

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ VE KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SUMUDU
DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Burcu BAYDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hasan BULUT

OCAK-2014

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ VE KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SUMUDU DÖNÜŞÜM
METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Burcu BAYDEMİR
(111121118)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik
Danışmanı: Doç. Dr. Hasan BULUT

Ocak – 2014

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADİ VE KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SUMUDU DÖNÜŞÜM
METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Burcu BAYDEMİR
(111121118)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Aralık 2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 3 Ocak 2014

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Murat ŞAT (E.Ü)

Ocak-2014

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Doç. Dr. Hasan BULUT'a ve Öğr. Gör. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ' a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren ve hep yanımda olan sevgili aileme ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

Burcu BAYDEMİR

Elazığ-2014

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
TABLOLAR LİSTESİ.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
ÖZET.....	VII
SUMMARY.....	VIII
GİRİŞ.....	1
1. BÖLÜM.....	2
1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2. BÖLÜM.....	14
2.1. MATERYAL VE METOTLAR.....	14
2.1.1. Sumudu Dönüşüm Metodu.....	14
2.1.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	16
3. BÖLÜM.....	19
3.1. METOTLARIN UYGULANMASI.....	19
3.1.1 Sumudu Dönüşüm Metodunun Uygulanması.....	19
Örnek.1. Homojen Kısmi Diferansiyel Denklem.....	19
Örnek.2. Homojen Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem.....	21
Örnek.3. Dalga denklemi.....	24
Örnek.4. Lineer Telegraf Denklemi.....	26
Örnek.5. Değişken Katsayılı Kısmi Diferansiyel Denklem.....	32
Örnek.6. Sabit Katsayılı Adi Diferansiyel Denklem.....	34
4. SONUÇ.....	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	40

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. (3.1.1) denkleminin $0 < x < \pi, 0 < t < 1$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün üç boyutlu görünümü	20
Şekil 3.2. (3.1.1) denkleminin $0 < x < \pi, t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün iki boyutlu görünümü.	21
Şekil 3.3. (3.1.9) denkleminin $0 < x < \pi, 0 < t < 1$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün üç boyutlu görünümü	23
Şekil 3.4. (3.1.9) denkleminin $0 < x < \pi, t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün iki boyutlu görünümü	24
Şekil 3.5. (3.1.16) denkleminin $0 < x < \pi, 0 < t < 1$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün üç boyutlu görünümü	25
Şekil 3.6. (3.1.16) denkleminin $0 < x < \pi, t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün iki boyutlu görünümü	25
Şekil 3.7. Lineer Telegraf denkleminin, STM yardımıyla elde edilen (3.1.32) analitik çözümü ile tam çözümünün üç boyutlu görünümü.	28
Şekil 3.8. Lineer Telegraf denkleminin, STM yardımıyla elde edilen (3.1.32) analitik çözümü ile tam çözümünün $t = 0.1$ olduğunda iki boyutlu görünümü	28
Şekil 3.9. Lineer Telegraf denkleminin, Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen (3.1.43) yaklaşık çözümü ile gerçek çözümünün üç boyutlu görünümü	31
Şekil 3.10. Lineer Telegraf denkleminin, Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen (3.1.43) yaklaşık çözümü ile gerçek çözümünün $t = 0.1$ olduğunda iki boyutlu görünümü.	31
Şekil 3.11. (3.1.45) denkleminin $0 < x < 1, 0 < t < 1$ için STM yardımıyla elde edilen üç boyutlu görünümü	33
Şekil 3.12. (3.1.45) denkleminin $0 < x < \pi, t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen iki boyutlu görünümü.	33
Şekil 3.13. (3.1.58) denkleminin $0 < x < 20$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün iki boyutlu görünümü.	35

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1. Lineer Telegraf Denklemi için; Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen (3.1.43) yaklaşık çözümü, STM ile elde edilen (3.1.32) analitik çözümü ve gerçek çözümler için sayısal veri tablosu.	32
---	----

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbf{R}$	: Reel Sayılar Cümlesi
ε	: Epsilon
$\mathbf{D}$	: Diferansiyel Operatör
$!$	: Faktöriyel
λ	: Lambda
α	: Alpha
β	: Beta
τ	: Tau
ρ	: Ro
π	: Pi
Γ	: Gamma
Σ	: Toplam Sembolü
$\int$	: Integral
Ω	: Omega
$\lim$	: Limit
A_n	: Adomian Polinomları

ÖZET

Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sumudu Dönüşüm Metodu ile Çözümü

Yapılan çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmamıza yardımcı olacak temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde Sumudu Dönüşüm metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu anlatıldı.

Üçüncü bölümde Sumudu Dönüşüm metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulandı. Elde edilen çözümlere karşılık gelen iki ve üç boyutlu grafikler çizildi.

Dördüncü bölümde ise metotlarının adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması sonucu elde edilen veriler kullanarak genel bir sonuç verildi.

SUMMARY

The solutions via Sumudu Transform Method of Ordinary and Partial Differential Equations

This study is made up of the four chapters.

In chapter one, it has been given fundamental definitions and theorems which will help to us.

In chapter two, Sumudu Transform method and Homotopy perturbation method have been given.

In chapter three, Sumudu Transform method and Homotopy perturbation method have been applied partial and ordinary differential equations. The surfaces of two and tree dimensional graphics obtained solutions have been drawn.

In chapter four, it has been given a general conclusion by using datas which obtained solutions via these methods.

GİRİŞ

Doğadaki pek çok fiziksel olay daha iyi anlaşılması için matematiksel modellerle ifade edilmiştir. Bu modeller ise adi ve kısmi diferansiyel denklem ve sistemleriyle belirtilir. Bu nedenle böyle bir modelin analitik ve yaklaşık çözümlerini bilmek modelin belirttiği fiziksel olayı daha iyi anlamak ve yorumlamak açısından önemlidir. Bu yüzden son yıllarda bu tür denklem ve sistemlerin yaklaşık ve analitik çözümlerini bulmak için pek çok yöntem geliştirilmiş olup bunlardan bazıları Homotopi analiz metodu, Homotopi pertürbasyon metodu, Varyasyonel iterasyon metodu, Adomiyani ayrışım metodu, Sonlu farklar yöntemi, yaklaşık çözüm yöntemleri arasında; Tanh metodu, (G'/G) - açılım yöntemi, F- açılım yöntemi ve Sumudu dönüşüm yöntemini de analitik yöntemler arasında sayabiliriz.

Biz bu çalışmamızda Laplace dönüşümüne benzer bir integral dönüşümü olan Sumudu dönüşüm metodu ile adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmeye çalıştık. Sumudu bir Sinhala kelimesidir ve 'pürüzsüz, düz' anlamlarına gelmektedir. Sumudu dönüşüm metodu ilk olarak 1993 yılı başlarında Gamage K.Watugala [1,2] tarafından mühendislik kontrol problemlerini çözmek için geliştirildi. Watugala daha sonra 2002 yılında dönüşümü kısmi diferansiyel denklemlere genişletti [3]. Diferansiyel denklemlere uygulanması ve dönüşümün tersi formülü ilk olarak Weerakoon tarafından 1994 ve 1998 yıllarındaki iki çalışmayla yapıldı [4,5]. Sumudu Dönüşümü ilk Weerakoon tarafından Deakin' e karşı savunuldu. Deakin Sumudu ve Laplace dönüşümü arasında fark olmadığını iddia etti [6,7]. Uygulamaları Asiru'nun katlı integral denklemleri ve ayrık dinamik sistemleri kullanarak ard arda yaptığı üç çalışması takip etti [8-10]. Bu noktada Belgacem daha önceki referansları ve Laplace dönüşümüyle bağlantılarını kullanarak Sumudu dönüşümünün teori ve uygulamalarını geliştirdi [11-18]. Son on yılda Belgacem ve diğer bilim insanları Sumudu dönüşüm metodu üzerine çeşitli çalışmalar yaptı [19,20].

1.BÖLÜM

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1.

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonu ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

veya genel olarak

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklem, adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır [31].

Tanım 1.1.2.

İçinde en az iki bağımsız değişken ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan denkleme kısmi türevli denklem adı verilir [32].

z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0,$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.3.

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir [32].

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir.

Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y),$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y).$$

Örnek 1.1.1.

$$xz_x - yz_y = \sin x,$$

Denklemi birinci mertebeden, birinci dereceden, lineer bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.1.2.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z} + z^3,$$

denklemi ikinci mertebeden, ikinci dereceden, lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.1.4.

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı- lineer (kuasi-linear) denklem adı verilir [32]. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z),$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

Örnek 1.1.3.

a) $z_x z_{xx} + xzz_y = \sin y,$

b) $z_{xy} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (z_x^2 + z) - 6xz^3 \sin y = 0,$

c) $z_y z_{xx} - 3x^3 z z_{xy} + 2z_x - x^3 yz = 0,$

denklemlerinin tümü yarı-linear denklemlerdir.

Tanım 1.1.5.

Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f' 'nin k .mertebeyle kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k -sınıfındandır denir.

Tanım 1.1.6.

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen hemen lineerdir denir [32].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y),$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;
- 2) $\Delta(x, y) = 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;
- 3) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

Örnek 1.1.4.

$$\text{a) } x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = t + 1,$$

$$\text{b) } 3xu_{xx} + 4xyu_{yy} + 5xz^3u_{zz} + 2zu_{xy} - 4u_{yz} + u^2u_x - u_y + xye^z = 0,$$

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

Örnek 1.1.5.

$$(x^2 - 1)z_{xx} + 2yz_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0,$$

denkleminin tipi aşağıdaki gibi belirlenir.

