

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İDEAL YAKINSAKLIK

Muharrem ALĞAN

Yüksek Lisans Tezi

Anabilim Dalı: Matematik

Program : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

TEMMUZ-2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İDEAL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muharrem ALĞAN
(101121113)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27.06.2012

Tezin Savunulduğu Tarih : 13.07.2012

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Rifat ÇOLAK
Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Mikail ET
Yrd.Doç.Dr. Mahmut IŞIK

TEMMUZ - 2012

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımını gördüğüm, bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Rifat ÇOLAK' a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Muharrem ALĞAN

ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SİMGELER LİSTESİ.....	VI
1. BÖLÜM	
1.GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
2.TEMEL KAVRAMLAR	3
3. BÖLÜM	
3. ALT VE ÜST I-LİMİT NOKTALARI, I-liminfx ve I-limsupx.....	9
4. BÖLÜM	
4. FARK DİZİLERİNİN I-YAKINSAKLIĞI.....	13
5. BÖLÜM	
5. A^I -İSTATİKSEL YAKINSAKLIK VE İDEAL A-TOPLANABİLME.....	21
KAYNAKLAR.....	30

ÖZET

Bu çalışmada sayı dizilerinin ideal yakınsaklığı ve konuya ilişkin bazı temel özellikler incelenmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü olan giriş bölümünde istatistiksel ve ideal yakınsaklığın tarihsel gelişimi, ikinci bölümünde ideal yakınsaklık ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, reel terimli bir $x=(x_n)$ dizisi için $I\text{-}\liminf x$ ve $I\text{-}\limsup x$ kavramları ve bunlara ait bazı temel özellikler ele alınmıştır.

Dördüncü bölümünde fark dizilerinin I -yakınsaklığı, beşinci bölümde A^I – istatistiksel yakınsaklık ve ideal A –toplamabilme kavramları incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık, fark dizisi.

SUMMARY

GENERALIZED IDEAL CONVERGENCE

In this study I-convergence of number sequences and related fundamental properties are examined.

This thesis consists of five parts.

In the first chapter, the historical development of statistical and ideal convergence is given. In the second chapter some basic properties of ideal convergence are given.

In the third chapter, for a sequence $x=(x_n)$ with real or complex entries, the concepts $I\text{-}\liminf x$ and $I\text{-}\limsup x$ are given and some related basic properties are examined.

In the fourth chapter, I-convergence of difference sequences and in the fifth chapter the concepts A^I -statistical convergence and ideal A-summability are examined.

Key words: statistical convergence, ideal convergence, difference sequence.

SİMGELER LİSTESİ

- $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi
- $\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
- $2^{\mathbb{N}}$: $\mathbb{N}$ kümesinin kuvvet kümesi
- c : tüm yakınsak dizi uzayları
- $((Ax)_n)$: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
- $d(A)$: A kümesinin asimptotik yoğunluğu
- $\delta(A)$: A kümesinin doğal yoğunluğu
- $\delta_A(K)$: K kümesinin A – yoğunluğu
- S : İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
- S_A : A – istatistiksel yakınsak diziler uzayı
- $S(\Delta)$: Δ – istatistiksel yakınsak diziler uzayı
- $c_I(\Delta)$: $\Delta\mathcal{I}$ –yakınsak diziler uzayı
- $\Delta\mathcal{I}(\Lambda_x)$: $\Delta\mathcal{I}$ –limit noktaları kümesi
- $\Delta\mathcal{I}(\Gamma_x)$: $\Delta\mathcal{I}$ –yığılma noktaları kümesi
- c_I : $\mathcal{I}$ –yakınsak diziler uzayı
- $\mathcal{F}(\mathcal{I})$: $\mathcal{I}$ ideali ile üretilen süzgeç
- $S_A(\mathcal{I})$: Tüm $A^{\mathcal{I}}$ – istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
- $S(\mathcal{I})$: Tüm $\mathcal{I}$ –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
- $\mathcal{I}(A)$: Tüm ideal A – toplanabilir dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisinin en geniş uygulama ve araştırma alanlarından biri, 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [15] ve Steinhaus [34] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık metodudur. Bu yakınsaklık tipi klasik anlamda yakınsaklığın bir genelleşmesi olup pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı günümüze kadar birçok matematikçi tarafından üzerinde çalışılmış ve halen çalışılmakta olan bir konudur. Özellikle Schoenberg [30], Freedman ve Sember [16], Fridy ([17], [18]), Connor [6], Fridy ve Orhan [19] gibi bir çok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine önemli katkılarda bulunmuşlardır.

$\mathcal{I}$ -yakınsaklık çalışılırken istatistiksel yakınsaklığın bir çok özelliğinden yararlanılmıştır. Kostyrko, Mačaj ve Šalát reel sayı dizileri için $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır [26]. $\mathcal{I}$ -yakınsaklık, $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin $\mathcal{I}$ ideali kavramına dayanır. İstatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}$ -yakınsaklığın özel bir halidir ve özel bir ideal seçimi ile elde edilir. Ayrıca $\mathcal{I}$ -yakınsaklığın Connor tarafından tanımlanan μ -istatistiksel yakınsaklık ile bir bakıma denk olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Kostyrko, Šalát ve Wilezyński bu kavramı herhangi bir metrik uzayda tanımlayarak bazı özelliklerini vermişlerdir [27].

İstatistiksel yakınsaklığın tanımlanması ve bazı özelliklerinin çalışılmasının ardından 1993’de Fridy istatistiksel limit noktalarını tanımlamıştır [18]. Daha sonra Fridy ve Orhan, istatistiksel üst limit (istatistiksel limit superior) ve istatistiksel alt limit (istatistiksel limit inferior) kavramlarının tanımlarını vermişlerdir [19]. Bu tanımlardan yararlanarak Demirci, $\mathcal{I}$ -limit superior ve $\mathcal{I}$ -limit inferior tanımlarını vermiş ve bunlar üzerinde çalışmıştır [10].

1981’de Kızmaz, $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için $\Delta x = (\Delta x_n) = (x_n - x_{n+1})$ olmak üzere $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta)$ dizi uzaylarını tanımlayarak, bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normuna göre birer BK uzayı olduklarını ispatlamıştır. Ayrıca bu uzayların α -, β - ve γ -dualleri ile bu uzaylar arasındaki bazı matris dönüşümlerini elde etmiştir [24].

Et, $\Delta^2 x = (\Delta^2 x_n) = (\Delta x_n - \Delta x_{n+1})$ fark dizisini kullanarak $c_0(\Delta^2), c(\Delta^2)$ ve $l_\infty(\Delta^2)$ uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + |x_2| + \|\Delta x\|_\infty$$

normuna göre birer BK uzayı olduklarını göstermiştir. Ayrıca bu uzayların Köthe-Toeplitz duallerini ve bu uzaylar arasındaki bazı matris dönüşümlerini elde etmiştir [12]. Daha sonra Et ve Çolak genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını tanımlamışlardır ve $\Delta^m x = (\Delta^m x_n) = (\Delta^{m-1} x_n - \Delta^{m-1} x_{n+1})$ ve $\Delta^m x_n = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{n+v}$ olmak üzere $c_0(\Delta^m), c(\Delta^m)$ ve $l_\infty(\Delta^m)$ uzayların bazı özelliklerini incelemişler, ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normuna göre birer BK uzayı olduğunu göstermiş ve bu uzayların Köthe-Toeplitz dualleri ile bu uzaylar arasındaki bazı matris dönüşümlerini elde etmişlerdir ([7],[13]). Başarır, fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanımladıktan sonra [1], Et ve Nurray, daha önce c_0, c ve l_∞ için yapılmış olan bu çalışmaları herhangi bir X dizi uzayı için genelleştirerek, $\Delta^m(X) = \{x = (x_n) : (\Delta^m x_n) \in X\}$ uzayını tanımlamış ve bu uzayların bazı topolojik özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonra Δ^m -istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmiştir [14]. Gümtüş fark dizilerini kullanarak $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını tanımlamış ve $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsaklık konusu ile ilgili çalışmalar yapmıştır [20].

Çolak bir adım daha ileri giderek, $\alpha = 1$ için istatistiksel yakınsaklığı veren ve bu nedenle bir genelleştirme olan α . dereceden istatistiksel yakınsaklık konusunu incelemiştir [8].

