sums, centroid, height, modified-height, custom (Sugeno tipi sistemler için bu metod pasiftir.)
6. *Defuzzification method*: Mamdani tipi sistemler için centroid, custom Sugeno tipi sistemler için wtaver (weighted average) or wtsun (weighted sum)

seçenekleri mevcuttur.

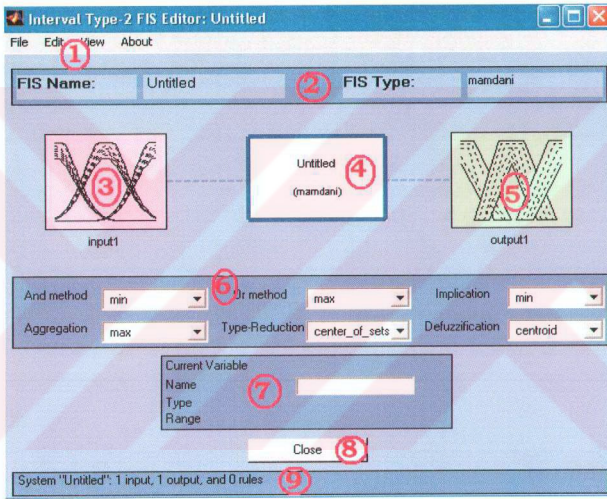
4.2. Fuzzy2 Toolbox Pencereleri

Fuzzy2 toolbox, tip-2 bulanık mantık sistemleri tasarlamada kullanılacak 5 önemli pencereye sahiptir. Bu pencereler sayesinde üyelik fonksiyonları tanımlanabilir, kurallar oluşturulabilir, sistem davranışları analiz edilebilir.

4.2.1. Fis Editor

Bulanık sistem hakkında genel bilgi veren şekil 4.1'de gösterilen fis editor penceresi, MATLAB komut satırına fuzzy2 yazılarak çalıştırıldığında ekrana gelmektedir. Daha kolay anlaşılması için numaralandırılan Şekil 4.1'deki 1 numaralı alan, bulanık sistemleri düzenleme,

açma ve kaydetme işlemlerini gerçekleştirebilen menüleri göstermektedir. 2 numaralı alanda sistemin ismi görülür. Sistem ismi, File menüsünden save as... seçeneği tıklanarak değiştirilebilir. Giriş değişkeni simgesini gösteren 3 numaralı alana ve çıkış değişkeni simgesini gösteren 5 numaralı alana çift tıkladığında membership function editor penceresi açılır. 4 numaralı alana çift tıkladığında rule editor penceresi açılır. 6 numaralı alanda bulunan menülerle, sistemde kullanılacak metotlara ait fonksiyonlar seçilir. 7 numaralı alan seçili olan giriş veya çıkış değişkeninin ismini belirlemek için kullanılır. 8 numaralı alandaki close düğmesi tıklanarak fis editor penceresi kapatılır. 9 numaralı alandaki durum çubuğu, en son yapılan işlemi açıklamaktadır.



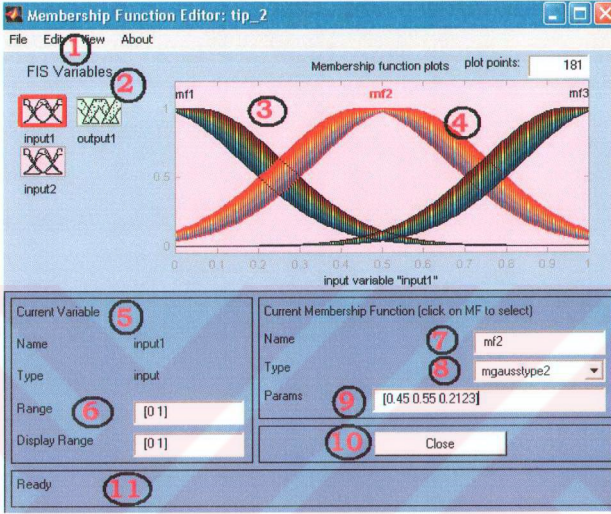
Şekil 4.1. Fis Editor penceresi

Ayrıca 2 numaralı alanda görülen sistem tipinden farklı tipte bir sistem tasarlanmak istendiğinde file menüsünden uygun seçenek seçilmelidir. Sistemin sahip olacağı giriş çıkış sayısı ise edit menüsünden add input veya add output seçenekleri ile ayarlanmalıdır.

