

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BULANIK SAYI DİZİLERİ İÇİN
GENELLEŞTİRİLMİŞ LACUNARY İDEAL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cihan ÇİÇEK

(151121109)

Anabilim Dalı : Matematik

Program : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hıfı ALTINOK

Nisan-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİ İÇİN
GENELLEŞTİRİLMİŞ LACUNARY İDEAL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cihan ÇİÇEK

(151121109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Mart 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Nisan 2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hıfı ALTINOK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mikail ET

: Prof. Dr. Mahmut IŞIK

Nisan-2018

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının gerek hazırlanması gerekse yazılması sürecinde bana her zaman yardımcı olan, engin bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım sayın hocam Prof. Dr. Hıfısı ALTINOK'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Cihan ÇİÇEK

ELAZIĞ-2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. BULANIK SAYI DİZİLERİ.....	6
3.1. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar.....	6
3.2. Bulanık Sayı Dizileri ve Temel Özellikleri.....	10
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ I -LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAK- LIK.....	15
4.1 Bulanık Sayı Dizilerinde I -Yakınsaklık.....	15
4.2 Bulanık Sayı Dizilerinde I^* -Yakınsaklık.....	23
4.3 I -Cauchy Bulanık Sayı Dizisi.....	24
4.4 α -Dereceden I -Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık.....	26
5. SONUÇLAR.....	33
6. KAYNAKLAR.....	34

ÖZET

Bulanık Sayı Dizileri için Genelleştirilmiş Lacunary İdeal Yakınsaklık

Bu çalışmada dizi uzayları ve toplanabilme teorisinde geniş uygulama alanlarına sahip istatistiksel yakınsaklık kavramının genelleştirilmiş hali olan ve temeli doğal sayıların ideal ve süzgeç tanımlarına dayalı olan ideal yakınsaklık kavramından bahsedilmiştir. Pek çok türü olan ideal yakınsaklığın bulanık sayı dizileri için I -yakınsaklığı ve I^* -yakınsaklığı verilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α -dereceden I -istatistiksel yakınsaklık, I -lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $N_\theta(I)^\alpha$ -yakınsaklık tanımları verilmiş ve bu kavramlar arasındaki bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lacunary dizisi, Bulanık sayı dizisi, İdeal yakınsaklık, İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme.

SUMMARY

Generalized Lacunary Ideal Convergence for Sequences of Fuzzy Numbers

In this study, we mention the concept of ideal convergence which is based on the concepts of ideal and filter in the set of natural numbers and general case of the statistical convergence with wide application areas in the sequence spaces and summability theory. We give I –convergence and I^* –convergence of ideal convergence that has several convergence kinds for sequences of fuzzy numbers and examine relations between them. Furthermore, we give the notions of I –statistical convergence, I –lacunary statistical convergence of order α for $\alpha \in (0, 1]$ and $N_\theta(I)^\alpha$ –convergence and examine some inclusion relations between these concepts.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, Lacunary sequence, Statistical convergence, Ideal convergence, Cesàro summability.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. (X_k) fuzzy sayı dizisinin (X_0) fuzzy sayısına yakınsaması9

Şekil 3.2. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi 14



SEMBOLLER LİSTESİ

Aşağıda tez içerisinde geçen bazı semboller verilmiştir:

$L(\mathbb{R})$	:	Reel değerli bulanık sayılar kümesi
A^α	:	A bulanık kümesinin α -kesimi
$h.h.k$	:	hemen hemen her k
$P(X)$	:	X kümesinin kuvvet kümesi
I	:	İdeal
F	:	Süzgeç
$S(I)^\alpha$	:	α -dereceden I - istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin sınıfı
$S_\theta(I)^\alpha$	:	α -dereceden I -lacunary istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin sınıfı
$N_\theta^p(I)^\alpha$	:	α - dereceden kuvvetli I - lacunary yakınsak bulanık sayı dizilerinin sınıfı

1. GİRİŞ

1951 ve 1959 yıllarında Fast [1] ve Schoenberg [2] birbirlerinden bağımsız olarak yakınsaklık kavramının genel hali olan istatistiksel yakınsaklık tanımını vermiş ve bu iki yakınsaklık türü arasındaki bazı bağıntıları incelemişlerdir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı Ergodic teori, Sayı teorisi ve Fourier analiz gibi matematikteki pek çok teoriye uygulanabilme imkanı bulmuş olup ileriki zamanlarda dizi uzayları, fonksiyon uzayları, topolojik gruplar ve toplanabilme teorisi ve olasılık teorisiyle ilişkilendirilmiştir. ([3],[4],[5],[6],[7],[8],[9]).

1986 yılında Matloka [10] tarafından bulanık sayı dizisi tanımı verilmiş ve bu dizilerin yakınsaklığı ve sınırlılığıyla ilgili bazı temel teoremler ve özellikler açıklanmıştır. Matloka'nın bu çalışmasından sonra istatistiksel yakınsaklık tanımı Nuray ve Savaş [11] tarafından bulanık sayı dizileri için verilmiştir. Nuray ve Savaş [11] bu çalışmasında istatistiksel Cauchy dizisinin tanımını vererek istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi arasındaki ilişkileri açıklamıştır. Ayrıca reel dizilerinde tanımlı olan l_p uzayının bulanık sayı dizilerinde tanımı yapılmış ve bu uzayın tam metrik uzay olduğu gösterilmiştir. Bu çalışma yapıldıktan sonra o güne kadar reel sayı dizileriyle ilgili bu alanda yapılan çalışmalar bulanık sayı dizilerine uygulanmaya başlamıştır ([12],[13],[14],[15],[16]).

2010 yılında, bir $\alpha \in (0, 1]$ reel sayısı için klasik istatistiksel yakınsaklık tanımı Çolak [17] tarafından geliştirilerek bir reel sayı dizisi için α -dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır. Bu tanımla birlikte istatistiksel yakınsaklık α nın $(0, 1]$ aralığında alacağı değerlere göre daha da hassas hale gelmiş ve daha zengin sonuçlar elde edilmiştir. Çolak [17] tarafından yapılan bu çalışma 2012 yılında Altınok vd. [18] tarafından bulanık sayı dizilerine uygulanarak geliştirilmiştir.

İdeal yakınsaklık tanımı istatistiksel yakınsaklığın genel bir hali olup reel sayı dizileri için Kostyrko vd. [19] tarafından tanımlanmış daha sonradan Kumar ve Kumar [20] ile Nuray [21] tarafından bulanık sayı dizilerine uygulanmıştır. Halen çoğu matematikçi tarafından hem reel hem de bulanık sayı dizileri için ideal yakınsaklıkla ilgili bilimsel çalışmalar yapılmaktadır ([22],[23],[24],[25]).

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. ([26]) $\mathcal{F}$ boştan farklı bir küme ve K da $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ cismi olsun. Eğer

$$+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

$$\cdot : K \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

fonksiyonları aşağıda verilen sekiz şartı sağlıyorsa, $\mathcal{F}$ kümesine K skaler cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir. Her $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ve her $f, g, h \in \mathcal{F}$ için

i) $f + g = g + f$

ii) $(f + g) + h = f + (g + h)$

iii) Her bir $f \in \mathcal{F}$ için $f + (-f) = \theta$ olacak şekilde bir $(-f) \in \mathcal{F}$ vardır.

iv) Her $f \in \mathcal{F}$ için $f + \theta = f$ olacak şekilde bir $\theta \in \mathcal{F}$ vardır.

v) $1.f = f$

vi) $(\lambda_1 + \lambda_2) f = \lambda_1 f + \lambda_2 f$

vii) $\lambda_1 (f + g) = \lambda_1 f + \lambda_1 g$

viii) $\lambda_1 (\lambda_2 f) = (\lambda_1 \lambda_2) f$.

Tanım 2.2. ([26]) X boştan farklı bir küme olmak üzere her $\alpha, \beta, \gamma \in X$ için

i) $d(\alpha, \alpha) = 0$

ii) $d(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

iii) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$

iv) $d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$

şartlarını sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.3. ([27]) s tüm kompleks terimli (x_k) dizilerinin kümesini gösterebilir. s kümesinde tanımlı herhangi iki (x_k) ve (y_k) dizisi ve bir α skaleri için

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında s kümesi bir lineer uzaydır. s lineer uzayının her bir alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir.