Çözüm:

$$A(x, y) = x^2 - 1, B(x, y) = 2y, C(x, y) = -1,$$

olduğundan $\Delta(x, y)$ fonksiyonu

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 4y^2 - 4(x^2 - 1)(-1) = 4(x^2 + y^2) - 4,$$

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen denklem

$$D_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 > 1, x, y \in R\} \text{ bölgesinde hiperbolik;}$$

$$D_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\} \text{ çemberi üzerinde parabolik;}$$

$$D_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1, x, y \in R\} \text{ açık diskte eliptik tiptendir.}$$

Örnek 1.1.6.

$$x^2 z_{xx} + xyz_{xy} + z_{yy} + xz_x + yz_y + z = 0,$$

denkleminin tipi aşağıdaki gibi belirlenir.

Çözüm:

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = x^2(y^2 - 4),$$

olup

$$y = \pm 2 \text{ doğruları üzerinde parabolik;}$$

$$-2 < y < 2 \text{ şeridi içinde eliptik;}$$

$$y < -2 \text{ bölgesi ile } y > 2 \text{ bölgesinde hiperbolik tiptendir.}$$

Tanım 1.1.7.

f fonksiyonu $I \subset R$ aralığında tanımlı ve n 'inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu türevleri;

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

diferansiyel denkleminde yerlerine yazıldığında

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)),$$

ifadesi x bağımsız değişkenine göre bir özdeşlik oluyorsa, $f^{(n)}(x)$ fonksiyonuna (1.1) denkleminin tam çözümü denir [31].

Tanım 1.1.8.

Bir diferansiyel denklemde keyfi sabitlere bağlı bulunan çözüme genel çözüm, keyfi sabitlere değer verilmesiyle elde edilen çözüme özel çözüm denir [31].

Tanım 1.1.9.

$f^{(n)}(x)$ bağımsız ve z bağımlı değişken olmak üzere birinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemin genel şekli ;

$$D_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 > 1, x, y \in R\}, \quad (1.2)$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^1[D]$; $A^2 + B^2 \neq 0$; $G \in C[D]$ ve D , R^2 'nin düzgün sınırlı, basit irtibatlı bir alt bölgesi veya yerine göre R^2 'nin tamamıdır.

$$L = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + C(x, y), \quad (1.3)$$

operatörünü alırsak (1.2) denklemi kısaca

$$L_z = G(x, y), \quad (1.4)$$

şeklinde yazılabilir. (1.2) denkleminde $G(x, y) = 0$ ise o zaman ortaya çıkan

$$L_z = 0, \quad (1.5)$$

denklemine (1.4) denklemine ilişkin homojen denklem denir. Aksi halde homojen olmayan denklem denir.

Tanım 1.1.10.

(1.2) denklemini sağlayan en az birinci basamaktan sürekli türetilebilir $z = \mathcal{G}(x, y)$ fonksiyonuna (1.2) denkleminin integral yüzeyi denir.

Tanım 1.1.11.

Bir türetilebilir keyfi fonksiyon kapsayan ve keyfi fonksiyonun her seçimi için (1.5) denklemini sağlayan bir yüzey ailesine homojen denklemin genel çözümü denir.

Tanım 1.1.12.

(1.4) homojen denkleminin genel çözümü Z_h ve (1.3) homojen olmayan denklemin bir özel çözümü Z_p ise $Z = Z_h + Z_p$ yüzey ailesine (1.3) ile verilen homojen olmayan denklemin genel çözümü denir.

Tanım 1.1.13.

Homotopi kavramı, 1895 yılında Jules Henri Poincaré tarafından tanıtılmıştır. f ve g bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına sürekli dönüşümler olsun. $I = [0,1]$ R 'nin kapalı bir alt kümesi olmak üzere ; $\forall x \in X$ için

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = g(x)$$

eşitliklerini sağlayan sürekli bir $H : X \times I \rightarrow Y$ fonksiyonu varsa f, g 'ye homotopiktir denir. H dönüşümüne f ve g arasında bir homotopi denir ve H, f ve g arasında bir homotopi olduğunda, $H : f \cong g$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.14.

Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözülemeyen bir problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan matematiksel metotlar içerir. Eğer problem, bir 'küçük' terim eklenerek tam olarak çözülebilen probleme formüle ediliyorsa bu probleme pertürbasyon teorisi uygulanabilir. Pertürbasyon teorisi, problemin çözümünü, tam olarak çözülebilen probleminden sapmayı ölçen bir 'küçük' parametrenin kuvvet serisi cinsinden bulmayı amaçlar. Kuvvet serisindeki ilk terim, tam olarak çözülebilen problemin çözümü iken, diğer terimler, çözümde başlangıç problemine göre sapmayı tanımlarlar. A çözümüne yaklaşım için aşağıdaki küçük parametreye göre açılan (burada parametre ε 'dir) seri verilsin:

$$A = \varepsilon^0 A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots,$$

Bu örnekte A_0 tam olarak çözülebilen başlangıç probleminin bilinen çözümünü ve $A_1, A_2, \dots$ bir sistematik yöntemle iteratif olarak bulunan daha yüksek dereceden çözümleri gösterir. ε 'nin çok küçük olması durumunda, yukarıdaki serinin yakınsak olması küçük ε değeri için bulunan daha yüksek dereceden çözümlerin daha az önemli olduğu anlamına gelir. Bir yaklaşık pertürbasyon çözümü, seriyi bir yerden sonra kesip, genelde sadece ilk iki terimi, başlangıç çözümü ve 'birinci derece' pertürbasyon düzeltmesini, bırakarak elde edilir. ε 'nin çok küçük olmasına rağmen, bazı problemlerde çözüm yakınsak olmayabilir.

Birçok önemli problemde küçük pertürbasyonların verilmesi, çözümlerin niceleyici ve niteleyici özelliklerini ortaya koyar. Fakat bu özellikler, pertürbe edilmeyen problemlerin çözümlerinden oldukça farklı olabilirler. Örneğin;

ε çok küçük bir sayı olmak üzere

$$u = 3 + \varepsilon u^3, \quad (1.6)$$

denklemini çözünüz.

εu^3 terimi gayri lineer terimdir. ε küçük kabul edildiğinde nonlinear terimin etkisinde küçük olacağını söyleyebiliriz. Lineer kısmın çözümünün

$$u_0 = 3, \quad (1.7)$$

olduğu malumdur. Bu değer ε 'dan etkileneceği de unutulmamalıdır. Şu halde u 'nın değeri $u = u(\varepsilon, u_0)$ şeklindedir. Bu bağımlılığın

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3, \quad (1.8)$$

serisi şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada $u_1, u_2, u_3; \dots$ ler belirlenmesi gerekli fonksiyonlardır. (1.8) denklemini (1.6) denkleminde yerine yazarsak

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = 3 + \varepsilon \left[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 \dots \right]^3, \quad (1.9)$$

kübik terimi açıp sağ tarafı ε kuvvetleri cinsinden düzenleyelim,

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots, \\ &= 3 + \varepsilon u_0^3 + 3\varepsilon^2 u_0^2 u_1 + (3u_0^3 u_2 + \dots)^3 + \dots, \end{aligned}$$

aynı mertebeli mütekabil terimler eşitlenerek,

$$\begin{aligned} u_0 &= 3, \\ u_1 &= u_0^3, \\ u_2 &= 3u_0^2 u_1, \\ u_3 &= 3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.10)$$

bulunur. (1.10)' de sonsuz sayıda denklem vardır. Biz ancak ilk iki ya da üç terimi hesaplayıp yerine koyabiliriz. Daha fazla terimin hesaplanması bir yerden sonra oldukça zor olur. (1.10)'dan ilk üç terim,

$$\begin{aligned}
u_0 &= 3, \\
u_1 &= 27, \\
u_2 &= 729, \\
u_3 &= 972, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. O halde aranan u değeri

$$u = 3 + 27\varepsilon + 729\varepsilon^2 + 972\varepsilon^3 + \dots,$$

ile verilir. Burada hesaplama 3. terimde kesildiği için çözüm 3 mertebede yaklaşım adını alır. Bu seriye ne kadar terim katılırsa o kadar gerçek kökün gerçek değerine yaklaşılmış olur.

Tanım 1.1.15.

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup, fizik, mekanik, mühendislik, tıp ve bazı diğer bilim dallarında kullanılan önemli bir dönüşümdür. Bu dönüşüm, diferansiyel denklemlerin çözümünde de yararlanılabilen bir dönüşümdür. Bu dönüşümle çözümü elde edilen denklemlerin başlangıç şartlarını da ihtiva ettiği görülür.

$F(t)$, $t \geq 0$ 'ın pozitif değerleri için tanımlı t reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun. ($t < 0$ için $F(t) = 0$ kabul edilebilir); $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere,

t reel değişkeninin bir fonksiyonu e^{-st} ise,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Bu dönüşüm $L\{F(t)\}$ veya $f(s)$ ifadeleri ile gösterilir. Bu dönüşümü

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, \quad (1.11)$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 1.1.16.

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{ eğer } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}, \quad j = 1, 2, 3$$

olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü;

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(ut) dt, \quad u \in (-\tau_1, \tau_2), \quad (1.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.1.1.

$f(t), g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümü

$$S[a.f(t) + b.g(t)] = a.S[f(t)] + b.S[g(t)], \quad (1.13)$$

şeklinde lineerlik özelliğine sahiptir.