4.2.2. Membership Function Editor

Bu editor ile giriş ve çıkış değişkenleri için üyelik fonksiyonları eklenebilir veya eklenen üyelik fonksiyonları üzerinde değişiklik yapılabilir.

Şekil 4.2'de gösterilen Membership function editor penceresi, fis editor penceresindeki giriş veya çıkış değişkenleri simgelerinden biri çift tıklanarak yada view menüsünden edit membership functions seçeneği tıklanarak ekrana getirilir.



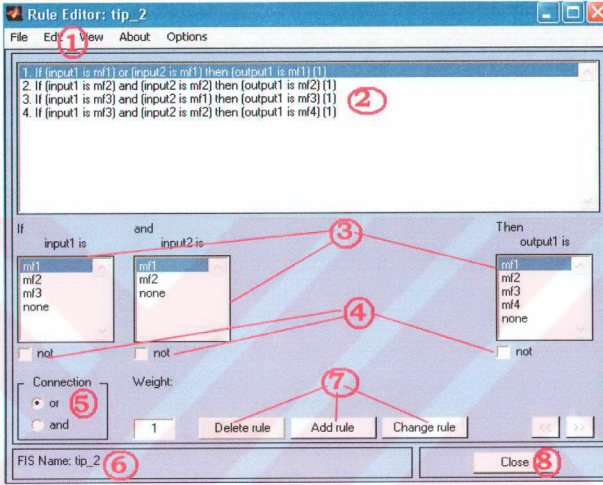
Şekil 4.2. Membership Function Editor penceresi

Şekil 4.2'de 1 numaralı alan bulanık sistemleri düzenleme, açma ve kaydetme işlemlerini gerçekleştirebilen menüleri, 2 numaralı alan giriş çıkış değişkenlerinin bulunduğu alanı göstermektedir. Üyelik fonksiyonu eklenmek veya değiştirilmek istenen değişken seçili hale getirilmelidir. 3 numaralı alanda seçili olan değişkenin üyelik fonksiyonları, 4 numaralı alanda seçili olan üyelik fonksiyonu, 5 numaralı alanda seçili olan değişkenin ismi ve tipi, 6 numaralı alanda sahip olduğu aralık, 7 numaralı alanda seçili üyelik fonksiyonunun ismi, 8 numaralı alanda seçili üyelik fonksiyonunun tipi, 9 numaralı alanda seçili üyelik fonksiyonunun parametreleri görülmektedir. 10 numaralı alandaki close düğmesi tıklanarak membership function editor penceresi kapatılır. 11 numaralı alandaki durum çubuğu, en son yapılan işlemi açıklamaktadır.

Giriş çıkış değişkenlerine üyelik fonksiyonu eklenmek istendiğinde edit menüsünden add MFs seçeneği tıklanmalıdır.

4.2.3. Rule Editor

Şekil 4.3'de gösterilen rule editor penceresi view menüsünden edit rules seçeneği tıklanarak çağrılır. Bu editörde sistem için kural eklenip, eklenen kurallar options seçeneğinden uygun format seçilerek ekranda görüntülenebilir.

