

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAUSS-BONNET-GROTEMEYER TEOREMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnan ÜNAL

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof.Dr.Mehmet BEKTAŞ

EYLÜL 2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAUSS-BONNET-GROTEMEYER TEOREMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnan ÜNAL
(101121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :18/10/2012

Tezin Savunulduğu Tarih : 27/09/2012

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Mehmet BEKTAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mahmut ERGÜT

Yard.Doç.Dr. Tayfun TUTAK

EYLÜL-2012

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkanlar sağlayan, çalışmamın her aşamasında yanımda olan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım. Ayrıca çalışmamın başından sonuna kadar hep yanımda olan ve her aşamada bana destek olan değerli eşime teşekkür ederim.

İNAN ÜNAL
ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. Birinci Bölüm	2
2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler.....	2
3. İkinci Bölüm	9
3.1 Gauss-Bonnet Teoremi	9
3.2 Lokal Gauss-Bonnet Teoremi	10
3.3 Global Gauss-Bonnet Teoremi.....	12
3.4 Gauss-Bonnet Teoreminin Sonuçları.....	15
3.5 Gauss-Bonnet Teoreminin Uygulamaları.....	16
4. Üçüncü Bölüm	21
4.1 Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi.....	21
4.2 3-Boyutlu Öklid Uzayında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi.....	21
4.3 (n+1)-Boyutlu Öklid Uzayında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi.....	23
5. Dördüncü Bölüm.....	27
5.1 Uzay Formlarında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi.....	27
5.2 Kare (Cheng-Yau) Operatörü.. ..	31
5.3 Newton Dönüşümleri	31
5.4 Reilly Operatörü.....	33
5.5 Teorem 5.1.2'nin İspatının Tamamlanması.....	36
5.6 Uzay Formlarında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoreminin Sonuçları.....	37
6. SONUÇLAR	40
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ.....	44

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; Gauss-Bonnet Teoremi ve Gauss-Bonnet-Teoreminin sonuçları ile uygulamaları incelendi.

Üçüncü bölümde; Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoremi ve bu teoremin $(n+1)$ -boyutlu Öklid uzaylarına genelleştirilmiş hali verildi.

Dördüncü bölüm; Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoreminin uzay formlarına genelleştirilmesine ayrıldı.

Beşinci bölümde ise Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoreminin bazı sonuçlarından bahsedildi.

Anahtar Kelimeler: Gauss-Bonnet Teoremi, Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi,

SUMMARY

Gauss-Bonnet-Grotemeyer Theorem

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter; some fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter; The Gauss-Bonnet Theorem ,its applications and results are examined.

In the third chapter; The Gauss-Bonnet-Grotemeyer Theorem and its generalization to $(n+1)$ -dimensional Euclidian space are given.

Fourth chapter is reserved generalization of the Gauss-Bonnet-Grotemeyer Theorem to space forms.

In the fifth chapter some results of the Gauss-Bonnet-Grotemeyer theorem are mentioned.

Keywords: The Gauss-Bonnet Theorem, The Gauss-Bonnet-Grotemeyer Theorem

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 Düzgün Yüzey	3
Şekil 2.2 Gauss Dönüşümü	4
Şekil 3.1 Geodezik Üçgen.....	9
Şekil 3.2 Dış Açısı.....	10
Şekil 3.3 Zıt Yönlendirilmiş Üçgenler.....	13
Şekil 3.4 Küre ve Tor Yüzeyleri	14
Şekil 3.5 Silindirik Yüzeyi	17
Şekil 3.6 xy düzleminde bazı vektör alanları	20
Şekil 6.1 $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı.....	40

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
G	: Gauss eğriliği
K	: Ortalama eğrilik
D	: Konneksiyon
$\kappa(M)$	: M'nin vektör alanlarının uzayı
$T_p(M)$	: M'nin P noktasındaki tanjant uzayı
g	: Metrik tensör
$\vec{n}$	: Birim normal vektör alanı
R	: Riemann eğrilik tensörü
k	: Kesitsel eğrilik
δ_{ij}	: Kronecker deltası
∇	: Gradyent
I_p	: Birinci temel form
II_p	: İkinci temel form
$\chi(S)$	: S yüzeyinin Euler karakteristiği
$N^{(n+1)}(k)$	: k kesitsel eğrilikli (n+1)-boyutlu uzay formu
$L_{n+1}(k)$	: (n+1)-boyutlu lineer uzay
$\square_\phi$	: Kare operatörü
$\mathcal{L}_r$	: Reilly operatörü

1.GİRİŞ

Gauss-Bonnet teoremi diferansiyel geometrinin en önemli teoremlerinden biridir. Bu teorem bir yüzeyin total eğriliği olarak bilinen Gauss eğriliğinin integrali ile Euler'ın Königsberg köprü problemlerine çözüm ararken elde ettiği ve üçgenlendirme yardımı ile bir yüzeye de uygulanabilen Euler karakteristiği arasında önemli bir ilişki vermektedir. Gauss eğriliğinin yüzeyin diferansiyel değişmezi olması ve Euler karakteristiğinin ise yüzeyin topolojik bir değişmezi olması teoremin önemini ortaya koymaktadır.

Teoremin ilk şekli Gauss tarafından 1827'de sunulmuş daha sonra kompakt yüzeylere ve daha yüksek boyutlu uzaylara genelleştirilmiştir.

K.P Grotemeyer [8] , 1963 yılında bu teoremden farklı bir sonuç elde etmiştir. Grotemeyer'in bu sonucu Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoremi olarak bilinmektedir. B-Y.Chen [5] Grotemeyer'in bu sonucu için bir integral formülü vermiş ve bu teoremin $(n+1)$ -boyutlu Öklid uzayına genelleştirmesini elde etmiştir. 2010 yılında E.L.Greinberg ve H.Li [7] Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoremini uzay formlarına genelleştirmişlerdir.

Bu tez çalışmasında Gauss-Bonnet teoremi ve bazı uygulamaları incelenmiş ve K.P Grotemeyer'in elde ettiği sonuç, $(n+1)$ -boyutlu Öklid uzayına genelleştirmesi ile birlikte verilmiştir. E.L.Greinberg ve H.Li [7] tarafından elde edilen genelleme sunulmuş ve Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoreminden bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. Birinci Bölüm

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1

X bir cümle ve X 'in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır:

$$(T_1) \quad X, \emptyset \in \tau$$

$$(T_2) \quad \forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$$

$$(T_3) \quad A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i=1}^n A_i \in \tau$$

[9].

Tanım 2.1.2

Bir X cümlesi üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir [9].

Tanım 2.1.3

X ve Y iki topolojik uzay olsunlar. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli, f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir [9].

Tanım 2.1.4

X bir topolojik uzay olsun. X 'in P ve Q gibi iki farklı noktaları için, X de sırasıyla P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q \neq \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir [9].

Tanım 2.1.5

M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifolddur denir.

(i) M bir Hausdorff uzayıdır.

(ii) M nin her bir açık alt cümlesi $\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [9].

Tanım 2.1.6

S kümesi $\mathbb{R}^3$ 'de bir alt küme olsun. Her $P \in S$ noktası için $\mathbb{R}^3$ de P nin aşağıdaki koşulları sağlayan bir komşuluğu V ve bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açık kümesinden $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ üzerine örten bir $x:U \rightarrow V \cap S$ dönüşümü varsa S altkümesine düzgün yüzey (ya da regüler yüzey) denir (Şekil 2.1).

(i) x dönüşümü türevlenebilirdir. Başka bir deyişle eğer

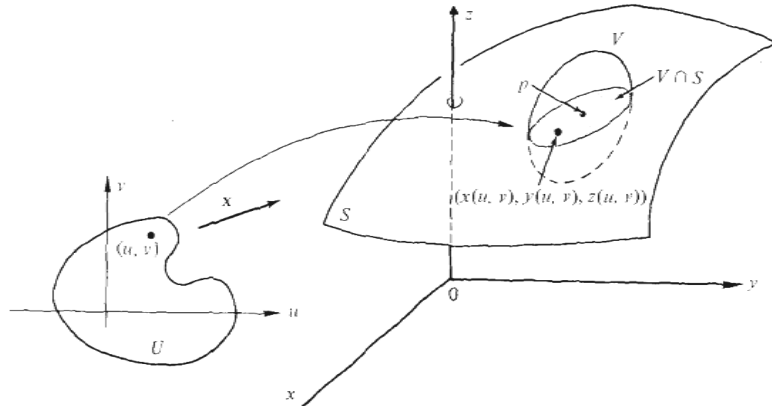
$$x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

olarak yazarsak $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ fonksiyonlarının U üzerinde her mertebeden kısmi türevleri vardır .

(ii) $x:U \rightarrow V \cap S$ bir homeomorfizmdir.

(iii) Her $q \in U$ için $d_{x_q}:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyeli birebirdir.

Burada x haritasına bir parametrizasyon ya da P noktasının bir komşuluğundaki koordinat sistemi , $V \cap S$ komşuluğuna ise bir koordinat komşuluğu denir [3].



Şekil 2.1 Düzgün Yüzey

Tanım 2.1.7

Bir düzgün S yüzeyinin her $T_p(S)$ teğet düzlemi üzerinde iç çarpım $(\cdot)_p$ ile gösterilsin.

$$I_p(\omega) = (\omega \cdot \omega)_p = |\omega|^2 \geq 0$$

olarak tanımlanan ikinci dereceden $I_p:T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ formuna $S \subset \mathbb{R}^3$ düzgün yüzeyinin $P \in S$ noktasındaki birinci temel formu denir [3].

Tanım 2.1.8

$x:U \rightarrow S$ bir S yüzeyinin parametrizasyonu olsun. Buna göre

$$E = (x_u \cdot x_u), F = (x_u \cdot x_v), G = (x_v \cdot x_v)$$

eşitliklerine S yüzeyinin I. Temel formunun katsayıları denir [3].

Tanım 2.1.9

Bir yüzeyin $x:U \rightarrow S$ parametrizasyonu verilsin. $F = 0$ ise bu parametrizasyona ortogonal parametrizasyon denir [3].

Önerme 2.1.1

Düzgün bir $S \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin yönlendirilebilir olması için gerek ve yeter koşul, S üzerinde türevlenebilir bir $N:S \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim normal vektör alanı olmasıdır [3].

Tanım 2.1.10

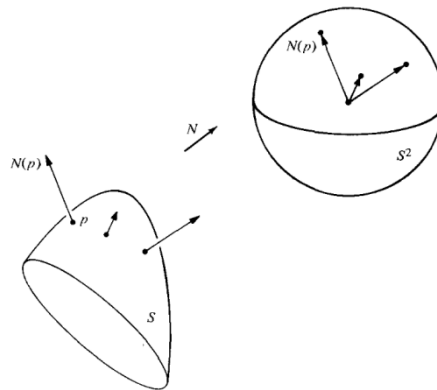
Eğer düzgün bir S yüzeyinin her noktasında tanımlı türevlenebilir bir birim normal vektör alanı varsa bu düzgün yüzey yönlendirilebilirdir denir ve böyle bir N vektör alanı seçimine S yüzeyinin yönü denir [3].

Tanım 2.1.11

Yönü N olan bir $S \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi alalım. $N:S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

birim küresi üzerinde değerler alır. Bu biçimde tanımlanan $N:S \rightarrow S^2$ dönüşümüne S yüzeyinin Gauss dönüşümü denir (Şekil 2.2) [3].



Şekil 2.2 Gauss Dönüşümü

Gauss dönüşümü türevlenebilir olup türevi $dN_p:T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ biçiminde tanımlanan doğrusal bir dönüşümdür.

Tanım 2.1.12

$T_p(S)$ teğet düzlemi üzerinde $II_p(v) = (dN_p(v) \cdot v)$ olarak tanımlanan ikinci dereceden II_p formuna, S yüzeyinin p noktasındaki ikinci temel formu denir [3].