Kısa bir süre önce Savaş vd. [33] ve Savaş vd. [32] istatistiksel yakınsaklık λ -istatistiksel yakınsaklık ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramlarını idealler aracılığı ile genelleştirip, $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I} - \lambda$ -istatistiksel yakınsaklık ve $A^\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılan istatistiksel yakınsaklıkla ilgili yeni yakınsaklık tiplerini elde ettiler.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 X ve Y , w nın iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$, $n, k = 1, 2, \dots$, reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, bir $x = (x_k) \in X$ dizisi verildiğinde her $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için

$$y_n = (Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi (x in A -dönüşüm dizisi) mevcuttur denir.

Eğer her $x \in X$ için $Ax = ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir.

Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L değerine yakınsak ise x dizisi L değerine A -toplabilir (veya A -limitlenebilir) denir ve bu durum $A - \lim x = L$ ile gösterilir.

Özel olarak, $X = Y = c$ olmak üzere $A \in (c, c)$ ise A ya *konservatif matris* denir. Her yakınsak (x_k) dizisi için $\lim_k x_k = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ koşulu sağlarsa A regüler matris adını alır. Bu durum kısaca $A \in (c, c; p)$ ile gösterilir [22].

Teorem 2.2 (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$(R_1) \quad \|A\|_{\infty} = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty,$$

$$(R_2) \quad \text{Her sabit } k \text{ için } \lim_n a_{nk} = 0,$$

$$(R_3) \quad \lim_n \sum_k a_{nk} = 1$$

koşullarını sağlamasıdır [22].

Örnek 2.3 Bir $x = (x_k)$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan

$$\sigma_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$$

dizisine dönüştüren opreatöre Cesaro operatörü denir ve $(C, 1)$ veya C_1 ile gösterilir.

Açıkça bu operatöre karşılık gelen matris

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; \quad 1 \leq k \leq n \text{ ise,} \\ 0 & ; \quad k > n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup, $C_1 = (c_{nk})$ matrisi regüler bir matristir [3].

Tanım 2.4 $A \subseteq \mathbb{N}$, bir küme, χ_A fonksiyonu A kümesinin karakteristik fonksiyonu ve $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k), \quad \delta_n(A) = \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(k)}{k}$$

olarak tanımlansın.

$$\underline{d}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf d_n(A), \quad \overline{d}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup d_n(A)$$

sayıları sırasıyla A kümesinin *alt* ve *üst asimptotik yoğunlukları* olarak adlandırılır.

Eğer

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(A)$$

limiti mevcutsa bu limite A kümesinin *asimptotik yoğunluğu* denir.

Benzer şekilde

$$\underline{\delta}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \delta_n(A), \quad \overline{\delta}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \delta_n(A)$$

sırasıyla A kümesinin *alt* ve *üst logaritmik yoğunluğu* olarak adlandırılır. Eğer

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(A)$$

limiti mevcutsa bu limite A kümesinin *logaritmik yoğunluğu* denir.

Keyfi bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için

$$\underline{d}(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A) \leq \overline{d}(A)$$

sağlanır. Eğer $d(A)$ mevcut ise $\delta(A)$ da mevcut ve $\delta(A) = d(A)$ dır. Ayrıca $\underline{d}(A), \underline{\delta}(A), \overline{\delta}(A), \overline{d}(A)$ sayıları $[0, 1]$ aralığındadır ([4], [21]).

Tanım 2.5 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n, |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $S - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir [17].

Tanım 2.6 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere, bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesi için

$$\delta_A(K) = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_K(k) = \lim_n (A_{\chi_K})_n$$

mevcut ise K kümesi A -yoğunluğa sahiptir denir, $\delta_A(K)$ sayısına da K kümesinin A -yoğunluğu adı verilir.[16]

Tanım 2.7 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler matris olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin A -yoğunluğu sıfır yani,

$$\delta_A(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_A - \lim x = L$ şeklinde gösterilir [6].

Tanım 2.8 $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{I}$ ailesi için

$$(i) \emptyset \in \mathcal{I},$$

$$(ii) \text{ Her } A, B \in \mathcal{I} \text{ için } A \cup B \in \mathcal{I},$$

$$(iii) \text{ Her } A \in \mathcal{I} \text{ ve her } B \subset A \text{ için } B \in \mathcal{I}$$

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{I}$ ailesine $\mathbb{N}$ 'de bir *ideal* denir [27].

Çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe $\mathcal{I}$ ideali ile $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir ideali kastedilecek ve $2^{\mathbb{N}}$, doğal sayılar kümesinin bütün alt kümelerinin sınıfını, yani kuvvet kümesini gösterecektir.

Tanım 2.9 $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir $\mathcal{I}$ ideali için $\mathcal{I} \neq 2^{\mathbb{N}}$ oluyorsa $\mathcal{I}$ 'ya gerçek ideal denir [27].

Tanım 2.10 $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ 'nin her sonlu alt kümesini kapsıyorsa $\mathcal{I}$ 'ya *uygun ideal* denir [27].

Tanım 2.11 $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{F}$ ailesi için

$$(i) \emptyset \notin \mathcal{F},$$

- (ii) Her $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- (iii) Her $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B$ ise $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine $\mathbb{N}'$ 'de bir *süzgeç* denir [25].

Tanım 2.12 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal olmak üzere

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : M = \mathbb{N} \setminus A, A \in \mathcal{I}\}$$

kümesi $\mathbb{N}$ de bir süzgeçtir [27].

Tanım 2.13 $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ idealinin elemanı oluyorsa $x = (x_n)$ dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına $\mathcal{I}$ - *yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I} - \lim x = L$ ile gösterilir [27].

Örnek 2.14 d, A kümesinin asimptotik yoğunluğu olmak üzere

$$\mathcal{I}_d = \{A \subseteq \mathbb{N} : d(A) = 0\}$$

olarak tanımlanırsa $\mathcal{I}_d, \mathbb{N}'$ de bir uygun idealdir [27].

Örnek 2.15 $\mathbb{N}'$ 'nin tüm sonlu alt kümelerinden elde edilen $\mathcal{I}_f$ sınıfı $\mathbb{N}'$ 'de bir uygun idealdir [27].

Örnek 2.16 $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ ve $k \neq l$ için $D_k \cap D_l = \emptyset$ olacak şekilde, sonsuz elemanlı D_j ($j = 1, 2, \dots$) kümelerini seçelim. Mesela $j = 1, 2, \dots$ için

$$D_j = \{2^{j-1}(2s-1) : s \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \text{Sonlu sayıda } D_j \text{ için } A \cap D_j \neq \emptyset\}$$

tanımlanırsa bu durumda $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olur [20].

Teorem 2.17 Uygun bir $\mathcal{I}$ ideali için aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ise $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$

(ii) Eğer $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta$ ise $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \xi + \eta$
 (iii) Eğer $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta$ ise $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \xi \eta$
 [28].

İspat: (i) Bu durum $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}$ dan aşıkardır.

(ii) $\varepsilon > 0$ olmak üzere sonuç $\{n : |(x_n + y_n) - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon\} \subset \{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{n : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ kapsamassından elde edilir.

(iii) $B = \{n : |x_n - \xi| < 1\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ alalım. Açıkça $|x_n y_n - \xi \eta| \leq |x_n| |y_n - \eta| + |\eta| |x_n - \xi|$ dır. Her $n \in B$ için $|x_n| \leq |x_n - \xi + \xi| < |\xi| + 1$ alabiliriz ve buradan $K = |\xi| + |\eta| + 1$ alınırsa

$$|x_n y_n - \xi \eta| \leq (|\xi| + 1) |y_n - \eta| + |\eta| |x_n - \xi| \leq K (|y_n - \eta| + |x_n - \xi|) \quad (2.1)$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ sayısını öyle seçelim ki

$$0 < 2\delta < \frac{\varepsilon}{K} \quad (2.2)$$

şartı sağlansın.

$M_1 = \{n : |x_n - \xi| < \delta\}$ ve $M_2 = \{n : |y_n - \eta| < \delta\}$ kümeleri için $M_1, M_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dır. Açıkça $B \cap M_1 \cap M_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dır ve herbir $n \in B \cap M_1 \cap M_2$ için (2.1) ve (2.2) den

$$|x_n y_n - \xi \eta| < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan $\{n : |x_n y_n - \xi \eta| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ elde edilir ki bu da (iii) ün ispatını verir.

Tanım 2.18 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut ise $x = (x_n)$ dizisi ξ 'ye $\mathcal{I}^* -$ yakınsaktır denir. Bu durumu ifade etmek için kısaca $\mathcal{I}^* - \lim x_n = \xi$ yazılır.