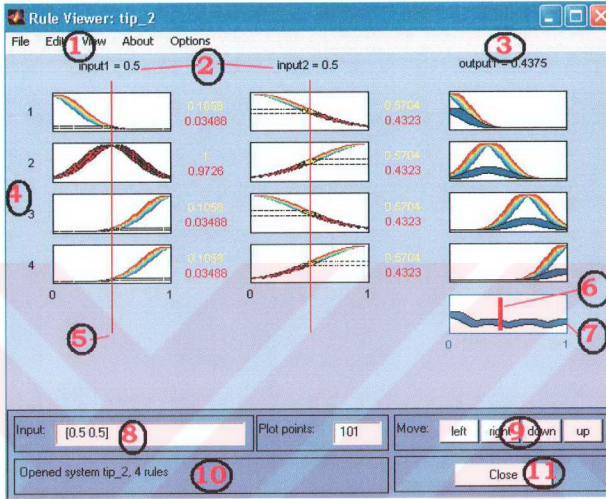


Şekil 4.3. Rule Editor penceresi

Bulanık sistemleri düzenleme, açma ve kaydetme işlemlerini gerçekleştirebilen menüler şekil 4.3'deki 1 numaralı alandan, sisteme eklenen kurallar ise 2 numaralı alandan edilebilir. 3 numaralı alanda giriş ve çıkış değişkenleri için üyelik fonksiyonu seçimi yapılır. 4 numaralı alanda bulunan onay kutuları seçili hale getirilirse kurallara olumsuzluk kazandırılır. Kuralların antecedent kısımlarını bağlamak için 5 numaralı alanda bulunan and ve or seçeneklerinden biri tercih edilmelidir. 6 numaralı alandaki durum çubuğu, en son yapılan işlemi açıklamaktadır. Kural eklenmek yada eklenen kural üzerinde değişiklik yapılmak istendiğinde 7 numaralı alandaki düğmeler tıklanmalıdır. 8 numaralı alandaki close düğmesi tıklanarak rule editor penceresi kapatılır.

4.2.4. Rule Viewer

Giriş değişkenleri değiştirilerek bulanık sistemin davranışları ve kuralların sistem üzerindeki etkisi bu pencereden ayrıntılı olarak incelenebilir.

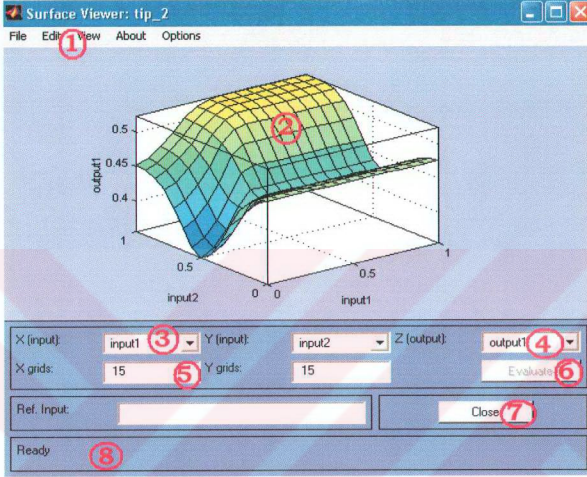


Şekil 4.4. Rule Viewer penceresi

Şekil 4.4'de 1 numaralı alanda bulanık sistemleri düzenlemede kullanılan menüler, 2 numaralı alanda giriş, 3 numaralı alanda çıkış değişkenlerinin aldığı değerler ve bu değişkenlerde hangi üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca 2 numaralı alandaki pembe ve sarı ile yazılmış rakamlar girişlerin alt ve üst fonksiyonlarında aldığı değerleri göstermektedir. 4 numaralı alandaki her satır bir kurala karşılık gelmektedir. Bu alandaki kural numaraları tıklandığında, tıklanan kural durum çubuğunda görünür. Giriş değişkeninin değeri değiştirilmek istendiğinde 5 numaralı alandaki çizgi hareket ettirilmelidir. 6 numaralı alanda gösterilen çizgi durultulmuş çıkış değerini, 7 numaralı alandaki mavi grafik birleştirilmiş kural çıkışlarını göstermektedir. Giriş değerleri 8 numaralı alana doğrudan yazılarak da değiştirilebilir. Pencere üzerindeki grafikler 9 numaralı alandaki düğmelerle sola, sağa, aşağıya, yukarıya kaydırılabilir. 10 numaralı alandaki durum çubuğunda en son yapılan işlem açıklanmaktadır. Rule viewer penceresi kapatılmak istendiğinde 11 numaralı alandaki close düğmesi tıklanabilir.

