

65937

T. C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYLARI ve

YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Çiğdem ASMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ

1997

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYLARI ve
YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Çiğdem ASMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez,.....Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile
Başarılı/Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

Danışman
Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
Bazı Genelleştirilmiş Dizi Uzayları
ve Yakınsaklık Çeşitleri

Çiğdem ASMA

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
1997, Sayfa:54

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; bazı yakınsaklık türlerinden yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, kuvvetli hemen hemen yakınsaklık, invariant yakınsaklık, kuvvetli invariant yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, σ -istatistiksel yakınsaklık ve mutlak hemen hemen yakınsaklık incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; bazı dizi uzayları ve bunlar arasındaki bağıntılar verilmiştir. Ayrıca bu uzayların genelleştirilmiş halleri ve α - , β - ve γ - dualeri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; bazı genelleştirilmiş fark dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları ve invariantlık verilmiş olup, bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Yakınsaklık, Dizi Uzayı, α - Duali, β - Duali, γ - Duali

ABSTRACT

Master Thesis

Some Generalized Sequence Spaces
and some types of Convergence

Çiğdem ASMA

Firat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

1997, Page:54

This thesis contains four chapters.

The first chapter deals with some basic definitions and theorems.

In the second chapter; convergence, almost convergence, strongly almost convergence, invariant convergence, strongly invariant convergence, statistically convergence, σ -statistically convergence and absolutely almost convergence are examined.

In the third chapter, some sequence spaces and some relations between these spaces are given. Furthermore α - , β - ve γ - duals of these spaces and some generalized sequence spaces are examined.

Fourth chapter is the original part of this thesis. In this chapter, the invariant space is defined and the inclusion relations between some generalized difference sequence spaces are mentioned.

KEY WORDS: Convergence, Sequence Spaces, α - Dual, β - Dual, γ - Dual

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, çok değerli Hocam Sayın Prof. Dr. Rifat ÇOLAK' a şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Çiğdem ASMA



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
BİRİNCİ BÖLÜM	
1. Temel Tanım ve Teoremler	1
İKİNCİ BÖLÜM	
2. Yakınsaklık Çeşitleri	7
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	
3. Genelleştirilmiş Bazı Dizi Uzayları	20
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM	
4. Dizi Uzayları Arasında Bazı Kapsama Bağıntıları	47
KAYNAKLAR	53

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
s	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
ℓ_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
bv	: Sınırlı sınımlı diziler uzayı
γ	: Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
X^*	: X üzerinde tanımlı bütün sürekli lineer fonksiyonların uzayı

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım.1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X, \quad \cdot : K \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay adı verilir. $\forall a, b \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için,

$$(L1) \quad x + y = y + x$$

$$(L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(L3) \quad x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir tek } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$(L4) \quad \text{Herbir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir tek } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$(L5) \quad 1 \cdot x = x$$

$$(L6) \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$(L7) \quad (a + b)x = ax + bx$$

$$(L8) \quad a(bx) = (ab)x$$

dir.

Tanım.1.2. $X \neq \emptyset$ bir cümle olsun.

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M3) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

dir.

Tanım.1.3. (X, d) bir metrik uzay ve $x=(x_n)$, X de bir dizi olsun.Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\forall n, m > n_0$ iken

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $x=(x_n)$, X de bir dizi olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken

$$d(x_n, s) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $s \in X$ varsa (x_n) dizisi X de yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow s$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ yazılır.

Burada ve bundan sonra $\lim_{n \rightarrow \infty}$ yerine $\lim_n$ ve limitsiz toplam $\sum_{n=1}^{\infty}$ 'den $\sum_n$ 'a alınacaktır.

Tanım.1.5. X bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için,

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$$

$$(N4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ (α skaler) şeklinde olursa bu taktirde X bir p -normlu uzay olur.

Tanım.1.6. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım.1.7. Tam normlu uzaya Banach uzayı adı verilir.

Teorem.1.1. Normlu bir X uzayının tam olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki mutlak yakınsak her serinin yakınsak olmasıdır.

Tanım.1.8. X bir vektör uzayı olsun.

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow g(x)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa g ye bir paranorm ve (X, g) ikilisine de bir paranormlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için,

$$(g1) \quad g(0) = 0$$

$$(g2) \quad g(x) = g(-x)$$

$$(g3) \quad g(x+y) \leq g(x) + g(y)$$

$$(g4) \quad \lambda \rightarrow \lambda_0, \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{ise} \quad \lambda x \rightarrow \lambda_0 x_0$$

dir, (Maddox, 1970) .

Tanım.1.9. (X, d) metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M nin noktası olabilen ya da olmayan bir $x_0 \in X$ alalım. Eğer x_0 ' ın her bir komşuluğu x_0 ' dan farklı enaz bir $y \in M$ noktası içeriyorsa x_0 noktasına M nin yığılma noktası denir. " x_0 ' ın bir komşuluğu " ifadesi ile, X in x_0 ' ın enaz bir ε -komşuluğunu içeren herhangi bir altcümlesini anlatmak istiyoruz.

Tanım.1.10. (X, d) metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M nin noktalarıyla, M nin yığılma noktalarından oluşan cümleye M nin kapanışı denir ve $\bar{M}$ ile gösterilir.

Teorem.1.2. M nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\bar{M} = M$ olmasıdır.

Teorem.1.3. (Tam Altuzay) Bir X tam metrik uzayının bir M altuzayının da tam olması için gerek ve yeter şart M nin X de kapalı bir cümle olmasıdır, (Kreyszig, 1978).

Teorem.1.4. M , bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan bir altcümlesi ve $\bar{M}$ bu cümlemin kapanışı olsun. Buna göre,

(a) $x \in \bar{M}$ olması için gerek ve yeter şart M de $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

(b) M nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $x_n \in M$ ve $x_n \rightarrow x$ ise $x \in M$ olmasıdır.

Teorem.1.5. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi, üzerinde tanımlanan

$$d(x, y) = |x - y|$$

metriğine göre tam uzaylardır, (Kreyszig, 1978).

Teorem.1.6. (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Teorem.1.7. (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun.

Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.1)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \max b_k \quad (1.2)$$

dir.

Teorem.1.8. (Seriler için genel yakınsaklık prensibi)

$\sum x_n$ yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall k \geq k_0$ ve $\forall p \geq 0$ için

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} x_n \right| < \varepsilon$$

dir, (Maddox, 1970).

Tanım.1.11. (Schauder Bazı) Eğer normlu bir X uzayı, her $x \in X$ için, $n \rightarrow \infty$ iken

$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)\| \rightarrow 0$ olacak şekilde birtek (α_n) skaler dizisi varolmak üzere bir (e_n) dizisi içeriyorsa, bu (e_n) dizisine X uzayının bir Schauder bazı denir.

Teorem.1.9. ℓ_p uzayı, $e_n = (\delta_{nj}) = \begin{cases} 1, & n = j \text{ iken} \\ 0, & n \neq j \text{ iken} \end{cases}$ olmak üzere,

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

.....

şeklinde tanımlanan bir (e_n) Schauder bazına sahiptir, (Kreyszig, 1978).

Tanım.1.12. (Lineer Fonksiyonel) X , K cismi üzerinde tanımlı lineer bir uzay olsun. X den K ya olan bir dönüşümü, $\forall a, b \in K$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

özellikliğini sağlıyorsa f 'e X üzerinde lineer bir fonksiyonel denir.

Tanım.1.13. (Sınırlı Lineer Fonksiyonel) $D(f)$ tanım bölgesi normlu bir X uzayında, değer bölgesi ise bu normlu X uzayının skaler cismi üzerinde bulunan sınırlı lineer bir f operatörüne sınırlı lineer fonksiyonel adı verilir. Buna göre, $\forall x \in D(f)$ için,

$$|f(x)| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde reel bir $c > 0$ sayısı vardır. Ayrıca f 'in normu,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

dir. Eğer f sınırlı lineer fonksiyonel ise, $\forall x \in D(f)$ için,

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

dir, (Kreyszig, 1978).

Tanım.1.14. X bir vektör uzayı olsun. $P: X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. $\forall x, y \in X$ için,

$$P(x + y) \leq P(x) + P(y)$$

ise P ye alt toplamsal fonksiyonel; $\forall x \in X$ ve $\alpha \geq 0$ skaleri için

$$P(\alpha x) = \alpha P(x)$$

ise P ye pozitif homojen denir. P fonksiyoneli alt toplamsal ve pozitif homojen ise alt lineer fonksiyonel denir, (Kreşiz, 1978).

Tanım.1.15. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, X den Y nin içine olan tüm sınırlı lineer operatörlerin cümlesi $B(X, Y)$ ile gösterilir.

Teorem.1.10. (Tamlik Teoremi) Normlu bir X uzayından normlu bir Y uzayına olan bütün lineer operatörlerin $B(X, Y)$ vektör uzayı,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

normu ile bir normlu uzaydır. Eğer Y lineer bir Banach uzayı ise $B(X, Y)$ de bir Banach uzayıdır.

Tanım.1.16. Normlu bir X uzayından, normlu bir Y uzayı üzerine olan bir izomorfizm, normu koruyan, yani, $\forall x \in X$ için

$$\|Tx\| = \|x\|$$

eşitliğini gerçekleyen, birebir ve örten lineer bir $T: X \rightarrow Y$ operatörüdür. Dolayısıyla T izometriktir. Bu durumda, X uzayı Y ile izomorfiktir ve X ile Y uzaylarına izomorfik normlu uzaylar denir.

II. BÖLÜM

YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Tanım.2.1. Bir $x=(x_n)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n > n_0$ için

$$|x_n - s| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $x=(x_n)$ dizisi s 'e yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ yazılır.

Bütün yakınsak dizilerin uzayını c ile göstereceğiz. Yani,

$$c = \{ x=(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ mevcut} \}$$

dir.

Tanım.2.2. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $L: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneline bir Banach limiti denir.

$$(i) x_n \geq 0 \quad (n=1,2,\dots) \Rightarrow L(x_n) \geq 0$$

$$(ii) e=(1,1,1,\dots) \Rightarrow L(e)=1$$

$$(iii) L(\sigma x) = L(x)$$

Burada $\sigma: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$, $(\sigma x_n) = (x_{n+1})$ şeklinde tanımlı kaydırma operatörüdür, (Banach, 1932).

Bütün Banach limitleri cümlesini B ile göstereceğiz. Ω bir alt lineer fonksiyonel olmak üzere, $\forall x \in \ell_\infty$ için $L(x) \leq \Omega(x)$ olacak şekilde ℓ_∞ üzerinde tanımlı bütün L lineer fonksiyonellerinin cümlesini $\{\ell_\infty, \Omega\}$ ile göstereceğiz. Yani,

$$\{\ell_\infty, \Omega\} = \{L \in \ell_\infty' : \forall x \in \ell_\infty \text{ için } L(x) \leq \Omega(x)\}$$

dir. Burada ℓ_∞' , ℓ_∞ nin cebirsel dualidir.

Infimum doğal sayıların bütün $n(1), n(2), \dots, n(r)$ cümleleri üzerinden alınmak üzere,

$$q(x) = \inf_k \limsup \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{k+n(i)}$$

(Lorentz, 1948),

$$w(x) = \sup \{ G(x) : G \in \beta \}$$

(Simons, 1969) ve

$$\beta_d = \{ \Omega : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R} \text{ altlineer ve } \{\ell_\infty, \Omega\} \subset \beta \}$$

olmak üzere,

$$\phi(x) = \sup \{ \Omega(x) : \Omega \in \beta_d \}$$

(Çolak ve Çakar, 1989) fonksiyonelleri ℓ_∞ üzerinde alt lineerdir.

Lemma.2.1. Her $x \in \ell_\infty$ için $q(x) = w(x) = \phi(x)$ dir, (Simons, 1969; Çolak ve Çakar, 1989).

Teorem.2.1. $L \in \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in \ell_\infty$ için $L(x) \leq q(x)$ dir, (Lorentz, 1948).