$\mathcal{I}$ -yakınsaklık ve $\mathcal{I}^* -$ yakınsaklık arasında

$$\mathcal{I}^* - \lim x_n = \xi \Rightarrow \mathcal{I} - \lim x_n = \xi$$

şeklinde bir ilişki vardır ve bunun tersi genellikle doğru değildir [27].

Tanım 2.19 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ de bir ideal olsun. Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde, $\mathcal{I} - \lim x_n = x_0$ şartını sağlayan herbir reel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\mathcal{I} - \lim f(x_n) = f(x_0)$ oluyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında $\mathcal{I}$ -süreklidir denir ([2], [31]).

Önerme 2.20 Eğer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x_0)$ noktasında $\mathcal{I}$ -sürekli ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu x_0 noktasında $\mathcal{I}$ -süreklidir ([2], [31]).

Önerme 2.21 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları bir x_0 noktasında $\mathcal{I}$ -sürekli ise $f + g$ ve $f.g$ fonksiyonları da x_0 noktasında $\mathcal{I}$ -süreklidir [2].

3. ALT VE ÜST $\mathcal{I}$ -LİMİT NOKTALARI: $\mathcal{I} - \liminf x$ ve $\mathcal{I} - \limsup x$

Bu bölümde reel terimli bir $x = (x_n)$ dizisi için $\mathcal{I} - \liminf x$ ve $\mathcal{I} - \limsup x$ kavramları ve bunlara ait bazı temel özellikler ele alınmıştır. Reel terimli bir dizi için istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları Fridy tarafından [18], daha sonra extremal istatistiksel limit noktaları (istatistiksel $\liminf x$, istatistiksel $\limsup x$) Fridy ve Orhan tarafından [19] ve $\mathcal{I} - \limsup x$ ve $\mathcal{I} - \liminf x$ kavramları da Demirci tarafından verilmiştir [10]. $\mathcal{I}$ -limit noktası ve $\mathcal{I}$ -yığılma noktası kavramları Kostyriko vd. tarafından metrik uzaylardaki karşılıklarına genişletilmiştir [26]. Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir uygun ideali olarak alınacaktır.

Tanım 3.1 $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n} = \lambda$$

olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \notin \mathcal{I}$ kümesi varsa λ sayısı x dizisinin $\mathcal{I} - \text{limit noktasıdır}$ denir [9].

Tanım 3.2 $x = (x_n)$ reel terimli dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n : |x_n - L| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

oluyorsa bu durumda L sayısına x dizisinin $\mathcal{I} - \text{yığılma noktası}$ denir [10].

Tanım 3.3 $\mathcal{I}$ doğal sayılar kümesinde bir uygun ideal ve $x = (x_n)$ reel terimli bir dizi olsun. $x = (x_n)$ dizisi için $\mathcal{I} - \limsup x$ ve $\mathcal{I} - \liminf x$;

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \{n : x_n > b\} \notin \mathcal{I}\}$$

ve

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \{n : x_n < a\} \notin \mathcal{I}\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{I} - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \text{ ise,} \\ -\infty, & B_x = \emptyset \text{ ise,} \end{cases}$$

ve

$$\mathcal{I} - \liminf x = \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset \text{ ise,} \\ +\infty, & A_x = \emptyset \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Teorem 3.4

(a) Eğer $\beta = \mathcal{I} - \limsup x$ sonlu ise bu durumda her pozitif ε sayısı için

$$\{n : x_n > \beta - \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \quad \text{ve} \quad \{n : x_n > \beta + \varepsilon\} \in \mathcal{I} \quad (3.1)$$

sağlanır.

(b) Eğer $\alpha = \mathcal{I} - \limsup x$ sonlu ise bu durumda her pozitif ε sayısı için

$$\{n : x_n < \alpha + \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \quad \text{ve} \quad \{n : x_n < \alpha - \varepsilon\} \in \mathcal{I} \quad (3.2)$$

sağlanır [10].

İspat. Sadece (a)'nın ispatı verilecektir. (b)'nin ispatı benzer şekildedir.

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\beta + \varepsilon > \beta = \sup B_x$ olduğundan, $\beta + \varepsilon$ sayısı B_x kümesinin bir elemanı değildir ve $\{n : x_n > \beta + \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ dır. Diğer yandan aşıkarak $\beta - \varepsilon < \beta$ sağlanır ve $\beta - \varepsilon < b' < \beta$, $b' \in \{b : B_x \notin \mathcal{I}\}$ olacak şekilde bir $b' \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Bu durumda $\{n : x_n > b'\} \notin \mathcal{I}$ ve $\{n : x_n > \beta - \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ dır. Bu da istenileni verir, yani (3.1) sağlanır.

Diğer yandan her bir $\varepsilon > 0$ için β , (3.1) i sağlasın. Bu durumda eğer $\varepsilon > 0$ ise $\beta + \varepsilon \notin \{b \in \mathbb{R} : \{n : x_n > b\} \notin \mathcal{I}\}$ ve $\mathcal{I} - \limsup x \leq \beta + \varepsilon$ yazabiliriz. Bu her $\varepsilon > 0$ için sağlandığından

$$\mathcal{I} - \limsup x \leq \beta \quad (3.3)$$

yazabiliriz. (3.1) deki ilk şart her bir $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{I} - \limsup x \geq \beta - \varepsilon$ olmasını gerektirir ve buradan

$$\mathcal{I} - \limsup x \geq \beta \quad (3.4)$$

elde ederiz. (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinden $\beta = \mathcal{I} - \limsup x$ olur.

Teorem 3.5 Reel sayıların her $x = (x_n)$ dizisi için

$$\mathcal{I} - \liminf x \leq \mathcal{I} - \limsup x \quad (3.5)$$

sağlanır [10].

İspat. $\mathcal{I} - \limsup x = +\infty$ olması durumunda (3.5) aşıkarak sağlanır. $\limsup x < +\infty$ olduğunu kabul edelim. İki durum söz konusudur:

- a) $\mathcal{I} - \limsup x = -\infty$;
b) $-\infty < \mathcal{I} - \limsup x < +\infty$.

$\mathcal{I} - \limsup x = -\infty$ olması durumunda her bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{n : x_n > a\} \in \mathcal{I} \quad (3.6)$$

sağlanır. (3.6) dan her $a \in \mathbb{R}$ için $\{n : x_n < a\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve açıkça her $a \in \mathbb{R}$ için $\{n : x_n < a\} \notin \mathcal{I}$ olduğu görülür. Buradan

$$\mathcal{I} - \liminf x = \inf \{a : \{n : x_n < a\} \notin \mathcal{I}\} = \infty$$

olur ve (3.5) ispatlanmış olur.

$-\infty < \mathcal{I} - \limsup x < +\infty$ olması durumunda $\beta = \mathcal{I} - \limsup x = \sup \{a : \{n : x_n > a\} \notin \mathcal{I}\}$ alalım. $a > \beta$ ise, bu taktirde $\{n : x_n > a\} \in \mathcal{I}$ ve $\{n : x_n < a\} \notin \mathcal{I}$ olup

$$\mathcal{I} - \liminf x = \inf \{a : \{n : x_n < a\} \notin \mathcal{I}\} \leq \beta$$

elde edilir. Böylece (3.5) sağlanmış olur.

Tanım 3.6 Reel sayıların bir $x = (x_n)$ dizisi için eğer $\{n : |x_n| > B\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir B sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine $\mathcal{I}$ -sınırlıdır denir.

$\mathcal{I}$ -yakınsak bir dizi $\mathcal{I}$ -sınırlıdır, ancak bunun tersi doğru değildir [10].

Lemma 3.7 $\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ olacak şekilde iki uygun ideal olsun. Bu durumda eğer $\mathcal{I}_1 - \lim x_n = L$ ise aynı zamanda $\mathcal{I}_2 - \lim x_n = L$ dir [27].

Sonuç 3.8 $\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ olacak şekilde iki uygun ideal olsun. Bu takdirde eğer $x = (x_n)$ dizisi $\mathcal{I}_1$ -sınırlı ise aynı zamanda $\mathcal{I}_2$ -sınırlıdır [27].

Teorem 3.9 Bir $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{I} - \liminf x = \mathcal{I} - \limsup x$$

olmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması durumunda

$$\mathcal{I} - \lim x = \mathcal{I} - \liminf x = \mathcal{I} - \limsup x$$

dir [10].