4.2.5. Surface Viewer

Şekil 4.5 'de gösterilen surface viewer penceresinde, sistemin iki girişi ve çıkışı 3 boyutlu olarak gösterilir.

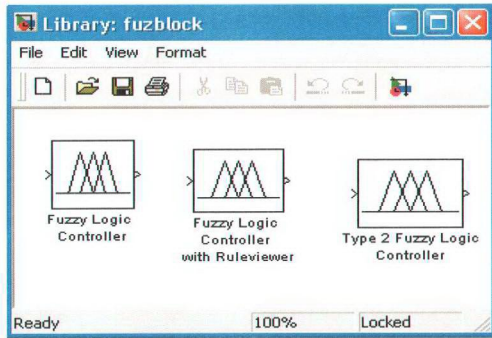


Şekil 4.5. Surface Viewer penceresi

Bulanık sistemi düzenleme işlemleri diğer pencerelerde olduğu gibi şekil 4.5'deki 1 numaralı alandan yapılır. 2 numaralı alanda gösterilen grafik çıkış yüzeyini göstermektedir. Grafikte görünecek giriş değişkeni 3 numaralı alandan, çıkış değişkeni 4 numaralı alandan seçilir. 5 numaralı alanda grid sayısı belirlenir. Ayarlamalar yapıldıktan sonra çizim için 6 numaralı alandaki düğme tıklanır. Surface viewer penceresi kapatılmak istendiğinde 7 numaralı alandaki close düğmesi tıklanabilir. 8 numaralı alandaki durum çubuğunda en son yapılan işlem açıklanmaktadır.

4.3. Type2 Fuzzy Logic Controller Bloğu

SİMULINK'de fuzzy toolbox kütüphanesine ilave edilen şekil 4.6'da gösterilen Type-2 Fuzzy Logic isimli blok, fis editörde oluşturulan FIS değişkeni ile bağlantı kurarak benzetimi yapılacak sistemlerde kullanılmaktadır.



Şekil 4.6. Type2 Fuzzy Logic bloğu

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bilinen bulanık mantığın yeni bir açılımı olan tip-2 bulanık mantık, belirsizlikleri modelleme ve belirsizliklerin etkilerini azaltma konusunda son yıllarda aktif olarak çalışılan ilgi çekici araştırma konularındandır. Bugüne kadar tip-2 bulanık kümeler, mobil robotların kontrolü, zaman serisi tahmini, fonksiyon yaklaştırma, radyo-grafik şekil işlemleri, ilişkili veri tabanlarının kullanımı, bulanık ilişkili denklemlerin çözümü, anket incelemelerinden bilgi çıkarımı alanlarında kullanılmıştır [24-29]. Tip-2 bulanık mantık sistemlerin, gürültülü ölçümlerin sabit olmadığı, veri üretim mekanizmasının zamanla değiştiği, karakteristiklerin değişken istatistiksel niteliklerle tanımlandığı, bilginin IF-THEN anket yapısı kullanılarak uzmandan alındığı, dilsel terimlerin ölçülemeyen bir alanda kullanıldığı durumlarda, bulanık kontrolde, ilaç teşhisinde ve mali uygulamalarda kullanımı uygun görülmüştür.

Uygulamaların bu kadar artış göstermesi ve tip-2 bulanık mantık sistemlerin benzetimini yapan, kullanıcıya bu sistemlerin özelliklerini belirleme olanağı sunan herhangi bir ticari yazılım mevcut olmaması sebebi ile bu tez çalışmasında tip-2 bulanık mantık ve tip-2 bulanık sistemlerin özellikleri anlatılmış, geliştirilen fuzzy2 toolbox hakkında bilgi verilmiştir. Temel amaç, araştırmacıların yapacağı benzetim çalışmalarını kolaylaştıracak bir yazılım geliştirmek ve böylece bu çalışmalara katkıda bulunmaktır.