İspat:

$$\begin{aligned} S[a.f(t) + b.g(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-t} [a.f(ut) + b.g(ut)] dt = \int_0^{\infty} [a.e^{-t} f(ut) + b.e^{-t} g(ut)] dt, \\ &= \int_0^{\infty} [a.e^{-t} f(ut)] dt + \int_0^{\infty} [b.e^{-t} g(ut)] dt, \\ &= a \int_0^{\infty} [e^{-t} f(ut)] dt + b \int_0^{\infty} [e^{-t} g(ut)] dt, \\ &= a.S[f(t)] + b.S[g(t)]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Teorem 1.1.2

$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\right] = \frac{1}{u} [F(x, u) - f(x, 0)], \quad (1.15)$$

özelliğine sahiptir [4].

İspat:

$$\begin{aligned}
S\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right] &= \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt, \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} f(x,t) \right)_0^p + \int_0^p \frac{1}{u^2} e^{-\frac{t}{u}} f(x,t) dt \right], \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{u} f(x,0) + \frac{1}{u} \left(\int_0^p \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} f(x,t) dt \right) \right], \\
&= -\frac{1}{u} f(x,0) + \frac{1}{u} \left(\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} f(x,t) dt \right) = \frac{1}{u} [F(x,u) - f(x,0)].
\end{aligned}$$

Teorem 1.1.3.

$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right] = \frac{1}{u^2} \left[F(x,u) - f(x,0) - u \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} f(x,0) \right] \quad (1.16)$$

özelliğine sahiptir [4].

İspat:

$$S\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{1}{u} [F(x,u) - f(x,0)] \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\begin{aligned}
S\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right] &= S\left[\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right], \\
&= \frac{1}{u} [g(x,u) - g(x,0)], \\
&= \frac{1}{u} \left[\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} g(x,t) dt - g(x,0) \right], \\
&= \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u} F(x,u) - f(x,0) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) \right], \\
&= \frac{1}{u^2} F(x,u) - \frac{1}{u^2} f(x,0) - \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial t}(x,0).
\end{aligned}$$

Teorem 1.1.4.

$f^{(n)}(x, t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial t^3}\right] = \frac{1}{u^3} [F(x, u) - f(x, 0) - uf'(x, 0) - u^2 f''(x, 0)], \quad (1.17)$$

$$S\left[\frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial t^4}\right] = \frac{1}{u^4} [F(x, u) - f(x, 0) - uf'(x, 0) - u^2 f''(x, 0) - u^3 f'''(x, 0)], \quad (1.18)$$

$\vdots$

$$S[f^{(n)}(x, t)] = u^{-n} \left[F(x, u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^k f^{(k)}(x, 0) \right], \quad (1.19)$$

özelliklerine sahiptir.

Teorem 1.1.5.

$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\right] = F', \quad (1.20)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat:

$$S\left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{u} \cdot e^{-\frac{t}{u}} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \partial t = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{1}{u} \cdot e^{-\frac{t}{u}} f(x, t) dt = \frac{\partial F}{\partial x} = F'.$$

Teorem 1.1.6.

Özel olarak $f(t)$ fonksiyonunu $f(t) = e^{at}$ üstel olarak alırsak bu fonksiyonun Sumudu dönüşümü aşağıdaki şekildedir;

$$S[e^{at}] = \frac{1}{1-au}. \quad (1.21)$$

İspat:

$$\begin{aligned} S[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{a(ut)} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\int_0^p e^{t(au-1)} dt \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{t(au-1)}}{au-1} \right]_0^p, \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(au-1) \cdot e^{(1-au)t}} \right]_0^p, \\ &= \frac{1}{1-au}. \end{aligned}$$

2.BÖLÜM

2.1 MATERYAL VE METOTLAR

2.1.1 Sumudu Dönüşüm Metodu

Literatürde; fizikte, astronomide, mühendislikte yaygın olarak kullanılan birçok integral dönüşümü vardır. Bunlardan bazıları Laplace dönüşüm metodu, Fourier dönüşüm metodu, Mellin dönüşüm metodu ve Hankel gibi integral dönüşümlerin teori ve uygulamada birçok çalışma vardır. Sumudu dönüşümü [1-21] olarak adlandırılan ve kontrol mühendisliği problemlerindeki adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça yaygın olarak kullanılan bu metodu Watugala [1] ilk kez literatüre kazandırmıştır. Watugala bir $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlamıştır [21].

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{ eğer } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

olmak üzere

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(ut) dt, u \in (-\tau_1, \tau_2), \quad (2.1.1)$$

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u} \right) e^{\frac{-t}{u}} f(t) dt, \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (2.1.1) eşitliği verilen herhangi bir diferansiyel denkleme uygulanarak $F(u)$ Sumudu dönüşümü elde edilmiş olur. Bu dönüşümün ters Sumudu dönüşümü [12];

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F\left(\frac{1}{s}\right) \frac{ds}{s}, \quad (2.1.3)$$

olarak tanımlanır. Bu integralin hesabı oldukça zor olduğundan uygulamada daha önce hazırlanmış olan dönüşüm tablolarından yararlanılabilir [12]. (2.1.1) denkleminin (2.1.3) ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa Sumudu dönüşüm metoduyla verilen denklemin çözümü elde edilmiş olur.

Kısmi diferansiyel denklemlerde Sumudu dönüşümü uygulanarak $F(x,u)$ 'yu içeren diferansiyel denklemler elde edilir. Elde edilen bu denklemlerde $F(x,u)$ bağımlı değişkeninin bulunması HPM, ADM, VIM gibi bilinen yarı analitik metotlarla elde edilir.

Diğer dönüşümlerle yakınlığı;

Sumudu dönüşümü;

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (2.1.4)$$

olarak tanımlanan Laplace dönüşümünün farklı bir versiyonudur. Aynı zamanda, bu Laplace dönüşümü p-katlı Laplace-Carson dönüşümü olarak da bilinir [33];

$$C\{f(t)\} = G(p) = \int_0^{\infty} p e^{-pt} f(t) dt. \quad (2.1.5)$$

Bu üç dönüşüm ortak bir fonksiyon üzerinde karşılaştırılabilir. Örneğin t^n fonksiyonu üzerinde karşılaştırılırsa:

$$L\{t^n\}(s) = n! s^{-(n+1)},$$

$$C\{t^n\}(p) = n! p^{-(n)},$$

$$S\{t^n\}(u) = n! u^n.$$

Böylece (2.1.5) denkleminde $p = \frac{1}{u}$ alınarak (2.1.2) denklemi elde edilir. Sumudu

dönüşümünün farklı dönüşümlerle de arasında bağlantı vardır. Başlangıçta verilen $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ aşağıdaki şekilde Sumudu Dönüşümü $F_s(u)$ 'ya dönüştürülebilir;

$$F_s(u) = \frac{1}{u} F\left(\frac{1}{u}\right),$$

ve onun tersi aşağıdaki şekildedir;

$$F_s = \frac{1}{s} F_s\left(\frac{1}{s}\right).$$

2.1.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu

Bu bölümde, topolojideki homotopi ile pertürbasyon tekniğini birleştirerek pertürbasyon metotlarının dezavantajlarını ortadan kaldıran ve sadece zayıf lineer olmayan denklemler için değil aynı zamanda kuvvetli nonlineerliğe sahip denklemler için de elde edilen çözümlerin, tüm çözüm bölgesinde geçerli olduğu, yarı analitik bir metot olan homotopi pertürbasyon metodu tanıtılacaktır.

Bu metodun temel fikrini açıklamak için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önüne alalım

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad (2.2.1)$$

(2.2.1) denklemi için sınır koşulu

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.2.2)$$

şeklinde belirlenir. Burada A genel diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ ise Ω ya bağımlı bir sınırdır. Genel olarak A diferansiyel operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir ki burada L lineer, N ise lineer olmayan operatördür. (2.2.1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0, \quad (2.2.3)$$

buna göre homotopi tekniği ile bir homotopi oluşturulur.

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R,$$

olmak üzere

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.2.4)$$

dir. Burada $p \in [0, 1]$ bir parametre ve u_0 ise (2.2.1) denkleminin bir başlangıç koşuludur.

O halde

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) - pL(v) + pL(u_0) + pA(v) - pf(r) = 0,$$

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) - p[L(v) - L(u_0) - A(v) + f(r)] = 0,$$

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v) - A(v) + f(r)] = 0,$$

olup (2.2.1) den $A(u) - f(r) = 0$ dır.

Böylece

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v)] = 0, \quad (2.2.5)$$

elde ederiz ve buradan (2.2.5) eşitliğini kullanarak

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \Rightarrow L(u) = -N(u) + f(r), \quad (2.2.6)$$

denklemini bulunur. Bulunan (2.2.6) denklemini (2.2.5) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[-N(v) + f(r)] = 0,$$

olur. Böylece (2.2.4) denklemini

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.2.7)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $p \in [0, 1]$, başlangıç koşulu u_0 ve

$v(r, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ dir. (2.2.4) ve (2.2.7) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0, \quad (2.2.8)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0, \quad (2.2.9)$$

dir. Burada $p = 0$ olduğunda (2.2.4) denklemini lineer bir denklem haline gelir; $p = 1$ olduğunda lineer olmayan orijinal bir denklem olur. Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi, $L(v) - L(u_0) = 0$ denklemini $A(v) - f(r)$ denklemine dönüştürür.

$L(v) - L(u_0) = 0$ problemi 0'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi, sürekli olarak $A(v) - f(r) = 0$ problemine deforme oluyorsa bu topolojide *deforme* olarak adlandırılır.