Tanım 2.1.13

Bir S yüzeyi üzerinde $P \in S$ noktasından geçen düzgün bir C eğrisinin eğriliği k ; C eğrisinin P noktasındaki normal vektörü n ve S yüzeyinin P noktasındaki normal vektörü N olmak üzere, $\cos \theta = (n \cdot N)$ olsun. Bu durumda $k_n = k \cdot \cos \theta$ sayısı, $C \subset S$ eğrisinin P noktasındaki normal eğriliği olarak adlandırılır [3].

Tanım 2.1.14

Bir $P \in S$ noktasındaki Gauss dönüşümünün diferansiyeli $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ olsun. dN_p dönüşümünün determinantına S yüzeyinin P noktasındaki Gauss eğriliği denir ve G ile gösterilir. dN_p dönüşümünün izinin yarısının negatifine, S yüzeyinin P noktasındaki ortalama eğriliği denir ve K ile gösterilir. [3].

Tanım 2.1.15

M bir manifold ve M 'nin vektör alanlarının uzayı $\kappa(M)$ olsun. Aşağıdaki dört önermeyi doğrulayan

$$D : \kappa(M) \rightarrow \kappa(M)$$

$$D : (V, W) \rightarrow D_V W$$

biçiminde bir lineer dönüşüme, M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon denir [14].

- a) Her $V, W, Z \in \kappa(M)$ için $D_{V+W} Z = D_V Z + D_W Z$ dir.
- b) Her $V, W, Z \in \kappa(M)$ için $D_V (W + Z) = D_V W + D_V Z$ dir.
- c) Her $V, W \in \kappa(M)$ ve $f \in C^\infty$ için $D_{fV} W = f D_V W$ dir.
- d) Her $V, W \in \kappa(M)$ ve $f \in C^\infty$ için $D_V (fW) = V[f]W + f D_V W$ dir.

Tanım 2.1.16

M manifoldunun her bir P noktasına $T_p(M)$ uzayı üstünde g_p iç çarpımını karşılık getiren bir g dönüşümüne M üzerinde bir metrik tensör adı verilir. M manifoldu üzerinde

bir metrik tensör varsa bu metrik tensörüyle birlikte bu manifolda bir Riemann manifoldu denir [14].

Tanım 2.1.17

Bir M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı bir konneksiyona Riemann konneksiyonu denir [14].

Tanım 2.1.18

M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir Riemann konneksiyonu D olsun.

Her $V, W, Z \in \mathcal{K}(M)$ için

$$R(V, W)X = D_{[V, W]}X - D_V(D_W X) + D_W(D_V X)$$

eşitliği ile tanımlanan $R: \mathcal{K}(M) \times \mathcal{K}(M) \times \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathcal{K}(M)$ dönüşümüne M Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü denir [14].

Tanım 2.1.19

M bir Riemann manifoldu ve $F, T_p(M)$ nin iki boyutlu bir alt vektör uzayı olsun.

$\{v_p, w_p\}$, F 'nin bir tabanı olmak üzere

$$k(v_p, w_p) = \frac{(R(v_p, w_p)v_p \cdot w_p)}{(v_p \cdot v_p)(w_p \cdot w_p) - (v_p \cdot w_p)^2}$$

eşitliği ile tanımlı $k(v_p, w_p)$ sayısına F 'nin kesitsel eğriliği denir [14].

Tanım 2.1.20

Yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde yönlendirilmiş düzgün bir C eğrisi alalım. Bir $P \in C$ noktasının bir komşuluğunda, C eğrisinin s yay uzunluğuna göre parametrelemesi $\alpha(s)$ olsun. $\alpha'(s)$ nün P noktasındaki kovaryant türevinin cebirsel değeri olan

$$\left[\frac{D_{\alpha'(s)}}{ds} \right] = k_g$$

ifadesine C eğrisinin p noktasındaki geodezik eğriliği olarak adlandırılır [3].

Tanım 2.1.21

B_n n -boyutlu bir vektör uzayı ve B_n^* bu vektör uzayının duali olsun.

$\vec{x}_j \in B_n, j = 1, \dots, q$ vektör ve $\xi^i \in B_n^*, i = 1, \dots, p$ kovektör değişkenlerinin

$$w = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlıyorsa bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir [15].

Tanım 2.1.22

t lineer fonksiyonuna karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times \dots \times B_n}_p \times \underbrace{B_n^* \times B_n^* \times \dots \times B_n^*}_q \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant ve q dereceden kovaryant tensör adı verilir. t tensörünün herhangi bir değişken sistemi üzerindeki izi bu tensöre karşılık gelen multilineer fonksiyonun aynı değişken sistemindeki değeridir [15].

Tanım 2.1.23

$$w = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{p}{\xi})$$

multilineer fonksiyonu ile B_n 'de p dereceden kontravaryant ve q dereceden kovaryant olan t tensörü verilmiş olsun. $\vec{e}_j \in B_n$, baz ve $\alpha \in B_n^*$, $i, j = 1, \dots, n$ dual kobaz vektörlerini göz önüne alalım.

$$t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = t(\vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_q}, \alpha^{i_1}, \dots, \alpha^{i_p})$$

izlerine t tensörünün $\{\vec{e}_i\}$ bazındaki koordinatları denir.

Burada $t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ yazılışında yukarıdaki indisler kontravaryantlığı, aşağıdaki indisler ise kovaryantlığı gösterir [15].

Tanım 2.1.24

M m -boyutlu ve N n -boyutlu diferansiyellenebilir iki manifold olsunlar. Eğer diferansiyellenebilir bir $\varphi : M \rightarrow N$ fonksiyonun diferansiyeli olan $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_p N$ dönüşümü tüm $P \in M$ noktaları için birebir ise φ ye bir daldırma (immersiyon) adı verilir. N den indirgenen topoloji ile φ fonksiyonu $\varphi(M)$ üzerinde bir homeomorfizm ise bu durumda φ ye bir gömme (embedding) denir [4].

Tanım 2.1.25

M bir n -boyutlu manifold olmak üzere bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. $P \in M$ kritik nokta olmak üzere

$$H : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_f(u_p, v_p) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) u_i v_j$$

biçiminde tanımlanan H_f fonksiyonuna f nin $P \in M$ kritik noktasındaki Hessian'ı denir [10].

Tanım 2.1.26

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ E^n de bir koordinat sistemi olmak üzere

$$Grad : C(E^n, \mathbb{R}) \rightarrow \kappa(E^n)$$

$$f \rightarrow Grad(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı Grad fonksiyonuna, E^n de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre gradyent fonksiyonu denir ve ∇ sembolü ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.27

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ olmak üzere}$$

$$div : \kappa(E^n) \rightarrow C(E^n, \mathbb{R})$$

$$X \rightarrow div(X) = \langle \nabla, X \rangle$$

şeklinde tanımlı div fonksiyonuna, E^n de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre divergens fonksiyonu denir [9].

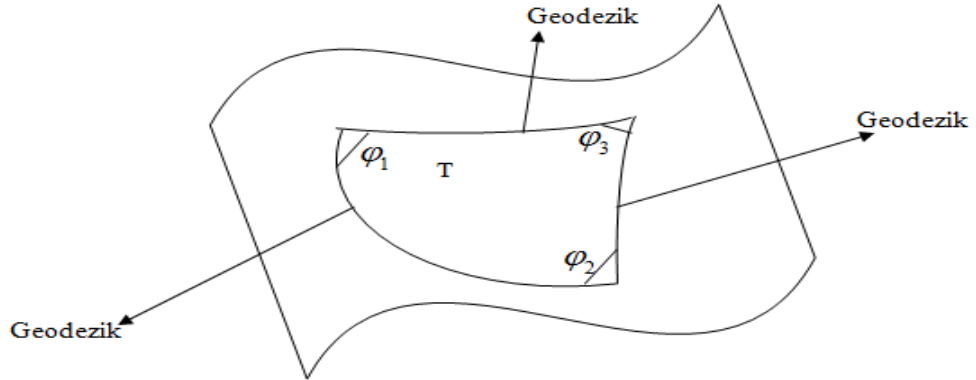
3.İkinci Bölüm

3.1. Gauss-Bonnet Teoremi

Gauss-Bonnet teoremi yüzeylerin diferansiyel geometrisinin belki de en derin teoremidir. Bu teoremin ilk biçimi, Gauss'un 1827 yılında yayınlanan ünlü makalesinde yer almıştır. Diferansiyel geometrinin en önemli çalışması olarak kabul gören “General Investigations of Curved Surfaces” [17] adlı bu makalede bir yüzey üzerinde kenarları geodezik yaylardan oluşan üçgenlerle (geodezik üçgen) yüzeyin Gauss eğriliği arasında bir ilişki verilmiştir. Kabaca söylemek gerekirse bir T geodezik üçgeninin $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ iç açıları toplamının π sayısından fazla olan bölümü, G Gauss eğriliğinin T üzerindeki integraline eşittir; başka bir deyişle (Şekil 3.1)

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T G d\sigma \quad (3.1)$$

olur.



Şekil 3.1 Geodezik üçgen

Teoremin geodezik olmayan basit eğrilerin sınırladığı bölgelere genişletilmesi O.Bonnet'e aittir. Kompakt yüzeylere genişletebilmek için bazı topolojik özelliklerin işin içine girmesi gerekir. Aslında Gauss-Bonnet teoreminin en önemli özelliklerinden biri kompakt bir yüzeyin topolojisi ile eğriliğin integrali arasında çarpıcı bir bağıntı vermesidir [3].

3.2. Lokal Gauss-Bonnet Teoremi

Lokal Gauss-Bonnet teoremini incelemek için gerekli bazı tanım ve teoremleri vereceğiz. Teoremlerin ispatlarına belirtilen referanslardan ulaşılabilir.

Tanım 3.2.1

$\alpha:[0,\ell]\rightarrow S$, kapalı $[0,\ell]$ aralığından düzgün bir S yüzeyine sürekli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa α ' ya basit, kapalı, parçalı düzgün ve parametrize edilmiş eğridir denir.

1. $\alpha(0) = \alpha(\ell)$
2. $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0, \ell)$ için $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$
3. Her $i=0,1,...,k$ için α fonksiyonu $[t_i, t_{i+1}]$ üzerinde türevlenebilir ve düzgün olacak biçimde, $[0, \ell]$ aralığının

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \ell$$

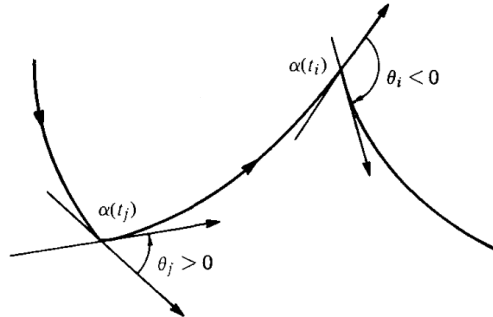
parçalanışı vardır [3].

Tanım 3.2.2

$\alpha(t_i)$, $i=0,...,k$ noktaları α eğrisinin köşeleri, ve $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ yayları α eğrisinin düzgün yayları adını alır. Genel olarak $\alpha([0, \ell])$ cümlesi parçalı, düzgün, kapalı bir eğri olarak adlandırılır [3].

Tanım 3.2.3

S , $x:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrizasyonu ile yönlendirilmiş bir yüzey olmak üzere $\alpha'(t_i)$ α eğrisinin t_i noktasındaki teğeti ise x_u 'dan $\alpha'(t_i)$ 'ye olan θ_i açısına dış açı denir (Şekil 3.2) [3].



Şekil 3.2 Dış açı

Tanım 3.2.4

$S, x:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, parametrizasyonu ile yönlendirilmiş bir yüzey olmak üzere $\alpha:[0, \ell] \rightarrow x(U) \subset S$, $(i = 0,1,2,...,k)$ de köşeleri $\alpha(t_i)$ ve dış açıları θ_i olan basit, kapalı , parçalı düzgün bir eğri olsun.

$$\varphi_i:[t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanan diferansiyellenebilir φ_i fonksiyonuna x_u 'dan $\alpha'(t)$ 'ye açı fonksiyonu denir [3].