Fuzzy2 toolbox ile aralıklı (interval) Mamdani ve Sugeno bulanık sistemlerin tasarımı mümkün kılınmıştır. Aralıklı tip-2 bulanık mantık sistemlerin seçilmesinin nedeni, genel tip-2 bulanık mantık sistemlerin çok karmaşık ve yoğun işlemler içermesi ve bu nedenle uygulamalara elverişli olmamasıdır. Alet-kutusu hazırlanırken kaynak [2]de verilen bazı fonksiyonlardan (m-dosyaları) yararlanılmıştır.

Fis editörde oluşturulan bulanık sistemi SIMULINK ortamına taşımak için fuzzy toolbox kütüphanesine *type2 fuzzy logic controller* bloğu eklenmiştir. Böylelikle tip-2 bulanık sistemlerin benzetimini SIMULINK ortamında yapma imkanı da doğmuştur.

5.2 Öneriler

- Geliştirilen fuzzy2 toolbox'da örnek üyelik fonksiyonu olarak tip-2 gaussian seçilmiştir. Tasarlanan tip-2 bulanık sisteme bağlı olarak farklı üyelik fonksiyonları da eklenebilir.
- Hazırlanan araç kutusuna sistemi geriye yayılım, en küçük kareler ve svd-qr yöntemlerini [30-32] kullanarak eğitmeyi sağlayacak yeni bir bölüm eklenebilir.

- Fuzzy2 toolbox hazırlanırken sadece m-dosyalarından yararlanılmıştır. Daha hızlı çalışmayı sağlamak için bazı kodlar c++ dosyaları ile hazırlanabilir.
- Kaynak [2]de verilen m-dosyalarına bağlı olarak kuralların varsayım kısımlarında sadece tip-2 bulanık kümeler kullanılmıştır. Yapılan çalışmaya bağlı olarak varsayım kısmında tip-1 ve tip-2 kümeler birlikte kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A., 1999, "From Computing With Numbers to Computing With Words-From Manipulation of Measurements to Manipulation of Perceptions," IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, vol.4, pp. 105-119.
- [2] Mendel, J. M., 2001, Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions. Prentice-Hall, NJ, USA.
- [3] Wang, L. -X., 1997, A Course in Fuzzy Systems and Control. Prentice-Hall, NJ, USA.
- [4] Passino K. M. and Yurkovich, S., 1998, Fuzzy Control. Addison-Wesley, USA.
- [5] Dubois, D. and Prade, H., 1980, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, NY.
- [6] Klir, G. J. and Folger, T. A., 1988, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [7] John, R. I. and Mendel, J. M., 2002, "Tip-2 Fuzzy Sets Made Simple," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 10, no. 2.
- [8] Mizumoto, M. and Tanaka, K., 1976, "Some Properties of Fuzzy Sets of Type-2," Information and Control, vol. 31, pp. 312-340.
- [9] Yager, R. R., 1986, "A Characterization of the Fuzzy Extension Principle," J. Fuzzy Sets and Systems, vol. 18, pp. 205-217.
- [10] Karnik, N. N. and Mendel, J. M., 2000, "Operations on Type-2 Fuzzy Sets," accepted for publication, Int'l. J. On Fuzzy Sets and Systems.
- [11] Kaufman, A. and Gupta, M. M., 1991, Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory Applications, Van Nostrand Reinhold, NY.