$L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r)$ ifadelerine ise *homotopiktirler* denir. Homotopi Pertürbasyon Metodu gereğince, ilk olarak yerleştirilen parametre p 'yi küçük parametre olarak kabul ederek (2.2.4) ve (2.2.7) denklemlerinin çözümü

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n, \quad (2.2.10)$$

olacak şekilde p parametresinin kuvvet serisi

$$p^0 : f(v_0) - f(x_0) = 0, \quad (2.2.11)$$

$$p^1 : f'(v_0)v_1 + f(x_0) = 0, \quad (2.2.12)$$

$$p^2 : f'(v_0)v_2 + \frac{1}{2!} f''(v_0)v_1^2 = 0, \quad (2.2.13)$$

$$p^3 : f'(v_0)v_3 + \frac{1}{2!} f''(v_0)2v_1v_2 + \frac{1}{3!} f'''(v_0)v_1^3 = 0, \quad (2.2.14)$$

yazılır. (2.2.11)-(2.2.14) denklemlerinin v_1 , v_2 ve v_3 için çözülmesiyle

$$v_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(v_0)}, \quad (2.2.15)$$

$$v_2 = -\frac{f''(v_0)v_1^2}{2! f'(v_0)} = -\frac{f''(v_0)}{2! f'(v_0)} \left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)} \right)^2, \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{f''(v_0)v_1v_2}{f'(v_0)} - \frac{f'''(v_0)v_1^3}{3! f'(v_0)} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)} \right)^2 \left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)} \right)^3 + \frac{f'''(v_0)}{6 f'(v_0)} \left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)} \right)^3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

(2.2.10) serisinin v_1 , v_2 ve v_3 bileşenleri elde edilir. Elde edilen (2.2.15)-(2.2.17) denklemleri, (2.2.12) denkleminde $p=1$ alınarak yeniden yazılırsa (2.2.1) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \rightarrow 1} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots), \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} v_n, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

şeklinde elde edilir. Homotopi pertürbasyon metodu [22-28] geleneksel pertürbasyon metodunun tüm özelliklerine sahiptir. (2.2.10) serisi lineer olmayan $A(v)$ operatörüne bağlı olduğu oranda yakınsamaktadır [22].

(1) V ile ilgili olarak $N(V)$ nin ikinci türevi, göreceli olarak olabildiğince küçük değerlere sahip olmalıdır. $p \rightarrow 1$ gibi.

(2) $L^{-1}(\partial N / \partial V)$ nin normu ise serilere yaklaşım diye çok küçük olmalıdır

3. BÖLÜM

3.1 METOTLARIN UYGULANMASI

3.1.1 Sumudu Dönüşüm Metodunun Uygulanması

Örnek 1. Aşağıda (3.1.2) başlangıç koşuluyla verilmiş olan (3.1.1) homojen kısmi diferansiyel denkleminin Sumudu dönüşüm metodunu uygulayalım [29].

$$u_t = u_{xx} - u, \quad (3.1.1)$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0. \quad (3.1.2)$$

Teorem 1.2 ve Teorem 1.5 gereğince (3.1.1) denkleminin Sumudu dönüşümü

$$u_t = \frac{1}{u} [F - f_0], \quad u_{xx} = F'', \quad (3.1.3)$$

$$\frac{F}{u} - \frac{1}{u} \sin x = F'' - F,$$

$$F'' - \left(1 + \frac{1}{u}\right) F + \frac{1}{u} \sin x = 0, \quad (3.1.4)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.4) denklemindeki $F(x, u)$ bağımlı değişkeni HPM kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir. Pertürbasyon teorisi gereğince

$$(1-p) \left[F'' - u_0'' \right] + p \left[F'' - \left(1 + \frac{1}{u}\right) F + \frac{1}{u} \sin x \right] = 0,$$
$$F'' - u_0'' + p u_0'' - \left(1 + \frac{1}{u}\right) p F + \frac{p}{u} \sin x = 0, \quad (3.1.5)$$

şeklinde bir yapı oluşturulabilir. Buradaki F'' ve F değişkenleri teori gereğince aşağıdaki şekilde seçilir;

$$F = F_0 + p F_1 + p^2 F_2 + \dots,$$

$$F'' = F_0'' + p F_1'' + p^2 F_2'' + \dots.$$

Son eşitlikler (3.1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$F_0'' + p F_1'' + p^2 F_2'' - u_0'' + p u_0'' - \left(1 + \frac{1}{u}\right) p (F_0 + p F_1 + p^2 F_2) + \frac{1}{u} p \sin x = 0, \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) denklemi elde edilir. (3.1.6) denklemi p nin kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

Burada $F_0(x, u)$, $F_1(x, u)$ ve $F_2(x, u)$ Mathematica programı aracılığıyla hesaplanırsa;

$$p^0 : F_0'' - u_0'' = 0 \Rightarrow F_0 = u_0 = \sin x,$$

$$p^1 : F_1'' + u_0'' - \left(1 + \frac{1}{u}\right) F_0 + \frac{1}{u} \sin x = 0 \Rightarrow F_1 = -2 \sin x,$$

$$p^2 : F_2'' - \left(1 + \frac{1}{u}\right) F_1 = 0 \Rightarrow F_2 = \left(1 + \frac{1}{u}\right) 2 \sin x,$$

$\vdots$

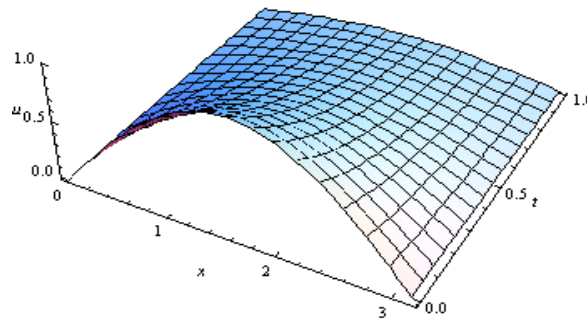
bulunur. (2.2.18) gereğince

$$\begin{aligned} F(x, u) &= F_0(x, u) + F_1(x, u) + F_2(x, u) + \dots, \\ &= \sin x - 2 \sin x + 2 \left(1 + \frac{1}{u}\right) \sin x - 2 \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 \sin x + \dots, \\ &= \sin x \left(\frac{1}{1 + 2u} \right), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

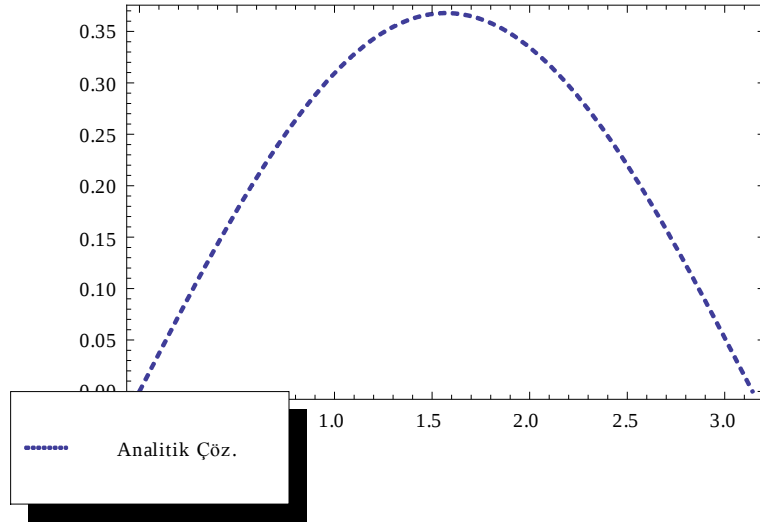
şeklinde (3.1.1) homojen kısmi diferansiyel denkleminin Sumudu dönüşümü elde edilmiş olur. (3.1.7) denklemin ters sumudu dönüşümü uygulanırsa [12];

$$u(x, t) = e^{-2t} \sin x, \quad (3.1.8)$$

(3.1.1) homojen kısmi diferansiyel denkleminin Sumudu dönüşümü kullanılarak analitik çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 3.1. (3.1.1) denkleminin $0 < x < \pi$, $0 < t < 1$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 3.2. (3.1.1) denkleminin $0 < x < \pi$, $t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün iki boyutlu görünümü

Örnek 2.

Aşağıda (3.1.10) başlangıç koşuluyla verilmiş olan (3.1.9) homojen olmayan kısmi diferansiyel denkleminin Sumudu dönüşümünü uygulayalım [29].

$$u_t = u_{xx} + \sin x, \quad (3.1.9)$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0. \quad (3.1.10)$$

Teorem 1.2 ve Teorem 1.5 gereğince (3.1.9) denkleminin Sumudu dönüşümü

$$\frac{1}{u} [F - f_0] = F'' + \sin x,$$

$$\frac{F}{u} - \frac{\cos x}{u} = F'' + \sin x,$$

$$\Rightarrow F'' - \frac{F}{u} + \sin x + \frac{\cos x}{u} = 0, \quad (3.1.11)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.11) denklemindeki $F(x, u)$ bağımlı değişkeni HPM kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

Pertürbasyon teorisi gereğince

$$F'' - u_0'' - pF'' + pu_0'' + pF'' + p \sin x - \frac{pF}{u} + \frac{p \cos x}{u} = 0, \quad (3.1.12)$$

şeklinde bir yapı oluşturulabilir. Buradaki F'' ve F değişkenleri teori gereğince aşağıdaki şekilde seçilir;

$$F = F_0 + pF_1 + p^2F_2 + \dots,$$

$$F'' = F_0'' + pF_1'' + p^2F_2'' + \dots.$$

Son eşitlikler (3.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$F_0'' + pF_1'' + p^2F_2'' - u_0'' + pu_0'' + p \sin x - \frac{p}{u}(F_0 + pF_1 + p^2F_2) + \frac{p \cos x}{u} = 0, \quad (3.1.13)$$