Reel sayıların sınırlı bir $x = (x_n)$ dizisi için çekirdek (*core*) kavramı Knoop [23] tarafından $[\liminf x, \limsup x] = \text{core}\{x\}$ olarak ve istatistiksel sınırlı bir dizi için Fridy ve Orhan tarafından

$$S - \text{core}\{x\} = [S - \liminf x, S - \limsup x]$$

şeklinde verilmiştir [19]. Benzer şekilde $\mathcal{I}$ -sınırlı bir $x = (x_n)$ dizisi için $\mathcal{I} - \text{core}\{x\}$ kavramı Demirci tarafından

$$\mathcal{I} - \text{core}\{x\} = [\mathcal{I} - \liminf x, \mathcal{I} - \limsup x]$$

şeklinde verilmiştir [10].

Teorem 3.10 Reel sayıların bir $x = (x_n)$ dizisi verildiğinde, doğal sayıların herhangi bir $\mathcal{I}$ ideali için

$$\liminf x \leq \mathcal{I} - \liminf x \leq \mathcal{I} - \limsup x \leq \limsup x$$

eşitsizliği sağlanır [10].

Sonuç 3.11 Reel sayıların bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$\mathcal{I} - \text{core}\{x\} \subset \text{core}\{x\}$$

sağlanır [10].

4. FARK DİZİLERİNİN $\mathcal{I}$ -YAKINSAKLIĞI

Tanım 4.1 Bir $x = (x_n)$ reel sayı dizisinin Δx ve $\Delta^m x$ fark dizileri, $m \in \mathbb{N}$ sabit ve

$$\Delta^m x_n = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{n+v}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta x &= (\Delta x_n) = (x_n - x_{n+1}) \\ \Delta^m x &= (\Delta^m x_n) = (\Delta^{m-1} x_n - \Delta^{m-1} x_{n+1}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ([24], [13], [7]).

Tanım 4.2 X dizi uzayı bir Banach uzayı olmak üzere, eğer $P_k : X \rightarrow \mathbb{C}$, $P_k(x) = x_k$ koordinat fonksiyoneli her bir $k = 1, 2, \dots$ için sürekli ise bu durumda X uzayına BK uzayı denir [29].

Teorem 4.3 c yakınsak diziler uzayını göstermek üzere, $\Delta - yakınsak$ diziler uzayı

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

olarak tanımlanır. Bu uzay

$$\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty}$$

normuna göre bir BK uzayıdır [24].

Tanım 4.4 Reel sayıların bir $x = (x_n)$ dizisi verilmiş olsun. $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde bir uygun ideal, $L \in \mathbb{R}$ ve $\Delta x = (x_n - x_{n+1})$ olmak üzere

$$\Delta A_{\varepsilon} = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi her $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{I}$ idealine ait oluyorsa x dizisi L sayısına $\Delta \mathcal{I} - yakınsaktır$ denir ve bu durumu göstermek için $\Delta \mathcal{I} - \lim x_n = L$ yazılır. Bu durumda L sayısına x dizisinin $\Delta \mathcal{I}$ limiti adı verilir [20].

Örnek 4.5 $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset\}$ ideali $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan minimal ideal olmak üzere, $x = (x_n)$ dizisinin $\Delta \mathcal{I}_0$ -yakınsak olması için gerek ve yeter şart Δx dizisinin $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde sabit olmasıdır [20].

Örnek 4.6 $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$ ve $M \neq \mathbb{N}$ olsun. $\mathcal{I}_M = 2^M$ ideali $\mathbb{N}$ de bir gerçek idealdir. x dizisinin $\Delta\mathcal{I}_M$ -yakınsak olması için gerek ve yeter şart Δx dizisinin $\mathbb{N} \setminus M$ de sabit olmasıdır [20].

Önerme 4.7 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde bir uygun ideal ve $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi olsun. Bu durumda $c(\Delta) \subseteq c_{\mathcal{I}}(\Delta)$ dır [20].

Bu kapsama bazı idealler için kesindir. Buna ilişkin bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.8 $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\Delta x_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = k^2 \\ -1 & , \quad n = k^2 - 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \quad \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olup, $x \in c_{\mathcal{I}_d}(\Delta)$ fakat $x \notin c(\Delta)$ dır [20].

Önerme 4.9

- (i) Her sabit $x = (a, a, \dots)$ dizisi sıfıra $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsaktır.
- (ii) $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsak herhangi bir dizinin $\Delta\mathcal{I}$ -limiti tektir.
- (iii) Eğer x dizisinin her bir alt dizisi L sayısına $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsayan bir alt diziye sahipse bu durumda x dizisi L ye $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsaktır [20].

İspat

(i) Sabit $(a, a, \dots)$ dizisi için $\Delta x = (0, 0, \dots)$ olacağından, Önerme 4.7 gözönüne alınırsa ispat elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki x dizisinin L_1 ve L_2 gibi iki tane $\Delta\mathcal{I}$ -limiti var ve ayrıca $L_1 \neq L_2$ olsun. $\mathcal{F}(\mathcal{I}), \mathcal{I}$ tarafından üretilen süzgeç olmak üzere,

$$\Delta A_1 = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - L_1| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve

$$\Delta A_2 = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - L_2| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

yazılabilir. Bu durumda $\Delta A_1 \cap \Delta A_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve dolayısıyla $\Delta A_1 \cap \Delta A_2 \neq \emptyset$ olmalıdır. $0 < \varepsilon < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ olarak seçilirse $\Delta A_1 \cap \Delta A_2 = \emptyset$ olacaktır. Bu durum kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla $L_1 = L_2$ dir.

(iii) Kabul edelim ki (iii) sağlanmasın, yani x in tüm alt dizileri L 'ye $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsa-

yan birer alt diziye sahip olduğu halde x , L 'ye $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsak olmasın. Bu durumda

$$\Delta A_{\varepsilon_0} = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - L_1| \geq \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir ε_0 vardır. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerini kapsar. Dolayısıyla $\Delta A_{\varepsilon_0} = \{n_1, n_2, \dots\}$ kümesi sonsuzdur. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_{n_k} = y_k$ seçelim. $y = (y_k)$, x dizisinin L sayısına $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsak olmayan bir alt dizisidir. O halde kabul yanlıştır.

Teorem 4.10 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal, $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ birer reel sayı dizisi olsunlar. Bu taktirde

(i) Eğer $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = L_1$, $\Delta\mathcal{I} - \lim y_n = L_2$ ise $\Delta\mathcal{I} - \lim(x_n + y_n) = L_1 + L_2$ dir.

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit ve $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = L_1$ ise $\Delta\mathcal{I} - \lim(\alpha x_n) = \alpha L_1$ dir.

(iii) Δx dizisi sınırlı bir dizi olmak üzere eğer $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = L_1$, $\Delta\mathcal{I} - \lim y_n = L_2$ ise $\mathcal{I} - \lim((\Delta x_n)(\Delta y_n)) = L_1 L_2$ dir [20].

İspat

(i) $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = L_1$, $\Delta\mathcal{I} - \lim y_n = L_2$ olsun. Bu durumda

$$\Delta A_1 = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve

$$\Delta A_2 = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

yazılabilir. $\Delta A_1, \Delta A_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ bir süzgeç olduğundan $\Delta A_1 \cap \Delta A_2 \neq \emptyset$ dir.

Her $n \in \Delta A_1 \cap \Delta A_2$ için,

$$\begin{aligned} |\Delta(x_n + y_n) - (L_1 + L_2)| &= |(\Delta x_n - L_1) + (\Delta y_n - L_2)| \\ &\leq |\Delta x_n - L_1| + |\Delta y_n - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece $\Delta\mathcal{I} - \lim(x_n + y_n) = L_1 + L_2$ elde edilir.

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ve $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = L_1$ olsun. Bu durumda $\Delta A_1 = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacağından her $n \in \Delta A_1$ için

$$\begin{aligned} |\Delta(\alpha x_n) - \alpha L_1| &= |\alpha(\Delta x_n - L_1)| \\ &\leq |\alpha| |\Delta x_n - L_1| \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon' \end{aligned}$$

yani $\{n \in \mathbb{N} : |\Delta(\alpha x_n) - \alpha L_1| < \varepsilon'\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ elde edilir. Bu da $\Delta\mathcal{I} - \lim(\alpha x_n) = \alpha L_1$ olduğunu verir.