- [12] Dubois, D. and Prade, H., 1978, "Operations on Fuzzy Numbers," *Int. J. Systems Science*, vol. 9, pp. 613-626.
- [13] Mizumoto, M. and Tanaka, K., 1981, "Fuzzy Sets of Type-2 Under Algebraic Product and Algebraic Sum," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 5, pp. 277-290.
- [14] Bustince, H. and Burillo, P., 2000, "Mathematical Analysis of Interval-valued Fuzzy Relations: Application to Approximate Reasoning," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 113, pp. 205-219.
- [15] Karnik, N. N. and Mendel, J. M., 1998, Type-2 Fuzzy Logic Systems: Type-Reduction, in *Proc. IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pp. 2046-2051.
- [16] Karnik, N. N. and Mendel, J. M., 2000, "Centroid of a Type-2 Fuzzy Set," submitted for publication.
- [17] Karnik, N. N. and Mendel, J. M., May. 1998, "Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems," in *Proc. 1998 IEEE FUZZ Conf.*, pp. 915-920, Anchorage, AK.
- [18] Karnik, N. N., 1998, Type-2 Fuzzy Logic Systems, Ph.D. Dissertation, University of Southern California, Los Angeles, CA.
- [19] Karnik, N. N., Liang, Q. and Mendel, J. M., 1999, "Type-2 Fuzzy Logic Systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 7, pp. 643-658.
- [20] Hisdal, E., 1981, "The IF-THEN ELSE Statement and Interval-Values Fuzzy Sets of Higher Type," *Int'l. J. Man-Machine Studies*, vol. 15, pp. 385-455.
- [21] Liang, Q. and Mendel, J. M., May 2000a, "Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems," in *Proc. FUZZ-IEEE'00*, San Antonio, TX.
- [22] Mouzoris, G. C. and Mendel, J. M., Feb. 1997, "Nonsingleton Fuzzy Logic Systems: Theory and Application" *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 5, no. 1.

- [23] Liang, Q. and Mendel, J. M., 1999, "An Introduction to Type-2 TSK Fuzzy Logic Systems," in Proc. FUZZ-IEEE'99, Seoul, Korea.
- [24] Wu, K. C., 1996, "Fuzzy Interval Control of Mobile Robots," Computers Elect. Eng., vol. 22, pp. 211-229.
- [25] John, R. I., Innocent, P. R. and Barnes, M. R., July 1997, "Type-2 Fuzzy Sets and Neuro-Fuzzy Clustering of Radiographic Tibia Images," in Proc. of Sixth Int'l. Conf. on Fuzzy Systems, pp. 1375-1380, Barcelona, Spain.
- [26] Chaneau, J. L., Gunaratne M. and Altschaeffl, A. G., 1987, "An Application of Type-2 Sets to Decision Making in Engineering," in Analysis of Fuzzy Information, vol. II: Artificial Intelligence and Decision Systems (J. Bezdek, Ed.), CRC, Boca Raton, FL.
- [27] Chiang, D. A., Chow L.-R. and Hsien, N.-C., Nov. 1997, "Fuzzy Information in Extended Fuzzy Relational Databases," Fuzzy Sets and Systems, vol. 92, pp. 1-20.
- [28] Crowder, R. S., 1990, "Predicting the Mackey-Glass Time Series With Cascade-Correlation Learning," in Proc. Connectionist Models Summer School, Carnegie Mellon Univ., pp. 117-123.
- [29] Cybenko, G., 1989, "Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function," Mathematics of Control, Signals, and Systems.
- [30] Mouzouris, G. C. and Mendel, J. M., 1997, "A Singular-Value-QR Decomposition Based Method for Training Fuzzy Logic Systems in Uncertain Environments," J. of Intelligent and Fuzzy Systems, vol. 5, pp. 367-374.
- [31] Mouzouris, G. C. and Mendel, J. M., 1996, "Designing Fuzzy Logic Systems for Uncertain Environments Using a Singular-Value-QR Decomposition Method," Proc. of the Fifth IEEE Int'l. Conf. On Fuzzy Systems, New Orleans, LA.
- [32] Wang, L. -X. and Mendel, J. M., 1992, "Back-Propagation of Fuzzy Systems as Non-Linear Dynamic System Identifiers," Proc. IEEE Int'l. Conference on Fuzzy Systems, pp. 1409-1418, San Diego, CA.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Elazığ'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladıktan sonra 1998 yılında Fırat Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik Bilgisayar Eğitimi Bilgisayar Öğretmenliği Bölümü'nü kazandı. 2002 yılında bu bölümden mezun olup Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Bilgisayar Eğitimi Ana bilim Dalı Kontrol Eğitimi Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı yıl Elazığ İlköğretim okuluna bilgisayar öğretmeni olarak atandı. Halen bu görevi sürdürmektedir. Yabancı dili İngilizce'dir.