(3.1.13) denklemi elde edilir. (3.1.13) denklemi p nin kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$p^0 : F_0'' - u_0'' = 0 \Rightarrow F_0 = u_0 = \cos x,$$

$$p^1 : F_1'' + u_0'' + \sin x - \frac{\cos x}{u} + \frac{\cos x}{u} = 0 \Rightarrow F_1 = \cos x + \sin x,$$

$$p^2 : F_2'' - \frac{F_1}{u} = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{1}{u}(-\cos x - \sin x),$$

$\vdots$

Burada $F_0(x, u)$, $F_1(x, u)$ ve $F_2(x, u)$ Mathematica programı aracılığıyla hesaplanırsa ;

$$F_0(x, u) = \cos x,$$

$$F_1(x, u) = \cos x + \sin x,$$

$$F_2(x, u) = \frac{1}{u}(-\cos x - \sin x),$$

bulunur. (2.2.18) gereğince

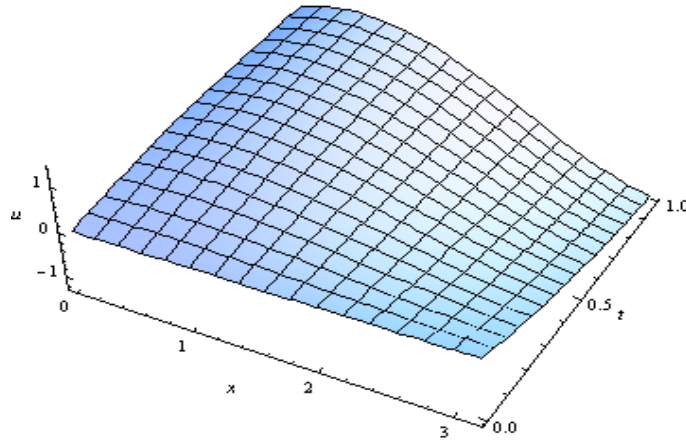
$$\begin{aligned} F(x, u) &= F_0(x, u) + F_1(x, u) + F_2(x, u) + \dots, \\ &= \cos x + \cos x + \sin x - \frac{1}{u}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{u^2}(\cos x + \sin x) + \dots, \\ &= \cos x + (\cos x + \sin x) \left(1 + \left(-\frac{1}{u} \right) + \left(-\frac{1}{u} \right)^2 + \dots \right), \\ &= \cos x + (\cos x + \sin x) \left(\frac{u}{u+1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(x) + \cos(x) \left(\frac{u}{u+1} \right) + \sin(x) \left(\frac{u}{u+1} \right), \\
&= \cos(x) \left(1 + \frac{u}{u+1} \right) + \sin(x) \left(\frac{u}{u+1} \right), \\
&= \cos(x) \left(\frac{2u+1}{u+1} \right) + \sin(x) \left(\frac{u}{u+1} \right), \\
&= \cos(x) \left(\frac{2u}{u+1} + \frac{1}{u+1} \right) + \sin(x) \left(\frac{u}{1+u} \right),
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

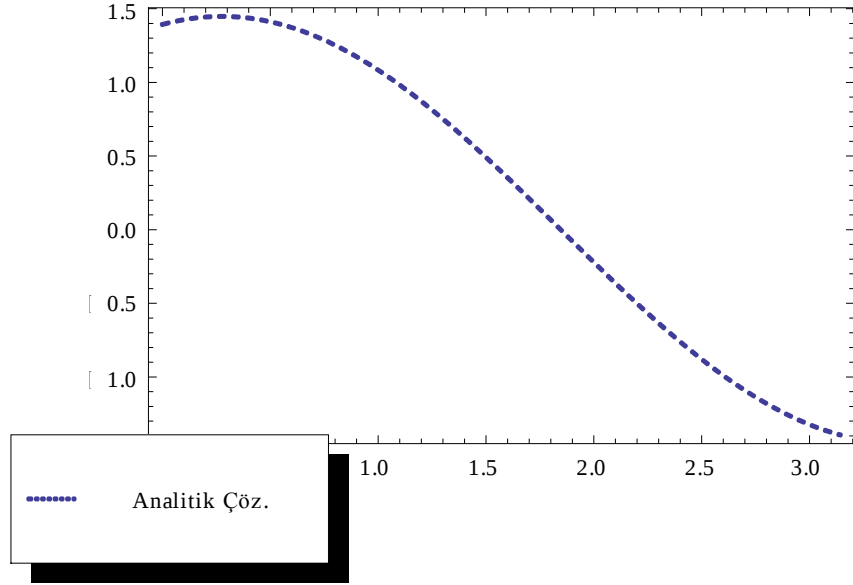
şeklinde (3.1.9) homojen olmayan kısmi diferansiyel denkleminin Sumudu dönüşümü elde edilmiş olur. (3.1.14) denklemin ters sumudu dönüşümü uygulanırsa [12];

$$u(x, t) = \left[2 \cos(x) + \sin(x) \right] (1 - e^{-t}) + \cos(x) e^{-t}, \tag{3.1.15}$$

(3.1.9) homojen olmayan kısmi diferansiyel denkleminin Sumudu dönüşümü kullanılarak analitik çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 3.3. (3.1.9) denkleminin $0 < x < \pi$, $0 < t < 1$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil3.4. (3.1.9) denkleminin $0 < x < \pi$ ve $t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün iki boyutlu görünümü

Örnek 3.

Aşağıda (3.1.17) başlangıç koşuluyla verilmiş (3.1.16) dalga denkleminin ($c=1$) Sumudu dönüşümünü uygulayalım [34] ;

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0, \quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 = 1 + 4 \sin x, \\ u_t(x, 0) &= -4 \sin x. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Teorem 1.2, Teorem 1.3 ve Teorem 1.5 gereğince (3.1.16) denkleminin Sumudu dönüşümü

$$S \left[\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} \right] = \frac{1}{u^2} F(x, u) - \frac{1}{u^2} f(x, 0) - \frac{1}{u} \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t}, \quad (3.1.18)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} = F''(x, u),$$

$$\frac{1}{u^2} F(x, u) - \frac{1}{u^2} f(x, 0) - \frac{1}{u} \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} = F''(x, u),$$

$$\frac{1}{u^2} F(x, u) - \frac{1}{u^2} - \frac{4}{u^2} \sin x + \frac{1}{u} 4 \sin x = F''(x, u),$$

$$F'' - \frac{1}{u^2} F = -\frac{1}{u^2} - \frac{4}{u^2} \sin x + \frac{4}{u} \sin x, \quad (3.1.19)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.19) denklemindeki $F(x, u)$ bağımlı değişkeni Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir;

$$F(x, u) = c_1 e^{\frac{x}{u}} + c_2 e^{-\frac{x}{u}} + \frac{1 + u^2 + 4 \sin x - 4u \sin x}{1 + u^2}. \quad (3.1.20)$$

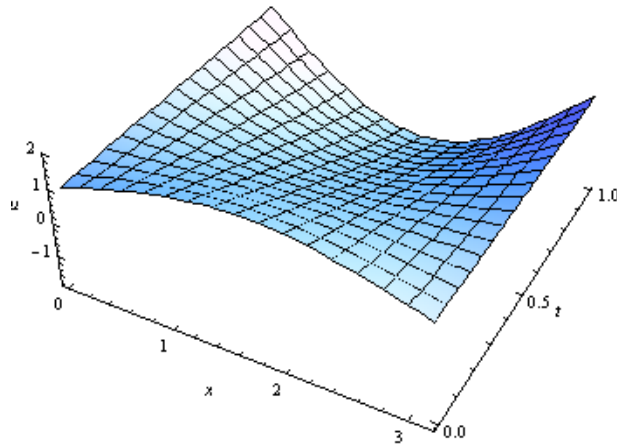
(3.1.20) denkleminde c_1 ve c_2 sabitleri özel olarak, $c_1 = c_2 = 0$ alınır;

$$\begin{aligned} F(x, u) &= \frac{1 + u^2 + 4 \sin x - 4u \sin x}{1 + u^2}, \\ &= 1 + \sin x \left[\frac{4}{1 + u^2} - \frac{4u}{1 + u^2} \right], \\ &= 1 + 4 \sin x \left[\frac{1}{1 + u^2} \right] - 4 \sin x \left[\frac{u}{1 + u^2} \right], \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

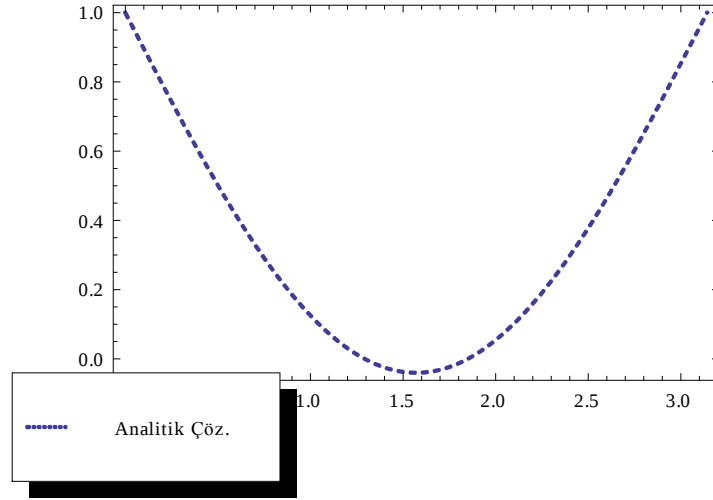
şeklinde (3.1.16) dalganın Sumudu dönüşümü elde edilmiş olur. (3.1.21) denklemin ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa [12];

$$u(x, t) = 1 + \sin(x) \cos(t) - 4 \sin(x) \sin(t), \quad (3.1.22)$$

(3.1.16) dalganın Sumudu dönüşümü kullanılarak analitik çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 3.5. (3.1.16) denkleminin $0 < x < \pi, 0 < t < 1$ için STM yardımıyla elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 3.6. (3.1.16) denkleminin $0 < x < \pi$, $t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen iki boyutlu görünümü

Örnek 4.