Tanım.2.3. V, ℓ_∞ üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olsun.

(i) $\{\ell_\infty, V\} \subset \beta$ ise V Banach limitleri doğurur denir.

(ii) $\beta \subset \{\ell_\infty, V\}$ ise V bütün Banach limitlerine baskındır denir.

Eğer V hem Banach limitleri doğurur hem de bütün Banach limitlerine baskınsa, bu taktirde $\{\ell_\infty, V\} = \beta$ dir, (Simons, 1969).

Teorem.2.2. $L^* : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}, L^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$ şeklinde tanımlansın. $x, y \in \beta$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$x_n \leq y_n$ ise $x \leq y$ yazalım. $L \in \beta$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

(a) $L(x) \leq L^*(x)$ (Yani L^* bütün Banach limitlerine baskındır.)

(b) Eğer $x \in c$ ise $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dir.

(c) Eğer $x, y \in \ell_\infty$ ve $x \leq y$ ise $L(x) \leq L(y)$ dir, (Simons, 1969).

İspat. Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise, bu taktirde Tanım.1.2 (iii) den ve Teorem.1.1 den,

$$L(x) = L(\sigma x) = \dots = L(\sigma^m x) \leq q(\sigma^m x),$$

inf, lim sup ve sup özellikleri gözönüne alındığında,

$$\begin{aligned}
 q(\sigma^m x) &= \inf_{n(1), \dots, n(r)} \limsup_k \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \sigma^{m_i}(x_{k+n(i)}) \\
 &\leq \limsup_k \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{k+n(i)+m} \\
 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} x_n = \limsup x_n = L^*(x)
 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece (a) ispatlanmış olur.

$$L(x) \leq L^*(x)$$

$$L(-x) \leq L^*(-x) \Rightarrow -L(-x) \geq -L^*(-x)$$

dir.

$$-L^*(-x) \leq -L(-x) = L(x) \leq L^*(x)$$

eşitsizliğini gözönüne alalım. $x \in \mathbb{C}$ olması halinde

$$\overline{\lim} x_n = L^*(x) = -L^*(-x) = \underline{\lim} x_n = \lim x_n$$

olacağından,

$$\lim x_n = \underline{\lim} x_n \leq L(x) \leq \overline{\lim} x_n = \lim x_n$$

olur ve buradan

$$L(x) = \lim x_n$$

bulunur.

Eğer $x \leq y$ ise $x-y \leq 0$ dir. Bu taktirde,

$$L^*(x-y) \leq L^*(0) = 0$$

olur ve (a) dan,

$$L(x-y) \leq L^*(x-y) \leq 0$$

elde edilir ve L lineer olduğundan

$$L(x) \leq L(y)$$

bulunur.

Tanım.2.4. $x=(x_n) \in \ell_\infty$ olsun. Eğer her $L \in \beta$ için $L(x) = s$ ise x dizisi s sayısına hemen hemen yakınsaktır denir ve $f\text{-}\lim x = s$ yazılır, (Das ve Mishra, 1981).

Şimdi bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin hemen hemen yakınsaklığını karakterize eden teoremleri ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem.2.3. $x=(x_n) \in \ell_\infty$ olsun. x dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart $q(x) = -q(-x)$ olmasıdır, (Lorentz, 1948).

Teorem.2.4. x hemen hemen yakınsaktır $\Leftrightarrow w(x) = -w(-x)$ dir, (Simons, 1969).

Teorem.2.5. x hemen hemen yakınsaktır $\Leftrightarrow \phi(x) = -\phi(-x)$ dir, (Çolak ve Çakar, 1989).

Teorem.2.6. Bir $x=(x_n) \in \ell_\infty$ dizisi verilmiş olsun. x' in s' e hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart n 'e göre düzgün olarak,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} x_i = s$$

olmasıdır, (Lorentz, 1948).

İspat.(i) Yeterlilik. Eğer teoremin hipotezi sağlanırsa, bu taktirde her $\epsilon > 0$, $\forall r > r_0$ ve $\forall n$ için

$$\frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} x_i < s + \epsilon$$

olacak şekilde bir r_0 vardır. Buradan $q(x) \leq s + \epsilon$ kalır. Benzer şekilde, her ϵ için $-q(-x) \geq s - \epsilon$ olduğu gösterilebilir. Buradan $q(x) = -q(-x)$ olduğu ve x' in s' e hemen hemen yakınsak olduğu görülür.

(ii) Gereklilik. Tersine, $q(x) = -q(-x) = s$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\epsilon > 0$ ise,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{k+n(i)} < s + \epsilon$$

olacak şekilde $n(1), n(2), \dots, n(r)$ ve k vardır. Bunun, her $\delta > 0$, yeterince büyük bütün p 'ler ve $\forall n$ için,

$$\frac{1}{p} \sum_{m=0}^{p-1} x_{n+m} < s + \delta$$

eşitsizliğini gerektirdiğini göstermeliyiz. k yerine $k-k_0$ ve $n(i)$ yerine $n(i)+k_0$ ($i=1, \dots, r$) alınırsa, bu takdirde her k için

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{k+n(i)} < s + \epsilon$$

sağlanır. Şimdi, her n ve her p için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{k+n(i)+n} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \sum_{m=n(i)+1}^{n(i)+p} x_{m+n} \\ &= \frac{1}{r} [x_{n+(n(1)+1)} + x_{n+(n(1)+2)} + \dots + x_{n+(n(1)+p)} \\ &\quad + x_{n+(n(2)+1)} + x_{n+(n(2)+2)} + \dots + x_{n+(n(2)+p)} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + x_{n+(n(r)+1)} + x_{n+(n(r)+2)} + \dots + x_{n+(n(r)+p)}] \end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafındaki birbirinden farklı terimlerin sayısı n 'in sınırlı bir fonksiyonudur, yani,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \sum_{m=n(i)+1}^{n(i)+p} x_{m+n} &= \frac{1}{r} \sum_{m=n(i)+1}^{n(i)+p} x_{m+n} + O(1) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{p-1} x_{m+n} + O(1) \end{aligned}$$

dir. Şimdi, her n için

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{k+n(i)+n} < s + \epsilon$$

olduğundan, yeterince büyük p ve her n için,

$$\frac{1}{p} \sum_{m=0}^{p-1} x_{m+n} < s + 2\epsilon$$

olduğu görülür. Benzer şekilde, yeterince büyük p ve her n için,

$$\frac{1}{p} \sum_{m=0}^{p-1} x_{m+n} > s - 2\epsilon$$

olduğu gösterilebilir. Buradan, x teoremin şartlarını sağlar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Hemen hemen yakınsak bütün dizilerin uzayını f ile göstereceğiz. Özel olarak $s=0$ olması haline karşılık gelen sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayını f_0 ile göstereceğiz. Yani,

$$f = \{ x = (x_i) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} x_i = s, n \text{ 'e göre düzgün} \}$$

$$f_0 = \{ x = (x_i) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} x_i = 0, n \text{ 'e göre düzgün} \}$$

dir.

$q(x)$ in tanımında $x_{k+n(i)}$ yerine bunun mutlak değerini alırsak,

$$Q(x) = \inf_k \limsup_r \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |x_{k+n(i)}| \quad (2.1)$$

olarak elde edilen $Q: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli bir alt lineer fonksiyoneldir.

Tanım.2.5. $x = (x_n) \in \ell_\infty$ olsun. n 'e göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i - s| = 0$$

olması halinde x dizisine s 'e kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir ve $[f]\text{-}\lim x = s$ yazılır, (Maddox, 1978).

Kuvvetli hemen hemen yakınsak bütün dizilerin uzayını $[f]$ ile göstereceğiz. $s=0$ ise sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin $[f]_0$ uzayını elde ederiz. Yani,

$$[f] = \{ x=(x_i): \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i - s| = 0, n' \text{ e göre düzgün} \}$$

$$[f]_0 = \{ x=(x_i): \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i| = 0, n' \text{ e göre düzgün} \}$$

dir.

Teorem.2.7. $c \subset [f] \subset f \subset \ell_\infty$ dir, (Maddox, 1978).

İspat. $x=(x_n) \in c$ olsun. Bu taktirde $\forall \epsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ iken

$$|x_n - s| < \epsilon$$

olacak şekilde enaz bir $n_0=n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. $r_0=n_0(\epsilon)$, $\forall r \geq r_0$ için

$$|x_r - s| < \epsilon$$

alınmırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i - s| &= \frac{1}{r} (|x_{n+1} - s| + |x_{n+2} - s| + \dots + |x_{n+r} - s|) \\ &\leq \frac{1}{r} r \epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan $x \in [f]$ bulunur. Yani $c \subset [f]$ dir.

$x \in [f]$ olsun. Bu taktirde, $\forall \epsilon > 0$, $\forall r \geq r_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i - s| \right| = \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i - s| < \epsilon$$

kalacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall r \geq r_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\left| \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} x_i - s \right| = \left| \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} (x_i - rs) \right|$$

$$\leq \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i - r s| \leq \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i - s| < \epsilon$$

olur. Buradan, n 'e göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=n+1}^{n+r} x_i = s$$

bulunur. Demek ki $[f] \subset f$ dir.

Maddox, bir M -limitini; Q , (2.1) ile tanımlanmış olmak üzere, ℓ_∞ üzerinde her $x \in \ell_\infty$ için

$$M(x) \leq Q(x)$$

olacak şekilde bir M lineer fonksiyoneli olarak tanımlamıştır.

$x \in \ell_\infty$ nin s 'e M -yakınsak olmasını, bütün M -limitleri için,

$$M(x - se) = 0$$

olması şeklinde tanımlamış ve bütün M -yakınsak dizilerin uzayını $[M]$ ile göstermiştir. Ancak G.DAS ve S.K.MISHRA (1981) $[f] = [M]$ olduğunu ispatlamışlardır.

Şimdi;

$$t_{m,n}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \quad \text{ve} \quad t(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_n t_{m,n}(x) \quad (2.2)$$

fonksiyonellerini gözönüne alalım. $\forall x \in \ell_\infty$ için $q(x) = t(x)$ olduğunu, Sucheston (1964) ve Jerison (1957) ispatlamışlardır.

Herhangi bir $x = (x_n) \in \ell_\infty$ dizisi için $t_{m,n}(x)$, (2.2) de tanımlanan fonksiyonel olmak üzere, $m, n \geq 1$ için

$$\phi_{m,n}(x) = t_{m,n}(x) - t_{m-1,n}(x); \quad t_{0,n}(x) = x_n$$

tanımlayalım.

Tanım.2.6. Bir $x = (x_n)$ dizisine, eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\phi_{m,n}(x)|$$

n 'e göre düzgün yakınsak ise mutlak hemen hemen yakınsaktır denir. Mutlak hemen hemen yakınsak bütün dizilerin uzayını $\hat{\mathcal{E}}$ ile göstereceğiz, (Das, Kuttner ve Nanda, 1984).

Lemma.2.2. $[f]$ -lim $x = s$ olması için gerek ve yeter şart

(a) f -lim $x = s$

(b) $\frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - t_{r-1,n}(x)| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$, n 'e göre düzgün)

olmasıdır, (Das ve Mishra, 1981).

İspat. $[f]$ -lim $x = s$ olduğunu kabul edelim. f -lim $x = s$ olduğu

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m x_{n+r} - s \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - s|$$

eşitsizliğinden görülür. Buradan (a) ispatlanmış olur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - t_{r-1,n}(x)| &\leq \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - s| + \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |t_{r-1,n}(x) - s| \\ &= \sum_1 + \sum_2 \end{aligned}$$

diyelim. Hipotezden, $m \rightarrow \infty$ iken n 'e göre düzgün olarak $\sum_1 \rightarrow 0$ dir. Aynı zamanda (a) dan, $r \rightarrow \infty$ iken n 'e göre düzgün olarak,

$$|t_{r-1,n}(x) - s| \rightarrow 0$$

olduğu görülür ve $m \rightarrow \infty$ iken n 'e göre düzgün olarak $\sum_2 \rightarrow 0$ dir. Bu da (b) nin ispatıdır.