Teorem 3.2.1

$\alpha:[0, \ell] \rightarrow S$, dış açıları θ_i olan basit, kapalı parçalı düzgün bir eğri olsun. φ_i açı fonksiyonu olmak üzere

$$\sum_{i=1}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=1}^k \theta_i = \pm 2\pi \quad (3.2)$$

dir. 2π nin işareti α eğrisinin yönlendirmesine bağlıdır [3].

Tanım 3.2.5

Yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde bulunan bir R bölgesi düzlemde açık bir diske homeomorf ve ∂R sınırı kapalı ve parçalı düzgün bir eğri ise R 'ye bir basit bölge denir [3].

Tanım 3.2.6

$S, x:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, parametrizasyonu ile yönlendirilmiş bir yüzey ve $R \subset x(U)$, S 'de sınırlı bir bölge olsun. Eğer f, S üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\iint_{x^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (3.3)$$

integraline f fonksiyonunun R bölgesi üzerindeki integrali denir ve

$$\iint_R f d\sigma \quad (3.4)$$

ile gösterilir [3].

Teorem 3.2.2 (Lokal Gauss-Bonnet Teoremi)

Yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde, açık bir diske homeomorf $U \subset \mathbb{R}^2$ için S 'in yönlendirmesiyle uyumlu bir ortogonal parametrizasyon $x:U \rightarrow S$ olsun. $R \subset x(U)$ S üzerinde basit bir bölge ve $\alpha:I \rightarrow S, \partial R = \alpha(I)$ olacak biçimde bir eğri olsun. α eğrisinin pozitif yönlendirilmiş olduğunu ve parametresinin s yay uzunluğu olduğunu varsayalım. α eğrisinin köşeleri ve dış açıları sırasıyla $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ ve $\theta_1, \dots, \theta_k$ olsun. Bu durumda α eğrisinin düzgün yaylarının geodezik eğrilikleri $k_g(s)$ ve S yüzeyinin Gauss eğriliği G olmak üzere

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R G d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi$$

(3.5)

dir [3].

3.3 Global Gauss-Bonnet Teoremi

Tanım 3.3.1

S düzgün bir yüzey olsun. Bir $R \subset S$ bölgesi kompakt ve ∂R sınırı kapalı, parçalı ve kesişmeyen düzgün eğrilerin sonlu birleşimi ise R 'ye düzgün bölge denir [3].

Tanım 3.3.2

Yalnızca üç köşesi olan ve iç açıları $i=1,2,3$ için $\phi_i \neq 0$ olan basit bir bölgeye üçgen denir ve T ile gösterilir [3].

Tanım 3.3.3

$i=1,2,3,\dots,n$ olmak üzere T_i üçgenlerinin sonlu bir ailesi $\mathcal{T}$ aşağıdaki koşulları sağlarsa $\mathcal{T}$ 'ye düzgün bir $R \subset S$ bölgesinin üçgenlendirilmesi denir [3].

$$(i) \bigcup_{i=1}^n T_i = R$$

(ii) Eğer $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ ise $T_i \cap T_j$ ya T_i ve T_j 'nin bir ortak ayrıtı ya da ortak köşesidir.

Tanım 3.3.4.

Yönlendirilmiş bir S yüzeyinde düzgün bir bölge R ve R 'nin $\mathcal{T}$ üçgenlendirmesi verilsin. $\mathcal{T}$ üçgenlendirmesinde üçgenlerin sayısı F , köşelerin sayısı V , ayrıtların sayısı E olmak üzere

$$\chi = F - E + V$$

ifadesine $\mathcal{T}$ üçgenlendirmesinin Euler karakteristiği denir [3].

Önerme 3.3.1

Düzgün bir yüzeydeki her düzgün bölge bir üçgenlendirmedir [3].

Önerme 3.3.2

S yönlendirilmiş bir yüzey $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$ S 'in yönlendirilmesiyle uyumlu bir parametrizasyon ailesi ve $R \subset S$, S 'nin düzgün bir bölgesi olsun. O zaman R 'nin bir $\mathcal{T}$ üçgenlendirmesi vardır öyle ki her $T \in \mathcal{T}$ üçgeni $\{x_\alpha\}$ ailesinin koordinat komşuluğu tarafından kapsanır. Dahası eğer $\mathcal{T}$ 'nin her üçgeninin sınırı pozitif yönlendirilmiş ise bitişik üçgenler ortak ayrıtları üzerinde zıt yönlendirmeye sahiptir (Şekil 3.3) [3].



Şekil 3.3 Zıt yönlendirilmiş üçgenler

Önerme 3.3.3

R , S yüzeyinin düzgün bir bölgesi olmak üzere Euler karakteristiği R 'nin üçgenlendirmesinden bağımsızdır ve $\chi(R)$ ile gösterilir [3].

Son önerme Euler karakteristiğinin R düzgün bölgesinin topolojik bir değişmezi olduğunu gösterir. Kürenin Euler karakteristiği 2, tor yüzeyinin (tek kulplu küre, Şekil 3.4) Euler karakteristiği 0, 2-li tor yüzeyinin (iki kulplu küre, Şekil 3.4) Euler karakteristiği -2 ve genel olarak n -li tor yüzeyinin (n -kulplu küre) $-2(n-1)$ dir [3].

Önerme 3.3.4

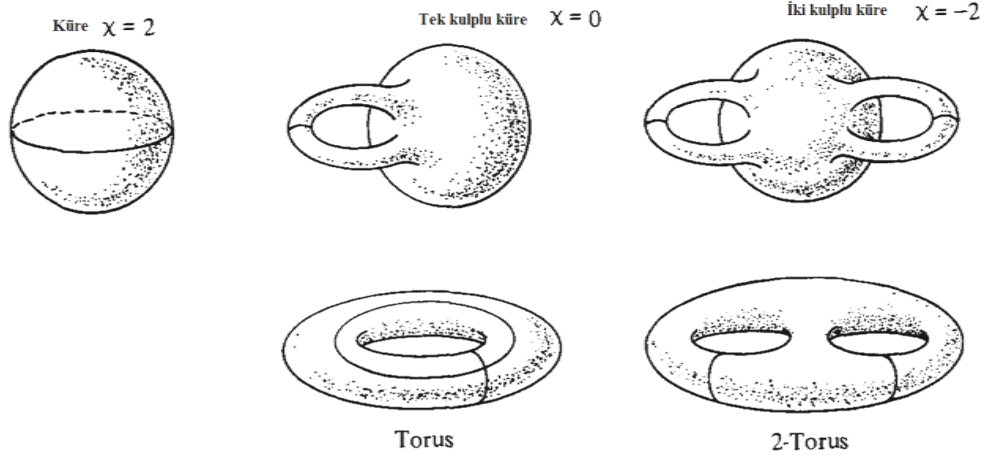
Kompakt bağlantılı bir $S \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin Euler karakteristiği $\chi(S)$, $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$ tamsayılarından biridir. Buna ek olarak eğer $S' \subset \mathbb{R}^3$ başka bir kompakt yüzey ve $\chi(S) = \chi(S')$ ise S yüzeyi S' yüzeyine homeomorftir [3].

Başka bir deyişle her kompakt bağlantılı $S \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi, belirli bir g sayısı için g tane kulpu olan bir küreye homeomorfiktir ve

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

(3.6)

sayısına S yüzeyinin cinsi denir [3].



Şekil 3.4 Küre ve tor yüzeyleri

Önerme 3.3.5

S yüzeyinin yönüyle uyumlu bir $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$ parametrizasyon ailesi için her $T_j \in \mathcal{T}$ $j=1,2,\dots,k$ üçgeni bir $x(U_j)$ koordinat komşuluğu içinde kalacak biçimde, R bölgesinin $\mathcal{T}$ üçgenlendirmesi için f, R üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\sum_{j=1}^k \iint_{x^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j \quad (3.7)$$

toplamı $\mathcal{T}$ üçgenlendirmesinden ve S 'in $\{x_\alpha\}$ parametrizasyon ailesinden bağımsızdır [3].

Tanım 3.3.5

Önerme 3.3.5 da verilen toplam bir geometrik anlama sahiptir ve düzgün R bölgesi üzerinde f 'nin integrali olarak adlandırılır.

$$\iint_R f d\sigma \quad (3.8)$$

ile gösterilir [3].

Teorem 3.3.1 (Global Gauss-Bonnet Teoremi)

Yönlendirilmiş bir S yüzeyinin düzgün bir bölgesi R ve bu bölgenin ∂R sınırını oluşturan basit, kapalı, parçalı düzgün eğriler $C_1, C_2, \dots, C_n$ olsun. Her C_i 'nin pozitif yönlendirildiğini kabul edelim ve $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$, $C_1, C_2, \dots, C_n$ eğrilerinin tüm dış açılarının kümesi olsun. C_i eğrilerinin yay uzunluğu s ve C_i eğrisinin üzerindeki integral C_i eğrisinin her düzgün yayı üzerindeki integrallerin toplamı olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R G d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R)$$

(3.9)

dir [3].

3.4 Gauss-Bonnet Teoreminin Sonuçları

Sonuç 3.4.1

Eğer R S yüzeyinin basit bir bölgesi ise

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R G d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi \quad (3.10)$$

dir [3].

Sonuç 3.4.2

S yönlendirilebilir kompakt bir yüzey ise

$$\iint_S G d\sigma = 2\pi\chi(S) \quad (3.11)$$

dir [3].

Sonuç 3.4.2 oldukça çarpıcıdır. Bu sonuç Gauss-Bonnet teoreminin en çok bilinen formu olup topoloji ve diferansiyel geometri arasındaki önemli ilişkiyi göstermektedir. Bu

bağıntı $\iint_S G d\sigma$ total eğrilik integralinin homeomorf yüzeyler için aynı olacağını ortaya koymaktadır.

3.5 Gauss-Bonnet Teoreminin Uygulamaları

Gauss-Bonnet teoreminin uygulamalarını vermek için düzlem topolojisinin temel bir gerçeği olan Jordan eğri teoreminden bahsetmeliyiz.

Teorem 3.5.1 (Jordan Eğri Teoremi)

Düzlemdeki her parçalı düzgün eğri (kendi kendini kesmeyen eğri) basit bir bölgenin sınırındır [3],[17].

Uygulama-1

Pozitif eğriliğe sahip kompakt bir yüzey küreye homeomorftur [3].

Sonuç 3.4.2 gereğince böyle bir yüzeyin Euler karakteristiği pozitifdir ve $\mathbb{R}^3$ de bu koşula uygun tek kompakt yüzey küredir.

Uygulama-2

S negatif ya da sıfır eğriliğe sahip yönlendirilmiş bir yüzey olsun. Bir $p \in S$ noktasında başlayan ve bir $q \in S$ noktasında tekrar kesişmeyen iki γ_1 ve γ_2 geodeziği vardır ve bu geodeziklerin izleri S nin basit bir R bölgesinin sınırını oluşturur [3].

Tersinin doğru olduğunu kabul edelim. R basit bölge olduğundan (Gauss-Bonnet Teoreminden)

$$\iint_R G d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \quad (3.12)$$

dir. θ_1 ve θ_2 R bölgesinin dış açılarıdır. γ_1 ve γ_2 birbirlerine teğet olamayacağından $i = 1, 2$ için $\theta_i < \pi$ olur. Öte yandan $G < 0$ olduğu için bu bir çelişkidir.

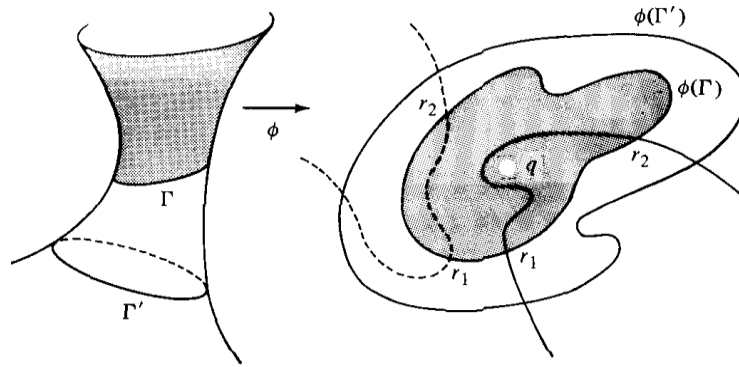
$\theta_1 = \theta_2 = 0$ olduğu zaman γ_1 ve γ_2 geodeziklerinin izleri, S yüzeyinin basit kapalı bir geodeziğini (başka bir deyişle, geodezik olan kapalı düzgün bir eğri) oluşturular. Böylece

eğriliği negatif yada sıfır olan bir yüzeyde basit bir bölgenin sınırı olan basit, kapalı geodezik yoktur.