Tanım 2.4. ([28]) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir K alt kümesi verilsin. $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını olmak üzere K nın doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

limitiyle tanımlanır. Eğer özel olarak $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.5. ([3]) Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer bu dizinin terimleri herhangi bir A özelliğini sıfır yoğunluklu bir kümenin elemanları hariç diğer tüm k lar için sağhyorsa, $x = (x_k)$ dizisi hemen hemen her k için A özelliğini sağlıyor denir. Bu durum kısaca “h.h.k” şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6. ([3]) Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti varsa (x_k) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = L$ şeklinde gösterilir.

S ile istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı gösterilecektir. $L = 0$ durumunda (x_k) dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir ve bu şekildeki dizilerin kümesi S_0 ile gösterilir.

Yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olacağı açıktır. Fakat tersi geçerli değildir. Şimdi bununla ilgili bir örnek verecek olursak, (x_k) dizisini $(m = 1, 2, \dots)$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise} \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

yazılabileceğinden $n \rightarrow \infty$ için limit işlemine geçilirse

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu da (x_k) dizisinin sıfıra istatistiksel yakınsak olduğu anlamına gelir. Halbuki (x_k) dizisi yakınsak bir dizi değildir. Bu dizinin yakınsak olmadığı kolaylıkla gösterilebilir.

Ayrıca sınırlı diziler uzayı olan ℓ_∞ ile istatistiksel yakınsak diziler uzayı olan S uzayı birbirini kapsamazlar. Yani ne sınırlı bir dizi istatistiksel yakınsaktır ne de istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlıdır. Fakat bu iki uzayın ortak elemanları vardır. Bunun için bir örnek verelim: $(m = 1, 2, \dots)$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise} \\ 1, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı (x_k) dizisi 1 sayısına istatistiksel yakınsaktır, fakat bu dizi sınırlı bir dizi değildir.

Tersine şimdi de $x = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ dizisini alalım. Bu dizi sınırlı olmasına rağmen istatistiksel yakınsak bir dizi değildir.

Yakınsak dizilerde olduğu gibi istatistiksel yakınsak bir dizinin bir tek limiti mevcuttur.

Tanım 2.7. ([3]) Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa (x_k) dizisine bir istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.8. ([1]) (x_k) ve (y_k) reel sayı dizileri sırasıyla s_1 ve s_2 sayılarına istatistiksel olarak yakınsasınlar ve λ da keyfi bir skaler olsun. Bu durumda

- i) $S - \lim \lambda x_k = \lambda s_1$ dir.
- ii) $S - \lim (x_k + y_k) = s_1 + s_2$ dir.

Bu teoremden dolayı istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı olan S bir vektör uzayı olur.

Tanım 2.9. ([29]) $\theta = (k_r)$, artan bir pozitif tamsayı dizisi olsun. Eğer $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine bir lacunary dizisi denir. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi yardımıyla belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ şeklinde gösterilecektir. Çalışmamız boyunca

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve kısaca $\sum_{I_r} |x_i|$ ile gösterilecektir. Diğer yandan q_r terimi ile $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı gösterilecektir.

Tanım 2.10. ([30]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (3.2)$$

limiti mevcutsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir (x_k) dizisi lacunary istatistiksel yakınsaksa $S_\theta - \lim x = \ell$ ya da $x_k \rightarrow \ell (S_\theta)$ ifadeleri ile gösterilir.

Tüm lacunary istatistiksel yakınsak (x_k) dizilerinin uzayı

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde gösterilir.

3. BULANIK SAYI DİZİLERİ

3.1. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar

Geleneksel küme teorisinde kesin sınırlı küme kavramı kullanılır. Bu kavram bir nesnenin bir kümenin elemanı olması ya da olmaması gibi iki seçenekli bir mantığa dayanmaktadır.

Bulanık küme kavramı, 1960 'ların ortasında Zadeh 'in [31], klasik küme kavramının matematiksel metotlarının gerçek dünyadaki özellikle insanları içeren kısmen karmaşık sistemlerle uğraşırken yetersiz kalmasından, hoşnut kalmayışından doğdu. Zadeh, niteliklerin ikili üyelik fonksiyonuyla ifade edildiği klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edildiği bulanık kümeler tanımlamasını önerdi.

Bir çeşit çok değerli küme kuramı olan bulanık küme kuramı, belirsizliğin bir çeşit formülleştirilmesidir. Fakat işlemleri, diğer küme kuramlarınıninkilerden farklılıklar gösterir. Kümedeki her bir birey, klasik çift değerli küme kuramlarında olduğu gibi “üye ya da üye değil” olarak değil, bir dereceye kadar üye olarak görülür.

Bulanık küme kavramı, duyarlılığın arttırılması açısından, klasik kümelerinkine göre daha uygun olan yeni bir araç sağlıyor olarak görülebilir. Getirdiği yaklaşım, klasik küme kuramlarında kullanılan üyelik kavramını bir kenara bırakıp yerine tamamen yenisini koymak değil, iki-değerli üyeliği çok-değerliliğe taşıyarak genelleştirmektir.

Şimdi Zadeh'in [31] tanımını verdiği bulanık küme kavramından bahsedelim:

Bulanık kümeler de klasik kümelere benzer şekilde iki yöntemle gösterilir. Bunlardan birincisi küme elemanlarının üyelik derecelerine göre sıralanması, diğeri de matematiksel olarak üyelik fonksiyonu tanımlamak şeklindedir.

Bulanık kümelerde üyelik dereceleri arasındaki geçiş yumuşak ve sürekli bir şekilde olmaktadır. Öğeler bulanık kümeye kısmi derecede aittir. Bulanık kümelerde klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyon, $X_A : E \rightarrow \{0, 1\}$, yerini üyelik fonksiyonuna bırakır. Bu da;

$$X_A : E \rightarrow [0, 1]$$

şeklinde gösterilir.

Genel olarak küme üyelerinin değerlerine göre değişiklik gösteren eğriye üyelik fonksiyonu (önem eğrisi) adı verilir. Üyelik fonksiyonu grafiğinde x eksen üyeleri gösterirken, y eksen de üyelik derecelerini gösterir. A bulanık kümesi, $X_A : E \rightarrow [0, 1]$ A 'nın üyelik fonksiyonu ve $X_A(x) \in [0, 1]$, $x \in E$ 'nin A daki üyelik derecesi olmak üzere;

$$A = \{(X_A(x), x)\}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda E 'deki bulanık küme olan A ;

$$\begin{aligned} A &= \{(X_A(x), x)\} = \{X_A(x), x\} \\ A &= \{X_A(x_1)/x_1 + X_A(x_2)/x_2 + \dots + X_A(x_n)/x_n\} \end{aligned}$$

ve bu da

$$A = \left\{ \sum X_A(x_i) / x_i \right\}$$

olarak gösterilebilir. Bulanık kümenin sürekli olması durumunda gösterim

$$A = \left\{ \int X_A(x_i) / x_i \right\}$$

şeklinde olacaktır.

Bölüm işareti bu notasyonda bölme işlemi değil alttaki sayıya yani küme ögesine üstteki üyelik derecesinin karşılık geldiğini göstermektedir. $\sum$ ve $\int$ işaretleri de küme öğelerinin topluluğunu göstermektedir.

Tanım 3.1.1. E de bir F bulanık kümesini göz önüne alalım. F bulanık kümesi normaldir ancak ve ancak $X(x_0) = 1$ kalacak şekilde en az bir $x_0 \in E$ elemanı mevcuttur.

Tanım 3.1.2. F bir bulanık küme olsun. F bulanık kümesinin α -kesim (α -seviye) kümesi F^α sembolüyle gösterilir. Bu küme α dan az olmayan üyelerden kurulmuştur. Burada α sayısı $0 < \alpha \leq 1$ şeklinde keyfi bir değerdir. Buna göre F^α kesim kümesini

$$F^\alpha = \{x \in E : X_F(x) \geq \alpha\}$$

biçiminde gösterebiliriz. Burada $\geq$ yerine $>$ oluyorsa, buna güçlü α kesim kümesi adı verilir. F^0 kesim kümesi özel olarak

$$cl \{x \in E : X_F(x) > 0\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu küme $\{x \in E : X_F(x) > 0\}$ kümesinin kapanışını göstermektedir.

Tanım 3.1.3. Bir F bulanık kümesini göz önüne alalım. F kümesinin dayanağı (support), üyelik derecesi sıfırdan farklı olan tüm noktaların kümesi olup

$$\text{supp}(A) = \{x \in E : X_F(x) > 0\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.1.4. F ve G gibi iki bulanık küme verilsin. Eğer her $x \in E$ için $X_F(x) \leq X_G(x)$ ise F kümesi G kümesinin alt kümesidir. Bu durumda $F \subset G$ yazılır.