(iii) $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = L_1$ ve $\Delta\mathcal{I} - \lim y_n = L_2$ olsun. $\forall n \in \Delta A_1 \cap \Delta A_2$ için,

$$\begin{aligned} |(\Delta x_n)(\Delta y_n) - L_1 L_2| &= |\Delta x_n \Delta y_n - \Delta x_n L_2 + \Delta x_n L_2 - L_1 L_2| \\ &\leq |\Delta x_n (\Delta y_n - L_2)| + |L_2 (\Delta x_n - L_1)| \\ &\leq |\Delta x_n| |\Delta y_n - L_2| + |L_2| |\Delta x_n - L_1| \\ &< |\Delta x_n| \frac{\varepsilon}{2} + |L_2| \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

yazılabilir. Δx dizisi sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $|\Delta x_n| \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$|(\Delta x_n)(\Delta y_n) - L_1 L_2| \leq M \frac{\varepsilon}{2} + |L_2| \frac{\varepsilon}{2}$$

olacağından ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.11 $(\Delta(x_n y_n)) \neq (\Delta x_n)(\Delta y_n)$ olması nedeniyle, $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = L_1$ ve $\Delta\mathcal{I} - \lim y_n = L_2$ olduğunda $\Delta\mathcal{I} - \lim(x_n y_n) = L_1 L_2$ olmak zorunda değildir [20].

Örnek 4.12 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x_n) = (n)$ ve $(y_n) = (2n)$ olsun. Bu durumda $\Delta\mathcal{I} - \lim x_n = -1$, $\Delta\mathcal{I} - \lim y_n = -2$ fakat $\Delta\mathcal{I} - \lim(x_n y_n) \neq 2$ dir [20].

Tanım 4.13 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal, x bir reel sayı dizisi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x)_{m_n} = L$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut ise x dizisi L sayısına $\Delta\mathcal{I}^* - \text{yakınsaktır}$ denir ve $\Delta\mathcal{I}^* - \lim x = L$ yazılır [20].

Önerme 4.14 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bu durumda $c_{\mathcal{I}^*}(\Delta) \subseteq c_{\mathcal{I}}(\Delta)$ dir [20].

İspat. Kabul edelim ki $\Delta\mathcal{I}^* - \lim x_n = L$ olsun. Tanımdan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x)_{m_n} = L \quad (4.1)$$

olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır. Süzgeç tanımı gereğince $M = \mathbb{N} \setminus H$ olacak şekilde bir $H \in \mathcal{I}$ kümesi bulunabilir. (4.1) den $\forall \varepsilon > 0$ için $m_n > n_0$ olduğunda $|\Delta x_{m_n} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır.

$$\Delta A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_{m_n} - L| \geq \varepsilon\} \subseteq H \cup \{m_1 < m_2 < \dots m_{n_0}\}$$

ve ifadenin sağ tarafı $\mathcal{I}$ ya ait olduğundan sol taraf da $\mathcal{I}$ ya aittir. Dolayısıyla $\Delta A_\varepsilon \in \mathcal{I}$ elde edilir.

Uyarı 4.15 Yukarıdaki önermenin tersi genellikle doğru değildir [20].

Tanım 4.16 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ de bir gerçek ideal, $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x)_{m_n} = \lambda$ ve $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $M \subseteq \mathbb{N}$ kümesi varsa λ sayısına x dizisinin $\Delta\mathcal{I}$ - limit noktası denir. x dizisinin tüm $\Delta\mathcal{I}$ -limit noktalarının kümesi $\Delta\mathcal{I}(\Lambda_x)$ ile gösterilecektir [20].

Örnek 4.17 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$ ve

$$\Delta x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ kare ise,} \\ 0, & n \text{ kare değil ise,} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\Delta\mathcal{I}_d(\Lambda_x) = \{0\}$ dır [20].

Tanım 4.18 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ de bir gerçek ideal, $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - \gamma| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

oluyorsa γ sayısına x dizisinin $\Delta\mathcal{I}$ -yığılma noktası denir. x dizisinin tüm $\Delta\mathcal{I}$ -yığılma noktalarının kümesi $\Delta\mathcal{I}(\Gamma_x)$ ile gösterilecektir [20].

Önerme 4.19 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Herhangi bir x reel dizisi için $\Delta\mathcal{I}(\Lambda_x) \subseteq \Delta\mathcal{I}(\Gamma_x)$ dir [20].

İspat. $\lambda \in \Delta\mathcal{I}(\Lambda_x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x)_{m_n} = \lambda \quad \text{ve} \quad M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \notin \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $M \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. Yakınsaklık tanımı gereğince her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|(\Delta x)_{m_n} - \lambda| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$\{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - \lambda| < \varepsilon\} \supseteq M \setminus \{m_1 < m_2 < \dots m_{n_0}\}$$

olacağından ve ifadenin sağ tarafı ideale ait olmadığından

$$\{n \in \mathbb{N} : |\Delta x_n - \lambda| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

elde edilir ki bu da $\lambda \in \Delta\mathcal{I}(\Gamma_x)$ olması demektir.

Tanım 4.20 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve x bir reel sayı dizisi olsun.

$$B_{\Delta x} = \{b \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > b\} \notin \mathcal{I}\}$$

ve

$$A_{\Delta x} = \{a \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n < a\} \notin \mathcal{I}\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda x dizisi için $\Delta\mathcal{I} - \limsup x$ ve $\Delta\mathcal{I} - \liminf x$ şu şekilde tanımlanır:

$$\Delta\mathcal{I} - \limsup x = \begin{cases} \sup B_{\Delta x}, & B_{\Delta x} \neq \emptyset \text{ ise,} \\ -\infty, & B_{\Delta x} = \emptyset \text{ ise,} \end{cases}$$

ve

$$\Delta\mathcal{I} - \liminf x = \begin{cases} \inf A_{\Delta x}, & A_{\Delta x} \neq \emptyset \text{ ise,} \\ +\infty, & A_{\Delta x} = \emptyset \text{ ise.} \end{cases}$$

dir [20].

Teorem 4.21 Eğer $\Delta\mathcal{I} - \limsup x = \beta$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > \beta - \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \quad \text{ve} \quad \{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > \beta + \varepsilon\} \in \mathcal{I} \quad (4.2)$$

sağlanır. Bunun tersi de doğrudur, yani her $\varepsilon > 0$ için (4.2) sağlanırsa $\Delta\mathcal{I} - \limsup x = \beta$ dir [20].

İspat. $\Delta\mathcal{I} - \limsup x = \beta$ sonlu olsun. Bu durumda β sayısı

$$\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > b\} \notin \mathcal{I}$$

şartını sağlayan en büyük $b \in \mathbb{R}$ elemanıdır. $\beta + \varepsilon > \beta$ olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > \beta + \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ şartı sağlanmaz. Yani $\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > \beta + \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olmak zorundadır.

Diğer yandan $\beta - \varepsilon < \beta$ olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > b'\} \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $b' \in (\beta - \varepsilon, \beta)$ elemanı bulunabilir.

$$\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > \beta - \varepsilon\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > b'\}$$

olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n > \beta - \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ olur.

Teorem 4.22 Eğer $\Delta\mathcal{I} - \liminf x = \alpha$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n < \alpha + \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \text{ ve } \{n \in \mathbb{N} : \Delta x_n < \alpha - \varepsilon\} \in \mathcal{I} \quad (4.3)$$

sağlanır. Bunun tersi de doğrudur, yani her $\varepsilon > 0$ için (4.3) sağlanırsa $\Delta\mathcal{I} - \liminf x = \alpha$ dır [20].

Uyarı.4.23 Yukarıdaki son iki teorem gereğince $\Delta\mathcal{I} - \limsup x$ ve $\Delta\mathcal{I} - \liminf x$ noktalarının, $x = (x_n)$ dizisinin $\Delta\mathcal{I}$ -yığılma noktalarının sırasıyla en büyüğü ve en küçüğü olduğu söylenebilir [20].

Teorem 4.24 Herhangi bir x dizisi için

$$\Delta\mathcal{I} - \liminf x \leq \Delta\mathcal{I} - \limsup x$$

dir [20].

Tanım 4.25 Bir $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için

$$\{n : |\Delta x_n| > B\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı varsa, x dizisine $\Delta\mathcal{I} - \text{sınırlıdır}$ denir [20].