Uygulama -3

S negatif Gauss eğrilikli bir silindire homeomorf olan bir yüzey olsun. O zaman *S* yüzeyinin en fazla bir tane basit, kapalı geodeziği vardır [3].

S yüzeyi üzerinde basit kapalı bir Γ geodeziğinin olduğunu varsayalım. Uygulama-2'yi kullanarak *S* yüzeyinden üzerindeki bir $q \in P$ noktası çıkarılmış olan bir *P* düzlemine bir ϕ homeomorfizması var olduğu için, $\phi(\Gamma)$ eğrisi *P* düzleminde *q* noktasını içine alan basit bir bölgenin sınırı olur.



Şekil 3.5 Silindir Yüzeyi

Şimdi *S* yüzeyinde başka bir Γ' basit kapalı geodeziği olduğunu varsayalım. Γ ve Γ' eğrilerinin kesişmediklerini iddia ediyoruz. Aksi halde $\phi(\Gamma)$ ve $\phi(\Gamma')$ eğrilerinin ardışık r_1 ve r_2 kesişim noktaları arasındaki yaylar basit bir bölgenin sınırı olurdu (Şekil 3.5). Benzer bir yaklaşımla $\phi(\Gamma')$ eğrisi de *P* düzleminde *q* noktasını içeren basit bir *R* bölgesinin sınırıdır. Bu bölgenin içi bir silindire homeomorfiktir. Bu sebeple $\chi(R)=0$ dır. Öte yandan Gauss-Bonnet teoreminden

$$\iint_{\phi^{-1}(R)} G d\sigma = 2\pi\chi(R) = 0 \quad (3.13)$$

dır. $G < 0$ olduğu için bu bir çelişkidir.

Uygulama-4

Eğer pozitif eğriliğe sahip kompakt bir S yüzeyi üzerinde iki basit kapalı Γ_1 ve Γ_2 geodeziği varsa Γ_1 ve Γ_2 kesişir [3].

Uygulama-1'den S bir küreye homeomorfiktir. Eğer Γ_1 ve Γ_2 kesişmiyorsa o zaman Γ_1 ve Γ_2 'nin oluşturduğu kümenin Euler karakteristiği $\chi(R)=0$ olan bir R bölgesinin sınırıdır. Gauss-Bonnet teoreminden

$$\iint_R G d\sigma = 0 \quad (3.14)$$

olup $G > 0$ olması ile çelişir.

Uygulama-5

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ kapalı, düzgün, parametrize edilmiş ve eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğri olsun. Eğrinin S^2 birim küresi içinde $n(s)$ normal vektörünün çizdiği basit bir eğri olduğunu kabul edelim. Bu durumda $n(I)$ izi S^2 'yi alanları birbirine eşit olan iki bölgeye ayırır [3].

α 'nın s yay parametresi ile parametrelendirildiğini kabul edebiliriz. $\bar{s}$, S^2 üzerinden $n = n(s)$ eğrisinin yay uzunluğunu gösterebilir. $n(s)$ 'in $\bar{k}_g$ geodezik eğriliği

$$\bar{k}_g = (\ddot{n} \cdot n \wedge \dot{n}) \quad (3.15)$$

dir. Noktalar $\bar{s}$ ye göre alınan türevi göstermektedir.

$$\dot{n} = \frac{dn}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (-kt - \tau b) \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right) \quad (3.16)$$

$$\ddot{n} = (-kt - \tau b) \frac{d^2s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau'b) \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 - (k^2 + \tau^2) n \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 \quad (3.17)$$

ve

$$\left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2} \quad (3.18)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{k}_g &= (n \wedge \dot{n} \cdot \ddot{n}) = \frac{ds}{d\bar{s}} \langle (kb - \tau t), \ddot{n} \rangle = \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^3 (-k\tau' + k'\tau) \\ &= -\frac{\tau'k - k'\tau}{k^2 + \tau^2} \frac{ds}{d\bar{s}} = -\frac{d}{ds} \tan^{-1} \left(\frac{\tau}{k} \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \end{aligned}$$

elde edilir. $n(I)$ tarafından sınırlanan R bölgelerinden birine Gauss-Bonnet teoremini uygulanırsa küre için $G=1$ gerçeğinden

$$2\pi = \int_R G d\sigma + \int_{\partial R} \overline{k_g} d\overline{s} = \int_R d\sigma = \text{Alan}(R) \quad (3.19)$$

olur.

Uygulama-6

T yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde bir geodezik üçgen, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ T 'nin dış açıları ve $\phi_1 = \pi - \theta_1, \phi_2 = \pi - \theta_2, \phi_3 = \pi - \theta_3$ T 'nin iç açıları olsun. Gauss-Bonnet Teoreminden

$$\iint_T G d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi \quad (3.20)$$

dir. Böylece

$$\iint_T G d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \phi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \phi_i \quad (3.21)$$

olur. Bu durumda bir geodezik üçgenin iç açılarının $\sum_{i=1}^3 \phi_i$ toplamı

1. Eğer $G = 0$ ise π
2. Eğer $G > 0$ ise π 'den büyük
3. Eğer $G < 0$ ise π 'den küçük

dir [3].

Dahası $\sum_{i=1}^3 \phi_i - \pi$ farkı (T 'nin fazlası olarak adlandırılır) tam olarak $\iint_T G d\sigma$ ile

verilir. Eğer T üzerinde $G \neq 0$ ise bu fark, $N: S \rightarrow S^2$ Gauss dönüşümü altındaki $N(T)$ görüntüsünün alanıdır. Bu durum Gauss tarafından şu şekilde ifade edilmiştir;

“Bir T geodezik üçgeninin fazlası $N(T)$ küresel görüntüsünün alanına eşittir.”

Uygulama-7

Gauss-Bonnet teoremi yüzeyler üzerindeki vektör alanlarına uygulandığında Poincare teoremine ulaşılır.

Tanım 3.5.1

Yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı ν olsun. $P \in S$ için

- (1) Eğer $\nu(P) = 0$ ise P 'ye tekil nokta denir.
- (2) Eğer S 'de P 'nin bir V komşuluğunda P 'den başka tekil noktası

yoksa P 'ye ayrık tekil nokta denir [3].

Bir ν vektör alanının her P tekil noktasına karşılık gelen ve aşağıdaki biçimde tanımlanan tamsayı değerine ν vektör alanının indisi adı verilmektedir.

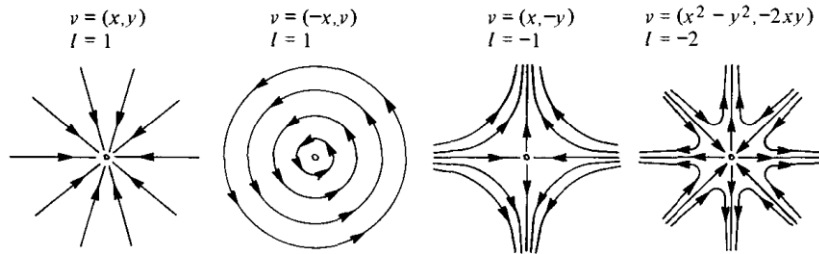
Tanım 3.5.2

S yüzeyinin yönü ile uyumlu ve $P = x(0,0)$ olan ortogonal bir $x:U \rightarrow S$ parametrizasyonunu alalım. $\alpha:[0,l] \rightarrow S$ eğrisi P noktasını tek tekil nokta olarak içeren R bölgesinin sınırı $\alpha([0,l]) \subset x(U)$ olacak biçimde basit, kapalı, pozitif yönlü, parçalı düzgün bir eğri olsun. ν vektör alanının α eğrisine kısıtlanmasına $\nu = \nu(t), t \in [0,l]$ diyelim. x_u vektöründen $\nu(t)$ vektörüne olan açının türevlenebilir bir ölçüsü $\varphi = \varphi(t)$ olsun. α eğrisi kapalı olduğu için

$$2\pi I = \varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} dt \quad (3.22)$$

olan bir I tamsayısı vardır. I tamsayısı ν vektör alanının P tekil noktasındaki indisi olarak adlandırılır [3].

I indisinin tanımı x parametrizasyonuna ve α eğrisinin seçimine bağlı değildir. Şekil 3.6'da $(0,0)$ noktasında tekil noktası olan xy düzlemindeki bazı vektör alanlarının indislerinin örnekleri verilmiştir.



Şekil 3.6 xy düzleminde bazı vektör alanları

Kompakt bir S yüzeyi için yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında Poincare teoremine ulaşılır. S yüzeyinin $i = 1, 2, \dots, k$ için P_i noktasındaki indisi I_i olmak üzere Gauss-Bonnet teoreminden

$$\sum I_i = \frac{1}{2\pi} \iint_S G d\sigma = \chi(S)$$

(3.23)

dir [3].

Teorem 3.5.1 (Poincare Teoremi)

Kompakt bir S yüzeyi üzerindeki tekil noktaları ayrık olan türevlenebilir bir ν vektör alanının indislerinin toplamı, S yüzeyinin Euler karakteristiğine eşdeğerdir [3].

Bu teorem gösteriyor ki $\sum I_i$ toplamı yalnızca yüzeyin topolojisine bağlıdır. Örneğin küreye homeomorf olan bir yüzey üzerinde, ayrık tekil noktaları olan her vektör alanının indislerinin toplamı 2 olmalıdır.

4.Üçüncü Bölüm

4.1. Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi

K.P. Grotemeyer [8] 1963'te Gauss-Bonnet teoreminin farklı bir ispatını verdi. Grotemeyer; Chern, Lashof ve Kuiper'in immersed manifoldların total eğrilikleri üzerine bilinen bazı sonuçlarını sunmuş ve bununla birlikte yeni sonuçlar elde etmiştir.

Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoremi olarak bilinen ve detaylarını bu bölümde vereceğimiz Grotemeyer'in bu sonucunda Gauss-Bonnet teoreminde Gdv integrantının yerini, $(\vec{a} \cdot \vec{n})^2 Gdv$ integrantı almıştır. Burada $\vec{a}$ 3-boyutlu Öklid uzayında sabit bir birim vektör, $\vec{n}$ verilen yüzeyin birim normal vektör alanını göstermekte olup $(\vec{a} \cdot \vec{n})$ $\vec{a}$ ile $\vec{n}$ 'in iç çarpımını ifade etmektedir.

Grotemeyer'in bu sonucunu B.Y Chen[5] 1971'de $(n+1)$ -boyutlu Öklid uzayına genelleştirmiştir.

4.2 3-boyutlu Öklid Uzayında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi

Teorem 4.2.1

M , 3-boyutlu Öklid uzayında kapalı yönlendirilmiş bir yüzey olsun. M 'nin Gauss eğriliği G , birim normal vektör alanı $\vec{n}$ ve $\mathbb{R}^3$ 'de herhangi bir sabit birim vektör $\vec{a}$ olmak üzere

$$\int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^2 Gdv = \frac{2\pi}{3} \chi(M) \quad (4.1)$$

dir. Burada $(\vec{a}.\vec{n})$ $\vec{a}$ ile $\vec{n}$ nin iç çarpımını ve $\chi(M)$ M 'nin Euler karakteristiğini göstermektedir [8].

Teorem 4.2.1 Gauss-Bonnet teoreminin genelleştirilmiş bir hali olarak düşünülebilir. Aşağıdaki sonuç bunu ispatlamaktadır.