Tanım 3.1.5. E ile $\mathbb{R}^n$ uzayını gösterelim. E nin bir F bulanık alt kümesi verilsin. Eğer her $0 < \alpha \leq 1$ için F^α kümesi konveks oluyorsa F bulanık kümesine konvektir denir.

Tanım 3.1.6. ([32]) Eğer $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ şeklinde bir üyelik fonksiyonuyla tanımlı olan bir bulanık küme normal, konveks ve üst yarı sürekli ise ayrıca $cl \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesi kompakt ise X bulanık kümesine bir bulanık sayı adı verilir.

Örnek 3.1.7. $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu

$$X(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [1, 2] \text{ ise} \\ -x + 3, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu fonksiyon yukarıdaki şartları sağladığından dolayı bir bulanık sayıdır.

Reel terimli tüm bulanık sayılar kümesini $L(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. Bu küme üzerinde tanımlı olan bazı aritmetik işlemler şu şekildedir:

X ve Y herhangi iki bulanık sayı ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $[X]^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ve $[Y]^\alpha = [\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha]$ reel aralıkları ile X ve Y kümelerinin α -kesim kümelerini gösterelim. Bu durumda toplama ve çıkarma işlemleri

$$\begin{aligned}[X + Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha], \\[X - Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha],\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

k bir reel sayı olmak üzere $[k \cdot X]^\alpha$ çarpım kümesi de

$$[k \cdot X]^\alpha = \begin{cases} [k \cdot \underline{X}^\alpha, k \cdot \overline{X}^\alpha], & k \geq 0 \text{ ise} \\ [k \cdot \overline{X}^\alpha, k \cdot \underline{X}^\alpha], & k < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$t \in \mathbb{R}$ için $\bar{t} = [t, t]$ olmak üzere bir $\bar{t}$ bulanık sayısı

$$\bar{t}(x) = \begin{cases} 1, & x = t \text{ ise} \\ 0, & x \neq t \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımdan anlaşılacağı gibi herhangi bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonu yardımıyla temsil edilebilir [33].

$L(\mathbb{R})$ kümesinde X ve Y gibi iki bulanık sayı arasındaki kısmi sıralama bağıntısı " $\leq$ " ile gösterilir ve

$$X \leq Y \Leftrightarrow \text{Her } \alpha \in [0, 1] \text{ için } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha \text{ ve } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha$$

biçiminde tanımlanır [34].

Eğer ne $X \leq Y$ ne de $Y \leq X$ oluyorsa X ve Y fuzzy sayılarına karşılaştırılmaz denir ve bu durum $X \approx Y$ şeklinde gösterilir.

Şimdi de bulanık sayılarla ilgili çalışmalarda sıklıkla kullanılan $\bar{d}$ metriğinden kısaca bahsedelim: $X, Y \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayıları verilsin. $\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max(|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|)$ bir Hausdorff metriği olmak üzere

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \max(|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|) \}$$

şeklinde tanımlı olan $\bar{d}$ fonksiyonu bir metrik olup $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ bir tam metrik uzaydır [35].

3.2. Bulanık Sayı Dizileri ve Temel Özellikleri

Bulanık sayı dizisi tanımı ilk defa Matloka [10] tarafından yapılmış ve bu dizinin bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 3.2.1. Her bir k doğal sayısına bir bulanık sayı karşılık getiren $X : \mathbb{N} \rightarrow L(\mathbb{R})$ fonksiyonuna bir bulanık sayı dizisi adı verilir ve $X = (X_k)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.2. Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $\bar{d}(X_k, X_0) < \varepsilon$ kalacak şekilde ε sayısına bağlı bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına yakınsaktır denir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0$ ya da $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ yazılır.

$c(F)$ ile tüm yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesi gösterilecektir.

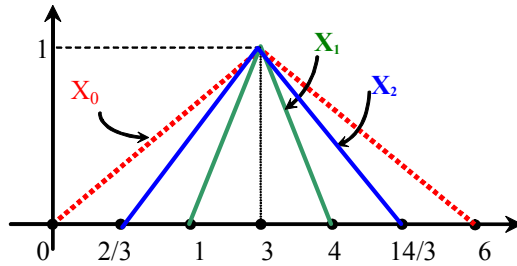
Örnek 3.2.3. Üyelik fonksiyonu

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k+1}{3k+1}x - \frac{2}{3k+1}, & x \in [\frac{2}{k+1}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{k+1}{3k-1}x + \frac{6k+2}{3k-1}, & x \in [3, \frac{6k+2}{k+1}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir (X_k) bulanık sayı dizisini alalım. $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (X_k) dizisinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \in [0, 3] \text{ ise} \\ -\frac{x}{3} + 2, & x \in [3, 6] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık sayısıdır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına yakınsaması

Teorem 3.2.4. Yakınsak bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin limiti tektir.

Tanım 3.2.5. Bir (X_k) bulanık sayı dizisi verilsin. Her k doğal sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U bulanık sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir. $\ell_\infty(F)$ ile tüm sınırlı bulanık sayı dizilerin kümesi gösterilecektir.

Yukarıdaki örnekte verilmiş olan (X_k) dizisi sınırlıdır.

Tanım 3.2.6. ([11]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0, \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

kalacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa, (X_k) bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisinin X_0 sayısına istatistiksel yakınsaması $S(F) - \lim X_k = X_0$ şeklinde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak olan tüm (X_k) bulanık sayı dizilerinin kümesi $S(F)$ ile gösterilecektir. X_0 bulanık sayısı eğer $\bar{0}$ olarak alınırsa bu şekildeki dizilerin kümesi $S_0(F)$ ile gösterilecektir.

Sonlu kümelerin doğal yoğunluklarının sıfır olması sebebiyle yakınsak bulanık sayı dizilerin kümesi olan $c(F)$ kümesi istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi olan $S(F)$ kümesinin bir alt kümesidir ve bu kapsama bağıntısı aşağıdaki örnekte görüleceği gibi kesindir.

Örnek 3.2.7. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} 3x - (3k - 1), & x \in [k - \frac{1}{3}, k] \text{ ise} \\ -3x + (3k + 1), & x \in [k, k + \frac{1}{3}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{matrix}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \text{ ise} \\ -3x + 4, & x \in [1, \frac{4}{3}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{4, 9, 16, \dots\}$$

olduğundan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$ dır. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi X_0 'a istatistiksel yakınsaktır, fakat (X_k) dizisi yakınsak değildir.

$S(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ dizi kümeleri birbirlerini kapsamazlar. Örnek 3.2.7 deki (X_k) dizisi istatistiksel yakınsak olmasına rağmen sınırlı bir dizi değildir. Diğer yandan sınırlı olduğu halde istatistiksel yakınsak olmayan diziler de vardır. Bunlardan birisini aşağıdaki örnekte göz önüne alalım:

Örnek 3.2.8.

$$U_1(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$U_2(x) = \begin{cases} 2x - 7, & x \in [\frac{7}{2}, 4] \text{ ise} \\ -2x + 9, & x \in [4, \frac{9}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k \text{ tek ise} \\ U_2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmış olan (X_k) bulanık sayı dizisi sınırlı olduğu halde, istatistiksel yakınsak bir dizi değildir.

Yakınsak bir dizinin sınırlı ve istatistiksel yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kesişim kümesi boş kümeden farklıdır. Bununla birlikte $c(F) \subset S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kapsama bağıntısının kesin olduğunu aşağıdaki örnekte görebiliriz:

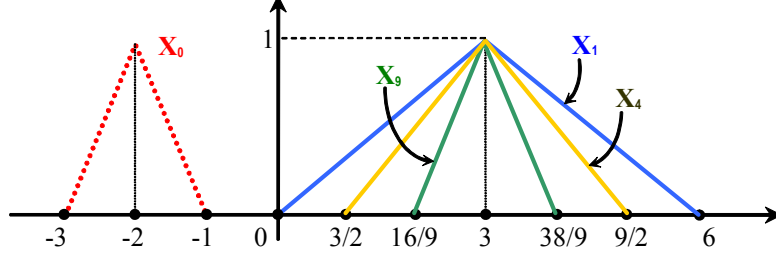
Örnek 3.2.9. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in [\frac{2k-2}{k}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in [3, \frac{4k+2}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{matrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x + 3, & x \in [-3, -2] \text{ ise} \\ -x - 1, & x \in [-2, -1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $X = (X_k)$ dizisi hem sınırlıdır, hem de X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak bu dizi yakınsak değildir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi

Tanım 3.2.10. ([36]) Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi ve $p > 0$ reel sayısı verilsin. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\bar{d}(X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa (X_k) bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır denir. Bu şekildeki dizilerinin kümesi kısaca $w(F, p)$ ile gösterilecektir. (X_k) nın X_0 'a kuvvetli p -Cesàro yakınsaması durumunda $X_k \rightarrow X_0(w(F, p))$ yazılacaktır.