Teorem 4.26 $\Delta\mathcal{I}$ -sınırlı bir $x = (x_n)$ reel terimli sayı dizisinin $\Delta\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta\mathcal{I} - \liminf x = \Delta\mathcal{I} - \limsup x$$

olmasıdır [20].

Uyarı 4.27 Reel terimli bir $x = (x_n)$ sayı dizisi ve $\mathbb{N}'$ 'nin bir $\mathcal{I}$ ideali için

$$\Delta - \liminf x \leq \Delta\mathcal{I} - \liminf x \leq \Delta\mathcal{I} - \limsup x \leq \Delta - \limsup x$$

olduğu kolayca görülebilir [20].

5. $A^{\mathcal{I}}$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İDEAL A-TOPLANABİLME

Bu bölümde ilk olarak Savaş vd. [32] tarafından tanımlanan $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımı ile $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel üst ve alt limit kavramları tanımlanıp bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

İkinci olarak, ideal A -toplanabilme kavramı tanımlanıp, bu kavramın $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel yakınsaklıkla ilişkisi araştırılacaktır.

Bu bölümün tamamında bir $\mathcal{I}$ idealinden söz edildiğinde $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir uygun ideali, ve ayrıca $A = (a_{nk})$ matrisinden bahsedildiğinde ise bunun bir negatif olmayan regüler matris olduğu varsayılacaktır.

Tanım 5.1 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal, $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler matris, $x = (x_k)$ kompleks veya reel terimli bir dizi ve $K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ sayısı için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

ise o zaman x dizisi L sayısına $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel yakınsaktır (veya $S_A(\mathcal{I})$ -yakınsaktır) denir ve bu durum $S_A(\mathcal{I}) - \lim x = L$ yazılarak ifade edilir [32].

Tanım 5.1 de $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ alırsak $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel yakınsaklık A -istatistiksel yakınsaklıkla çıkarır.

Bir reel $x = (x_k)$ dizisi için F_x ve E_x kümeleri

$$F_x = \left\{ f \in \mathbb{R} : \text{her } \delta > 0 \text{ için } \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > f} a_{nk} \geq \delta \right\} \notin \mathcal{I} \right\},$$

ve

$$E_x = \left\{ e \in \mathbb{R} : \text{her } \delta > 0 \text{ için } \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k < e} a_{nk} \geq \delta \right\} \notin \mathcal{I} \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 5.2 x dizisinin $A^{\mathcal{I}}$ - istatistiksel üst limiti

$$S_A(\mathcal{I}) - \limsup x = \begin{cases} \sup F_x & F_x \neq \emptyset \text{ ise,} \\ -\infty & , F_x = \emptyset \text{ ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde x dizisinin $A^{\mathcal{I}} - \text{istatistiksel alt limiti}$

$$S_A(\mathcal{I}) - \limsup x = \begin{cases} \inf E_x & E_x \neq \emptyset \text{ ise,} \\ +\infty & , \quad E_x = \emptyset \text{ ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Burada hemen belirtelim ki Tanım 5.2 de $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ alırsak o zaman $S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$ ve $S_A(\mathcal{I}) - \liminf x$ kavramları Demirci [9] tarafından tanımlanan $S_A - \limsup x$ ve $S_A - \liminf x$ kavramları ile çakışır. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ ve $A = C_1$ seçiminde ise Fridy ve Orhan [19] tarafından tanımlanan $S - \liminf x$ ve $S - \limsup x$ kavramlarına ulaşırız.

Fridy ve Orhan [19] tarafından verilen ve Demirci [10] tarafından idealler için geliştirilen teoremlerin benzerlerini verelim.

Teorem 5.3 (i) $\beta = S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > \beta - \varepsilon} a_{nk} \geq \delta \right\} \notin \mathcal{I} \text{ ve } \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > \beta + \varepsilon} a_{nk} \geq \delta \right\} \in \mathcal{I} \quad (5.1)$$

dır. Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için (5.1) gerçekleşirse $\beta = S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$ dir.

(ii) $\alpha = S_A(\mathcal{I}) - \liminf x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k < \alpha + \varepsilon} a_{nk} \geq \delta \right\} \notin \mathcal{I} \text{ ve } \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k < \alpha - \varepsilon} a_{nk} \geq \delta \right\} \in \mathcal{I} \quad (5.2)$$

dır. Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için (5.2) gerçekleşirse $\alpha = S_A(\mathcal{I}) - \liminf x$ dir [3].

İspat. (i) $\beta = S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$ sonlu olsun. Bu durumda $F_x \neq \emptyset$ ve $\sup F_x = \beta$ dir. O halde supremum tanımından her $f \in F_x$ için $f \leq \beta$ dir ve her $\varepsilon > 0$ için $f > \beta - \varepsilon$ olacak şekilde bir $f \in F_x$ vardır.

$$\{k : x_k > f\} \subset \{k : x_k > f - \varepsilon\}$$

olduğundan her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > f} a_{nk} \geq \delta \right\} \subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > \beta - \varepsilon} a_{nk} \geq \delta \right\}$$

dır. $f \in F_x$ olduğundan yukarıdaki içermenin sol yanı $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ 'ya aittir, dolayısıyla sağ yanı da $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya ait olur. Böylece her $\delta > 0$ için $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k > \beta - \varepsilon} a_{nk} \geq \delta\right\} \notin \mathcal{I}$ elde edilir. Şimdi ise her $\delta > 0$ için $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k > \beta + \varepsilon} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$ olduğunu gösterelim. $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k > \beta + \varepsilon} a_{nk} \geq \delta\right\} \notin \mathcal{I}$ olduğunu farz edelim. Bu durumda $\beta + \varepsilon \in F_x$ dir. Bu ise β sayısının F_x kümesinin en küçük üst sınırı olmasıyla çelişir. O halde $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k > \beta + \varepsilon} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$ dir.

Tersine her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için (5.1) gerçekleşirse o zaman $\beta = S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$ olduğu açıktır.

Benzer şekilde (ii) de ispatlanır.

Teorem 5.4 Herhangi bir x reel sayı dizisi için

$$S_A(\mathcal{I}) - \liminf x \leq S_A(\mathcal{I}) - \limsup x \quad (5.3)$$

dir [3].

İspat. İlk olarak $S_A(\mathcal{I}) - \limsup x = -\infty$ durumunu ele alalım. Bu durumda $F_x = \emptyset$ olacağından her $f \in \mathbb{R}$ ve her $\delta > 0$ için $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k > f} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$ yani $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k \leq f} a_{nk} \geq \delta\right\} \notin \mathcal{I}$ olur. Böylece her $e \in \mathbb{R}$ ve her $\delta > 0$ için $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k < e} a_{nk} \geq \delta\right\} \notin \mathcal{I}$ dir, dolayısıyla $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel alt limit tanımından $S_A(\mathcal{I}) - \liminf x = -\infty$ olur. $S_A(\mathcal{I}) - \limsup x = +\infty$ olduğunu ispatlamaya gerek yoktur. Son olarak $\beta = S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$ sonlu ve $\alpha = S_A(\mathcal{I}) - \liminf x$ olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\beta + \varepsilon \in E_x$ olduğunu gösterelim; böylece $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ olacaktır. $\beta = S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$ sonlu olduğundan Teorem 5.3. (i) den her $\delta > 0$ için $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k > \beta + \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$ ve buradan da $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} \geq \delta\right\} \notin \mathcal{I}$ dir.

$$\left\{k : x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{k : x_k \leq \beta + \varepsilon\}$$

ve $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} \geq \delta\right\} \notin \mathcal{I}$ olduğundan $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k:x_k \leq \beta + \varepsilon} a_{nk} \geq \delta\right\} \notin \mathcal{I}$ olmalıdır. Böylece $\beta + \varepsilon \in E_x$ olur. $\alpha = \inf E_x$ olduğundan $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ ve ε keyfi olduğundan $\alpha \leq \beta$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 5.2 den 5.3 den ve $S_A - \liminf x$, $S_A - \limsup x$ tanımlarından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.5 Herhangi bir x reel sayı dizisi için

$$S_A - \liminf x \leq S_A(\mathcal{I}) - \liminf x \leq S_A(\mathcal{I}) - \limsup x \leq S_A - \limsup x \quad (5.4)$$

dir [3].