Sonuç 4.2.1

Teorem 4.2.1 ile aynı hipotez altında $\mathbb{R}^3$ 'de bir $\{E_1, E_2, E_3\}$ sabit ortogonal çatısı için $a = E_i$ seçilirse,

$$\int_M G dv = 2\pi\chi(M)$$

(4.2)

dir [7].

İspat: $\mathbb{R}^3$ 'de sabit ortogonal $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatısı için (4.1)'de $a = E_i$ seçilirse

$$\int_M (E_i.\vec{n})^2 G dv = \frac{2\pi}{3} \chi(M) \quad i = 1, 2, 3$$

(4.3)

olur. $\sum_i (E_i.\vec{n})(E_i.\vec{n}) = \vec{n}\vec{n} = 1$ olduğundan (4.3)'ün 1'den 3'e i üzerinden toplamı alınır

(4.2) elde edilir [7].

Teorem 4.2.1'i ispatlayabilmek için bir integral formülüne ihtiyaç vardır. Bu integral formülü aşağıdaki şekilde olup Grottemeyer'in makalesinde[8] yer almaktadır.

Önerme 4.2.1

M , 2-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve g_{ik} M 'nin C^2 sınıfından metrik tensörü olsun. S , M 'de basit bir bölge , n_i S 'nin her bir iç noktasında iç normal, ∂S C^2 sınıfından parçalı yönlendirilmiş bir eğri , μ_i S üzerinde tanımlanmış bir vektör alanı olsun. s , ∂S üzerinde C^2 sınıfından ve diferansiyellenebilir bir yay uzunluğu olmak üzere

$$\iint_S \frac{\|\mu_{ik}\|}{g} dv = \frac{1}{2} \iint_{\partial S} \mu_i \mu^i (k_g + \theta) ds + \frac{1}{2} \iint_S G g^{ik} \mu_i \mu_k dv$$

(4.4)

integral formülü elde edilir. Burada μ_{ik} , μ_i nin k – yıncı koordinata göre kovaryant türevi ve $\|g_{ik}\| = g$ metrik tensörün determinantıdır. θ , ∂S ’nin her noktasında $\mu_i \neq 0$ olacak biçimde μ_i vektör alanları ile eğri arasındaki açı, k_g geodezik eğrilik ve G Gauss eğriliğidir [8].

Bu integral formülü yardımı ile Teorem 4.2.1’i ispatlayabiliriz.

Teorem 4.2.1’in İspatı

$\bar{x}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir immersiyon olsun. Bu durumda $\bar{x}(M) \subset \mathbb{R}^3$ ’de bir immersed yüzey olur. Reel değerli

$$z: \bar{x}(M) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\bar{a} \in S^2$ ve $(\bar{a}, \bar{x})$ $\bar{a}$ ile $\bar{x}$ ’in iç çarpımını göstermek üzere $z = (\bar{a}, \bar{x})$ yazılabilir.

$\mathbb{R}^3$ ’de bir S yüzeyi için $z_i = (\bar{a}, \bar{x}_i)$ vektör alanını alalım. Buradan $\bar{x}_{ik} = B_{ik} \bar{n}$ olur (B_{ik} II. temel form ve $\bar{n}$ yüzey normali). Ayrıca

$$\frac{\|z_{ik}\|}{g} = G(\bar{a}, \bar{n})^2 \quad (4.5)$$

ve (4.4) integral formülünden

$$\iint_S G \{3(\bar{a}, \bar{n})^2 - 1\} dv = \int_{\partial S} \nabla(z, z)(k_g + \theta) ds \quad (4.6)$$

dir. Burada $\nabla(z, z) = g^{ik} z_i z_k$ biçimindeki Beltrami operatörüdür. Buradan

$$\int_M (\bar{a}, \bar{n})^2 G dv = \frac{2\pi}{3} \chi(M)$$

elde edilir [8].

4.3 (n+1)-Boyutlu Öklid Uzayında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi

K.P Grotemeyer tarafından kanıtlanan Teorem 4.2.1 B.Y. Chen [5] tarafından (n+1)-boyutlu Öklid uzayına genelleştirilmiştir.

Teorem 4.3.1

$n+1 \geq 3$ için $(n+1)$ -boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayına gömülmüş n -boyutlu bir hiperyüzey M olsun. $x(P)$ ve $n(P)$, sırasıyla, P noktasındaki yer vektörü ile dış birim normal vektör alanı ve $G(P)$ M 'nin P 'deki Gauss eğriliği olsun. Bu durumda,

$$m \int_M (\bar{x} \cdot \bar{n})^{m-1} \bar{x} G dv = (n+m) \int_M (\bar{x} \cdot \bar{n})^m \bar{n} G dv \quad m=0,1,2,\dots \quad (4.7)$$

dir[5].

Teorem 4.3.2

$n+1 \geq 3$ için $(n+1)$ -boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayına gömülmüş n -boyutlu kapalı yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M 'nin birim normal vektör alanı $\bar{n}$ olsun. Eğer M 'nin boyutu çift ve $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de herhangi bir sabit birim vektör $\bar{a}$ ise

$$\int_M (\bar{a} \cdot \bar{n})^m G dv = \begin{cases} \frac{C_{n+m}}{C_m} \chi(M) & m=0,2,4,\dots \quad \text{için} \\ 0 & m=1,3,5,\dots \quad \text{için} \end{cases} \quad (4.8)$$

dir. Burada $\chi(M)$ M 'nin Euler karakteristiği ve C_m , m -boyutlu birim kürenin alanıdır [5].

İspat:

$\bar{a}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de herhangi bir sabit birim vektör olsun. (4.7) de her iki tarafı $\bar{a}$ ile iç çarpıma tâbi tuttuğumuzda

$$m \int_M (\bar{x} \cdot \bar{a})^{m-1} (\bar{x} \cdot \bar{a}) G dv = (n+m) \int_M (\bar{x} \cdot \bar{n})^m (\bar{a} \cdot \bar{n}) G dv \quad (4.9)$$

elde edilir.

M 'de $\bar{x} \rightarrow \bar{x} + \bar{a}$ geçişini yapalım. Bu durumda

$$(\bar{x} \cdot \bar{n})^{m-1} = ((\bar{x} + \bar{a}) \cdot \bar{n})^{m-1} = [(\bar{x} \cdot \bar{a}) + (\bar{n} \cdot \bar{a})]^{m-1} = \sum_{i_1=0}^{m-1} \binom{m-1}{i_1} (\bar{x} \cdot \bar{a})^{i_1} (\bar{a} \cdot \bar{n})^{m-i_1} \quad (4.10)$$

$$(\bar{x} + \bar{a}) \cdot \bar{a} = (\bar{x} \cdot \bar{a}) + (\bar{a} \cdot \bar{a}) = (\bar{x} \cdot \bar{a}) + 1 \quad (4.11)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadeler (4.9) da yerlerine yazılırsa

$$m \int_M \sum_{i_1=0}^{m-1} \binom{m-1}{i_1} (\bar{x} \cdot \bar{n})^{i_1} (\bar{a} \cdot \bar{n})^{m-i_1-1} ((\bar{x} \cdot \bar{a}) + 1) G dv = (n+m) \int_M \sum_{i_1=0}^m \binom{m}{i_1} (\bar{x} \cdot \bar{n})^{i_1} (\bar{a} \cdot \bar{n})^{m-i_1+1} G dv \quad (4.12)$$

bulunur.

(4.12)-(4.9) farkı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& m \int_M \sum_{i_1=0}^{m-2} \binom{m-1}{i_1} (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_1} (\vec{x} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_1-1} G dv + m \int_M \sum_{i_1=0}^{m-1} \binom{m-1}{i_1} (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_1} (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_1-1} G dv \\
& = (n+m) \int_M \sum_{i_1=0}^{m-1} \binom{m}{i_1} (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_1} (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_1+1} G dv \quad (4.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar (4.13)'de $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$ geçişi yapılır ve sonucu (4.13) den çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
& m \int_M \sum_{i_1=0}^{m-2} \binom{m-1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{i_2} (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_2} (\vec{x} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_2-1} G dv + \\
& m \int_M \left[\sum_{i_1=0}^{m-2} \binom{m-1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1} \binom{i_1}{i_2} + \sum_{i_2=0}^{m-1} \binom{m-1}{i_2} \sum_{i_1=0}^{i_2-1} \binom{i_2}{i_1} \right] (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_2} (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_2-1} G dv \\
& = (n+m) \int_M \sum_{i_1=0}^{m-1} \binom{m}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{i_2} (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_2} (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_2+1} G dv \quad (4.14)
\end{aligned}$$

dir.

Bu işleme k-kez devam edilirse ($k=1,2,...,m$)

$$\begin{aligned}
& m \int_M \sum_{i_1=0}^{m-2} \binom{m-1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{i_2} \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{i_{k-2}-1} \binom{i_{k-2}}{i_{k-1}} (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_k} (\vec{x} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_k-1} G dv + m \int_M \left[\sum_{i_1=0}^{m-2} \binom{m-1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{i_2} \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{i_{k-2}-1} \binom{i_{k-2}}{i_{k-1}} \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \binom{i_{k-1}}{i_k} + \dots \right. \\
& \left. + \sum_{i_1=0}^{m-2} \binom{m-1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{i_2} \dots \sum_{i_j=0}^{i_{j-1}-1} \binom{i_{j-1}}{i_j} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \binom{i_{k-1}}{i_k} + \dots + \sum_{i_1=0}^{m-1} \binom{m-1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{i_2} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \binom{i_{k-1}}{i_k} \right] (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_k} (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_k-1} G dv \\
& = (n+m) \int_M \sum_{i_1=0}^{m-1} \binom{m}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{i_2} \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{i_{k-2}-1} \binom{i_{k-2}}{i_{k-1}} (\vec{x} \cdot \vec{n})^{i_k} (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-i_k+1} G dv \quad (4.15)
\end{aligned}$$

olur.

Özel olarak $k=m$ seçilirse (4.15)'daki ilk integrali yoktur ve ikinci integrandda $[*+...+*]$ içindeki terimler $m!$ e eşittir. Böylece (4.15) da $k=m$ alınır;

$$m \int_M (a \cdot n)^{m-1} G dv = (n+m) \int_M (a \cdot n)^{m+1} G dv \quad m=1,2,3,... \quad (4.16)$$

formülü elde edilir.

Buradan

$$\int_M (a \cdot n)^m G dv = \frac{m-1}{n+m-1} \int_M (a \cdot n)^{m-2} G dv \quad (4.17)$$

olur.

n çift kabul edilmişti. Eğer m pozitif çift bir tamsayı ise o zaman

$$C_N = \frac{2 \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{N+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(N+1)\right)} \quad (4.18)$$

olduğundan Gauss-Bonnet formülü (4.17) den

$$\begin{aligned} \int_M (a.n)^m G dv &= \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{(n+m-1)(n+m-3)\dots(n+1)} \int_M G dv \\ &= \frac{C_{n+m}}{C_m} \chi(M) \end{aligned} \quad (4.19)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca (4.7) den $x = n$ alınırsa

$$\int_M \vec{n} G dv = 0 \quad (4.20)$$

bulunur. (4.20) $\vec{a}$ ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\int_M (\vec{a} \cdot \vec{n}) G dv = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir.

Böylece (4.16) den (4.21)'e kadar tüm bağıntılar göz önüne alındığında $m = 1, 3, 5, \dots$ için

$$\int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^m G dv = 0 \quad (4.22)$$

olur.

Buradan (4.19), (4.22) ve Gauss-Bonnet teoreminden (4.8) elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.3.2 de $m = 0$ ve $n = 2$ olduğunda Gauss-Bonnet teoremi ve $m = n = 2$, olduğunda ise $\mathbb{R}^3$ 'de Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoremi elde edilir.

5. Dördüncü Bölüm

5.1. Uzay Formlarında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi

Grotemeyer tarafından elde edilen sonuç Eric L.Greinberg ve Haizong Li [7] tarafından uzay formlarına genelleştirilmiştir. Bu bölümde Greinberg ve Li tarafından yapılmış olan bu çalışma sunulacaktır.

Tanım 5.1.1

Sabit eğrilikli tam bir Riemann manifolduna bir uzay formu denir [18].