Teorem 3.2.11. ([36]) $0 < p < \infty$ olmak üzere bir (X_k) bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak ise X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.2.12. ([36]) $0 < p < \infty$ olmak üzere $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi sınırlı bir dizi olsun. Eğer (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise bu durumda X_0 'a kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır.

Örnek 3.2.13. Üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen bir (X_k) bulanık sayı dizisini alalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \in [-\frac{1}{k}, 0] \text{ ise} \\ -kx + 1, & x \in [0, \frac{1}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{cases} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$\bar{0}, \quad \text{diğer durumlarda}$$

Bazı aritmetik işlemler sonucunda (X_k) nın α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{\alpha-1}{k}, \frac{1-\alpha}{k} \right], & k = n^2 \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunur. $p = 1$ özel hali için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\bar{d}(X_k, X_0)]^p = 0$$

olduğundan dolayı (X_k) dizisi $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak olur. Bu dizinin sınırlı bir dizi olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Bulanık sayı dizileri için β -dereceden istatistiksel yakınsaklık ve β dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik Altınok vd. [18] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 3.2.14. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β -dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S^\beta(F) - \lim X_k = X_0$ yazılır. Bütün β -dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S^\beta(F)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.15. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [\bar{d}(X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa (X_k) bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β -dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir ve bu şekildeki dizilerin kümesi $w^\beta(\mathcal{F}, p)$ ile gösterilir. $\beta = 1$ durumunda β -dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik tanımı kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik tanımıyla denk olur.

Sonuç 3.2.16. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. Eğer bir (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına β -dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise X_0 a β -dereceden istatistiksel yakınsaktır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ I -LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

4.1. Bulanık Sayı Dizilerinde I -Yakınsaklık

Bu bölümde ilk olarak çalışmamızın temelini teşkil eden ideal ve süzgeç tanımlarını verelim:

Aşağıdaki tanımlarda herhangi bir X kümesi için $P(X)$ sembolü ile X in kuvvet kümesi gösterilecektir.

Tanım 4.1.1. ([19]) Eğer bir $I \subset P(X)$ ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu I ailesine $\mathbb{N}$ 'in bir ideali denir.

- (a) $\emptyset \in I$
- (b) $A, B \in I$ ise $A \cup B \in I$
- (c) $A \in I, B \subset A$ ise $B \in I$

Tanım 4.1.2. ([19]) Eğer boş olmayan bir $F \subset P(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu F ailesine $\mathbb{N}$ 'nin bir süzgeci denir.

- (a) $\emptyset \notin F$
- (b) $A, B \subset F$ ise $A \cap B \in F$
- (c) $A \in F, A \subset B$ ise $B \in F$

Eğer $I \neq \emptyset$ ve $X \notin I$ ise I ya aşıkâr olmayan (proper) ideal adı verilir. Bu tanıma göre $I \subset P(X)$ nın aşıkâr olmayan ideal olması için gerek ve yeter şart $F(I) = \{X - A : A \in I\}$ sınıfının X üzerinde bir süzgeç olmasıdır. $F(I)$ süzgecine I idealiyle birleştirilmiş süzgeç denir. Eğer X kümesinde aşıkâr olmayan bir $I \subset P(X)$ ideali tüm singleton noktaları ihtiva ediyorsa bu I idealeline uygun (admissible) ideal denir. Bu durumda her bir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ olur.

Bu bölümde $X = \mathbb{N}$ alınacak, I da $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin idealini gösterecektir.

Bulanık sayı dizileri için I -yakınsaklık kavramı, 2008 de Kumar ve Kumar [20] ve Nuray [21] tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanmıştır. Dört kısımdan oluşan bu bölümün ilk üç kısmında Kumar ve Kumar [20] ın bu çalışmasının sonuçlarına yer verilecektir.

Tanım 4.1.3. $I \subset P(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$ kümesinde aşıkarak olmayan bir ideal ve $X = (X_n)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi I ya ait ise $X = (X_n)$ bulanık sayı dizisi, bir X_0 bulanık sayısına I -yakınsaktır denir. X_0 bulanık sayısına (X_n) bulanık sayı dizisinin I -limiti denir ve $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ ile gösterilir. I_1 ile I -yakınsak olan tüm bulanık sayı dizilerin kümesi gösterilecektir.

Örnek 4.1.4.

(i) Eğer $I = I_f = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir alt küme}\}$ alınırsa I_f , aşıkarak olmayan bir uygun ideal olur ve bu durumda karşılık gelen yakınsaklık, $L(\mathbb{R})$ deki $\bar{d}$ metriğine göre adi yakınsaklığa denk olur.

(ii) $\delta(A)$, A kümesinin asimptotik yoğunluğunu göstermek üzere

$$I = I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

alınırsa I_δ ideali aşıkarak olmayan bir uygun ideal olur ve karşılık gelen yakınsaklık, bulanık sayı dizilerin istatistiksel yakınsaklığıyla denk olur.

(iii) Eğer $I = I_{\delta_1} = \{A \subset \mathbb{N} : \delta_1(A) = 0\}$ alınırsa I_{δ_1} , aşıkarak olmayan bir uygun ideal olur ve karşılık gelen bulanık sayı dizilerin logaritmik istatistiksel yakınsaklığıyla denk olur. Burada $\delta_1(A)$, A kümesinin logaritmik yoğunluğunu gösterir ve $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere

$$\delta_1(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(k)}{k}$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.1.5. $X = (X_n)$ bulanık sayı dizisi, bir X_0 bulanık sayısına I -yakınsak ise bu takdirde X_0 limiti tektir.

İspat. Kabul edelim ki (X_n) bulanık sayı dizisi, X_0 ve Y_0 gibi iki farklı bulanık sayısına I -yakınsak olsun. İlk olarak teoremin hipotezi altında X_0 ve Y_0 in karşılaştırılabilir olduklarını ispatlayalım. Kabul edelim ki X_0 ve Y_0 karşılaştırılamaz olsun. Bu takdirde

$$\underline{X}_0^{\alpha_0} < \underline{Y}_0^{\alpha_0} \text{ ve } \bar{X}_0^{\alpha_0} > \bar{Y}_0^{\alpha_0} \quad (4.1)$$

veya

$$\underline{X}_0^{\alpha_0} > \underline{Y}_0^{\alpha_0} \text{ ve } \bar{X}_0^{\alpha_0} < \bar{Y}_0^{\alpha_0} \quad (4.2)$$

olacak şekilde $\alpha_0 \in [0, 1]$ vardır.

Sadece (4.1) 'i ispatlayacağız, (4.2) benzer şekilde yapılır. Kabul edelim ki (4.1) doğru olsun.

$\varepsilon_1 = \underline{Y}_0^{\alpha_0} - \underline{X}_0^{\alpha_0}$ ve $\varepsilon_2 = \bar{X}_0^{\alpha_0} - \bar{Y}_0^{\alpha_0}$ seçelim. $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ olduğu açıktır. $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olsun. $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2}$ olacak şekilde ε seçelim. (X_n) dizisi X_0 ve Y_0 a I -yakınsak olduğundan

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) < \varepsilon\} \in F(I) \\ K_2 &= \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, Y_0) < \varepsilon\} \in F(I) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

elde ederiz.

$F(I), \mathbb{N}$ de bir süzgeç olduğundan $K_1 \cap K_2$ kümesi $F(I)$ da boş olmayan bir kümedir. $m \in K_1 \cap K_2$ olsun. Bu takdirde $\bar{d}(X_m, X_0) < \varepsilon$ ve $\bar{d}(X_m, Y_0) < \varepsilon$ elde edilir. Bu da her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $d(X_m^\alpha, X_0^\alpha) < \varepsilon$ ve $d(X_m^\alpha, Y_0^\alpha) < \varepsilon$ olmasını gerektirir. Böylece $d(X_m^{\alpha_0}, X_0^{\alpha_0}) < \varepsilon$ ve $d(X_m^{\alpha_0}, Y_0^{\alpha_0}) < \varepsilon$ elde edilir. Diğer yandan d nin tanımı

$$|\underline{X}_m^{\alpha_0} - \underline{X}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \text{ ve } |\underline{X}_m^{\alpha_0} - \underline{Y}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \quad (4.4)$$

$$|\bar{X}_m^{\alpha_0} - \bar{X}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \text{ ve } |\bar{X}_m^{\alpha_0} - \bar{Y}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \quad (4.5)$$

olmasını gerektirir. (4.4) denklemi $\underline{X}_m^{\alpha_0} \in (\underline{X}_0^{\alpha_0} - \varepsilon, \underline{X}_0^{\alpha_0} + \varepsilon) \cap (\underline{Y}_0^{\alpha_0} - \varepsilon, \underline{Y}_0^{\alpha_0} + \varepsilon) = \phi$ olduğunu gösterir. Bu yöntemle bir çelişki elde edilir. Böylece X_0 ve Y_0 karşılaştırılabilir bulanık sayılardır.