Tersine; (a) ve (b) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde,

$$\frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - s| \leq \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - t_{r-1,n}(x)| + \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |t_{r-1,n}(x) - s|$$

eşitsizliğinden $[f]$ -lim $x = s$ olduğu görülür.

Teorem.2.8. $\hat{\mathcal{E}} \subset [f]$ ve eğer $x \in [f]$ ise, bu takdirde $[f]$ -lim $x = f$ -lim $x = s$ dir, (Das ve Mishra, 1981).

İspat. $x \in \hat{\ell}$ olduğunu kabul edelim. Eğer

$$y_{k,n}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} |t_{m,n}(x) - t_{m-1,n}(x)|$$

yazarsak, $y_{k,n}(x)$ her bir $k \geq 1$ için sonludur ve $k \rightarrow \infty$ iken n 'e göre düzgün olarak $y_{k,n}(x) \rightarrow 0$ dir.

Mutlak hemen hemen yakınsak her dizi hemen hemen yakınsak olduğundan $f\text{-}\lim x = s$ dir. Böylece teoremi ispatlamak için, Lemma.2.2 gereğince $m \rightarrow \infty$ iken, n 'e göre düzgün olarak,

$$\frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - t_{r-1,n}(x)| \rightarrow 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $r \geq 1$ için

$$x_{n+r} - t_{r-1,n}(x) = r(t_{r,n}(x) - t_{r-1,n}(x))$$

olduğundan, $m \rightarrow \infty$ iken, n 'e göre düzgün olarak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m |x_{n+r} - t_{r-1,n}(x)| &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m r |t_{r,n}(x) - t_{r-1,n}(x)| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m r (y_{r,n}(x) - y_{r+1,n}(x)) \end{aligned}$$

$$= \frac{y_{1,n}(x)}{m} - y_{m+1,n}(x) + \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m-1} y_{r+1,n}(x) \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım.2.7. $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, bütün m, n pozitif tamsayıları için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde birebir bir dönüşüm olsun. Sürekli bir $\varphi: \ell_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneline, aşağıdaki şartları sağlaması halinde invaryant limit ya da σ -limit denir.

$$(i) \ x_n \geq 0 \ (n=1,2,\dots) \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$$

$$(ii) \ e=(1,1,1,\dots) \Rightarrow \varphi(e)=1$$

$$(iii) \ \varphi(x_{\sigma(n)}) = \varphi(x)$$

Özel olarak $\sigma(n)=n+1$ olması halinde φ bir Banach limiti olur, (Schaefer, 1972).

Tanım.2.8. İnvaryant limitleri eşit olan sınırlı bir diziye invaryant yakınsak veya σ -yakınsaktır denir. σ -yakınsak dizilerin cümlesini V_σ ile göstereceğiz.Yani,

$$V_\sigma = \{ x=(x_i): \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m x_{\sigma^i(n)} = s, n' \text{ e göre düzgün} \}$$

dir. Eğer $x=(x_n)$ ise;

$$Tx = (Tx_n) = (x_{\sigma(n)}), T^2x = (T^2x_n) = (x_{\sigma^2(n)}), \dots, T^m x = (T^m x_n) = (x_{\sigma^m(n)})$$

alalım.

$$r_{m,n}(x) = \frac{1}{m+1} (x_n + Tx_n + \dots + T^m x_n); \quad r_{-1,n}(x) = 0$$

olmak üzere, $x \in V_\sigma$ olması için gerek ve yeter şart n' e göre düzgün olarak,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{m,n}(x) = s$$

limitinin mevcut olmasıdır.(Schaefer,1972). Bu s limitine $x=(x_n)$ dizisinin σ -limiti denir ve σ -lim $x = s$ yazılır. Ayrıca, $\sigma(n)=n+1$ olması halinde σ -limitleri ℓ_∞ üzerindeki klasik Banach limitlere ve V_σ cümlesi de hemen hemen yakınsak dizilerin f uzayına indirgenir. $x \in c$ ise $\sigma^m(n) \neq n$ olmak üzere, her invaryant ϕ limiti için $\phi(x)=\lim x$ olur.Yani $c \subset V_\sigma$ dir.

Mursaleen (1983), Banach limitleri yerine invaryant limitleri olarak kuvvetli invaryant yakınsak diziler uzayını

$$[V_\sigma] = \{ x=(x_i): \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m |x_{\sigma^i(n)} - s| = 0, n' \text{ e göre düzgün} \}$$

şeklinde tanımladı. Özel olarak, $s=0$ ise sıfıra kuvvetli invaryant yakınsak diziler uzayı $[V_\sigma]_0$ ile gösterilir. $\sigma(n)=n+1$ olması halinde $[V_\sigma] = [f]$ olur.

Tanım.2.9. Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu, $|\{ n \leq k : n \in K \}|$ K nın k dan büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere,

$$\delta(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{ n \leq k : n \in K \}|$$

şeklinde tanımlanır,(Fridy,1985).

Eğer $\delta(K)=0$ ise, K cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir. Eğer bir $x=(x_n)$ dizisinin terimleri, sıfır yoğunluklu bir cümle hariç diğer bütün n 'ler için bir p özelliğini sağlıyorsa, bu taktirde (x_n) dizisi hemen hemen her n için p özelliğini sağlıyor denir.

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım.2.10. $x=(x_n)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{ n \leq k : |x_n - L| \geq \epsilon \}| = 0$$

ise $x=(x_n)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu limiti göstermek için $S\text{-}\lim x = L$ veya $x_n \rightarrow L(S)$ yazılır, (Fridy, 1985).

İstatistiksel yakınsak diziler uzayı S ile, özel olarak $L=0$ olması halinde ise S_0 ile gösterilecektir. Yani,

$$S = \{ x=(x_n) : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{ n \leq k : |x_n - L| \geq \epsilon \}| = 0 \}$$

$$S_0 = \{ x=(x_n) : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{ n \leq k : |x_n| \geq \epsilon \}| = 0 \}$$

dir.

Tanım.2.11. $x=(x_n)$ kompleks sayıların bir dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun. m 'ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_{\sigma_n(m)} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisi L 'ye kuvvetli invaryant p -yakınsaktır denir. Kuvvetli invaryant p -yakınsak bütün dizilerin uzayı $[V_\sigma]_p$ ile gösterilecektir. Yani,

$$[V_\sigma]_p = \{ x=(x_n) : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_{\sigma_n(m)} - L|^p = 0, m \text{ 'ye göre düzgün} \}$$

dir. $p=1$ olması halinde $[V_\sigma]_p = [V_\sigma]$ olur. $[V_\sigma]_p \subset \ell_\infty$ dir, (Mursaleen, 1983).

Tanım.2.12. $x=(x_n)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için, m 'ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{ n \leq k : |x_{\sigma^n(m)} - L| \geq \epsilon \}| = 0$$

ise $x=(x_n)$ dizisi L sayısına σ - istatistiksel yakınsaktır denir ve bu limit S_σ -lim $x = L$ veya $x_n \rightarrow L(S_\sigma)$ şeklinde gösterilir. σ -istatistiksel yakınsak diziler uzayı S_σ ile, özel olarak $L=0$ olması halinde S_{σ_0} ile gösterilecektir. Yani,

$$S_\sigma = \{x=(x_n): S_\sigma\text{-lim } x = L\}$$

$$S_{\sigma_0} = \{x=(x_n): S_\sigma\text{-lim } x = 0\}$$

dir. $\sigma(m)=m+1$ olması halinde, m' ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{ n \leq k : |x_{n+m} - L| \geq \epsilon \}| = 0$$

olur. Bu şartı sağlayan bir x dizisine hemen hemen istatistiksel yakınsak dizi denir, (Fridy, 1985).

III. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde; bazı dizi uzaylarını verdikten sonra bu dizi uzayları üzerinde tanımlı metrik, norm veya paranormdan kısaca bahsedeceğiz. Daha sonra bu uzayların genelleştirilmiş hallerini verip, yine bunlar üzerinde tanımlı paranormdan kısaca bahsettikten sonra, bunların sürekli dualini, α -, β - ve γ -duallerini inceleyeceğiz.

Teorem.3.1. Bütün $x=(x_n)$ dizilerinin uzayı s ile gösterilir. s hiçbir özelliği olmayan bir kolleksiyon olduğundan, metrik için açık bir fonksiyon yoktur. Bununla beraber ençok kullanılan metrik; x,y es için,

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

dir, (Kreyszig, 1978).

İspat. M1, M2 ve M3 şartları kolaylıkla sağlar. M4,

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$$

eşitsizliğinden çıkar. Gerçekten x,y,z es için

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

dir.

s uzayı bu metriğe göre tamdır.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|}$$

ile paranormludur.

Tanım.3.1. Bütün $x=(x_n)$ sınırlı dizilerinin uzayı ℓ_∞ ile gösterilir. Yani,

$$\ell_\infty = \{ x=(x_n) : \sup_n |x_n| < \infty \}$$

dir, (Kreyszig, 1978).

Teorem.3.2. ℓ_∞ sınırlı diziler uzayı

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

metriği ile bir tam uzaydır.

İspat. M1, M2 ve M3 şartları kolaylıkla sağlanır. M4' ü ispatlamak için $z=(z_n) \in \ell_\infty$ alalım. Bu takdirde, $\forall x, y, z \in \ell_\infty$ için

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sup_n |x_n - y_n| \leq \sup_n (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \\ &\leq \sup_n |x_n - z_n| + \sup_n |z_n - y_n| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

bulunur

ℓ_∞ uzayının bu metriğe göre tam olduğunu göstermek için, bir Cauchy dizisi alıp bu dizinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. (x_n) , $x_n = \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty}$ olmak üzere, ℓ_∞ da bir Cauchy dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n, m > N$ iken

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde enaz bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre $\forall n, m > N$ için,

$$\sup_j |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon$$

kalır. Buradan, $\forall n, m > N$ ve her j için,

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon \quad (3.1)$$

bulunur. Her sabit j için $(x_j^{(n)})$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan $(x_j^{(n)})$ yakınsaktır. Her sabit j için, $n \rightarrow \infty$ iken $x_j^{(n)} \rightarrow x_j$ diyelim. $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$ olsun. (3.1) den dolayı, $n > N$ için, $m \rightarrow \infty$ iken, her bir j için,

$$|x_j^{(n)} - x_j| < \epsilon$$

yazabiliriz. $x_n = (x_j^{(n)}) \in \ell_\infty$ olduğundan, her j için $|x_j^{(n)}| \leq K_n$ olacak şekilde bir K_n sayısı vardır. $n > N$ için,

$$|x_j| \leq |x_j - x_j^{(n)}| + |x_j^{(n)}| \leq \epsilon + K_n$$

bulunur. Buradan da,

$$\sup_j |x_j| < \infty$$

ve $x = (x_j) \in \ell_\infty$ bulunur. $n > N$ için,

$$d(x_n, x) = \sup_j |x_j^{(n)} - x_j| < \epsilon$$

ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ olur. Böylece ℓ_∞ tamdır.

Teorem.3.3. ℓ_∞ uzayı,

$$||x|| = \sup_n |x_n|$$

ile normlu bir Banach uzayıdır, (Maddox, 1970).

Tanım.3.2. Bütün $x = (x_n)$ yakınsak dizilerin uzayı c ile gösterilir. Yani,

$$c = \{ x = (x_n) : \lim_n x_n \text{ mevcuttur} \}$$

dir, (Kreyszig, 1978).

Teorem.3.4. c yakınsak diziler uzayı, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ olmak üzere

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

metriği ile bir tam uzayıdır.

İspat. Metrik özellikleri ℓ_∞ uzayındaki gibidir.

c nin tam olduğunu gösterelim. $c \subset \ell_\infty$ ve ℓ_∞ da tam olduğundan Teorem.1.3 den dolayı c nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için de $\bar{c} = c$ olduğunu göstermeliyiz. $c \subset \bar{c}$ olduğu aşikardır. $\bar{c} \subset c$ olduğunu gösterelim.