Teorem 5.1.1

M n-boyutlu tam bir Riemann manifoldu olsun. k , M nin kesitsel eğriliği olmak üzere

- i. $M = S^n$, $k > 0$ ise
- ii. $M = \mathbb{R}^n$, $k = 0$ ise

$$\text{iii. } M = H^n, \quad k < 0 \text{ ise}$$

dir. Burada S^n ve H^n , sırasıyla, k kesitsel eğrilikli küre ve hiperbolik uzaydır [18].

Tanım 5.1.2

n çift olsun ve $N^{(n+1)}(k)$ $(n+1)$ -boyutlu k kesitsel eğrilikli uzay formunu göstereyin.

Bu durumda

$$\text{i. } k = 0 \text{ ise } N^{(n+1)}(k) = \mathbb{R}^{n+1} \text{ dir}$$

$$\text{ii. } k > 0 \text{ ise } N^{(n+1)}(k) = S^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ olup } S^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ yarıçapı } \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ olan}$$

küredir ve

$$S^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x \cdot x = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \frac{1}{k} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\text{iii. } k < 0 \text{ ise } N^{(n+1)}(k) = H^{n+1}\left(\frac{-1}{\sqrt{-k}}\right) \text{ olup } H^{n+1}\left(\frac{-1}{\sqrt{-k}}\right) \text{ yarıçapı } \frac{-1}{\sqrt{-k}}$$

olan

hiperbolik uzaydır ve

$$H^{n+1}\left(\frac{-1}{\sqrt{-k}}\right) = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1,1} : x \cdot x = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \frac{1}{k} \right\}$$

biçiminde tanımlanır [7].

$$S^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ küresinde metrik } \mathbb{R}^{n+1} \text{ den indirgenen alışılmış metrik, } H^{n+1}\left(\frac{-1}{\sqrt{-k}}\right)$$

hiperbolik uzayında ise metrik $x \cdot x = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ biçimindeki Lorentz metriğidir.

$\mathbb{R}^{n+1,1}$ ile $\mathbb{R}^{n+2}$ gösterilmektedir.

Genel olarak Tanım 5.1.2 te verilen $N^{(n+1)}(k)$ uzay formunun uygun bir $L_{n+1}(k)$ lineer uzayına standart gömmesini alabiliriz. Böylelikle bir M hiperyüzeyi üzerinde iç çarpımdan söz edebilir ve $(\vec{a}, \vec{n})$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

Bölüm-3 de Teorem 4.2.1 de verilen Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoreminin uzay formlarına genelleştirilmesi aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 5.1.2

$n \geq 2$ ve n çift olsun. $\vec{x}: M \rightarrow N^{(n+1)}(k)$ $(n+1)$ -boyutlu $N^{(n+1)}(k)$ uzay formunda yönlendirilmiş kapalı ve n -boyutlu bir hiperyüzey, M nin Euler karakteristiği $\chi(M)$, Gauss-Kronecker eğriliği G ve birim normal vektör alanı $\vec{n}$ olsun. O zaman $L_{n+1}(k)$ daki sabit bir $\vec{a}$ vektörü için

$$\int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^2 G dv = \frac{1}{n+1} \left[\frac{Vol S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv \right] (\vec{a} \cdot \vec{a}) \\ + \frac{k}{n+1} \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{a} \cdot \vec{x}) K_{n-1} dv - \frac{k}{n+1} \int_M (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 G dv$$

(5.1)

dir. Burada c_i 'ler yalnızca n boyutuna bağlı sabitler ve K_i M 'nin i -yinci ortalama eğriliğidir.

$n = 2$ olması halinde Teorem 5.1.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.1

3-boyutlu $N^3(k)$ uzay formunda kapalı yönlendirilmiş bir yüzey M ve M nin Gauss eğriliği G , birim normal vektör alanı $\vec{n}$ olsun. M 'nin ortalama eğriliği K_1 , Euler karakteristiği $\chi(M)$ ve $L_3(k)$ lineer uzayındaki sabit bir $\vec{a}$ vektörü için

$$\int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^2 G dv = \left[\frac{2\pi}{3} \chi(M) - \frac{k}{3} Vol(M) \right] (\vec{a} \cdot \vec{a}) + \frac{k}{3} \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{a} \cdot \vec{x}) K_1 dv - \frac{k}{3} \int_M (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 G dv \quad (5.2)$$

dir [7].

Bu sonuç $k=0$ ve $\vec{a}$ birim vektör ise Teorem 4.2.1 (Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoremi)'i verir.

Teorem 5.1.2 Gauss-Bonnet-Chern Teoremi [17]'nin uzay formlarında genelleştirilmiş halidir [16]. Bu gerçek aşağıdaki sonuçla ispatlanmıştır.

Sonuç 5.1.2

Teorem 5.1.2 ile aynı hipotez altında

$$\int_M G dv = \frac{Vol S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv$$

(5.3)

dir [7].

İspat:

k kesitsel eğriliğinin iki farklı durumu söz konusudur.

I.durum: Eğriliğin negatif olmaması ($k \geq 0$)

$L_{n+1}(k)$ lineer uzayının boyutu m olsun. Böylece düzlem olması halinde ($k=0$) $m=n+1$ diğer durumda ($k>0$) ise $m=n+2$ olacaktır.

$L_{n+1}(k)$ da sabit bir ortonormal çatı $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ olsun ve Teorem 5.1.2’te $a = E_i$ seçelim. O zaman

$$\begin{aligned} \int_M (E_i \cdot \vec{n})^2 G dv &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{\text{Vol} S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv \right] \\ &+ \frac{k}{n+1} \int_M (E_i \cdot \vec{n})(E_i \cdot \vec{x}) K_{n-1} dv - \frac{k}{n+1} \int_M (E_i \cdot \vec{n})^2 G dv \end{aligned} \quad (5.4)$$

olur.

$$\sum_i (E_i \cdot \vec{n})(E_i \cdot \vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_i (E_i \cdot \vec{n})(E_i \cdot \vec{x}) = \vec{n} \cdot \vec{x} = 0 \quad (5.5)$$

olduğunu göz önüne alalım. $m=n+1$ ve $m=n+2$ olması durumlarına göre $i=1, 2, 3, \dots, m$ üzerinden (5.4)’ün toplamı alınırsa (5.3) elde edilir.

II.durum: Eğriliğin negatif olması ($k < 0$)

Bu durumda Tanım 5.1.2’den $L_{n+1}(k) = \mathbb{R}^{n+1,1}$ olur. $\{E_0, E_1, \dots, E_{n+1}\}$ $\mathbb{R}^{n+1,1}$ de aşağıdaki gibi belirlenen sabit pseudo-ortonormal bir çatı seçelim. Yani

$$E_0 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad E_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad E_{n+1} = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

olsun. O zaman $\mathbb{R}^{n+1,1}$ deki metrik göz önüne alındığında

$$E_0 \cdot E_0 = -1 \quad \text{ve} \quad 1 \leq \alpha \leq n+1 \quad \text{için} \quad E_\alpha \cdot E_\alpha = 1$$

olur.

$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ ve $n = (n_0, n_1, \dots, n_{n+1})$ olup Tanım 5.1.2’ten

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{x} &= -x_0 \cdot x_0 + \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha \cdot x_\alpha = \frac{1}{k} \\ \vec{n} \cdot \vec{n} &= -n_0 \cdot n_0 + \sum_{\alpha=1}^{n+1} n_\alpha \cdot n_\alpha = 1 \\ \vec{x} \cdot \vec{n} &= -x_0 \cdot n_0 + \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha \cdot n_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

olduğu açıktır.

Teorem 5.1.2’de sırasıyla $\vec{a} = E_0$ ve $\vec{a} = E_\alpha$ seçelim. $E_0.E_0 = -1$ ve $1 \leq \alpha \leq n+1$ için $E_\alpha.E_\alpha = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_M n_0^2 G dv = & -\frac{1}{n+1} \left[\frac{Vol S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv \right] \\ & + \frac{k}{n+1} \int_M n_0 x_0 K_{n-1} dv - \frac{k}{n+1} \int_M x_0^2 G dv \end{aligned} \quad (5.7)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_M n_\alpha^2 G dv = & \frac{1}{n+1} \left[\frac{Vol S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv \right] \\ & + \frac{k}{n+1} \int_M n_\alpha x_\alpha K_{n-1} dv - \frac{k}{n+1} \int_M x_\alpha^2 G dv \end{aligned} \quad 1 \leq \alpha \leq n+1 \quad (5.8)$$

olur. (5.6) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} -(E_0.\vec{n})(E_0.\vec{n}) + \sum_i (E_i.\vec{n})(E_i.\vec{n}) &= \vec{n}.\vec{n} = 1 \\ -(E_0.\vec{n})(E_0.\vec{x}) + \sum_\alpha (E_\alpha.\vec{x})(E_\alpha.\vec{x}) &= \vec{n}.\vec{x} = 0 \\ -(E_0.\vec{x})(E_0.\vec{x}) + \sum_\alpha (E_\alpha.\vec{x})(E_\alpha.\vec{x}) &= \vec{x}.\vec{x} = \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu durumda (5.3) ifadesi (5.7), (5.8) ve (5.9)’dan elde edilir.

Teorem 5.1.2’nin ispatlanması için Reilly operatörü olarak bilinen bir diferansiyel operatöre ihtiyaç vardır. Ayrıca ispat için gerekli olan lemma ve önermeler verildikten sonra Teorem 5.1.2’nin ispatı tamamlanacaktır.

5.2 Kare Operatörü (Cheng-Yau Operatörü)

Tanım 5.2.1

(M, g) n-boyutlu kapalı bir Riemann manifoldu, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ M ’de lokal ortonormal bir çatı ve $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ bu çatının duali olsun. M üzerinde tanımlı bir $\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij} \theta_i \theta_j$ simetrik non-dejenere tensörü verilsin. f_{ij} ’ler f ’nin 2. dereceden kovaryant Hessien bileşenleri ve $\{\theta_{ij}\}$ g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\square \equiv \square_\phi : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$f \rightarrow \square_f = \sum_{i,j} \phi_{ij} f_{ij}$$

biçiminde tanımlanan 2.mertebeden diferansiyel operatöre kare operatörü ya da Cheng-Yau operatörü denir [7],[11].

Önerme 5.2.1 (Cheng-Yau Koşulu)

M , $\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij} \theta_i \theta_j$ simetrik tensörü ile yönlendirilmiş kapalı bir Riemann manifoldu olsun. O zaman $\square$ operatörünün self adjoint olması için gerek ve koşul

$$\sum_{j=1}^n \phi_{ij,k} = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

(5.10)

olmasıdır. Burada $\phi_{ij,k}$ ϕ_{ij} tensörünün g ile ilişkili e_k yönündeki kovaryant türevidir [6],[7].

Önerme 5.2.2

Eğer $\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij} \theta_i \theta_j$ tensörü (5.11)'de verilen Cheng-Yau koşulunu sağlıyor ise ∇f f 'nin gradyenti olmak üzere

$$\square f = \sum_{i,j} \phi_{ij} f_{ij} = \sum_{i,j} (\phi_{ij} f_i)_j = \text{div}(\phi \nabla f)$$

(5.11)

dir [7].

5.3 Newton Dönüşümleri

Newton dönüşümleri ilk olarak K.Voss [19]'in makalesinde tanımlanmıştır. Ayrıca Reilly [12] , Rosenberg [13] ve Barbosa-Colares [1] çalışmalarında Newton dönüşümlerinden bahsetmektedirler. Reilly operatörünün ifade edilmesinde Newton dönüşümlerinden yararlanılmaktadır.

Newton dönüşümlerini tanımlamadan önce bilinmesi gerekli bazı tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

Tanım 5.3.1

1 ile n arasındaki tam sayılar için $I = i_1, i_2, \dots, i_q$ ve $J = j_1, j_2, \dots, j_q$ indisler olmak üzere

$$\delta_I^J = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } i_1, i_2, \dots, i_q \text{ ler farklı ve } J \text{ nin çift permütasyonu ise} \\ -1, & \text{Eğer } i_1, i_2, \dots, i_q \text{ ler farklı ve } J \text{ nin tek permütasyonu ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [7].