$X_0 \leq Y_0$ kabul edelim. X_0 ve Y_0 ın

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) < \varepsilon\}$$

ve

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, Y_0) < \varepsilon\}$$

komşulukları ayırık olacak şekilde $\varepsilon = \frac{\bar{d}(X_0, Y_0)}{3} > 0$ alalım. (X_n) dizisi X_0 ve Y_0 a I -yakınsak olduğundan I -yakınsaklığın tanımından A ve B kümeleri $F(I)$ ya ait olur.

Bu ise $A \cap B \neq \emptyset$ olmasını gerektirir. Bu şekilde X_0 ve Y_0 ın A ve B komşuluklarının ayrık olmasıyla ilgili bir çelişki bulunur. Bu nedenle X_0 sadece bir tane olur.

Teorem 4.1.6. $X = (X_n)$ ve $Y = (Y_n)$ iki bulanık sayı dizisi olsun. Bu takdirde

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0 \Rightarrow I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$
- (ii) $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ ve $c \in \mathbb{R} \Rightarrow I - \lim_{n \rightarrow \infty} cX_n = cX_0$
- (iii) $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ ve $I - \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y_0 \Rightarrow I - \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n + Y_n) = (X_0 + Y_0)$ dir.

İspat. (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ olsun. Bu takdirde her bir $\varepsilon > 0$ için ve her $n \geq m$ için $\bar{d}(X_n, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir m sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \varepsilon\}$$

olsun. Bu takdirde aşıkardır ki $A(\varepsilon)$ sonlu bir küme olup I uygun idealine ait olur. Böylece $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ elde edilir.

(ii) $\alpha \in [0, 1]$ olsun ve c herhangi bir reel sayı olsun. X_n^α, X_0^α kümeleri sırasıyla X_n ve X_0 ın α -seviye kümeleri olsun. Eğer $c = 0$ ise ispat aşıkardır. Bunun için $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $d(cX_n^\alpha, cX_0^\alpha) = |c| d(X_n^\alpha, X_0^\alpha)$ olduğundan $\bar{d}(cX_n, cX_0) = |c| \bar{d}(X_n, X_0)$ dir. $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \rightarrow X_0$ olduğundan $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi I ya aittir.

$B(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(cX_n, cX_0) \geq \varepsilon\}$ olsun. En az bir $\varepsilon_1 > 0$ için $B(\varepsilon)$ nin $A(\varepsilon_1)$ de ihtiva edildiğini ispatlayacağız. $m \in B(\varepsilon)$ olsun. Bu takdirde

$$\varepsilon \leq \bar{d}(cX_m, cX_0) = |c| \bar{d}(X_m, X_0)$$

dir. Bu da

$$\bar{d}(X_m, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon_1$$

olmasını gerektirir ki böylece $m \in A(\varepsilon_1)$ olur. (X_n) , $I -$ yakınsak olduğundan $A(\varepsilon_1) \in I$ dir. Bu da $B(\varepsilon) \in I$ olması demektir.

(iii) $\alpha \in [0, 1]$ için $X_n^\alpha, Y_n^\alpha, X_0^\alpha$ ve Y_0^α kümeleri sırasıyla X_n ve Y_n bulanık sayı dizileri ile X_0 ve Y_0 bulanık sayılarının α - seviye kümeleri olsun.

$$d(X_n^\alpha + Y_n^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) \leq d(X_n^\alpha, X_0^\alpha) + d(Y_n^\alpha, Y_0^\alpha)$$

oldüğundan

$$\bar{d}(X_n + Y_n, X_0 + Y_0) \leq \bar{d}(X_n, X_0) + \bar{d}(Y_n, Y_0)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(Y_n, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ C(\varepsilon) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n + Y_n, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

alalım. Sonuca ulaşmak için $C(\varepsilon) \subset A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $m \in C(\varepsilon)$ olsun. Bu takdirde

$$\varepsilon \leq \bar{d}(X_m + Y_m, X_0 + Y_0) \leq \bar{d}(X_m, X_0) + \bar{d}(Y_m, Y_0)$$

elde edilir. Hem $\bar{d}(X_m, X_0)$ hem de $\bar{d}(Y_m, Y_0)$ nin değeri $\frac{\varepsilon}{2}$ den küçük kalamayacağı için ya $\bar{d}(X_m, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ya da $\bar{d}(Y_m, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Bu da $m \in A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğu anlamına gelir. $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ ve $I - \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y_0$ olduğundan $A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in I$ dir. I idealinin tanımından $C(\varepsilon)$, I ya aittir ve böylece (iii) ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.7. $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ dizileri aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde iki bulanık sayı dizisi olsun.

- (i) $K \in F(I)$ olmak üzere her $k \in K \subset \mathbb{N}$ için $X_k \leq Y_k$ dir.
- (ii) $I - \lim X_k = X_0$ ve $I - \lim Y_k = Y_0$ dir.

Bu takdirde $X_0 \leq Y_0$ dir.

İspat. Her bir $\varepsilon > 0$ için (ii) den dolayı

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \varepsilon\}, K_2 = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(Y_n, Y_0) \geq \varepsilon\} \quad (4.6)$$

kümeleri I ya aittir. X_0 ve Y_0 ın karşılaştırılabilir oldukları Teorem 4.1.5 'deki gibi gösterilebilir. Böylece ya $X_0 \leq Y_0$ ya da $X_0 > Y_0$ bulunur. Kabul edelim ki $X_0 > Y_0$ olsun. Bu takdirde $\underline{X}_0^{\alpha_0} > \underline{Y}_0^{\alpha_0}$ veya $\bar{X}_0^{\alpha_0} > \bar{Y}_0^{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0, 1]$ mevcuttur. Kabul edelim ki $\underline{X}_0^{\alpha_0} > \underline{Y}_0^{\alpha_0}$ olsun. $\bar{X}_0^{\alpha_0} > \bar{Y}_0^{\alpha_0}$ durumu benzer şekilde gösterilir. $\varepsilon = \frac{\underline{X}_0^{\alpha_0} - \underline{Y}_0^{\alpha_0}}{3}$ alalım. (4.6) dan $K \in F(I)$ olduğundan $K \cap K_1^C \cap K_2^C$ nin $F(I)$ da boştan farklı bir küme olduğu anlaşılır. $m \in K \cap K_1^C \cap K_2^C$ olsun. Bu takdirde

$$X_m \leq Y_m, \bar{d}(X_m, X_0) < \varepsilon \text{ ve } \bar{d}(Y_m, Y_0) < \varepsilon \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) nin son iki eşitsizliğinden

$$|\underline{X}_m^{\alpha_0}, \underline{X}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \text{ ve } |\underline{Y}_m^{\alpha_0}, \underline{Y}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \quad (4.8)$$

ve

$$|\bar{X}_m^{\alpha_0} - \bar{X}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \text{ ve } |\bar{Y}_m^{\alpha_0} - \bar{Y}_0^{\alpha_0}| < \varepsilon \quad (4.9)$$

bulunur. (4.8) denklemi $\underline{X}_m^{\alpha_0} > \underline{Y}_m^{\alpha_0}$ olduğunu gösterir. Buna göre $\underline{X}_m^{\alpha_0} > \underline{Y}_m^{\alpha_0}$ olacak şekilde $\alpha \in [0, 1]$ vardır. Bu da $Y_m < X_m$ olduğunu gerektirir ve böylece $m \in K$ iken (i) şartıyla bir çelişki bulunur. Böylece $X_0 \leq Y_0$ dır.

Teorem 4.1.8. $X = (X_k)$, $Y = (Y_k)$ ve $Z = (Z_k)$ bulanık sayı dizileri verilsin ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

- (i) $K \in F(I)$ olmak üzere her $k \in K \subset \mathbb{N}$ için $X_k \leq Y_k \leq Z_k$,
- (ii) $I - \lim X_k = I - \lim Z_k = X_0$.