$x = (x_j) \in \bar{c}$ olsun. Bu durumda, Teorem.1.4 (a) gereğince $x_n = (x_j^{(n)})$ olmak üzere $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi mevcuttur. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için,

$$d(x_n, x) = \sup_j |x_j^{(n)} - x_j| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kalacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre her $n \geq N$ ve her j için,

$$|x_j^{(n)} - x_j| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kalır. $x_n = (x_j^{(n)})_{j=1}^\infty \in c$ olduğundan $(x_j^{(n)})_{j=1}^\infty$ dizisi C de bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle, $j, k \geq N_1$ için

$$|x_j^{(n)} - x_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $j, k \geq N_1$ için

$$|x_j - x_k| \leq |x_j - x_j^{(n)}| + |x_j^{(n)} - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)} - x_k| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

kalır. Böylece (x_j) dizisi $\mathbb{R}$ de veya $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ tam olduğundan $x = (x_j) \in c$ dir. Buradan da $\bar{c} \subset c$ bulunur. Demek ki $\bar{c} = c$, yani, c kapalıdır. O halde c tamdır.

Teorem.3.5. c uzayı,

$$||x|| = \sup_n |x_n|$$

ile normlu bir Banach uzayıdır, (Maddox, 1970).

Teorem.3.6. Sıfıra yakınsayan dizilerin c_0 uzayı

$$d(x, y) = \max_n |x_n - y_n|$$

metriğine göre tamdır.

İspat. c nin ispatı ile aynıdır.

Teorem.3.7. c_0 uzayı,

$$||x|| = \max_n |x_n|$$

ile normlu bir Banach uzayıdır, (Maddox,1970).

Tanım.3.3. $0 < p < \infty$ olmak üzere ℓ_p uzayı

$$\ell_p = \{ x=(x_n): \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$$

şeklinde tanımlanır, (Maddox,1970).

Teorem.3.8. ℓ_p uzayı, $p \geq 1$ için

$$d(x, y) = \left(\sum_n |x_n - y_n|^p \right)^{1/p} \quad (3.2)$$

ve $0 < p < 1$ için,

$$d(x, y) = \sum_n |x_n - y_n|^p \quad (3.3)$$

ile bir tam metrik uzayıdır, (Maddox,1970).

İspat. (3.2) için M1, M2 ve M3 şartları kolaylıkla sağlanır. M4 'ü ispatlamak için, $x, y, z \in \ell_p$ alıp Minkowski eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - y_n|^p \right)^{1/p} \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

buluruz. Bu da ℓ_p nin bir metrik uzay olduğunu ispatlar.

Şimdi ℓ_p^p uzayının tamlığını gösterelim. $x_n = (x_j^{(n)})$, $x_j^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_j^{(n)}, \dots)$ olmak üzere, ℓ_p^p uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Buna göre, verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, her $n, m > N$ için,

$$d(x_n, x_m) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \epsilon \quad (3.4)$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır. Buradan, her $j=1, 2, \dots$ için, $n, m > N$ iken

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon \quad (3.5)$$

yazabiliriz. Şimdi, her bir j için (3.5) gereğince $x_n = (x_j^{(n)})$ terimleri reel veya kompleks sayılar olan bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ nin tam olması nedeniyle, bu dizi yakınsaktır. $n \rightarrow \infty$ için, $x_j^{(n)} \rightarrow x_j$ diyelim. Şimdi de bu limitleri kullanarak, $x = (x_j)$ dizisini tanımlayalım. $x \in \ell_p^p$ ve $x_n \rightarrow x$ olduğunu göstereceğiz.

(3.4) den, her $n, m > N$ için,

$$\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p < \epsilon^p \quad (k=1, 2, \dots)$$

yazabiliriz. Buradan da, $n > N$ olmak üzere, $m \rightarrow \infty$ için,

$$\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)} - x_j|^p < \epsilon^p \quad (k=1, 2, \dots)$$

elde ederiz. Buradan, $n > N$ olmak üzere, $k \rightarrow \infty$ için,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j|^p < \epsilon^p \quad (3.6)$$

buluruz. Bu ise,

$$x_n - x = (x_j^{(n)} - x_j) \in \ell_p^p$$

olduğunu gösterir. $x_n \in \ell_p$ olduğundan, Minkowski eşitsizliği gereğince,

$$x = x_n + (x - x_n) \in \ell_p$$

elde ederiz. Ayrıca, (3.6) daki seri, $[d(x_n, x)]^p$ büyüklüğünü verdiğiinden, (3.6) ifadesi $x_n \rightarrow x$ sonucunu gerektirir. (x_n) nin ℓ_p de keyfi bir Cauchy dizisi olarak seçildiğini de gözönünde bulundurursak, $1 < p < \infty$ olmak üzere ℓ_p nin tamlığını ispatlamış oluruz, (Erwin Kreyszig, 1978).

Teorem.3.9. ℓ_p uzayı, $1 \leq p < \infty$ için,

$$||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

ile verilen norm altında bir Banach uzayıdır. Gerçekten bu norm (3.3) deki metriği doğurmaktadır:

$$d(x, y) = ||x - y|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

Eğer $0 < p < 1$ ise, ℓ_p uzayı,

$$||x|| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$$

ile p-normlu bir uzayıdır, (Maddox, 1970).

ℓ_p nin $p=1$ ve $p=2$ özel hali için elde edilen uzayların dizi uzayları arasında özel bir önemi vardır.

Tanım.3.4. w_p uzayı, $p > 0$ olmak üzere,

$$w_p = \{ x=(x_n): \lim_k \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n - \ell|^p = 0, \text{ enaz bir } \ell \text{ için} \}$$

şeklinde tanımlanır, (Kreyszig, 1978).

Teorem.3.10. w_p uzayı, $1 \leq p < \infty$ ise

$$||x|| = \sup_k \left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n|^p \right)^{1/p}$$

ile normlu bir Banach uzaydır. Eğer $0 < p < 1$ ise,

$$||x|| = \sup_k \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n|^p$$

ile p-normlu bir tam uzaydır.

Tanım.3.5. γ ile yakınsak seri teşkil eden bütün $x=(x_n)$ dizilerinin uzayı gösterilir. Yani,

$$\gamma = \{ x=(x_n): \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ yakınsak} \}$$

dir, (Maddox, 1970).

Teorem.3.11. γ uzayı,

$$d(x, y) = \sup_k \left| \sum_{n=1}^k (x_n - y_n) \right|$$

metriğine göre bir tam uzaydır, (Maddox, 1970).

Tanım.3.6. BV ile sınırlı salımlı diziler uzayı gösterilir. Buna göre,

$$BV = \{ x=(x_n): \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}| < \infty \}$$

olur, (Maddox, 1970).

Teorem.3.12. BV uzayı, $\Delta x_n = x_n - x_{n+1}$ olmak üzere,

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta x_n - \Delta y_n|$$

ile bir metrik uzay ve

$$||x|| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}|$$

ile normlu uzaydır, (Maddox, 1970).

Teorem.3.13. $\ell_1 \subset \gamma \subset c_0 \subset c \subset \ell_{\infty}$ dir, (Maddox, 1970).

(İspat. $x=(x_n) \in \ell_1$ olsun. Bu durumda $\sum |x_n|$ yakınsaktır. Teorem.1.8 den, $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir k_0 bulunabilir ki, $\forall k \geq k_0$ ve $\forall p \geq 0$ için,

$$\sum_{n=k}^{k+p} |x_n| < \varepsilon$$

olur. Diğer taraftan,

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} x_n \right| \leq \sum_{n=k}^{k+p} |x_n|$$

olduğundan, $\forall k \geq k_0$ ve $\forall p \geq 0$ için

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} x_n \right| < \varepsilon$$

bulunur. Bu da $\sum x_n$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Buradan $x=(x_n) \in \gamma$ bulunur. Böylece $\ell_1 \subset \gamma$ olur.

$x=(x_n) \in \gamma$ olsun. Bu takdirde $\sum x_n$ serisi yakınsaktır. Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfır olacağından $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ dir. Bu da $x=(x_n) \in c_0$ olması demektir. Buradan $\gamma \subset c_0$

bulunur.

$c_0 \subset c$ olduğu aşıkardır.

$x \in c$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ olsun. Bu takdirde, $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n > n_0$ için

$$|x_n - s| < \varepsilon$$

kalır. Buradan, $\forall n > n_0$ için

$$s - \varepsilon < x_n < s + \varepsilon$$

bulunur.

$$K = \max \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, s + \varepsilon\}$$

$$k = \min \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, s - \varepsilon\}$$

olsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$k \leq x_n \leq K$$

olur. O halde, x dizisi sınırlıdır. Yani $x \in \ell_\infty$ ve buradan $c \subset \ell_\infty$ bulunur.

Teorem.3.14. $\ell_1 \subset BV \subset c$ dir, (Maddox, 1970).

İspat. $x=(x_n) \in \ell_1$ olsun. Bu taktirde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

dir. Bundan dolayı,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}| < \infty$$

olacağından $x \in BV$ bulunur. Böylece $\ell_1 \subset BV$ olur.

$x=(x_n) \in BV$ olsun. Bu taktirde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1})$$

serisi yakınsaktır. O halde,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (x_n - x_{n+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_1 - x_{k+1}) = x_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

mevcuttur. Bu da $x \in c$ demektir. Dolayısıyla $BV \subset c$ bulunur.

Şimdi tanımlanan bu uzaylardan ℓ_∞ , c , c_0 , ℓ_p ve w_p uzaylarının genelleştirilmiş halleri olan $\ell_\infty(p)$, $c(p)$, $c_0(p)$, $\ell(p)$ ve $w(p)$ uzaylarından bahsedeceğiz.

Eğer, $p_n > 0$ ve $\sup p_n < \infty$ olacak şekilde bir $p=(p_n)$ dizisi alınırsa, bu uzayların genelleştirilmiş halleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\ell_\infty(p) = \{ x=(x_n) : \sup_n |x_n|^{p_n} < \infty \}$$

$$c(p) = \{ x=(x_n): \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \ell|^{p_n} = 0, \text{ enaz bir } \ell \text{ için} \}$$

$$c_0(p) = \{ x=(x_n): \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{p_n} = 0 \}$$

$$\ell(p) = \{ x=(x_n): \sum_n |x_n|^{p_n} < \infty \}$$

$$w(p) = \{ x=(x_n): \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n - \ell|^{p_n} = 0, \text{ enaz bir } \ell \text{ için} \}$$

$M = \max(1, \sup p_n)$ olsun. Bu taktirde $c_0(p)$,

$$g(x) = \sup_n |x_n|^{p_n/M}$$

ile bir paranormlu lineer metrik uzaydır. $\ell_\infty(p)$ ve $c(p)$ nin,

$$g(x) = \sup_n |x_n|^{p_n/M}$$

ile paranormlu olması için gerek ve yeter şart $\inf p_n > 0$ olmasıdır.

$\ell(p)$ ve $w(p)$ uzayları, sırasıyla,

$$g(x) = \left(\sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{1/M}$$

ve

$$g(x) = \sup_k \left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n|^{p_n} \right)^{1/M}$$

ile paranormludur. Yukarıda tanımlanan bu uzaylar paranormun doğurduğu topolojilere göre tamdır. Genel olarak $\ell_\infty(p)$, $c(p)$, $c_0(p)$, $\ell(p)$ ve $w(p)$ uzayları normlu uzay değildirler.

Eğer her n için $p_n = p$ ise, bu taktirde $\ell_\infty(p) = \ell_\infty$, $c(p) = c$, $c_0(p) = c_0$, $\ell(p) = \ell_p$ ve $w(p) = w_p$ dir, (Maddox, 1970 ve Simons, 1965).

Teorem.3.15. $\ell(p)$ uzayı, $M = \max(1, H = \sup p_n)$ olmak üzere,

$$g(x) = \left(\sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{1/M}$$

şeklinde tanımlı g ile paranormlu bir tam lineer metrik uzaydır, (Nanda, 1983).