Tanım 5.3.2

M kapalı, yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve $P \in M$ için $T_P M$ de lokal ortonormal bir çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere M 'nin ikinci temel formunun bileşenleri

$$B: T_P M \rightarrow T_P M, \quad B e_i = \sum_j h_{ij} e_j \quad (5.12)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 5.3.3

M 'nin r-yinci ortalama eğriliği

$$K_r \equiv \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r}, \quad (h_{ij}) = (k_i \delta_{ij}) \quad (5.13)$$

şeklinde tanımlanır [7].

G , M 'nin Gauss-Kronecker eğriliği olmak üzere $G = K_n$ 'dir.

Tanım 5.3.4 (Newton Dönüşümleri)

K_r , r-yinci ortalama eğrilik olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{ij}^0 &= \delta_{ij} \\ T_{ij}^r &= K_r \delta_{ij} - \sum_k h_{ik} T_{kj}^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.14)$$

dönüşümlerine Newton dönüşümleri denir [7].

Tanım 5.3.5

$r \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere r-yinci Newton dönüşümü

$$T_r = K_r I - K_{r-1} B + \dots + (-1)^r B^r \quad (5.15)$$

biçiminde tanımlanan bir lineer dönüşümdür.

Ve bu dönüşüm için

$$K_r = \frac{1}{r!} \sum \delta_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} h_{i_1 j_1} \dots h_{i_r j_r} \quad (5.16)$$

dir [7].

Önerme 5.3.1

T_r dönüşümünün matrisi

$$T_{ij}^r = \frac{1}{r!} \sum \delta_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} h_{i_1 j_1} \dots h_{i_r j_r} \quad (5.17)$$

dir [7].

Önerme 5.3.2

Her r için

$$(1) \operatorname{div} T_r = \sum_j T_{ij,j}^r = 0$$

$$(2) \dot{I}z(BT_r) = (r+1)K_{r+1} \text{ (Newton Formülü)}$$

$$(3) \dot{I}z(T_r) = (n-r)K_r$$

dir [7],[13].

Buraya kadar verilen tanım ve önermelere dayanarak Reilly operatörünü tanımlayabiliriz.

5.4 Reilly Operatörü

Tanım 5.4.1

$(n+1)$ -boyutlu sabit k kesitsel eğrilikli $N^{(n+1)}(k)$ uzay formunda n -boyutlu kapalı bir hiperyüzey $\vec{x}: M \rightarrow N^{(n+1)}(k)$ olsun.

$$\mathcal{L}_r f: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$\mathcal{L}_r f = \sum_{i,j} T_{ij}^r f_{ij} \quad , \quad f \in C^\infty(M)$$

şeklinde tanımlanan 2.mertebeden diferansiyel operatöre Reilly operatörü denir [7],[12].

Önerme 5.4.1

$\vec{x}: M \rightarrow N^{(n+1)}(k) \subset L_{n+1}(k)$ birim normal vektör alanı $\vec{n}$ olan n -boyutlu bir hiperyüzey ve $\vec{x}$, $\vec{x}(M) \subset L_{n+1}(k)$ 'nın orijin bağlantılı yer vektörü olsun. Bu durumda

$$\vec{x}_i = e_i \quad , \quad \vec{n}_i = -\sum_j h_{ij} e_j \quad , \quad \vec{x}_{ij} = h_{ij} \vec{n} - kx \delta_{ij} \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}_r \vec{x} = (r+1)K_{r+1}\vec{n} - (n-r)kK_r\vec{x} \quad (5.19)$$

dir [7].

İspat:

$\vec{a}$, $L_{n+1}(k)$ 'da sabit bir vektör olsun.

$$f = \vec{n} \cdot \vec{a} \quad , \quad g = \vec{x} \cdot \vec{a} \quad (5.20)$$

yazalım. O zaman (5.19) ile

$$\mathcal{L}_r g = (r+1)K_{r+1}f - (n-r)kK_r g \quad (5.19')$$

eşitliği eşdeğer olur.

Bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \vec{n}\}$ ortonormal çatısını seçelim ve bu çatının $N^{(n+1)}(k)$ da M boyunca duali $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}\}$ olsun. Bu durumda yapı denklemleri

$$\begin{aligned} dx &= \sum_i \theta_i e_i \\ de_i &= \sum_j \theta_{ij} e_j + \sum_j h_{ij} \theta_j \vec{n} - kx \theta_i \\ d\vec{n} &= -\sum_{i,j} h_{ij} \theta_j e_i \end{aligned} \quad (5.21)$$

şeklindedir. Burada kolaylık sağlaması açısından $\vec{x}$ yerine x kullanılmaktadır. (5.21)'in kullanılması ve doğrudan bir hesaplama ile

$$g = \vec{e}_i \cdot \vec{a} \quad , \quad g_{ij} = fh_{ij} - kg\delta_{ij} \quad (5.22)$$

elde edilir. Önerme 5.3.2 ve (5.22) 'den

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r g &= \sum_{i,j} T_{ij}^r g_{ij} = \sum_{i,j} T_{ij}^r h_{ij} f - kg \sum_{i,j} T_{ij}^r \delta_{ij} \\ &= (r+1)K_{r+1}f - k(n-1)gK_r \end{aligned} \quad (5.23)$$

bulunur. Böylece (5.19)'ye eşdeğer olan (5.19') ispatlanmış olur. Benzer biçimde f_i tanımından ve (5.21)'den

$$f_i = -\sum_j h_{ij} (e_j \cdot \vec{a}) \quad (5.24)$$

elde edilir.

$\vec{a}$ keyfi olduğundan (5.22) ve (5.24)'ten (5.18) ispatlanmış olur.

Önerme 5.4.2

(n+1)-boyutlu $N^{(n+1)}(k)$ uzay formunda kapalı yönlendirilmiş n-boyutlu bir hiperyüzey M olsun. O zaman f ve $g \in C^\infty$ fonksiyonları için

$$\int_M g \mathcal{L}_{n-1} f \, dv = \int_M f \mathcal{L}_{n-1} g \, dv$$

ve

$$\int_M \mathcal{L}_{n-1} f \, dv = 0 \quad (5.25)$$

dir [7].

İspat:

Önerme 5.3.2 (1)'de $r = n-1$ seçelim. Önerme 5.2.1 de verilen Cheng-Yau koşulu göz önüne alınırsa $\mathcal{L}_{n-1}$ operatörü self adjoint olur. Böylece (5.25) elde edilir.

Önerme 5.4.3

(n+1)-boyutlu $N^{(n+1)}(k)$ uzay formunda n-boyutlu bir hiperyüzey M olsun. O zaman

$$G\delta_{ij} - \sum_k h_{ik} T_{kj}^{n-1} = 0 \quad (5.26)$$

dir [7].

İspat

(5.15)'de $r = n$ seçelim ve $G = K_n$ olduğunu göz önüne alalım. O zaman

$$T_{ij}^n = G\delta_{ij} - \sum_k h_{ik} T_{kj}^{n-1} \quad (5.27)$$

olur. (5.18)'de T_{ij}^r ve $\delta_{i_1 i_2 \dots i_r j_1 j_2 \dots j_r}^{j_1 j_2 \dots j_r j}$ 'nin tanımından

$$T_{ij}^n = 0 \quad (5.28)$$

elde edilir. Nihayet (5.27) ve (5.28)'dan (5.26)'ye ulaşılır.

Buraya kadar Teorem 5.1.2'yi ispatlamak için gerekli araçları tanım ve önermeler ile açıkladık. Şimdi Teorem 5.1.2'nin ispatı için gerekli olan son önermeyi ispatlayarak ispatı tamamlayacağız.

5.5 Teorem 5.1.2'nin İspatının Tamamlanması

Önerme 5.5.1

(n+1)-boyutlu $N^{(n+1)}(k)$ uzay formunda kapalı yönlendirilmiş n-boyutlu bir hiperyüzey $\vec{x}: M \rightarrow N^{(n+1)}(k)$ olsun. M 'nin $G = K_n$ Gauss eğriliğine ve bir $\vec{n}$ birim normal vektörüne sahip olduğunu kabul edelim. O zaman $L_{n+1}(k)$ daki herhangi bir sabit $\vec{a}$ vektörü için m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve K_{n-1} M 'nin (n-1)-inci ortalama eğriliği olmak üzere

$$0 = (n+m) \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m+1} G dv - m \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-1} (\vec{a} \cdot \vec{a}) G dv - k \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^m (\vec{a} \cdot \vec{x}) K_{n-1} dv + mk \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^{m-1} (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 G dv \quad (5.29)$$

dir [7].

İspat:

$$f = q^m \vec{x}, \quad q = \vec{a} \cdot \vec{n} \quad (5.30)$$

yazalım. f 'nin birinci türevi ve ikinci kovaryant türevinin tanımından sırasıyla

$$f_i = (q^m)_i x + q^m x_i, \quad (5.31)$$

$$f_{ij} = (q^m)_{ij} x + (q^m)_i x_j + (q^m)_j x_i + q^m x_{ij} \quad (5.32)$$

dir. $\mathcal{L}_{n-1}$ operatörünün tanımından

$$\mathcal{L}_{n-1}(f) = x \mathcal{L}_{n-1} q^m + \sum_{i,j} T_{ij}^{n-1} (q^m)_i x_j + q^m \mathcal{L}_{n-1} x \quad (5.33)$$

olur. (5.19)'da $r = n-1$ seçilirse $G = K_n$ olduğundan

$$\mathcal{L}_{n-1} \vec{x} = nG\vec{n} - kK_{n-1}\vec{x} \quad (5.34)$$

dir.

Önerme 5.4.2, (5.34) ve (5.18) dan (5.33)'ün M üzerinde integre edilmesiyle

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_M q^m (\mathcal{L}_{n-1} x) dv + 2 \int_M \sum_{i,j} T_{ij}^{n-1} (q^m)_i x_j dv \\ &= 2 \int_M q^m (nG\vec{n} - kK_{n-1}\vec{x}) dv + 2m \int_M \sum_{i,j,k} T_{ij}^{n-1} m q^{m-1} (-h_{ik}(\vec{a} \cdot \vec{e}_k)) e_j dv \\ &= 2 \int_M q^m (nG\vec{n} - kK_{n-1}\vec{x}) dv - 2m \int_M q^{m-1} G \sum_j (\vec{a} \cdot \vec{e}_j) e_j dv \\ &= 2 \int_M q^m (nG\vec{n} - kK_{n-1}\vec{x}) dv - 2m \int_M q^{m-1} G (\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n} - k(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{x}) dv \end{aligned} \quad (5.35)$$

elde edilir. Bu durumda $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned}
0 &= (n+m) \int_M q^m G \vec{n} dv - m \int_M q^{m-1} G \vec{a} dv \\
&\quad - k \int_M q^m K_{n-1} \vec{x} dv + mk \int_M q^{m-1} (\vec{x} \cdot \vec{a}) G \vec{x} dv
\end{aligned} \tag{5.36}$$

olur. (5.36)'nin her iki tarafını $\vec{a}$ ile iç çarpıma tabi tuttuğumuzda Önerme 5.5.1 elde edilir.

(5.29) denkleminin $k=0$ olması hali Bang-Yen Chen [5] tarafından farklı bir metotla ispatlanmıştır (Teorem 4.3.2).

Teorem 5.1.2'nin ispatının tamamlanması;

Önerme 5.5.1'de $m=1$ seçilirse

$$(n+1) \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n})^2 G dv = \int_M (\vec{a} \cdot \vec{a}) G dv + k \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n}) (\vec{a} \cdot \vec{x}) K_{n-1} dv - k \int_M G (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 dv \tag{5.37}$$

olur. M , $N^{(n+1)}(k)$ 'da kapalı bir hiperyüzey olduğundan, M 'nin Euler karakteristiği $\chi(M)$, i-yinci ortalama eğriliği K_i ve yalnızca n boyutuna bağlı sabitler c_i olmak üzere Gauss-Bonnet teoremi

$$\int_M G dv = \frac{Vol S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv \tag{5.38}$$

şeklindedir [13].