Bu takdirde $I - \lim Y_k = X_0$ dır.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

$$B = \{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(Y_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

$$C = \{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(Z_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

diyelim. Sonuca ulaşmak için $B \subset A \cup C \cup K^C$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $m \in B$ herhangi bir keyfi sayı olsun. Bu durumda ya $m \in K$ ya da $m \in K^C$ dır. Kabul edelim ki $m \in K$ olsun. Buradan $X_m \leq Y_m \leq Z_m$ bulunur.

$$\bar{d}(Y_m, X_0) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{|\underline{Y}_m^\alpha - \underline{X}_0^\alpha|, |\bar{Y}_m^\alpha - \bar{X}_0^\alpha|\} \geq \varepsilon$$

olduğundan supremum tanımından her $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ için

$$\max \{|\underline{Y}_m^{\alpha_0} - \underline{X}_0^{\alpha_0}|, |\bar{Y}_m^{\alpha_0} - \bar{X}_0^{\alpha_0}|\} \geq \varepsilon - \varepsilon'$$

olacak şekilde $\alpha_0 \in [0, 1]$ vardır. Bu da

$$|\underline{Y}_m^{\alpha_0} - \underline{X}_0^{\alpha_0}| \geq \varepsilon - \varepsilon' \quad (4.10)$$

veya

$$|\bar{Y}_m^{\alpha_0} - \bar{X}_0^{\alpha_0}| \geq \varepsilon - \varepsilon' \quad (4.11)$$

olmasını gerektirir. Genelliği bozmadan (4.10) un sağlandığını kabul edelim. Y_m ve X_0 ın karşılaştırılabilir ya da karşılaştırılmaz olmasına göre aşağıdaki durumlar mevcut olur.

$$\underline{Y}_m^{\alpha_0} < \underline{X}_0^{\alpha_0} \text{ ve } \bar{Y}_m^{\alpha_0} < \bar{X}_0^{\alpha_0} \text{ veya } \bar{Y}_m^{\alpha_0} > \bar{X}_0^{\alpha_0} \quad (4.12)$$

$$\underline{Y}_m^{\alpha_0} > \underline{X}_0^{\alpha_0} \text{ ve } \bar{Y}_m^{\alpha_0} < \bar{X}_0^{\alpha_0} \text{ veya } \bar{Y}_m^{\alpha_0} > \bar{X}_0^{\alpha_0} \quad (4.13)$$

(4.12) nin sağlandığını kabul edelim. (4.13) ün ispatı da benzer şekilde yapılır. $X_m \leq Y_m \leq Z_m$ olduğundan $\underline{X}_m^{\alpha_0} \leq \underline{Y}_m^{\alpha_0}$ elde edilir. (4.10) eşitsizliği $|\underline{X}_m^{\alpha_0} - \underline{X}_0^{\alpha_0}| \geq \varepsilon - \varepsilon'$ olmasını gerektirir. ε' sayısı $\bar{d}(X_m, X_0) \geq \varepsilon$ sağlanacak şekilde keyfi olarak seçilmiştir. Bu $m \in A$ olduğunu ve böylece $B \subset A \cup C \cup K^C$ olacağını gösterir ki ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.9. $I \subset P(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal olsun. Bu takdirde $I_1 \cap \ell_\infty$ uzayı, ℓ_∞ normlu lineer uzayının kapalı bir lineer alt uzayıdır.

İspat. Teorem 4.1.6 'den açıktır ki $I_1 \cap \ell_\infty$, ℓ_∞ normlu lineer uzayının bir lineer alt uzayıdır. Sonuca ulaşmak için $I_1 \cap \ell_\infty$ un kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $X^{(m)} = (X_n^{(m)})$ dizisi $I_1 \cap \ell_\infty$ da yakınsak bir dizi olsun. Kabul edelim ki $X^{(m)}$ dizisi X e yakınsak olsun. $X^{(m)} \in I_1$ olduğundan $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(m)} = Y_m$ olacak şekilde Y_m bulanık sayıları mevcuttur. $X^{(m)} \rightarrow X$ olduğundan $X^{(m)}$ bir Cauchy dizisidir. Böylece $\varepsilon > 0$ için

$$\bar{d}(X^{(p)}, X^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall p \geq m \geq n_0 \text{ için}) \quad (4.14)$$

olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı mevcuttur.

$I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(p)} = Y_p$ ve $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(m)} = Y_m$ olduğundan $I -$ yakınsaklığın tanımından

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n^{(p)}, Y_p) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

ve

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n^{(m)}, Y_m) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

kümeleri I ya aittir.

$$K_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n^{(p)}, Y_p) < \frac{\varepsilon}{3} \right\} \text{ ve } K_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n^{(m)}, Y_m) < \frac{\varepsilon}{3} \right\} \quad (4.15)$$

olsun. Bu takdirde K_1 ve K_2 kümeleri $F(I)$ ya aittir. $F(I)$, $\mathbb{N}$ de bir süzgeç olduğundan $K_1 \cap K_2$ kümesi $F(I)$ da boştan farklıdır. $k_1 \in K_1 \cap K_2$ seçelim, bu takdirde (4.10) den

$$\bar{d}(X_{k_1}^{(p)}, Y_p) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } \bar{d}(X_{k_1}^{(m)}, Y_m) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.16)$$

yazılabilir. Bu nedenle her bir $p \geq n_0$ için (4.14)–(4.16) dan

$$\begin{aligned} \bar{d}(Y_p, Y_m) &\leq \bar{d}(Y_p, X_{k_1}^{(p)}) + \bar{d}(X_{k_1}^{(p)}, X_{k_1}^{(m)}) + \bar{d}(X_{k_1}^{(m)}, Y_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (Y_m) nin bir Cauchy dizisi, dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterir. Şimdi de

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m = Y \quad (4.17)$$

olsun. X dizisinin Y de $I -$ yakınsak olduğunu göstermeliyiz. $X^{(m)}, \ell_\infty$ da X e yakınsak olduğundan ℓ_∞ un yapısından dolayı aynı zamanda koordinatsal yakınsaktır. Bu nedenle her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\bar{d}(X_n^{(m)}, X_n) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall n \geq n_1(\varepsilon)) \quad (4.18)$$

olacak şekilde pozitif bir $n_1(\varepsilon)$ tamsayısı mevcuttur. (4.17) den her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\bar{d}(Y_n, Y) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall n \geq n_2(\varepsilon)) \quad (4.19)$$

olacak şekilde pozitif bir $n_2(\varepsilon)$ tamsayısı mevcuttur. $n_3(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ olsun ve $m_0 \geq n_3(\varepsilon)$ seçelim. Bu takdirde herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için (4.18) ve (4.19) kullanılarak

$$\begin{aligned}\bar{d}(X_n, Y) &\leq \bar{d}(X_n, X_n^{(m_0)}) + \bar{d}(X_n^{(m_0)}, Y_{m_0}) + \bar{d}(Y_{m_0}, Y) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \bar{d}(X_n^{(m_0)}, Y_{m_0}) + \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}\quad (4.20)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}A_{m_0}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n^{(m_0)}, Y_{m_0}) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \\ A(\varepsilon) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, Y) \geq \varepsilon\right\}, \\ A_{m_0}^C\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n^{(m_0)}, Y_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{3}\right\}, \\ A^C(\varepsilon) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, Y) < \varepsilon\right\}\end{aligned}$$

olsun. Böylece herhangi bir $n \in A_{m_0}^C\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ için (4.20) den $\bar{d}(X_n, Y) < \varepsilon$ elde edilir ve bu nedenle $A_{m_0}^C\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \subset A^C(\varepsilon)$ olur. Bu da $A(\varepsilon) \subset A_{m_0}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ olmasını gerektirir. $A_{m_0}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \in I$ olduğundan $A(\varepsilon) \in I$ elde edilir. Böylece X, Y ye I -yakınsak olup $X \in I_1$ bulunur. Bu da $I_1 \cap \ell_\infty$ un ℓ_∞ un kapalı bir lineer alt uzayı olduğunu gösterir.

4.2. Bulanık Sayı Dizilerinde I^* -Yakınsaklık

Tanım 4.2.1. Bir $X = (X_n)$ bulanık sayı dizisinin bir X_0 bulanık sayısına I^* -yakınsak olması için gerek ve yeter şart $K \in F(I)$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\bar{d}(X_{m_k}, X_0) \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $K = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin mevcut olmasıdır.

Teorem 4.2.2. I bir uygun ideal olsun. Eğer $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ ise $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ dır.