Lineer telegraf denkleminin çözümünü Sumudu dönüşüm metodu ile elde edecek olursak; Telegraf denkleminin genel formu [29]

$$u_{xx} = au_{tt} + bu_t + cu, \quad (3.1.23)$$

ile verilmektedir. $u = u(x, t)$ ve a, b ve c sabitler olmak üzere kablonun; iletkenlik, kapasitans, indüktans, iletkenlik ve direnciyle ilişkilidir. Dikkat edilmelidir ki telegraf denklemi bir lineer kısmi diferansiyel denklemdir. Telegraf denklemi sadece bir telgraf hattının elektrik sinyalleri içinde yayılımında ortaya çıkar. Elektrik sinyalleri nedeniyle $a = 0$ ve $c = 0$ alırsak

$$u_{xx} = bu_t, \quad (3.1.24)$$

standart lineer ısı denklemini elde ederiz.

Elektriksel özellikler $b = 0$ ve $c = 0$ 'a yol açabilir. Bundan dolayı

$$u_{xx} = au_{tt}, \quad (3.1.25)$$

standart lineer dalga denklemini elde ederiz.

Aşağıda başlangıç koşulları ile verilen lineer telegraf denklemini [30]

$$U_{xx}(x,t) = U_{tt}(x,t) + U_t(x,t) + U(x,t), \quad (3.1.26)$$

$$\begin{aligned} U(x,0) &= e^x, \\ U_t(x,0) &= -e^x, \\ U_{tt}(x,0) &= e^x, \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

şeklinde ele alalım. Sumudu teorisi gereğince

$$\begin{aligned} S[U_t(x,t)] &= \frac{1}{u} [F(x,u) - U(x,0)] = \frac{1}{u} [F(x,u) - e^x] = \frac{1}{u} F(x,u) - \frac{e^x}{u}, \\ S[U_{tt}(x,t)] &= \frac{1}{u^2} [F(x,u) - U(x,0) - uU'(x,0)], \\ &= \frac{1}{u^2} F(x,u) + \left(-\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right) e^x, \\ S[U_{xx}(x,t)] &= F''(x,u), \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

(3.1.28) eşitlikleri yazılabilir. (3.1.28) eşitlikleri (3.1.26) lineer telegraf denkleminde yazılırsa

$$F''(x,u) = \left(\frac{u^2 + u + 1}{u^2}\right) F(x,u) - \frac{1}{u^2} e^x, \quad (3.1.29)$$

şeklinde (3.1.26) telegraf denkleminin sumudu dönüşümü elde edilir. (3.1.29) diferansiyel denklemindeki $F(x,u)$ bağımlı değişkeni Mathematica programı yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir;

$$F(x,u) = \frac{e^x}{1+u} + c_1 \cos \left[xu^{-1} \left(\sqrt{-1-u-u^2} \right) \right] + c_2 \sin \left[xu^{-1} \left(\sqrt{-1-u-u^2} \right) \right]. \quad (3.1.30)$$

(3.1.30) denkleminde c_1 ve c_2 sabitleri özel olarak $c_1 = c_2 = 0$ alınırsa;

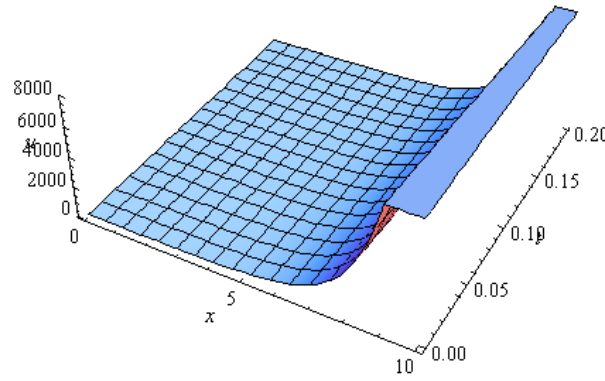
$$F(x,u) = \frac{e^x}{1+u}, \quad (3.1.31)$$

şeklinde (3.1.26) denkleminin Sumudu dönüşümü yeniden yazılabilir.

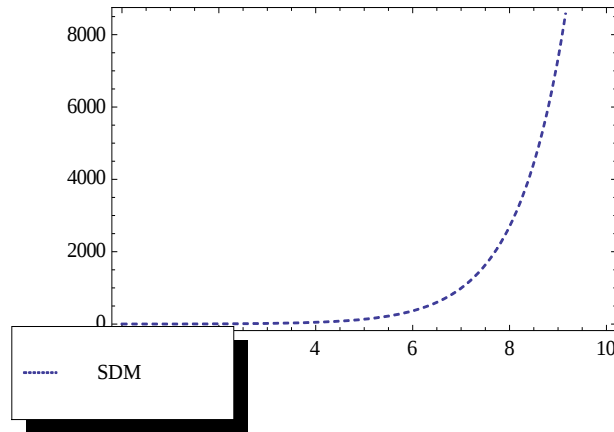
(3.1.31) denklemine ters Sumudu dönüşümü uygulanarak [12] lineer telegraf denkleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = e^{x-t}, \quad (3.1.32)$$

şeklinde elde edilir. Lineer Telegraf denkleminin, Sumudu dönüşüm metodu ile elde edilen analitik çözümünün iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekildedir.



Şekil 3.7. Lineer Telegraf denkleminin, Sumudu dönüşüm metodu ile elde edilen (3.1.32) analitik çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 3.8. Lineer Telegraf Denkleminin, Sumudu dönüşüm metodu ile elde edilen (3.1.32) analitik çözümünün $t = 0.1$ olduğunda iki boyutlu görünümü

Homotopi Pertürbasyon Metodunun Uygulanması

Homotopi pertürbasyon metodunu telegraf denkleminde uygulamak için (3.1.26) denklemini ele alalım. Pertürbasyon teorisi gereğince

$$(1-p)[Y''-u_0''] + p[Y'' + Y' + Y - Y''] = 0, \quad (3.1.33)$$

şeklinde bir homotopi bağıntısı yazılabilir. (3.1.33) denklemini yeniden düzenlenirse

$$Y'' - u_0'' + pu_0'' + pY' + pY - pY'' = 0, \quad (3.1.34)$$

elde edilir. Burada $Y'' = \frac{d^2u}{dt^2}$, $Y' = \frac{du}{dt}$, $Y'' = \frac{d^2u}{dx^2}$ ve Y bağımlı değişkenleri homotopi teorisi gereğince aşağıdaki şekilde seçilebilir;

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i Y_i, \\ Y' &= Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i Y'_i, \\ Y'' &= Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i Y''_i, \\ Y''' &= Y'''_0 + pY'''_1 + p^2Y'''_2 + p^3Y'''_3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i Y'''_i. \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

(3.1.35) denklemleri (3.1.34) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 - u_0'' + pu_0'' + pY'_0 + p^2Y'_1 + p^3Y'_2 + pY_0 + p^2Y_1 + p^3Y_2 \\ - pY''_0 - p^2Y''_1 - p^3Y''_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

denklemini elde edilir. (3.1.36) denklemini p 'nin kuvvetlerinin katsayılarına göre yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} p^0 : Y''_0 - u_0'' &= 0, \\ p^1 : Y''_1 + u_0'' + Y'_0 + Y_0 - Y''_0 &= 0, \\ p^2 : Y''_2 + Y'_1 + Y_1 - Y''_1 &= 0, \\ p^3 : Y''_3 + Y'_2 + Y_2 - Y''_2 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

(3.1.37) denklemleri bulunur ve bu denklemlerin çözümleri yapıldığında

$$p^0 : Y''_0 - u_0'' = 0 \Rightarrow Y''_0 = u_0'' \Rightarrow Y_0 = u_0 = e^x, \quad (3.1.38)$$

$$\begin{aligned}
p^1 : Y_1'' + u_0'' + Y_0' + Y_0 - Y_0'' &= 0 \Rightarrow Y_1'' = -u_0'' - Y_0' - Y_0 + Y_0'', \\
\Rightarrow Y_1 &= \int_0^t \int_0^t (-u_0'' - Y_0' - Y_0 + Y_0'') dt dt, \\
\Rightarrow Y_1 &= ct,
\end{aligned} \tag{3.1.39}$$

$$\begin{aligned}
p^2 : Y_2'' + Y_1' + Y_1 - Y_1'' &= 0 \Rightarrow Y_2'' = -Y_1' - Y_1 + Y_1'', \\
\Rightarrow Y_2 &= \int_0^t \int_0^t (-Y_1' - Y_1 + Y_1'') dt dt, \\
\Rightarrow Y_2 &= -\frac{ct^2}{2!} - \frac{ct^3}{3!},
\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

$$\begin{aligned}
p^3 : Y_3'' + Y_2' + Y_2 - Y_2'' &= 0 \Rightarrow Y_3'' = -Y_2' - Y_2 + Y_2'', \\
\Rightarrow Y_3 &= \int_0^t \int_0^t (-Y_2' - Y_2 + Y_2'') dt dt, \\
\Rightarrow Y_3 &= \frac{ct^3}{3!} + \frac{ct^4}{12} + \frac{ct^5}{5!},
\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

$\vdots$,

şeklinde (3.1.25) denkleminin ilk üç Y_0, Y_1, Y_2 ve Y_3 bileşenleri elde edilir. (3.1.25)