İspat. Öncelikle $S_A(\mathcal{I}) - \limsup x \leq S_A - \limsup x$ eşitsizliğini gösterelim. $L = S_A - \limsup x$ diyelim. Eğer $L = -\infty$ ise bu durumda her $f \in \mathbb{R}$ için $\delta_A \{k : x_k > f\} = 0$ veya denk olarak her $\delta > 0$ için $F = \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > f} a_{nk} \geq \delta\right\}$ kümesi sonludur. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan $F \in \mathcal{I}$ dır. Böylece $S_A(\mathcal{I}) - \limsup x = -\infty$ olur.

Şimdi ise $B = \{b \in \mathbb{R} : \delta_A \{k : x_k > b\} \neq 0\} \neq \emptyset$ olmak üzere $L = \sup B_x$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için

$$F_{x(L+\varepsilon)} = \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > L+\varepsilon} a_{nk} \geq \delta\right\}$$

kümesi sonlu olduğundan $\mathcal{I}$ ideale aittir. O halde

$$S_A(\mathcal{I}) - \limsup x = \sup \{f : F_{x(f)} \notin \mathcal{I}\} \leq L + \varepsilon$$

elde ederiz. ε nun keyfi olması sebebiyle $S_A(\mathcal{I}) - \limsup x \leq L$ sonucuna ulaşırız. Aynı düşünce ile $S_A - \liminf x \leq S_A(\mathcal{I}) - \liminf x$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 5.6 $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer her $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k: |x_k| > B} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir B sayısı varsa bu durumda x dizisine $A^{\mathcal{I}} - \text{istatistiksel sınırlıdır}$ denir [3].

Teorem 5.7 $A^{\mathcal{I}} - \text{istatistiksel sınırlı}$ bir x dizisinin $A^{\mathcal{I}} - \text{istatistiksel yakınsak}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$S_A(\mathcal{I}) - \liminf x = S_A(\mathcal{I}) - \limsup x$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [3].

İspat. $\alpha = S_A(\mathcal{I})\text{-}\liminf x$ ve $\beta = S_A(\mathcal{I})\text{-}\limsup x$ olsun. (5.3) den dolayı yalnızca $\beta \leq \alpha$ olduğunu göstermemiz gerekir. İlk olarak $S_A(\mathcal{I})\text{-}\lim x = L$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$ dir. $K'(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : x_k > L + \varepsilon\}$ ve $K''(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : x_k < L - \varepsilon\}$ diyelim. $K'(\varepsilon) \subset K(\varepsilon)$ ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olduğundan

$$\sum_{k \in K'(\varepsilon)} a_{nk} \leq \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk}$$

ve böylece

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} \geq \delta\right\} \subset \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in K'(\varepsilon)} a_{nk} \geq \delta\right\}$$

yazabiliriz. Buradan da, ideal tanımına göre, içermenin sol tarafındaki kümenin $\mathcal{I}$ ya ait olması çıkar. O halde β nın tanımından $\beta \leq L$ dir. Diğer taraftan $\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in K''(\varepsilon)} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$ olduğundan, α nın tanımından $L \leq \alpha$ dir. Böylece $\beta \leq \alpha$ elde ederiz.

Tersine $\alpha = \beta$ olduğunu kabul edelim ve $L = \alpha$ diyelim. Herhangi $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için (5.1) ve (5.2) den

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > L + \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I} \text{ ve } \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k < L - \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

elde ederiz. Böylece $S_A(\mathcal{I})\text{-}\lim x = L$ olur.

Tanım 5.8 $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - L \right| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa bu durumda x dizisi L sayısına ideal A – toplanabilirdir (veya kısaca $\mathcal{I}(A)$ – toplanabilirdir) denir. Bu durumda $\mathcal{I}(A)\text{-}\lim x = L$ yazacağız ve $\mathcal{I}(A)$ ile tüm ideal A –tolanabilir dizilerin kümesini göstereceğiz [3].

Uyarı 5.9 (i) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ için $\mathcal{I}(A)$ –toplanabilme kavramı Edely ve Mursaleen [11] tarafından tanımlanan istatistiksel A –toplanabilme kavramına indirgenir.

(ii) $A = C_1$ için $\mathcal{I}(A)$ –toplanabilme kavramını $\mathcal{I}(C_1)$ –toplanabilme olarak adlandıracagız [3].

Aşağıdaki teorem ideal A –toplanabilme ile $A^{\mathcal{I}}$ –istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Teorem 5.10 Bir x dizisi sınırlı ve L sayısına $A^{\mathcal{I}}$ –istatistiksel yakınsak ise bu durumda x , L sayısına ideal A –toplanabilirdir. Fakat bunun tersi doğru değildir [3].

İspat. $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olsun ve $\sup |x_k - L| = M$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - L \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x_k - L) + L \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - 1 \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} (x_k - L) \right| + \left| \sum_{k \notin K(\varepsilon)} a_{nk} (x_k - L) \right| + |L| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - 1 \right| \\ &\leq M \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} + \varepsilon \sum_{k \notin K(\varepsilon)} a_{nk} + |L| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - 1 \right| \\ &\leq B \left\{ \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - 1 \right| \right\} + \varepsilon \|A\| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $B = \max(M, |L|)$ dir. Eğer $\delta - \varepsilon \|A\| > 0$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı seçersek son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - L \right| \geq \delta \right\} &\subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} \geq \frac{\delta - \varepsilon \|A\|}{2B} \right\} \\ &\cup \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \geq \frac{\delta - \varepsilon \|A\|}{2B} \right\} \\ &= K_1 \cup K_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. $S_A(\mathcal{I})$ –yakınsaklık tanımına göre $K_1 \in \mathcal{I}$ dir. Ayrıca $\mathcal{I}$ bir uygun ideal ve A regüler bir matris olduğundan $\mathcal{I}$ – $\lim \sum_k a_{nk} = 1$, yani $K_2 \in \mathcal{I}$ olur. Böylece ideal tanımından $\mathcal{I}(A) - \lim x = L$ elde ederiz. Bu da ispatın ilk kısmını tamamlar.

Şimdi ise teoremin tersinin geçerli olmadığına dair bir örnek verelim: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal olmak üzere $\mathcal{I}$ nın sonsuz bir $C = \{p_1 < p_2 < p_3 < \dots\}$ alt kümesini

seçelim. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \text{ çift ise,} \\ 0, & k \text{ tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde ve $A = (a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & n = p_i, (i \in \mathbb{N}), k = 2p_i + 1 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}, & n \neq p_i, k = 2n + 1, k = 2n \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda x dizisinin sınırlılığı ve A matrisinin regülerliği aşıkardır. Buna göre

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \neq p_i \text{ ise,} \\ 1 & n = p_i \text{ ise.} \end{cases}$$

olur. Böylece her $\delta > 0$ sayısı için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| y_n - \frac{1}{2} \right| \geq \delta \right\} = C \in \mathcal{I},$$

yani x dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına ideal A -toplanabilirdir. Diğer taraftan

$$K(\varepsilon) = \left\{ k : \left| x_k - \frac{1}{2} \right| \geq \delta \right\} = \mathbb{N}$$

olduğundan

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{nk} \geq \delta \right\} = \mathbb{N} \notin \mathcal{I}$$

elde ederiz. O halde x dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel yakınsak değildir.

Uyarı 5.11 Teorem 5.10 da x dizisinin sınırlılık şartı, $\mathcal{I}$ -sınırlılık şartı ile değiştirilemez. Eğer değiştirilirse o zaman x dizisinin ideal A -toplanabilir olması gerekmebilir. Bunu göstermek için, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ alalım ve $x = (x_k)$ dizisi ile regüler bir $A = (a_{nk})$ matrisini sırası ile

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2 \text{ veya } k = n^2 + 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & n \text{ bir kare ve } k = n^2 + 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2} & n \text{ kare değil ve } k = n^2 \text{ veya } k = n^2 + 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda x dizisi $\mathcal{I}_\delta$ -sınırlıdır, fakat

$$y_n = \begin{cases} n^2 + \frac{1}{2}, & n \text{ kare değil ise} \\ 1, & n \text{ kare ise} \end{cases}$$

olacağından x dizisi $\mathcal{I}_\delta(A)$ -toplanabilir değildir [3].

Buck [5] üst limitine C_1 -toplanabilir bir dizinin aynı değere istatistiksel yakınsak olduğunu ispatlamıştır. Bu sonucun istatistiksel ve A -istatistiksel benzerleri Fridy ve Orhan [19] ve Demirci [9] tarafından verilmiştir. Biz ise burada Teorem 5.10'un tersi için aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 5.12 Eğer x dizisi üstten sınırlı ve $L = S_A(\mathcal{I}) - \lim \sup x$ sayısına ideal A -toplanabilir ise bu durumda x dizisi L sayısına $A^\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaktır [3].