İspat. $X = (X_n)$ bulanık sayı dizisi $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu takdirde tanımdan $K \in F(I)$ ve $k \rightarrow \infty$ için

$$\bar{d}(X_{m_k}, X_0) \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

olacak şekilde bir $K = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur. $\varepsilon > 0$ verilsin. (4.21) den $m_k > n_1$ şartını sağlayan her $m_k \in K$ için $\bar{d}(X_{m_k}, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir pozitif

sayı mevcuttur. $A = \{1, 2, \dots, n_1\}$ olsun. $K \in F(I)$ olduğundan $K = \mathbb{N} - H$ olacak şekilde bir $H \in I$ kümesi mevcuttur. Açık ki $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \varepsilon\} \subset A \cup H$ dir. I bir uygun ideal olduğundan $A \in I$ dir. Bu $A \cup H \in I$ olmasını gerektirir ki böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. Herhangi bir $X = (X_n)$ bulanık sayı dizisi için eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\bar{d}(Y_n, X_0) \rightarrow 0$, $\text{supp } Z = \{n \in \mathbb{N} : Z_n \neq 0\} \in I$ ve $X = Y + Z$ olacak şekilde iki $Y = (Y_n)$ ve $Z = (Z_n)$ bulanık sayı dizisi mevcut ise (X_n) dizisi X_0 a I^* -yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki $Y = (Y_n)$ ve $Z = (Z_n)$ dizileri verilen özellikleri sağlasın.

$K = \{n \in \mathbb{N} : Z_n = 0\}$ olsun. $\text{supp } Z \in I$ olduğundan $K \in F(I)$ dir ve ayrıca K sonsuz bir kümedir. (Çünkü diğer durumlarda K, I ya aittir.)

$K = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k \dots\}$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $X_{m_n} = Y_{m_n}$ ve $\bar{d}(Y_n, X_0) \rightarrow 0$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $\bar{d}(X_{m_n}, X_0) \rightarrow 0$ dir. Böylece $\bar{d}(X_{m_n}, X_0) \rightarrow 0$ olacak şekilde $F(I)$ da bir $K = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k \dots\}$ kümesi elde edilir. Bu da gösterir ki (X_n) dizisi X_0 a I^* -yakınsaktır.

4.3. I -Cauchy Bulanık Sayı Dizisi

Tanım 4.3.1. $X = (X_n)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_m) \geq \varepsilon\}$ kümesi I ya ait olacak şekilde pozitif bir m tamsayısı mevcut ise (X_n) dizisi I -Cauchy dizisidir denir.

Teorem 4.3.2. $I, \mathbb{N}$ de bir uygun ideal olsun. Bir $X = (X_n)$ bulanık sayı dizisinin I -yakınsak olması için gerek ve yeter şart I -Cauchy olmasıdır.

İspat. (Gereklilik): Kabul edelim ki $X = (X_n)$ dizisi X_0 a I -yakınsak olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $I - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$ olduğundan

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$$

dir. Bu da

$$A^C\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in F(I)$$

olmasını gerektirir ki bu nedenle boştan farklıdır. Böylece $m \notin A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olacak şekilde m pozitif tamsayıları seçebiliriz, fakat $\bar{d}(X_m, X_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. $B = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_m) \geq \varepsilon\}$ olsun. $B \subset A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğunu göstereceğiz. $n \in B$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \bar{d}(X_n, X_m) \leq \bar{d}(X_n, X_0) + \bar{d}(X_m, X_0) \\ &< \bar{d}(X_n, X_0) + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu $\frac{\varepsilon}{2} < \bar{d}(X_n, X_0)$ olmasını gerektirir ki bu nedenle $n \in A(\frac{\varepsilon}{2})$ dır. $B \subset A(\frac{\varepsilon}{2})$ olduğundan ve $A(\frac{\varepsilon}{2}) \in I$ olduğundan $B \in I$ dır. Bu ise $X = (X_n)$ nin I -Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tersi için kabul edelim ki $X = (X_n)$ dizisi I -Cauchy dizisi olsun. X in I -yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bunun için (ε_p) dizisi sıfıra yakınsayan kesin azalan bir sayı dizisi olsun.

X , I -Cauchy olduğundan

$$A_p = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_{m_p}) \geq \varepsilon_p\} \in I, \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların kesin artan bir (m_p) dizisi mevcuttur. Bu ise

$$\emptyset \neq \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_{m_p}) < \varepsilon_p\} \in F(I) \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.22)$$

olmasını gerektirir.

p ve q , $p \neq q$ olacak şekilde iki pozitif tamsayı olsun. (4.22) den

$$\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_{m_p}) < \varepsilon_p\} \text{ ve } \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_{m_q}) < \varepsilon_q\}$$

kümelerinin $F(I)$ da boştan farklı iki küme olduğu anlaşılır. $F(I)$, $\mathbb{N}$ de bir süzgeç olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_{m_p}) < \varepsilon_p\} \cap \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_{m_q}) < \varepsilon_q\}$$

kümesi $F(I)$ ya ait boştan farklı bir kümedir. Buna göre $p \neq q$ şartını sağlayan her bir p ve q pozitif tamsayı çifti için

$$\bar{d}(X_{n_{pq}}, X_{m_p}) < \varepsilon_p \text{ ve } \bar{d}(X_{n_{pq}}, X_{m_q}) < \varepsilon_q$$

olacak şekilde bir n_{pq} pozitif tamsayısı seçebiliriz. Buradan

$$\bar{d}(X_{m_p}, X_{m_q}) \leq \bar{d}(X_{m_p}, X_{n_{pq}}) + \bar{d}(X_{m_q}, X_{n_{pq}}) \leq \varepsilon_p + \varepsilon_q \rightarrow 0, \quad (p, q \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu ise (X_{m_p}) $p = 1, 2, 3, \dots$ dizisinin adi bir tek indisli bulanık Cauchy dizisi olduğunu gerektirir. $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ bir tam metrik uzay olduğundan Cauchy yakınsaklık kriterini sağlar. Buna göre alışılmış anlamda bu dizi X_0 sonlu limitine yakınsar, yani $\lim_{p \rightarrow \infty} X_{m_p} = X_0$ olur. Üstelik $p \rightarrow \infty$ için $\varepsilon_p \rightarrow 0$ bulunur. Böylece her bir $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon_{p_0} = \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \bar{d}(X_{m_p}, X_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ için } p \geq p_0 \quad (4.23)$$

olacak şekilde bir p_0 pozitif tamsayısı seçebiliriz.

Şimdi de $A = \{n \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_n, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesinin A_{p_0} da ihtiva edildiğini göstere-
lim. $n \in A$ olsun. Bu takdirde (4.23) den

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \bar{d}(X_n, X_0) \leq \bar{d}(X_n, X_{m_{p_0}}) + \bar{d}(X_{m_{p_0}}, X_0) \\ &< \bar{d}(X_n, X_{m_{p_0}}) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $\frac{\varepsilon}{2} < \bar{d}(X_n, X_{m_{p_0}})$ olmasını gerektirir ve bu nedenle (4.23) ün ilk yarısından $\varepsilon_{p_0} < \bar{d}(X_n, X_{m_{p_0}})$ elde edilir. Bu $n \in A_{p_0}$ olmasını gerektirir ki böylece A , A_{p_0} da ihtiva edilir. A_{p_0} , I ya ait olduğundan A da I ya aittir. Böylece $X = (X_n)$ dizisi X_0 a I -yakınsak olur.

4.4. α -Dereceden I -Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bulanık sayı dizileri için α -dereceden I - istatistiksel yakınsaklık, I -lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $N_\theta(I)^\alpha$ - yakınsaklık tanımları Savaş [37] tarafından verilmiştir. Bu kısımda Savaş'ın [37] elde ettiği sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 4.4.1. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına α -dereceden I - istatistiksel yakınsak veya $S(I)^\alpha$ -yakınsaktır denir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0 (S(I)^\alpha)$ yazılır. Bu şekildeki tüm bulanık sayı dizilerinin kümesi $S(I)^\alpha$ ile gösterilecektir.

Uyarı 4.4.2. Eğer $I = I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir alt küme}\}$ alınrsa I_f , $\mathbb{N}$ nin aşıkarak olmayan bir uygun ideali olur ve bulanık sayı dizilerinde $S(I)^\alpha$ – yakınsaklık, α – dereceden istatistiksel yakınsak ile denk olur. $I = I_f$ ve $\alpha = 1$ alınrsa bulanık sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

Tanım 4.4.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayı dizisine α –dereceden I –lacunary istatistiksel yakınsak veya $S_\theta(I)^\alpha$ –yakınsaktır denir. Bu durumda $X_k \rightarrow L(S_\theta(I)^\alpha)$ yazılır. Böyle dizilerin kümesi $S_\theta(I)^\alpha$ ile gösterilecektir.