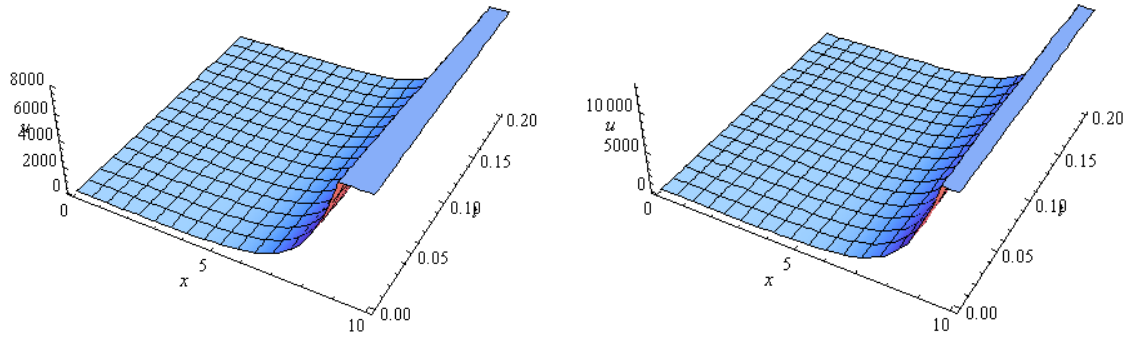
denklemini $p \rightarrow 1$ ve (3.1.38-3.1.41) bileşenleri ile beraber ele alındığında ilk üç terim için yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 + p^5Y_5 + p^6Y_6 + \dots, \\
&= \lim_{p \rightarrow 1} (Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 + p^5Y_5 + p^6Y_6 + \dots), \\
&= Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + \dots, \\
&= e^x + ct - \frac{ct^2}{2!} + \frac{ct^4}{4!} - \frac{ct^5}{5!} + \frac{ct^6}{6!} + \dots, \\
&= e^x + c \left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \dots \right),
\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

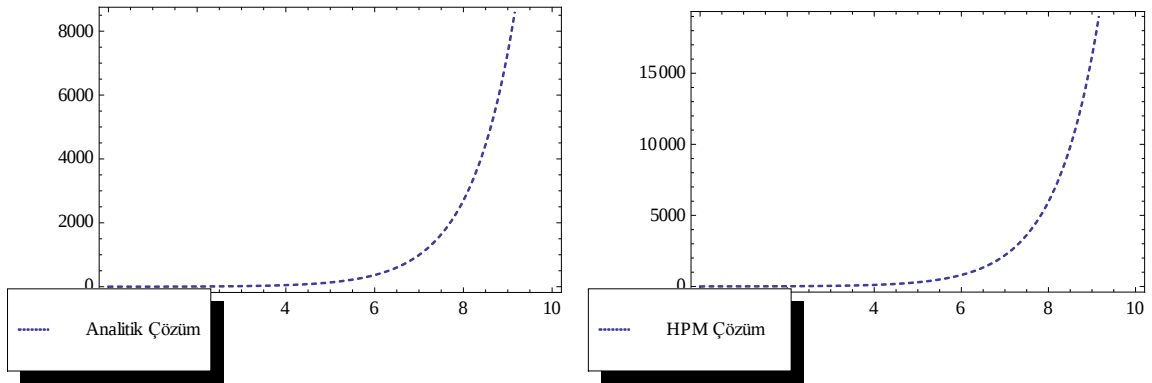
elde edilir. $c=1$ alınırsa (3.1.26) telegraf denkleminin ilk üç terimi için yaklaşık çözüm

$$U(x, t) = e^x + t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!}, \tag{3.1.43}$$

şeklinde elde edilir. Lineer Telegraf denkleminin, Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen yaklaşık çözümünün iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekildedir.



Şekil3.9. Lineer Telegraf Denkleminin, Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen (3.1.43) yaklaşık çözümü ile gerçek çözümün üç boyutlu görünümü



Şekil 3.10. Lineer Telegraf Denkleminin, Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen (3.1.43) yaklaşık çözümü ile gerçek çözümün $t = 0.1$ olduğunda iki boyutlu görünümü

Tablo 3.1. Lineer Telegraf Denklemi için; Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen (3.1.43) yaklaşık çözümü, Sumudu dönüşüm metodu ile elde edilen (3.1.32) analitik çözümü ve gerçek çözümler için sayısal veri tablosu

	$x = 0.1$			$x = 0.2$			$x = 0.3$		
t	$u_{Anal. \text{ Çöz}}$	u_{Hpm}	u_{Sdm}	$u_{Anal. \text{ Çöz}}$	u_{Hpm}	u_{Sdm}	$u_{Anal. \text{ Çöz}}$	u_{Hpm}	u_{Sdm}
0.015	1.08872	1.12006	1.08872	1.20322	1.23629	1.20322	1.32976	1.36475	1.32976
0.030	1.07251	1.13472	1.07251	1.18530	1.25095	1.18530	1.30996	1.37941	1.30996
0.045	1.05654	1.14916	1.05654	1.16766	1.26539	1.16766	1.29046	1.39385	1.29046
0.060	1.04081	1.16337	1.04081	1.15027	1.27960	1.15027	1.27125	1.40806	1.27125
0.075	1.02532	1.17736	1.02532	1.13315	1.29359	1.13315	1.25232	1.42205	1.25232

Tablo 1’ de Homotopi pertürbasyon metodu ile Sumudu dönüşüm metodu nümerik olarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen sayısal değerlere göre Homotopi pertürbasyon metodu yaklaşık çözüm verirken Sumudu dönüşüm metodu analitik çözüm vermektedir.

Örnek 5.

Aşağıda (3.1.46) başlangıç koşullarıyla verilmiş olan (3.1.45) değişken katsayılı kısmi diferansiyel denkleminde Sumudu dönüşüm metodunu uygulayalım [29];

$$u_{tt} = \frac{x^2}{2} u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (3.1.45)$$

$$u(x, 0) = u_0 = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (3.1.46)$$

Teorem 1.1.3 ve Teorem 1.1.5 gereğince (3.1.45) denkleminin Sumudu dönüşümü

$$\begin{aligned} S \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] &= \frac{1}{u^2} \left[F(x, u) - f(x, 0) - u \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) \right], \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{d^2 F(x, u)}{dx^2}, \\ \Rightarrow \frac{1}{u^2} \left[F(x, u) - f(x, 0) - u \frac{\partial f_0}{\partial t} \right] &= \frac{x^2}{2} F'', \\ \Rightarrow F'' - \frac{2}{x^2 u^2} F + \frac{2}{u^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

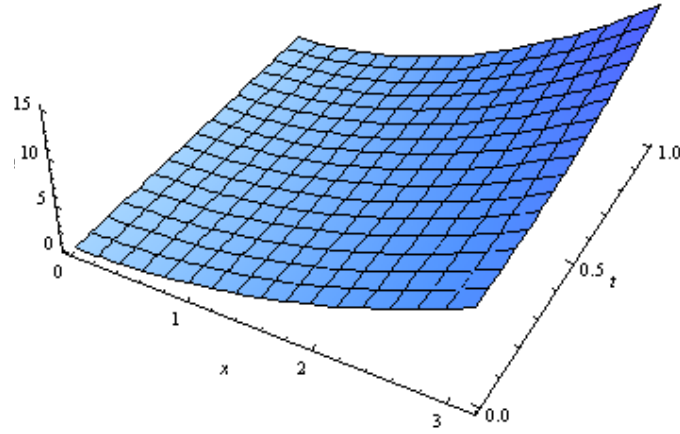
şeklinde elde edilir. (3.1.47) denklemindeki $F(x,u)$ bağımlı değişkeni Mathematica programı yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir;

$$F(x,u) = x^2 \left[\frac{1}{1-u^2} \right]. \quad (3.1.48)$$

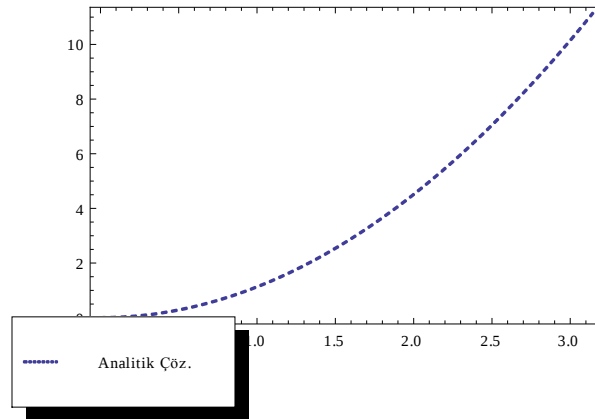
(3.1.48) denklemine ters Sumudu dönüşümü uygulanarak [12] (3.1.45) denkleminin analitik çözümü

$$u(x,t) = x^2 \cosh(t), \quad (3.1.49)$$

elde edilir.



Şekil 3.11. (3.1.45) denkleminin $0 < x < \pi$, $0 < t < 1$ için SDM yardımıyla elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 3.12. (3.1.45) denkleminin $0 < x < \pi$, $t = 0.5$ için STM yardımıyla elde edilen iki boyutlu görünümü

Örnek 6.