(5.38)'in (5.37)'de yerine yazılmasıyla Teorem 5.1.2 ispatlanmış olur.

5.6 Uzak Formlarında Gauss-Bonnet-Grotemeyer Teoreminin Sonuçları

Sonuç 5.6.1

$\vec{x}: M \rightarrow N^{(n+1)}(k)$, $N^{(n+1)}(k)$ 'da n -boyutlu kapalı yönlendirilmiş bir hiperyüzey olsun. O zaman $\vec{a} \in L_{n+1}(k)$ lineer uzayından sabit bir vektör, G M 'nin Gauss eğriliği ve K_{n-1} M 'nin $(n-1)$ -inci ortalama eğriliği olmak üzere

$$\int_M (n(\vec{a} \cdot \vec{n})G - k(\vec{a} \cdot \vec{x})K_{n-1}) dv = 0 \tag{5.39}$$

dir [2],[7].

İspat:

Önerme 5.5.1'de $m=0$ seçilirse

$$n \int_M (\vec{a} \cdot \vec{n}) G dv - k \int_M (\vec{a} \cdot \vec{x}) K_{n-1} dv = 0 \tag{5.40}$$

olup buradan

$$\int_M (n(\vec{a} \cdot \vec{n})G - k(\vec{a} \cdot \vec{x})K_{n-1})dv = 0$$

bulunur.

Sonuç 5.6.2

Önerme 5.5.1’de $q = \vec{a} \cdot \vec{n}$ yazılırsa $L_{n+1}(k)$ uzayındaki her sabit $\vec{a}$ birim vektörü için

$$\begin{aligned} \int_M q^m G dv = \frac{m-1}{n+m-1} & \left(\int_M q^{m-2} G dv - k \int_M q^{m-2} (\vec{x} \cdot \vec{a})^2 G dv \right. \\ & \left. + \frac{k}{m-1} \int_M q^{m-1} (\vec{x} \cdot \vec{a}) K_{n-1} dv \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

dir [7].

Sonuç 5.6.3

n ve m tek olsun. Önerme 5.5.1 ile aynı hipotez altında $L_{n+1}(k)$ lineer uzayındaki her sabit $\vec{a}$ vektörü için

$$\begin{aligned} \int_M q^m G dv = \frac{(m-1)(m-3)...1}{(n+m-1)(n+m-3)...(n+1)} & \left[\frac{Vol S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv \right] \\ -k \int_M & \left[\frac{m-1}{n+m-1} q^{m-2} + \frac{(m-1)(m-3)...1}{(n+m-1)(n+m-3)} q^{m-4} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(m-1)(m-3)}{(n+m-1)(n+m-3)...(n+1)} \right] (\vec{x} \cdot \vec{a})^2 G dv \\ +k \int_M & \left[\frac{1}{n+m-1} q^{m-1} + \frac{m-1}{(n+m-1)(n+m-3)} q^{m-3} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(m-1)(m-3)...3}{(n+m-1)(n+m-3)...(n+1)} q \right] (\vec{x} \cdot \vec{a}) K_{n-1} dv \end{aligned} \quad (5.42)$$

dir.

Ayrıca n çift ve m tek ise $L_{n+1}(k)$ lineer uzayındaki her sabit $\vec{a}$ vektörü için $\int_M q^m G dv$

ifadesi,

$$\begin{aligned} \int_M q^m G dv = -k \int_M & \left[\frac{m-1}{n+m-1} q^{m-2} + \frac{(m-1)(m-3)}{(n+m-1)(n+m-3)} q^{m-4} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(m-1)(m-3)...2}{(n+m-1)(n+m-3)...(n+1)} q \right] (\vec{x} \cdot \vec{a})^2 G dv \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$+k \int_M \left[\frac{1}{n+m-1} q^{m-1} + \frac{m-1}{(n+m-1)(n+m-3)} q^{m-3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m-3)\dots 2}{(n+m-1)(n+m-3)\dots n} \right] (\vec{x} \cdot \vec{a}) K_{n-1} dv$$

dir [7].

$k=0$ olması halinde Sonuç 5.6.3

$$\begin{aligned} \int_M q^m G dv &= \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{(n+m-1)(n+m-3)\dots (n+1)} \left[\frac{\text{Vol} S^n(1)}{2} \chi(M) - \sum_i c_i k^i \int_M K_{n-2i} dv \right] \\ &= \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{(n+m-1)(n+m-3)\dots (n+1)} \int_M G dv \\ &= \frac{C_{n+m}}{C_m} \chi(M) \end{aligned}$$

olup Teorem 4.3.2 yi vermektedir.

6. SONUÇLAR

Bu bölümde Gauss-Bonnet-Grotemeyer teoreminden elde etmiş olduğumuz sonuçları vereceğiz.

Sonuç 6.1.

M , $\mathbb{R}^3$ de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. M nin Gauss eğriliği G , birim normal vektör alanı $\vec{n}$ ve Euler karakteristiği $\chi(M)$ olsun. $\mathbb{R}^3$ de sabit bir birim vektör $\vec{a}$ ve M üzerinde herhangi bir vektör $\vec{b}$ ise aşağıdaki durumlar elde edilir.

1. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı α olsun. Eğer $\vec{a} \neq \vec{b}$ ise o zaman

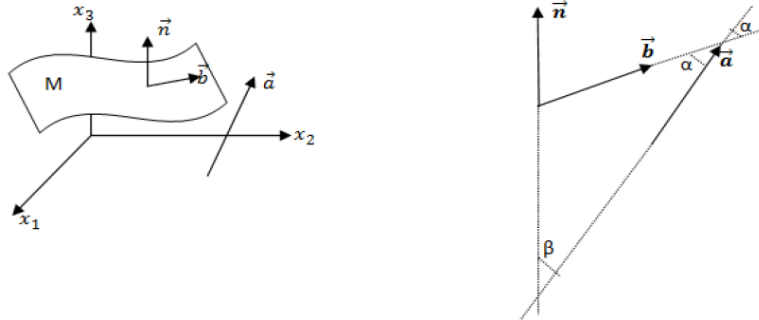
$$\int_M \sin^2 \alpha G dv = \frac{2\pi}{3} \chi(M) \quad (6.1)$$

dir.

2. $k \in \mathbb{R}$ bir sabit olsun. Eğer $\vec{a} = k\vec{b}$ ve $\vec{a} // \vec{b}$ ise $\chi(M) = 0$ dir.

İspat:

1. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı α olsun (Şekil 6.1).



Şekil 6.1. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = \|\vec{a}\| \|\vec{n}\| \cos \beta \text{ ve } \vec{a} \text{ ve } \vec{n} \text{ birim vektör olduğundan}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = \cos \beta$$

olur. Şekil 6.1'den $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ olduğu göz önüne alındığında (6.1) eşitliğine ulaşılır.

2. İç çarpım işleminin özelliklerinden $(\vec{a} \cdot \vec{n}) = (k\vec{b} \cdot \vec{n}) = k(\vec{b} \cdot \vec{n})$ dir. $\vec{b}$ vektörü M üzerinde olduğundan $(\vec{b} \cdot \vec{n}) = 0$ ve dolayısıyla $(\vec{a} \cdot \vec{n}) = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.2.1'den $\chi(M) = 0$ bulunur. Buna ek olarak Eğer $\vec{a} // \vec{b}$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı sıfır olacağından (6.1)'den $\chi(M) = 0$ elde edilir.

Önerme 3.3.4 ve Sonuç 6.1. göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.2

$M, \mathbb{R}^3$ de yönlendirilmiş bir yüzey, $\mathbb{R}^3$ de sabit birim vektör $\vec{a}$ ve M üzerinde bir vektör $\vec{b}$ olsun. Eğer M bir tor yada tor yüzeyine homeomorf bir yüzey ise bu durumda $\vec{a} / \vec{b}$ dir.

Eğer M yüzeyi birim küre ise Teorem 4.2.1 ve Sonuç 6.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.3.

$M \mathbb{R}^3$ 'de birim küre, $\vec{b}$ M üzerinde vektör ve $\vec{a} \mathbb{R}^3$ 'de sabit bir birim vektör olsun. Bu durumda $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ ortogonaldır.

İspat:

Birim kürenin Gauss eğriliği $G=1$ ve Euler karakteristiği $\chi(S^2)=1$ olduğundan Teorem 4.2.1'den

$$\int_M \sin^2 \alpha dv = \frac{4\pi}{3} = Vol(S^2) \quad (6.2)$$

olur. $Vol(S^2) = \int_{S^2} dv$ olduğundan (6.2)'den

$$\sin^2 \alpha = 1$$

elde edilir. Buradan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dir.

KAYNAKLAR

- [1] **Barbosa, J. L. M. ve Colares, A. G.** “Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature” *Ann. Global Anal. Geom.*, 15 (1997), 277–297
- [2] **Bivens, I.** “Integral formulas and hyperspheres in a simply connected space form” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88 (1983), 113–118.
- [3] **Carmo, M.P.** “Differential Geometry of Curves and Surfaces” Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1976, New Jersey, 503p.
- [4] **Carmo, M.P.** “Riemannian Geometry” Birkhauser, 1992, Boston.
- [5] **Chen, B.Y.** “On an integral formula of Gauss-Bonnet-Grotemeyer” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971), 208–212.
- [6] **Cheng, S. Y. ve S.-T. Yau** “Hypersurfaces with constant scalar curvature” *Math. Ann.*, 225 (1977), 195–204.
- [7] **Grinberg, E. L. ve Li, H.** “The Gauss-Bonnet-Grotemeyer Theorem in space forms” *Inverse problems and Imaging*, 4 (2010), no.4, 655-664.
- [8] **Grotemeyer, K. P.** “Über das Normalenbündel differentierbarer mannigfaltigkeiten” *Ann. Acad. Sci. Fennicae A. I.* 336 (1963), no.15, 1-12.
- [9] **Hacısalihoğlu, H., H.**, “Diferensiyel Geometri” Gazi Üniversitesi, 1983, Ankara.
- [10] **Hacısalihoğlu, H., H.**, “Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş” Fırat Üniversitesi Fen Fak. Yayınları, 1980, Elazığ.
- [11] **Li, H.** “Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms” *Math. Ann.*, 305 (1996), 665–672.
- [12] **Reilly, R.** “Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms” *J. Dif. Geom.*, 8 (1973), 465–477.
- [13] **Rosenberg, H.** “Hypersurfaces of constant curvature in space forms” *Bull. Sci. Math.*, 117, (1993), 211–239.
- [14] **Sabuncuoğlu, A.**, “Diferensiyel Geometri” Nobel Yayın Dağıtım, 2006, Ankara.
- [15] **Salimov, A., Mağden, A.** “Diferansiyel Geometri” Aktif Yayınları, 2007, Erzurum.
- [16] **Solanes, G.** “Integral geometry and the Gauss-Bonnet theorem in constant curvature spaces” *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358 (2006), 1105–1115.
- [17] **Spivak, M.** "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry" Vol.II, Publish or Perish, Berkley.

[18] Verpoort, S. “The Geometry of the Second Fundamental Form: Curvature Properties and Variational Aspects” Yüksek Lisans Tezi, KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN, 2008

[19] Voss, K. “Einige differentialgeometrische kongruenzsätze für geschlossene flächen und hyperflächen” Math. Ann., 131 (1956), 180–218.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılı Çorum doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Çorum'da tamamladım. 2001 yılında girmiş olduğum Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2006 yılında mezun oldum. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans programını kazandım ve 2008 yılında tamamladım. 2007 yılında T. Halkbankası A.Ş. Çorum Şubesi'nde işe başladım. Halkbankasında 2,5 yıl çalıştıktan sonra 2010 yılı başında Tunceli Üniversitesi'ne Matematik Öğretim Görevlisi olarak atandım. Halen Tunceli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde görevime devam etmekteyim. Evliyim ve bir oğlum var.