İspat. $S_A(\mathcal{I}) - \lim x \neq L$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 5.7 den $S_A(\mathcal{I}) - \lim \inf x < L$ olur. Böylece, Teorem 5.3 (ii) ye göre, bir $M < L$ sayısı vardır öyleki her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k < M} a_{nk} \geq \delta \right\} \notin \mathcal{I} \quad (5.5)$$

dır. $K' = \{k : x_k < M\}$ diyelim. $L = S_A(\mathcal{I}) - \lim \sup x$ için Teorem 5.3 (i) den her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k: x_k > L + \varepsilon} a_{nk} \geq \delta \right\} \in \mathcal{I} \quad (5.6)$$

olur. $K'' = \{k : M \leq x_k \leq L + \varepsilon\}$ ve $K''' = \{k : x_k > L + \varepsilon\}$ olsun. (5.6) dan $\mathcal{I} - \lim_n \sum_{k \in K'''} a_{nk} = 0$ dır. Ayrıca (5.5) den, $\mathcal{I} - \lim_n \sum_{k \in K'} a_{nk} \neq 0$ dır. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan $\lim_n \sum_{k \in K'} a_{nk} \neq 0$ ve böylece A nın negatif olmayan matris olmasından dolayı sonsuz çokluktaki n değerleri için $\sum_{k \in K'''} a_{nk} \geq d > 0$ yazabiliriz.

$B = \sup_k x_k$ dersek

$$\begin{aligned}
(Ax)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k \in K'} a_{nk}x_k + \sum_{k \in K''} a_{nk}x_k + \sum_{k \in K'''} a_{nk}x_k \\
&\leq M \sum_{k \in K''} a_{nk} + (L + \varepsilon) \sum_{k \in K''} a_{nk} + B \sum_{k \in K'''} a_{nk} \\
&= M \sum_{k \in K''} a_{nk} + (L + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - (L + \varepsilon) \sum_{k \in K'} a_{nk} + (B - L - \varepsilon) \sum_{k \in K'''} a_{nk} \\
&= L \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} + \sum_{k \in K'} a_{nk} \right) - (L - M) \sum_{k \in K''} a_{nk} \\
&\quad + (B - L - \varepsilon) \sum_{k \in K'''} a_{nk} \\
&\leq L \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - d \right) - (L - M) d + (B - L - \varepsilon) \sum_{k \in K'''} a_{nk}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğe $\mathcal{I}$ -üst limiti uygulayıp $d(L - M) > 0$ olduğunu dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\text{-}\limsup_n (Ax)_n &\leq L + \varepsilon(1 - d) - d(L - M) \\
&< L + \varepsilon(1 - d)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan $\mathcal{I}\text{-}\limsup_n (Ax)_n \leq L$ olur. O halde x dizisi L sayısına $\mathcal{I}(A)$ -toplanabilir değildir. Bu bir çelişki olup kabulumuz yanlıştır. Öyleyse x dizisi L sayısına $S_A(\mathcal{I})$ -yakınsaktır.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem de ispatlanabilir.

Teorem 5.13 Eğer x dizisi alttan sınırlı ve $L = S_A(\mathcal{I}) - \liminf x$ sayısına ideal A -toplanabilir ise bu durumda x dizisi L sayısına $A^{\mathcal{I}}$ -istatistiksel yakınsaktır [3].

KAYNAKLAR

- [1] Başarır, M. (1995). "On the Δ –Statistical convergence of sequences", Fırat Univ., Journal of Science and Engineering, 7(2), 1-6.
- [2] Baláz, V., Červeňanský, J., Kostyrko, P. and Šalát, T. (2002). " $\mathcal{I}$ –convergence and $\mathcal{I}$ –continuity of real functions", Acta Mathematica 5, 56-62.
- [3] Belen, C. (2012) "İstatistiksel Yakınsaklık ve Yaklaşım Teorisi Üzerine", Doktora Tezi, Cumhuriyet üniversitesi Fen Bil. Enst. Sivas
- [4] Brown, T. C., Freedman, A. (1990). "The uniform density of sets of integers and Fermat's last theorem". C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 11, 1-6.
- [5] Buck, R.C. (1963). "Generalized asymptotic density", Amer. J. Math, 75, 335-346.
- [6] Connor, J. (1989). "On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence", Canad. Math. Bull., 32, 194-198.
- [7] Çolak, R., Et, M. (1997). "On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations", Hokkaido Mathematical Journal Vol. 26, 483-492.
- [8] Çolak, R. (2010). "Statistical convergence of order α ", Modern Methods in Analysis and its Appl. Anamaya Publishers, New Delhi 122-129.
- [9] Demirci, K. (2000). "A–statistical core of sequence", Demonstratio Math., XXXIII(2), 343-353.
- [10] Demirci, K. (2001). " $\mathcal{I}$ –limit superior and limit inferior", Mathematical Communications 6, 165-172.
- [11] Edely, O.H.H., Mursaleen, M. (2009). "On statistical A-summability". Math. comput. Model. 49, 672-680
- [12] Et, M. (1993). "On some difference sequence spaces", Doğa-Tr. J of Mathematics. 17, 18-24.
- [13] Et, M.; Çolak, R. (1995). "On some generalized difference sequence spaces", Soochow J. Math. 21 , no. 4, 377–386.
- [14] Et, M., Nuray, F. (2001). " Δ^m –Statistical convergence", Indian J. Pure appl. Math., 32(6), 961-969.
- [15] Fast, H. (1951) Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2, 241-244.

- [16] Freedman, A. R., Sember, J. J., (1981). "Densities and summability", Pacific, Journal of Mathematics, 95, 293-305.
- [17] Fridy, J. A. (1985). "On some statistical convergence", Analysis, 5, 301-313.
- [18] Fridy, J. A. (1993). "Statistical limit points", Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 118, Number 4, 1187-1192.
- [19] Fridy, J. A., Orhan C. (1997). "Statistical limit superior and limit inferior", Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 125, Number 12, 3625-3631.
- [20] Gümtüş, H. (2011) "Fark dizilerinin I-yakınsaklığı ve Asimtotik I-Denkliği", Doktora Tezi, Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enst. Afyon
- [21] Halberstam, H., Roth, K. F. (1966). "Sequences" I. Oxford, Clarendon Press, 290s., London.
- [22] Hardy, G. H: (1949). "Divergent Series", Oxford Univ. Press London.
- [23] K. Knopp, Zur, (1930). "Theorie der Limitierungsverfahren (Erste Mitteilung)", Math. Z. 31, 97-127.
- [24] Kızmaz, H. (1981). "On certain sequence spaces", Canad. Math. Bull. Vol. 24(2), 169-176.
- [25] J. Nagata (1974). "Modern General Topology", North-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London.
- [26] Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T. (2000). "Statistical Convergence and $\mathcal{I}$ -Convergence", The international mathematical scientific conference, 16th Summer School on Real Functions Theory.
- [27] Kostyrko, P., Šalát, T., Wilezyński, W. (2000). " $\mathcal{I}$ -Convergence", Real Analysis Exchange, Vol. 26(2), 669-680.
- [28] Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T. Sleizak, M. (2005). " $\mathcal{I}$ -Convergence and extremal $\mathcal{I}$ -limit points", Mathematica Slovaca, 55, 443-464.
- [29] Maddox, I.J. (1980). "Infinte matrices of operators", Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [30] Schonberg, I. J. (1959). "The integrability of certain function and related summability methods", Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

- [31] Sleziak, M., Toma, V., Cincura, J., Šalăt, T. (2004). "Sets of statistical cluster points and $\mathcal{I}$ -cluster points", Real Anal. Exchange Volume 30, Number 2, 565-580.
- [32] Savaş, E., Das, P., and Dutta, S. (2012). "A note on strong matrix summability via ideals", Appl. Math Lett., 25(4), 733-738
- [33] Savaş, E., Das, P.(2011). "A generalized statistical convergence via ideals", Appl. Math Lett.,24, 826-830.
- [34] Steinhaus, H. (1951) Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math. 2, 73-74.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muharrem ALĞAN

Doğum Yeri : Mardin

Doğum Tarihi : 20/09/1987

Yabancı Dil : İngilizce

EĞİTİM DURUMU

Lise : Adana Beşocak Lisesi, 2005

Lisans : Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010

Sertifika : Pedagojik Eğitim Sertifikası, 2012