İspat. Herhangi bir λ kompleks sayısı ve $x, y \in \ell(p)$ için,

$$\left(\sum_n |x_n + y_n|^{p_n} \right)^{1/M} \leq \left(\sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{1/M} + \left(\sum_n |y_n|^{p_n} \right)^{1/M} \quad (3.7)$$

ve

$$|\lambda|^{p_n} \leq \max(1, |\lambda|^M)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Yukarıdaki eşitsizliklerden $\ell(p)$ nin noktasal lineer işlemlere göre lineer bir uzay olduğu görülür. $g(0)=0$ ve her $x \in \ell(p)$ için $g(x)=g(-x)$ olduğu aşıkardır. Aynı zamanda, yukarıdaki iki eşitsizlikten g 'nin alt toplamsal ve

$$g(\lambda x) \leq \max(1, |\lambda|) \cdot g(x)$$

olduğu görülür. Bundan dolayı, $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ fonksiyonu $\lambda=0$ da süreklidir. $x=0$ ve λ sabit iken $x \rightarrow \lambda x$ fonksiyonu $x=0$ da süreklidir. Eğer x sabit ve $\epsilon > 0$ ise,

$$\sum_{n > N} |x_n|^{p_n} < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde N sayısını seçebiliriz ve $\delta > 0$ için $|\lambda| < \delta$ olması

$$\sum_{n \leq N} |\lambda x_n|^{p_n} < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliğini verir. Bundan dolayı, $|\lambda| < \min(1, \delta)$ olması $g(\lambda x) < \epsilon$ olmasını gerektirir. Böylece fonksiyon $\lambda=0$ da süreklidir ve bu nedenle $\ell(p)$ paranormlu bir uzaydır.

$\ell(p)$ nin tam olduğunu göstermek için, $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \dots)$ olmak üzere $(x^{(i)})$ nin $\ell(p)$ de bir Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, herbir sabit n için,

$$|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}| \leq \left(\sum_n |x_n^{(i)} - x_n^{(j)}|^{p_n} \right)^{1/M} = g(x^{(i)} - x^{(j)})$$

olduğundan, $(x_n^{(i)})$ nin kompleks sayıların bir Cauchy dizisi olduğu görülür ve bu nedenle her bir n için $i \rightarrow \infty$ iken $x_n^{(i)} \rightarrow x_n$ olur. $x = (x_n)$ alalım. İlk olarak $x \in \ell^p(p)$ olduğunu göstereceğiz. $g(x^{(i)})$ nin sınırlı olduğunu biliyoruz, yani, $g(x^{(i)}) \leq K$ dır. Şimdi herhangi bir k için,

$$\left(\sum_{n=1}^k |x_n^{(i)}|^{p_n} \right)^{1/M} \leq g(x^{(i)}) \leq K$$

olur. Önce $i \rightarrow \infty$, sonra $k \rightarrow \infty$ için limit alırsak,

$$\left(\sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{1/M} \leq K$$

elde ederiz ve bu $x \in \ell^p(p)$ olduğunu verir. Geriye $g(x^{(i)} - x) \rightarrow 0$ olduğunu ispatlamak kalır. $\epsilon > 0$ verilsin, bu taktirde $i, j \geq N$ için $g(x^{(i)} - x^{(j)}) < \epsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Bundan dolayı, herhangi bir k ve $i, j \geq N$ için,

$$\left(\sum_{n=1}^k |x_n^{(i)} - x_n^{(j)}|^{p_n} \right)^{1/M} \leq g(x^{(i)} - x^{(j)}) < \epsilon$$

kalır. $j \rightarrow \infty$ yazarsak, $i \geq N$ için,

$$\left(\sum_{n=1}^k |x_n^{(i)} - x_n|^{p_n} \right)^{1/M} \leq \epsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. k keyfi olduğundan, $k \rightarrow \infty$ alabiliriz ve $i \geq N$ için $g(x^{(i)} - x) \leq \epsilon$ buluruz. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım.3.7. (Sürekli Dual) X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonlardan oluşan cümle,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanan norma sahip normlu bir uzay oluşturur. Bu uzaya X in sürekli duali (dual uzay) adı verilir ve X^* ile gösterilir, (Kreyszig, 1978).

Teorem.3.16. X normlu uzayı tam olsun ya da olmasın, X^* dual uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat. $X^* = B(X, K)$ dir. K ise reel ya da kompleks sayılar cisimidir ve bu cisim lineer bir tam uzayıdır. Tamlık teoreminden biliyoruz ki, Y bir Banach uzayı ise $B(X, Y)$ uzayı da bir Banach uzayıdır. Dolayısıyla, $X^* = B(X, K)$ da bir Banach uzayıdır.

Teorem.3.17. ℓ_1 uzayının sürekli duali ℓ_∞ uzayıdır, (Erwin Kreyszig, 1978).

İspat. ℓ_1 için bir Schauder bazının (e_n) olduğunu biliyoruz.

$$e_n = \delta_{nj} = \begin{cases} 1, & j=n \text{ ise} \\ 0, & j \neq n \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Buna göre, her $x \in \ell_1$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \quad (3.8)$$

şeklinde bir tek gösterime sahiptir. ℓ_1^* , ℓ_1 in dual uzayı olmak üzere, herhangi bir $f \in \ell_1^*$ gözönüne alalım. f lineer ve sınırlı olduğundan, $\gamma_n = f(e_n)$ sayıları f tarafından tek anlamlı olarak belirlenmiş olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \gamma_n \quad (3.9)$$

yazabiliriz. Ayrıca, $\|e_n\| = 1$ ve

$$|\gamma_n| = |f(e_n)| \leq \|f\| \cdot \|e_n\| = \|f\|, \quad \sup_n |\gamma_n| \leq \|f\| \quad (3.10)$$

dir. Dolayısıyla $(\gamma_n) \in \ell_\infty$ elde ederiz.

Diğer taraftan, her $b=(\beta_n) \in \ell_\infty$ için, ℓ_1 üzerinde buna karşılık gelen sınırlı lineer bir g fonksiyoneli bulunabilir. Gerçekten ℓ_1 üzerinde, $x=(x_n) \in \ell_1$ olmak üzere, g 'yi

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta_n$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda g lineerdir ve sınırlılığı

$$|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n \beta_n| \leq \sup_j |\beta_j| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\| \cdot \sup_j |\beta_j|$$

den görülür. O halde $g \in \ell_1^*$ dir.

Son olarak, f 'in normunun ℓ_∞ uzayı üzerindeki norm olduğunu göstereceğiz. (3.9) dan,

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \gamma_n \right| \leq \sup_j |\gamma_j| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\| \cdot \sup_j |\gamma_j|$$

yazabiliriz. Normu 1 olan tüm x 'ler üzerinden supremum alırsak,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \sup_j |\gamma_j|$$

olduğunu görürüz. Bundan ve (3.10) dan yararlanarak,

$$\|f\| = \sup_j |\gamma_j| \quad (3.11)$$

buluruz ki bu ℓ_∞ üzerindeki normdur. Dolayısıyla bu eşitlik, $c=(\gamma_j) \in \ell_\infty$ olmak üzere, $\|f\| = \|c\|$ şeklinde yazılabilir. Bu ise ℓ_1^* ın ℓ_∞ üzerine $f \rightarrow c=(\gamma_j)$ ile tanımlanan birebir, örten lineer dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu gösterir.

Teorem 3.18. $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere ℓ_p nin dual uzayı ℓ_q dur, (Erwin Kreyszig, 1978).

İspat. $e_n=(\delta_{nj})$ olmak üzere ℓ_p nin bir Schauder bazı (e_n) dir. Buna göre, her $x \in \ell_p$ elemanı, birtek

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \quad (3.12)$$

gösterimine sahiptir. ℓ_p^* , ℓ_p nin dual uzayı olmak üzere, herhangi bir $f \in \ell_p^*$ gözönüne alalım. f lineer ve sınırlı olduğundan,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \gamma_n \quad (\gamma_n = f(e_n)) \quad (3.13)$$

yazabiliriz. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{|\gamma_n|^q}{\gamma_n}, & n \leq k \text{ ve } \gamma_n \neq 0 \\ 0, & n > k \text{ veya } \gamma_n = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

şeklinde $x_k = (x_n^{(k)})$ yı gözönüne alalım. Bunu (3.13) de yerine yazarsak,

$$f(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(k)} \gamma_n = \sum_{n=1}^k |\gamma_n|^q$$

elde ederiz. Ayrıca, (3.14) 'ü ve $(q-1)p=q$ eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} |f(x_k)| &\leq \|f\| \cdot \|x_k\| = \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^k |x_n^{(k)}|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^k |\gamma_n|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^k |\gamma_n|^q \right)^{1/p} \end{aligned}$$

buluruz. Bu sonuçları birlikte gözönüne alırsak,

$$f(x_k) = \sum_{n=1}^k |\gamma_n|^q \leq \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^k |\gamma_n|^q \right)^{1/p}$$

yazabiliriz. Son çarpan 1 ile bölüp, $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ eşitliğini kullanmamız halinde ise,

$$\left(\sum_{n=1}^k |y_n|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^k |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

elde ederiz. k keyfi olduğundan, $k \rightarrow \infty$ için

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| \quad (3.15)$$

buluruz. O halde, $y_n \in \ell_q$ dur.

Tersine, herhangi bir $b = (\beta_n) \in \ell_q$ için ℓ_p de buna karşılık gelen sınırlı lineer bir g fonksiyoneli elde edebiliriz. Gerçekten, ℓ_p üzerindeki g fonksiyoneli, $x = (x_n) \in \ell_p$ olmak üzere,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta_n$$

yazarak tanımlayabiliriz. Bu durumda g lineer olup, sınırlılığı, Hölder eşitsizliğinden elde edilen

$$|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n \beta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ifadesinden görülür. O halde $g \in \ell_p^*$ dir.

Son olarak, f' in normunun ℓ_q uzayı üzerindeki norm olduğunu göstereceğiz. (3.13) den ve Hölder eşitsizliğinden faydalanarak,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\| \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan da, normu 1 olan tüm x 'ler üzerinden supremum alarak,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. (3.15) den,

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Bu ise, $c=(y_n) \in \ell_q$ ve $y_n=f(e_n)$ olmak üzere, $\|f\|_p = \|c\|_q$ şeklinde yazılabilir. ℓ_p^* dan ℓ_q üzerine, $f \rightarrow c$ ile tanımlanan dönüşüm lineer, birebir ve örtendir. Ayrıca, bu dönüşümün normu koruyan bir dönüşüm olduğunu görmekteyiz. Dolayısıyla bu bir izomorfizmdir.

Teorem.3.19. $c^* = c_0^* = \ell_1$ ve $0 < p < 1$ olmak üzere $\ell_p^* = \ell_\infty$ dir.

İspat. Bir önceki ispata benzer biçimde yapılır.

Tanım.3.8. X bir dizi uzayı olsun ve

(i) $X^\alpha = \{a=(a_n): \sum |a_n x_n| < \infty, \text{ her } x \in X \text{ için} \}$

(ii) $X^\beta = \{a=(a_n): \sum a_n x_n \text{ yakınsak, her } x \in X \text{ için} \}$

(iii) $X^\gamma = \{a=(a_n): \sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n x_n \right| < \infty, \text{ her } x \in X \text{ için} \}$

tanımlayalım. Bu taktirde, X^α , X^β ve X^γ uzaylarına, sırasıyla, X in α -, β - ve γ - dual uzayları denir. Aynı zamanda, X^α ya Köthe-Toeplitz dual uzayı ve X^β ya da genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dual uzayı denir.

$\emptyset \subset X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ olduğunu göstermek kolaydır, (Kamthan ve Gupta, 1981).

Lemma.3.1. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır.

(i) Her $X \subset s$ için X^η , s nin lineer bir altuzayıdır.

(ii) Her $X, Y \subset s$ için, $X \subset Y$ ise $Y^\eta \subset X^\eta$ dir.