İkinci mertebeden sabit katsayılı adi diferansiyel denklemi aşağıdaki

$$U''(x) - U'(x) - 6U(x) = 0, \quad (3.1.50)$$

şeklinde ele alabiliriz. (3.1.50) denkleminin analitik çözümü

$$U(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}, \quad (3.1.51)$$

şeklindedir. (3.1.51) denkleminde

$$c_1 = 1, c_2 = 2, \quad (3.1.52)$$

alınırsa (3.1.50) adi diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$U(x) = e^{3x} + 2e^{-2x}, \quad (3.1.53)$$

dir. (3.1.50) denkleminin $x = 0$ noktasındaki değerleri

$$\begin{aligned} U(0) &= 3, \\ U'(0) &= -1, \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

dir. (3.1.50) denkleminin Sumudu dönüşümünü alırsak

$$S[U''] - S[U'] - S[6U] = 0 \quad (3.1.55)$$

$$\frac{1}{u^2} [F(u) - f(0) - uf'(0)] - \frac{1}{u} [F(u) - f(0)] - 6F(u) = 0 \quad (3.1.56)$$

$$\frac{1}{u^2} [F(u) - 3 + u] - \frac{1}{u} [F(u) - 3] - 6F(u) = 0,$$

$$\frac{1}{u^2} F(u) - \frac{3}{u^2} + \frac{1}{u} - \frac{1}{u} F(u) + \frac{3}{u} = 6F(u),$$

$$F(u) \left[\frac{1 - u - 6u^2}{u^2} \right] = \frac{3 - 4u}{u^2},$$

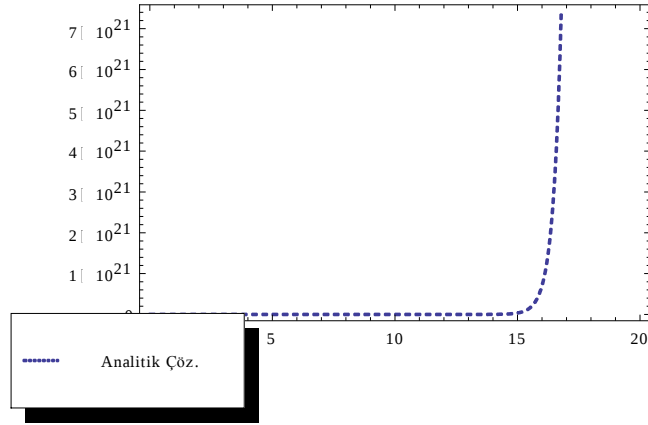
$$F(u) = \frac{3 - 4u}{1 - u - 6u^2},$$

$$F(u) = \frac{3 - 4u}{1 - u - 6u^2} = \frac{1}{1 - 3u} + \frac{2}{1 + 2u}, \quad (3.1.57)$$

(3.1.57) denklemine ters Sumudu dönüşümü [12] uygulanarak (3.1.50) denkleminin analitik çözümü

$$U(x) = e^{3x} + 2e^{-2x}, \quad (3.1.58)$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.13. (3.1.58) denkleminin $0 < x < 20$ için STM yardımıyla elde edilen çözümünün iki boyutlu görünümü

4. SONUÇ

Bu çalışmada Laplace dönüşüm metoduna bir alternatif metot olan ve literatüre yeni sunulan Sumudu dönüşüm metodu ve özellikleri verildi. Sumudu dönüşüm metodu kullanılarak homojen ve homojen olmayan diferansiyel denklemler, lineer telegraf denklemi, değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem, sabit katsayılı adi diferansiyel denklem ile dalga denkleminin analitik çözümleri elde edildi. Elde edilen analitik çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri Mathematica programı kullanılarak çizildi.

Bu veriler ışığında Sumudu dönüşüm metodu ile yarı analitik metotlar, belirli başlangıç koşullarıyla birlikte verilen diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri elde edilebilir.

Grafiklerden de görüldüğü gibi, Sumudu dönüşüm metodu, başlangıç koşullarıyla birlikte verilmiş olan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için farklı hesaplamalara gerek kalmadan kullanılabilir. Metodun uygulanması için ek bir hesaplama yapmaya gerek kalmaması önemli özelliklerinden bir tanesidir. Yarı analitik metotlara kıyasla oldukça kolay ve hızlı bir şekilde analitik çözüm vermesi bakımından önemli bir metottur. Sumudu dönüşüm metodu, uygulamalı bilimler, fizik, astronomi, mühendislik, elektrik ve elektronikte uygulama alanında ve fiziksel yapıların incelenmesinde ortaya çıkan problemlerin çözümlerini elde etmek için oldukça elverişlidir.

Bu çalışmada elde edilen şekiller ve tabloya göre, Sumudu dönüşüm metodu Laplace dönüşüm metoduna alternatif bir metot olarak diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan etkili bir metottur.

KAYNAKLAR

- [1] **Watugala, G.K.**, 1993. Sumudu Transform: A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **24(1)**, 35-43.
- [2] **Watugala, G.K.**, 1998. Sumudu Transform New Integral Transform to Solve Differential Equations and Control Engineering Problems, *Mathematical Engineering Industry*, **6(4)**, 319-329.
- [3] **Watugala, G.K.**, 2002. Sumudu Transform for Functions of two Variables, *Mathematical Engineering in Industry*, **8(4)**, 293-302.
- [4] **Weerakoon, S.**, 1994. Application of Sumudu Transform to Partial Differential Equations, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **25(2)**, 277-283.
- [5] **Weerakoon, S.**, 1998. Complex Inversion Formula for Sumudu Transform, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **29(4)**, 618-621.
- [6] **Deakin, M.A.B.**, 1997. The Sumudu Transform and the Laplace Transform, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **28(1)**, 159-160.
- [7] **Weerakoon, S.**, 1997. The Sumudu Transform and the Laplace Transform-Reply *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **28(1)**, 160.
- [8] **Asiru, M. A.**, 2001. Sumudu Transform and Solution of Integral Equations of Convolution type, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **32(6)**, 906-910.
- [9] **Asiru, M. A.**, 2002. Future Properties of the Sumudu Transform and its Applications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **33(2)**, 441-449.
- [10] **Asiru, M. A.**, 2003. Application of the Sumudu Transform to Discrete Dynamical Systems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **34(6)**, 944-949.

- [11] **Belgacem, F. B. M., Karaballi, A. A., Kalla, L. S.**, 2003. Analytical Investigations of the Sumudu Transform and Applications to Integral Production Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, **3**, 103-118.
- [12] **Belgacem, F. B. M., Karaballi, A. A.**, 2006. Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations and Applications, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **2006**, 23 pages.
- [13] **Belgacem, F. B. M.**, 2006. Introducing and analyzing deeper Sumudu properties Sumudu transform fundemantal properties investigations and applications, *Nonlinear Studies Journal*, **1(31)**, 101–114.
- [14] **Belgacem, F. B. M.**, 2007. Applications of the Sumudu Transform to Indefinite Periodic Parabolic Problems, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems and Aerospace Applications, Budapest, Hungary*, Chap. 6.
- [15] **Hussain, M.G.M, Belgacem, F.B.M.**, 2007. Transient Solutions of Maxwell's Equations Based on Sumudu Transformation, *Progress in Electromagnetic Research*, **74**, 273-289.
- [16] **Belgacem F. B. M.**, 2009. Sumudu applications to Maxwell's equations, *PIERS Online*, **5**, 355-360.
- [17] **Belgacem F. B. M.**, 2010. Sumudu Transform applications to Bessel's Functions and Equations, *Applied Mathematical Sciences*, **4**, 3665-3686.
- [18] **Katatbeh, K., Belgacem, F. B. M.**, 2011. Sumudu Transform of Fractional Differential Equations, *Nonlinear Studies Journal*, **18(1)**, 99-112.
- [19] **Salinaz, S., Jimenez, A., Artega F., Rodriguez J.**, 2004. Estudio Analitico de la Transformada de Sumudu y Algunas Aplicaciones a la Teoria de Control, *Revista Ingenieria UC.*, **11(3)**, 79-86. [in Spanish]
- [20] **Rana, M. A., Siddiqui A. M, Ghor, Q. K.,Qamar, R.**, 2007. Application of He's Homotopi Perturbation Method to Sumudu Transform, *International, Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulations*, **8(2)**, 185-190.
- [21] **Gupta V.G, Bhavna Shrama, and Kılıçman Adem.**, 2010. A Note on Fractional Sumudu Transform, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics* , **2010(2010)**, Article ID154189, 9 pages.

- [22] **He J.H.**, 1999. Homotopy Perturbation Technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 257-262.
- [23] **He J.H.**, 2003. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Applied Mathematics and Computation*, **135**, 73–79.
- [24] **He J.H.**, 2004. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **156**, 527–539.
- [25] **He J.H.**, 2004. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities, *Applied Mathematics and Computation*, **151**, 287–292.
- [26] **He J.H.**, 2005. Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **6**, 207–208.
- [27] **He J.H.**, 2006. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equation, *International Journal of Modern Physics*, **20**, 1144–1199.
- [28] **He J.H.**, 2006. Homotopy perturbation method for solving boundary value problems, *Physics Letters A*, **350**, 87–88.
- [29] **Wazwaz A.M.**, 2002. Partial differential Equations methods and Applications, *A.A. Balkema Publishers*, Tokyo.
- [30] **Tarig. M. Elzaki, Eman M. A. Hilal, Jeddah- Saudi Arabia.**, 2012. Analytical Solution for Telegraph Equation by Modified of Sumudu Transform ‘Elzaki Transform’ , *Mathematical Theory and Modeling*, **2(4)**.
- [31] **Yaşar, İ. B.**, 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [32] **Koca K.**, 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [33] URL-1, http://en.wikipedia.org/wiki/Sumudu_transform, Sumudu transform, 6 Ekim 2013.
- [34] **Bulut H., Başkonuş H. M., Tülüce Ş.**, 2012. The solution of wave equations by Sumudu transform method, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, **4(3)**, 66-72.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ'da doğdu. İlköğretimi 2002 yılında Aziz Gül İlköğretim Okulu'nda ve ortaöğretimi 2006 yılında Balakgazi Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesinde tamamladı. Lisans öğrenimini 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı. Yüksek lisans öğrenimini Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde 2014 yılında başarıyla bitirmiştir.