(iii) Her $X \subset s$ için $X^{\eta\eta} \equiv (X^\eta)^\eta \supset X$ dir.

(iv) $E_j \subset s$ olmak üzere her $\{E_j\}$ ailesi için $(\cup E_j)^\eta = \cap E_j^\eta$ dir, (Lascarides, 1971).

Tanım.3.9. Bir X dizi uzayı için $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olmak üzere, eğer $X = X^{\eta\eta}$ ise bu taktirde X e bir η -uzayı denir. Özel olarak bir α -uzayına Köthe uzayı veya bir perfect dizi uzayı denir, (Kamthan ve Gupta, 1981).

Tanım.3.10. X bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde X' e,

(i) Enaz bir $x \in X$ için $|y_n| \leq |x_n|$ iken $y \in X$ ise normal,

(ii) X' in bütün basamak uzaylarının kanonik gösterimlerini kapsıyorsa monoton denir, (Kamthan ve Gupta, 1981).

Lemma.3.2. X bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde,

(i) X perfect $\Rightarrow X$ normal $\Rightarrow X$ monoton

(ii) X normal $\Rightarrow X^\alpha = X^\gamma$

(iii) X monoton $\Rightarrow X^\alpha = X^\beta$

dir, (Kamthan ve Gupta, 1981).

Teorem.3.20. Her n için $p_n > 1$ olsun. Bu taktirde, $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1$ iken

$$M(p) = \bigcup_{N>1} \{ a=(a_n): \sum_n |a_n|^{q_n} N^{-q_n/p_n} < \infty \}$$

olmak üzere $\ell^p(p) = M(p)$ dir, (Maddox, 1969).

İspat. $a \in M(p)$ ve $x \in \ell^p(p)$ olsun.

$$|b_n y_n| \leq |b_n|^{q_n} + |y_n|^{p_n}$$

eşitsizliğinden,

$$|a_n x_n| \leq |a_n|^{q_n} N^{-q_n/p_n} + N |x_n|^{p_n}$$

elde ederiz. Buradan $\sum a_n x_n$ mutlak yakınsaktır ve bundan dolayı $M(p) \subset \ell^p(p)$ olur.

Şimdi $a \in \ell^p(p)$ olsun, öyle ki her $x \in \ell^p(p)$ için $\sum a_n x_n$ yakınsaktır. Bu $a \in M(p)$ demektir. Diğer yandan $s=1, 2, \dots$ için

$$M_s = \sum_{I(s)} |a_n|^{q_n} (s+1)^{-q_n/p_n} > 1$$

olacak şekilde $0 = k(0) < k(1) < k(2) < \dots$ tam sayılarını tanımlayabiliriz. Tanımlanan M_s toplamı $I(s) = \{ n: k(s-1)+1 \leq n \leq k(s) \}$ cümlesinde n üzerinden alınır. Şimdi $I(s)$ deki n için,

$$x_n = (\text{sgn } a_n) |a_n|^{q_n-1} (s+1)^{-q_n} M_s^{-1}$$

tanımlayalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \sum_{I(s)} a_n x_n &= \sum_{I(s)} |a_n|^{q_n} (s+1)^{-q_n} M_s^{-1} \quad \left(-\frac{q_n}{p_n} = -q_n + 1 \right) \\ &= M_s^{-1} \sum_{I(s)} |a_n|^{q_n} (s+1)^{-q_n/p_n} (s+1)^{-1} \\ &= (s+1)^{-1} M_s^{-1} M_s = (s+1)^{-1} \end{aligned}$$

elde ederiz ve

$$\begin{aligned} \sum_{I(s)} |x_n|^{p_n} &= \sum_{I(s)} |a_n|^{q_n} (s+1)^{-p_n - q_n} M_s^{-p_n} \\ &\leq M_s^{-1} (s+1)^{-1} \sum_{I(s)} |a_n|^{q_n} (s+1)^{-q_n} \\ &= M_s^{-1} (s+1)^{-2} \sum_{I(s)} |a_n|^{q_n} (s+1)^{-q_n/p_n} \\ &= (s+1)^{-2} \end{aligned}$$

dir. Böylece $x \in \ell^p(p)$ fakat $\sum a_n x_n$ ıraksak olur. Buradan $a \in M(p)$ elde ederiz.

Teorem.3.21. Eğer $0 < p_n \leq 1$ ise, bu takdirde $\ell^p(p) = \ell^\infty(p)$ dir, (Simons, 1965).

Teorem.3.22. Her n için $p_n > 1$ olsun. Bu takdirde, $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1$ olmak üzere $\ell^\alpha(p) = M(p)$ dir, (Çolak, Srivastava ve Nanda, 1993).

İspat. $a \in M(p)$ ve $x \in \ell^p(p)$ olsun.

$$|x_n y_n| \leq |x_n|^{q_n} + |y_n|^{p_n}$$

eşitsizliğinden, enaz bir $N > 1$ için

$$|a_n x_n| \leq |a_n|^{q_n} N^{-q_n/p_n} + N |x_n|^{p_n}$$

elde ederiz. Buradan $\sum |a_n x_n| < \infty$ olur ve $a \in \ell^\alpha(p)$ bulunur. Yani $M(p) \subset \ell^\alpha(p)$ dir. $\ell^\alpha(p) \subset \ell^\beta(p)$ olduğundan $\ell^\alpha(p) = M(p)$ olduğu görülür.

Şimdi $\ell(p)$ nin sürekli dualinin $M(p)$ olduğunu Teorem.3.20 den göstermek kolaydır.

Teorem.3.23. Her n için $1 < p_n \leq \sup p_n < \infty$ olsun. Bu taktirde $\ell^*(p)$, $M(p)$ ye izomorfiktir, (Maddox, 1969).

İspat. $e_n = (0, 0, \dots, 1(n.\text{terim}), \dots)$ ($n=1, 2, \dots$) olsun. Bu taktirde $\ell(p)$ deki her x , yani,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

ve $\ell^*(p)$ deki herhangi bir f için $f(e_n) = a_n$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

olur. Teorem.3.20 den, her $x \in \ell(p)$ için $\sum a_n x_n$ yakınsaktır. Buradan $a \in M(p)$ bulunur.

Şimdi, eğer $x \in \ell(p)$ ise ve herhangi bir $a \in M(p)$ alırsak, bu taktirde Teorem.3.20 den, $\sum a_n x_n$ yakınsaktır ve aşikar olarak $\ell(p)$ üzerinde lineer bir fonksiyonel tanımlar. Teorem.3.20 deki yol kullanılarak, $g(x) \leq 1$ iken

$$|\sum a_n x_n| \leq (\sum |a_n|^{q_n} N^{-q_n/p_n} + N) \cdot g(x)$$

olduğu görülür. Buradan $\sum a_n x_n$, $\ell^*(p)$ nin bir elemanını tanımlar. Şimdi $T(f) = a$ ile verilen $T: \ell^*(p) \rightarrow M(p)$ dönüşümü lineer, birebir, örten bir homeomorfizmdir.

Teorem.3.24.(i) $p_n > 1$ olsun. $\ell(p)$ nin perfekt olması için gerek ve yeter şart $p \in \ell_\infty$ olmasıdır.

(ii) $0 < p_n \leq 1$ olsun. $\ell(p)$ nin perfekt olması için gerek ve yeter şart $\ell(p) = \ell_1$ olmasıdır, (Çolak, 1992).

Teorem.3.25. $p = (p_n)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde $\ell(p)$ normal ve monotonudur, (Çolak, 1992).

İspat. Her n için $p_n > 1$ olsun. Bu takdirde $\ell(p)$ perfektir ve Lemma.3.2(i) den normaldir.

Şimdi $0 < p_n \leq 1$, her n ve enaz bir $x=(x_n) \in \ell(p)$ için $|y_n| \leq |x_n|$ dir. Bu takdirde $|y_n|^{p_n} \leq |x_n|^{p_n}$ dir. $\sum_n |x_n|^{p_n} < \infty$ olacak şekilde $x \in \ell(p)$ olduğundan $y=(y_n) \in \ell(p)$ olduğu açıktır.

Bundan dolayı $\ell(p)$ normaldir ve buradan da monoton olduğu görülür.

Teorem.3.26. $p=(p_n)$, her n için $p_n > 1$ şeklindeki reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell^{\infty}(p) = M(p)$ dir, (Çolak, 1992).

İspat. Teorem.3.25, Lemma.3.2 (i)-(ii) ve Teorem.3.20 den görülür.

Teorem.3.27. $p_n > 0$ olsun. Bu takdirde,

$$M_0(p) = \bigcup_{N>1} \{a=(a_n): \sum_n |a_n| N^{-1/p_n} < \infty\}$$

olmak üzere $c_0^{\beta}(p) = M_0(p)$ dir, (Maddox, 1969).

İspat. $a \in M_0(p)$ ve $x \in c_0(p)$ olsun. Bu takdirde enaz bir $N > 1$ için $\sum_n |a_n| N^{-1/p_n} < \infty$ dir ve bu nedenle yeterince büyük her n için $|x_n|^{p_n} < N^{-1}$ dir. Buradan

$$|a_n x_n| \leq |a_n| N^{-1/p_n}$$

dir. Sonuç olarak, $M_0(p) \subset c_0^{\beta}(p)$ bulunur. Her $x \in c_0(p)$ için $\sum_n a_n x_n$ in yakınsak olması $a \in M_0(p)$ olması demektir. Diğer yandan Teorem.3.20 nin ispatındaki gibi $\sum_n a_n x_n$ ıraksak olacak şekilde bir $x \in c_0(p)$ dizisi teşkil edebiliriz. Buradan da $c_0^{\beta}(p) = M_0(p)$ olduğu görülür.

Teorem.3.28. Her $p=(p_n)$ için,

$$E_0 = \bigcap_{N>1} \{x=(x_n): \sup_n |x_n| N^{1/p_n} < \infty\}$$

olmak üzere $c_0^{\beta\beta}(p) = E_0$ dir, (Lascarides, 1971).

İspat. $E_N = \{a=(a_n): \sum_n |a_n| N^{-1/p_n} < \infty\}$ olsun. Bu takdirde $c_0^{\beta}(p) = M_0(p) = \bigcup_{N>1} E_N$ dir.

Lemma.3.1(iv) den $c_0^{\beta\beta}(p) = M_0^{\beta}(p) = \bigcap_{N>1} E_N^{\beta}$ elde ederiz. Şimdi her $N \geq 1$ için

$$E_N^\beta = \{ x=(x_n): \sup_n |x_n| N^{1/p_n} < \infty \}$$

olduğu kontrol edilebilir. Buradan $c_0^{\beta\beta}(p) = E_0$ bulunur.

Teorem.3.29. Her $p=(p_n)$ için,

$$(i) \ c_0^\alpha(p) = M_0(p),$$

$$(ii) \ c_0^{\alpha\alpha}(p) = E_0$$

dir, (Çolak, Srivastava ve Nanda, 1993).

İspat. (i) $a \in M_0(p)$ ve $x \in c_0(p)$ olsun. Bu taktirde enaz bir $N > 1$ için

$$\sum_n |a_n| N^{-1/p_n} < \infty$$

dir ve yeterince büyük n için $|x_n|^{p_n} < N^{-1}$ dir. Buradan,

$$|a_n x_n| \leq |a_n| N^{-1/p_n}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\sum |a_n x_n| \leq \sum |a_n| N^{-1/p_n} < \infty$$

olur ve buradan $M_0(p) \subset c_0^\alpha(p)$ bulunur. $c_0^\alpha(p) \subset c_0^\beta(p)$ olduğundan Teorem.3.27 den $c_0^\alpha(p) = M_0(p)$ olduğu görülür.

(ii) $a \in E_0$ ve $x \in c_0^\alpha(p)$ olsun. Bu taktirde her $N > 1$, her n ve enaz bir $K > 0$ için,

$$|a_n| N^{1/p_n} \leq K$$

dir. Enaz bir $N > 1$ için,

$$\sum_n |x_n| N^{-1/p_n} < \infty$$

olur. Buradan

$$|a_n x_n| \leq K |x_n| N^{-1/p_n}$$

olur ki bu da,

$$\sum |a_n x_n| \leq K \sum |x_n| N^{-1/p_n} < \infty$$

olması demektir. Sonuç olarak $a \in c_0^{\alpha\alpha}(p)$ bulunur. Böylece $E_0 \subset c_0^{\alpha\alpha}(p)$ olduğu görülür. (i) den $c_0^{\alpha\alpha}(p) = c_0^{\beta\beta}(p)$ olduğundan, $c_0^{\alpha\alpha}(p) \subset c_0^{\beta\beta}(p)$ olur. Bu taktirde Teorem.3.28 den $c_0^{\beta\beta}(p) = E_0$ elde edilir.

Teorem.3.30. $\sup p_n < \infty$ iken; $c_0^*(p)$, $M_0(p)$ ye izomorftur. $\inf p_n > 0$ olması halinde $c_0^*(p)$, ℓ_1 uzayına lineer homeomorftur, (Maddox, 1969).

Teorem.3.31. Her n için $p_n > 0$ olsun. Bu taktirde,

$$M_\infty(p) = \bigcap_{N>1} \{ a=(a_n): \sum_n |a_n| N^{1/p_n} < \infty \}$$

olmak üzere $\ell_\infty^{\beta}(p) = M_\infty(p)$ dir, (Lascarides ve Maddox, 1969).

İspat. $a \in M_\infty(p)$ ve $x \in \ell_\infty^{\beta}(p)$ olsun. Bir $N > \max(1, \sup |x_n|^{p_n})$ tamsayısı seçelim. Bu taktirde,

$$|\sum a_n x_n| \leq \sum |a_n| N^{1/p_n} < \infty$$

olur ve bundan dolayı $M_\infty(p) \subset \ell_\infty^{\beta}(p)$ bulunur.

Diğer yandan, eğer $a \in \ell_\infty^{\beta}(p)$ fakat $a \notin M_\infty(p)$ ise bu taktirde

$$\sum |a_n| N^{1/p_n} = \infty$$

olacak şekilde bir $N > 1$ tamsayısı mevcuttur. $x_n = N^{1/p_n} \cdot \text{sgn } a_n$ yazarak, $x \in \ell_\infty^{\beta}(p)$ olduğunu fakat $\sum a_n x_n$ in ıraksak olduğunu elde ederiz. Buradan, $\ell_\infty^{\beta}(p) = M_\infty(p)$ olduğu görülür.

Teorem.3.32. Her $p=(p_n)$ için,

$$E_\infty = \bigcup_{N>1} \{ x=(x_n): \sup_n |x_n| N^{-1/p_n} < \infty \}$$

olmak üzere $\ell_\infty^{\beta\beta}(p) = E_\infty$ dir.

İspat. $E_\infty \subset \ell_\infty^{\beta\beta}(p)$ olduğu gösterilebilir. Diğer yandan, eğer $x \in \ell_\infty^{\beta\beta}(p) - E_\infty$ ise bu taktirde $n=n(N)$ için $|x_n| \cdot N^{-1/p_n} > N^2$ olacak şekilde kesin artan bir $(n(N))$ pozitif tamsayılar dizisi mevcuttur. Eğer $n \neq n(N)$ iken $a_n = 0$ ve $n=n(N)$ iken $a_n = N^{-(2+1/p_n)} \cdot \text{sgn } x_n$, $(N=2,3,\dots)$ şeklinde

bir $a=(a_n)$ dizisi tanımlarsak, bu taktirde herhangi bir $R > 1$ tamsayısı ve her $N \geq R$ için $n=n(N)$ iken $|a_n|.R^{1/p_n} \leq N^{-2}$ dir. Buradan $x \in \ell_{\infty}^{\beta\beta}(p)$ olur. Bununla beraber, $n=n(N)$ için $a_n x_n > 1$ olması $x \in \ell_{\infty}^{\beta\beta}(p)$ olması ile çelişir. O halde $\ell_{\infty}^{\beta\beta}(p) = E_{\infty}$ dir.

Teorem.3.33. Her $p=(p_n)$ için,

$$(i) \ell_{\infty}^{\alpha}(p) = M_{\infty}(p),$$

$$(ii) \ell_{\infty}^{\alpha\alpha}(p) = E_{\infty}$$

dir, (Çolak, Srivastava ve Nanda, 1993).

İspat. (i) Teorem.3.31 gereğince $\ell_{\infty}^{\beta}(p) = M_{\infty}(p)$ olduğundan, Teorem.3.29 (i) nin ispatına benzerdir.

(ii) Teorem.3.32 gereğince $\ell_{\infty}^{\beta\beta}(p) = E_{\infty}$ olduğundan, Teorem.3.29 (ii) nin ispatına benzerdir.

Teorem.3.34. (i) $c_0(p)$ perfektir $\Leftrightarrow p \in c_0$

$$(ii) \ell_{\infty}(p) \text{ perfektir } \Leftrightarrow p \in \ell_{\infty}$$

(Çolak, Srivastava ve Nanda, 1993).

Teorem.3.35. $p=(p_n)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde, $c_0(p)$ ve $\ell_{\infty}(p)$, normal ve monotondur, (Çolak, 1992).

İspat. Eğer $p=(p_n) \in c_0$ ise bu taktirde Teorem.3.34 (i) gereğince $c_0(p)$ perfektir. Bundan dolayı Lemma.3.2 (i) den $c_0(p)$ normal ve monotondur. Şimdi $p=(p_n) \in \ell_{\infty} - c_0$, $x \in c_0(p)$ ve $n \geq 1$ için $|y_n| \leq |x_n|$ olsun. Bu taktirde $y \in c_0(p)$ olur. Böylece $p \in c_0$ için de $c_0(p)$ normal ve monoton olur.

Eğer $p=(p_n)$ sınırlı ise Teorem.3.34 (ii) den $\ell_{\infty}(p)$ perfektir ve Lemma.3.2 (i) den normal ve monotondur.

Teorem.3.36. $p=(p_n)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde,

$$(i) c_0^{\gamma}(p) = M_0(p),$$

$$(ii) \ell_{\infty}^{\gamma}(p) = M_{\infty}(p)$$

dir, (Çolak, 1992).

İspat. (i) Teorem.3.35, Lemma.3.2 (ii) ve Teorem.3.29 (i) den görülür.

(ii) Teorem.3.35, Lemma.3.2 (ii) ve Teorem.3.33 (i) den görülür.

Teorem.3.37. Her $p=(p_n)$ için $c^\alpha(p)=c_0^\alpha(p)\cap \ell_1$ dir, (Çolak, Srivastava ve Nanda, 1993).

İspat. $a\in c_0^\alpha(p)\cap \ell_1$ ve $x\in c(p)$ olsun. $x\in c(p)$ ise enaz bir ℓ için $|x_n - \ell|^{p_n} \rightarrow 0$ olur. Bu takdirde $\sum_n |a_n| < \infty$ ve $x\in c(p)$ olduğundan $(x_n - \ell)\in c_0(p)$ dir. Buradan,

$$\sum_n |a_n(x_n - \ell)| < \infty$$

olur. Şimdi,

$$|a_n x_n| \leq |a_n(x_n - \ell)| + |\ell| \cdot |a_n|$$

eşitsizliğinden,

$$\sum |a_n x_n| < \infty$$

olduğu görülür. Böylece $a\in c^\alpha(p)$ olur.

$c_0(p) \subset c(p)$ olduğundan $c^\alpha(p) \subset c_0^\alpha(p)$ olur. $a\in c^\alpha(p)$ olsun. $e=(1,1,\dots)\in c(p)$ olduğundan, $\sum |a_n| < \infty$ olduğu görülür ve buradan $a\in \ell_1$ elde edilir. Böylece $a\in c_0^\alpha(p)\cap \ell_1$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem.3.38. Her $p=(p_n)$ için $c^\beta(p)=c_0^\beta(p)\cap \gamma$ dir, (Lascarides, 1971).

İspat. $a\in c_0^\beta(p)\cap \gamma$ ve $|x_n - \ell|^{p_n} \rightarrow 0$ olsun. Bu takdirde $\ell \cdot \sum a_n$ ve $\sum a_n(x_n - \ell)$ iyi tanımlıdır. Bu nedenle $\sum a_n x_n$ yakınsaktır. Buradan $c_0^\beta(p)\cap \gamma \subset c^\beta(p)$ bulunur. Diğer yandan, $a\in c^\beta(p)$ olsun. Bu takdirde $e=(1,1,\dots)\in c(p)$ ise $a\in \gamma$ dir ve $c_0(p) \subset c(p)$ olduğundan $c^\beta(p) \subset c_0^\beta(p)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem.3.39. Kesin pozitif reel sayıların her $p=(p_n)$ dizisi için,

$$m_s = \{a=(a_n) : \sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| < \infty\}$$

olmak üzere $c^\gamma(p)=c_0^\gamma(p)\cap m_s$ dir, (Çolak, 1992).

İspat. $a=(a_n)\in c_0^\gamma(p)\cap m_s$ ve $x\in c(p)$ olsun. Bu takdirde $\sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| < \infty$ ve enaz bir ℓ için $(x_n - \ell)\in c_0(p)$ dir. Buradan,

$$\sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n (x_n - \ell) \right| < \infty$$

olur. Bundan dolayı,

$$\sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n x_n \right| \leq \sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n (x_n - \ell) \right| + |\ell| \sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| < \infty$$

olur. Buradan $a \in c^Y(p)$ olduğu görülür.

Şimdi, $a \in c^Y(p)$ olsun. $e = (1, 1, \dots) \in c(p)$ olduğundan, $\sup_k \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| < \infty$ ve $a \in m_s$ olduğu görülür. Ayrıca $c^Y(p) \subset c_0^Y(p)$ olduğundan $a \in c_0^Y(p) \cap m_s$ elde edilir.

Sonuç.3.1. $c(p)$ ne monoton, ne normal, ne de perfecttir, (Çolak, 1992).

Teorem.3.40.(i) $1 < p < \infty$ için $\ell_p^* = \ell_q$ dir.

(ii) $0 < p \leq 1$ için $\ell_p^* = \ell_\infty$ dir.

(iii) $c_0^* = c^* = \ell_\infty^* = \ell_1$ dir.

Teorem.3.41.(i) $1 < p < \infty$ için $\ell_p^\alpha = \ell_p^\beta = \ell_p^\gamma = \ell_q$ dir.

(ii) $0 < p < 1$ için $\ell_p^\alpha = \ell_p^\beta = \ell_p^\gamma = \ell_\infty$ dir.

IV. BÖLÜM

DİZİ UZAYLARI ARASINDA BAZI KAPSAMA BAĞINTILARI

Bu bölümde ℓ_∞ , c ve c_0 uzaylarının genelleştirilmiş uzayları olan $\Delta_V(\ell_\infty)$, $\Delta_V(c)$ ve $\Delta_V(c_0)$ uzaylarını tanımlayıp, bunlar arasındaki kapsama bağıntılarını vereceğiz.

$\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{ x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty \}$$

$$c(\Delta) = \{ x = (x_k) : \Delta x \in c \}$$

$$c_0(\Delta) = \{ x = (x_k) : \Delta x \in c_0 \}$$

şeklinde tanımlanır, (Kızmaz, 1981).

$$v = (v_k);$$

$$\liminf |v_k|^{1/k} = r \quad (0 < r \leq \infty)$$

şartını sağlayan, sıfırdan farklı kompleks sayıların herhangi bir sabit dizisi olsun.

$\Delta_V(x) = (\Delta_V(x_k)) = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ uzaylarının genelleştirilmiş uzayları olarak

$$\Delta_V(\ell_\infty) = \{ x = (x_k) : \sup_k |\Delta_V(x_k)| < \infty \}$$

$$\Delta_V(c) = \{ x = (x_k) : \Delta_V(x_k) \rightarrow \ell, k \rightarrow \infty, \text{ enaz bir } \ell \text{ için} \}$$

$$\Delta_V(c_0) = \{ x = (x_k) : \Delta_V(x_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \text{ iken} \}$$

şeklinde tanımlanır. $(v_k) = (1, 1, \dots)$ ise $\Delta_V(\ell_\infty) = \ell_\infty(\Delta)$, $\Delta_V(c) = c(\Delta)$ ve $\Delta_V(c_0) = c_0(\Delta)$ olur, (Çolak, 1989).

Lemma.4.1. $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_k k^{-1} |x_k| < \infty$

(ii) $\sup_k |x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}| < \infty$

olmasıdır, (Kızmaç, 1981).

Lemma.4.2. $\sup_k |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_k k^{-1} |v_k x_k| < \infty$

(ii) $\sup_k |v_k x_k - k(k+1)^{-1} v_{k+1} x_{k+1}| < \infty$

olmasıdır, (Çolak, 1989).

Lemma.4.1 de $x_k = k v_k$ ve $x_k = k v_k^{-1}$ alınırsa, sırasıyla, aşağıdaki lemmalar elde edilir.

Lemma.4.3. $\sup_k |k v_k - (k+1) v_{k+1}| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_k |v_k| < \infty$

(ii) $\sup_k k |v_k - v_{k+1}| < \infty$

olmasıdır.

Lemma.4.4. $\sup_k |k v_k^{-1} - (k+1) v_{k+1}^{-1}| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_k |v_k^{-1}| < \infty$

(ii) $\sup_k k |v_k^{-1} - v_{k+1}^{-1}| < \infty$

olmasıdır.

Tanım.4.1. $X_v = \{ x = (x_k) : (v_k x_k) \in X \}$ olmak üzere $X_v = X$ ise X dizi uzayına v -invarianttır denir, (Çolak, 1989).

Teorem.4.1.(i) $\ell_\infty(\Delta) \subset \Delta_v(\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k |k v_k - (k+1) v_{k+1}| < \infty \quad (4.1)$$

olmasıdır.

(ii) $\Delta_v(\ell_\infty) \subset \ell_\infty(\Delta)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k |k v_k^{-1} - (k+1) v_{k+1}^{-1}| < \infty \quad (4.2)$$

olmasıdır.

İspat.(i) ($\Leftarrow$) $\sup_k |k v_k - (k+1) v_{k+1}| < \infty$ ve $x \in \ell_\infty(\Delta)$ olsun. Bu taktirde Lemma.4.3

(i) ve (ii) özellikleri sağlanır. $x \in \ell_\infty(\Delta)$ ise $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olur.

$$|v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| \leq k^{-1} |x_k| \cdot k |v_k - v_{k+1}| + |v_{k+1}| \cdot |x_k - x_{k+1}|$$

eşitsizliğinden, Lemma.4.1(i), Lemma.4.3(i)-(ii) ve $x \in \ell_\infty(\Delta)$ olduğu kullanılarak

$$\sup_k |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| < \infty$$

elde edilir. Böylece $x \in \Delta_v(\ell_\infty)$ olur.

($\Rightarrow$) $\ell_\infty(\Delta) \subset \Delta_v(\ell_\infty)$ olsun. Farzedelim ki $\sup_k |k v_k - (k+1) v_{k+1}| = \infty$ olsun. Eğer

$(x_k) = (k)$ seçersek $(x_k) \in \ell_\infty(\Delta)$ olur. Halbuki,

$$\sup_k |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| = \sup_k |k v_k - (k+1) v_{k+1}| = \infty$$

yani $x \notin \Delta_v(\ell_\infty)$ çıkar. Bu ise $\ell_\infty(\Delta) \subset \Delta_v(\ell_\infty)$ olması ile çelişir. Demek ki şart gerektir.

(ii) ($\Leftarrow$) $\sup_k |k v_k^{-1} - (k+1) v_{k+1}^{-1}| < \infty$ ve $x \in \Delta_v(\ell_\infty)$ olsun. Bu taktirde Lemma.4.4

(i) ve (ii) özellikleri sağlanır. $x \in \Delta_v(\ell_\infty)$ ise $\sup_k |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| < \infty$ dir.

$$|x_k - x_{k+1}| \leq k^{-1} |v_k x_k| \cdot k |v_k^{-1} - v_{k+1}^{-1}| + |v_{k+1}^{-1}| \cdot |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}|$$

eşitsizliğinden, Lemma.4.4 (i)-(ii), Lemma.4.2 (i) ve $x \in \Delta_V(\ell_\infty)$ olduğu kullanılarak

$$\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$$

bulunur. Bu da $x \in \ell_\infty(\Delta)$ olması demektir.

($\Rightarrow$) $\Delta_V(\ell_\infty) \subset \ell_\infty(\Delta)$ olsun. Farzedelim ki $\sup_k |k v_k^{-1} - (k+1) v_{k+1}^{-1}| = \infty$ olsun. Eğer

$x_k = k v_k^{-1}$ alınırsa $(x_k) \in \Delta_V(\ell_\infty)$ çıkar. Halbuki,

$$\sup_k |x_k - x_{k+1}| = \sup_k |k v_k^{-1} - (k+1) v_{k+1}^{-1}| = \infty$$

yani $x \notin \ell_\infty(\Delta)$ çıkar. Bu ise $\Delta_V(\ell_\infty) \subset \ell_\infty(\Delta)$ olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç.4.1. $\ell_\infty(\Delta)$ nin v -invariant olması için gerek ve yeter şart (4.1) ve (4.2) nin sağlanmasıdır.

Lemma.4.5. $\lim_k |x_k - x_{k+1}| = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \lim_k k^{-1} |x_k| = 0$$

$$(ii) \lim_k |x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}| = 0$$

olmasıdır.

İspat. $\lim_k |x_k - x_{k+1}| = 0$ olsun. Bu taktirde

$$|x_1 - x_{k+1}| = \left| \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i+1}) \right| \leq \sum_{i=1}^k |x_i - x_{i+1}|$$

dir. Eşitsizliğin her iki tarafını k ile bölüp, $k \rightarrow \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_k k^{-1} |x_1 - x_{k+1}| = 0$$

buluruz. Bu ise $\lim_k k^{-1} |x_k| = 0$ demektir.

$$|x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}| = |k(k+1)^{-1} (x_k - x_{k+1}) + (k+1)^{-1} x_k|$$

$$\leq k(k+1)^{-1} |x_k - x_{k+1}| + (k+1)^{-1} |x_k|$$

eşitsizliğinden,

$$\lim_k |x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}| = 0$$

bulunur.

(i) ve (ii) sağlansın.

$$|x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}| \geq k(k+1)^{-1} |x_k - x_{k+1}| - (k+1)^{-1} |x_k|$$

eşitsizliğinden,

$$\lim_k |x_k - x_{k+1}| = 0$$

bulunur.

Lemma.4.6. $\lim_k |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \lim_k k^{-1} |v_k x_k| = 0$$

$$(ii) \lim_k |v_k x_k - k(k+1)^{-1} v_{k+1} x_{k+1}| = 0$$

olmasıdır.

Teorem.4.2.(i) $\sup_k |k v_k - (k+1) v_{k+1}| < \infty$ ise $c_0(\Delta) \subset \Delta_V(c_0)$ dir.

(ii) $\sup_k |k v_k^{-1} - (k+1) v_{k+1}^{-1}| < \infty$ ise $\Delta_V(c_0) \subset c_0(\Delta)$ dir.

İspat.(i) $\sup_k |k v_k - (k+1) v_{k+1}| < \infty$ ve $x \in c_0(\Delta)$ olsun. Bu taktirde Lemma.4.3(i) ve

(ii) özellikleri sağlanır.

$$|v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| \leq |v_k| \cdot |x_k - x_{k+1}| + k^{-1} |x_{k+1}| \cdot |k v_k - v_{k+1}|$$

eşitsizliğinden, Lemma.4.5 (i), Lemma.4.3 (i)-(ii) ve $x \in c_0(\Delta)$ olduğu kullanılarak

$$\lim_k |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}| = 0$$

elde edilir. Böylece $x \in \Delta_V(c_0)$ olur.

(ii) $\sup_k |k v_k^{-1} - (k+1) v_{k+1}^{-1}| < \infty$ ve $x \in \Delta_V(c_0)$ olsun.

$$|x_k - x_{k+1}| \leq k^{-1} |v_k x_k| \cdot k |v_k^{-1} - v_{k+1}^{-1}| + |v_{k+1}^{-1}| \cdot |v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}|$$

eşitsizliğinden, Lemma.4.4 (i)-(ii), Lemma.4.6 (i) ve $x \in \Delta_V(c_0)$ olduğu kullanılarak,

$$\lim_k |x_k - x_{k+1}| = 0$$

elde edilir. Böylece $x \in c_0(\Delta)$ olur.

KAYNAKLAR

- BANACH, S.,(1932). **Theorie des operation Linearies**, Warszawa.
- ÇOLAK, R.,(1989). **On Some Generalized Sequence Spaces**, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A₁ , 38, 35-46
- ÇOLAK, R.,(1989). **On Invariant Sequence Spaces**, Erc. Üni. Fen. Bil. Derg., 5, 1-2, 881-887
- ÇOLAK, R. ve ÇAKAR, Ö.,(1989). **Banach Limits and Related Matrix Transformations**, Studia Scientiarum Math. Hungarica 24, 429-436
- ÇOLAK, R.,(1992). **On Some Sequence Spaces and Their γ -Duals**, Jour. Inst. Maths, Camp. Sc. 5(1), 105-108
- ÇOLAK, R.; SRIVASTAVA, P.D. ve NANDA, S.,(1993). **On Certain Sequence Spaces and Their Köthe-Toeplitz Duals**, Rendiconti di Mathematica, Serie VII, 13, 27-39
- DAS, G. ve MISHRA, S.K.,(1981). **A Note on a Theorem of Maddox on Strong Almost Convergence**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 89, 393-396
- DAS, G.; KUTTNER, B. ve NANDA, S.,(1984). **Some Sequence Spaces and Absolute Almost Convergence**,Trans. Amer. Math. Soc. 283(2), 729-739
- FRIDY, J.A.,(1985). **On Statistical Convergence**, Analysis, 5, 301-313
- KIZMAZ, H.,(1981). **On Certain Sequence Spaces**, Canad. Math. Bull. 24(2), 169-176
- KREYSZIG, E.,(1978). **Introductory Functional Analysis with Applications**, John Wiley sons, New York
- LASCARIDES, C.G.,(1971). **A Study of Certain Sequence Spaces of Maddox and a Generalization of a Theorem of Iyer**, Pac. J. Math. 38(2), 487-500
- LASCARIDES, C.G. ve MADDOX, I.J.,(1970). **Matrix Transformations Between Some Classes of Sequences**, Proc. Camb. Phil. Soc., 68, 99-104

- LORENTZ, C.G., (1948). **A Contribution to the Theory of Divergent Sequences**, Acta. Math. 80, 167-190
- MADDOX, I.J., (1967). **Spaces of Strongly Summable Sequences**, Quart. J Math. Oxford (2), 18, 345-355
- MADDOX, I.J., (1969). **Continuous and Köthe-Toeplitz Duals of Certain Sequence Spaces**, Proc. Camb. Phil. Soc., 65, 431-435
- MADDOX, I.J., (1970). **Elements of Functional Analysis**, Camb. Univ. Press.
- MADDOX, I.J., (1978). **A New Type of Convergence**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 83, 61-64
- MURSALEEN, (1983). **On Some New Invariant Matrix Methods of Summability**, Quart. J. Math. Oxford 2(34), 77-86
- SCHAEFER, P., (1972). **Infinite Matrices and Invariant Means**, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1), 104-110
- SIMONS, S., (1965) **The Sequence Spaces $\ell^p(p_V)$ and $\ell_\infty(p_V)$** , Proc. London Math. Soc., (15), 3, 422-436
- SIMONS, S., (1969). **Banach Limits, Infinite Matrices and Sublinear Functionals**, J. Math. Anal. Appl. 26, 640-655