Uyarı 4.4.4. Eğer $I = I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir alt küme}\}$ alınrsa I_f , $\mathbb{N}$ nin aşıkarak olmayan bir uygun ideali olur ve bulanık sayı dizilerinde $S_\theta(I)$ – yakınsaklık, α – dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık ile denk olur. $I = I_f$ ve $\alpha = 1$ olduğunda ise bulanık sayı dizilerinde lacunary istatistiksel yakınsaklığa dönüşür.

Tanım 4.4.5. θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına $N_\theta(I)^\alpha$ – yakınsaktır denir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0(N_\theta(I)^\alpha)$ yazılır. Bu şekildeki tüm dizilerin sınıfı $N_\theta(I)^\alpha$ ile gösterilecektir.

Bu kısımda yukarıda verilen tanım genelleştirilip bazı kapsama teoremleri verilecektir.

Tanım 4.4.6. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $p = (p_k)$ bir pozitif reel sayı dizisi ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına p dizisi için α – dereceden kuvvetli I – lacunary yakınsaktır denir veya X_0 a $N_\theta^p(I)^\alpha$ – yakınsaktır denir. Bu durumda

$X_k \rightarrow X_0 (N_\theta^p(I)^\alpha)$ ile gösterilecek ve bu şekildeki tüm dizilerin sınıfı $N_\theta^p(I)^\alpha$ ile gösterilecektir.

Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ alınırsa $N_\theta^p(I)^\alpha$ kümesi $N_\theta(I)^\alpha$ kümesine indirgenir.

Tanım 4.4.7. $p = (p_k)$ pozitif reel sayı dizisi olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına p dizisi için α - dereceden kuvvetli I - Cesaro yakınsaktır denir veya X_0 a $\sigma_\theta^p(I)^\alpha$ - yakınsaktır denir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0 (\sigma^p(I)^\alpha)$ yazılacak ve bu şekildeki tüm dizilerin sınıfı $\sigma^p(I)^\alpha$ ile gösterilecektir.

Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ alınırsa $\sigma^p(I)^\alpha$ sınıfı $\sigma(I)^\alpha$ sınıfına indirgenir.

Teorem 4.4.8. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $X = (X_k)$ de bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu takdirde $X_k \rightarrow X_0 (N_\theta(I)^\alpha)$ ise $X_k \rightarrow X_0 (S_\theta(I)^\alpha)$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $X_k \rightarrow X_0 (N_\theta(I)^\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0) &\geq \sum_{k \in I_r, \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon} \bar{d}(X_k, X_0) \\ &\geq \varepsilon |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

ve böylece

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0) \geq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

yazılabilir. Bu taktirde herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} &\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \\ &\subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon \cdot \delta \right\} \in I \end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.9. $\theta = (k_r)$ bir lacunary, $X = (X_k)$ da bir bulanık sayı dizisi, $\inf_k p_k = h$ ve $\sup_k p_k = H$ olsun. Bu takdirde $\alpha = 1$ özel hali için

$$X_k \rightarrow X_0 (N_\theta^p(I)^\alpha) \Rightarrow X_k \rightarrow X_0 (S_\theta(I)^\alpha)$$

dir.

İspat. Farzedelim ki $X_k \rightarrow X_0 (N_\theta^p(I)^\alpha)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \\
&= \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \\
&+ \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(X_k, X_0) < \varepsilon}} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon}} (\varepsilon)^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \min \left\{ (\varepsilon)^h, (\varepsilon)^H \right\} \\
&\geq \frac{1}{h_r^\alpha} \min \left\{ (\varepsilon)^h, (\varepsilon)^H \right\} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \subseteq \\
& \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \geq \delta \min (\varepsilon)^h, (\varepsilon)^H \right\} \in I
\end{aligned}$$

olur. Böylece $X_k \rightarrow X_0 (S_\theta(I)^\alpha)$ elde edilir.

Teorem 4.4.10. I bir ideal ve $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun. Bu taktirde $\liminf_r q_r^\alpha > 1$ ise

$$\sigma^p(I)^\alpha \subset N_\theta^p(I)^\alpha$$

dir.

İspat. İlk olarak kabul edelim ki $\liminf_r q_r^\alpha > 1$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{h_r^\alpha}{k_r^\alpha} \geq \frac{\sigma}{1 + \sigma}$$

eşitsizliğini sağlayan yeterince büyük r ler için $q_r^\alpha \geq 1 + \sigma$ olacak şekilde $\sigma > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Şimdi de

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r^\alpha} \sum_{k=1}^{k_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} &\geq \frac{1}{k_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \\ &\geq \frac{h_r^\alpha}{k_r^\alpha} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \\ &\geq \left(\frac{\sigma}{1 + \sigma} \right) \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{1}{k_r^\alpha} \sum_{k=1}^{k_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon$$

ifadesinin

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon \left(\frac{1 + \sigma}{\sigma} \right)$$

eşitsizliğini gerektirdiğini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} &\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_r^\alpha} \sum_{k=1}^{k_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon \right\} \subset \\ &\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon \left(\frac{1 + \sigma}{\sigma} \right) \right\} \end{aligned}$$

sonucuna varılır.

Sonuç olarak ilk kapsamada tanımlı olan küme $F(I)$ süzgecinin içinde olduğundan ikinci kapsamadaki tanımlı küme de $F(I)$ süzgecinin içinde kalır. Bu da teoremi ispatlar.

Teorem 4.4.11. $\theta = (k_r)$ dizisi herhangi bir $C \in F(I)$ kümesi için

$$\cup \{n : k_{r-1} < n < k_r, r \in C\} \in F(I)$$

şartını sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Eğer

$$\sup_r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{h_{i+1}^\alpha}{(k_{r-1})^\alpha} = B < \infty$$

ise

$$N_\theta^p(I)^\alpha \subset \sigma^p(I)^\alpha$$

dır.

İspat. Eğer $\limsup q_r < \infty$ ise bu takdirde her $r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde $B > 0$ mevcuttur. $X \in N_\theta(I)^\alpha$ olsun. $\varepsilon > 0$ için T ve R kümelerini

$$T = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon_1 \right\}$$

ve

$$R = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon_2 \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $j \in T$ için

$$A_j = \frac{1}{h_j^\alpha} \sum_{k \in I_j} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon_1$$

olsun. Açıkça $T \in F(I)$ dır. $r \in T$ olmak üzere $k_{r-1} < n < k_r$ şartını sağlayan herhangi bir n tamsayısını seçelim. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} &\leq \frac{1}{k_{r-1}^\alpha} \sum_{k=1}^{k_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \\ &= \frac{1}{k_{r-1}^\alpha} \left(\sum_{k \in I_1} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{k \in I_2} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} + \dots + \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \right) \\ &= \frac{k_1^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} \left(\frac{1}{h_1^\alpha} \sum_{k \in I_1} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \right) \\ &\quad + \frac{(k_2 - k_1)^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} \left(\frac{1}{h_2^\alpha} \sum_{k \in I_2} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \right) + \dots \\ &\quad + \frac{(k_r - k_{r-1})^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} \left(\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(X_k, X_0)^{p_k} \right) \\ &= \frac{k_1^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} A_1 + \frac{(k_2 - k_1)^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} A_2 + \dots + \frac{(k_r - k_{r-1})^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} A_r \\ &\leq \sup_{j \in C} A_j \cdot \sup_r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(k_{i+1} - k_i)^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} \\ &< \varepsilon_1 \cdot B \end{aligned}$$

yazılabilir.

$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{B}$ seğıelim ve $T \in F(I)$ olmak üzere $\cup \{n : k_{r-1} < n < k_r, r \in T\} \subset R$ gerçeğı kullanılırsa θ üzerindeki kabultümüzden R kümesinde $F(I)$ 'ya ait olduğı görölür, böylece ispat tamamlanır.



5. SONUÇLAR

Bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığına pek çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. İstatistiksel yakınsaklığın daha genel bir tanımı olan ideal yakınsaklık kavramı da son zamanlarda sık çalışılan konulardandır. Bu çalışmada bulanık sayı dizileri için Kumar ve Kumar [20] tarafından tanımlanan ideal yakınsaklık ve ideal Cauchy dizisi kavramları incelenmiş ve bunlar arasındaki bağıntılara yer verilmiştir. I –yakınsaklık ve I^* –yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ bir reel sayı ve bir θ lacunary dizisi olmak üzere Savaş'ın [37] tanımladığı α –dereceden istatistiksel yakınsaklık ve I – lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları verilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Fast, H.** 1951, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, **2**, 241-244.
- [2] **Schoenberg, I.J.** 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly*, **66**, 361-375.
- [3] **Fridy, J.** 1985, On statistical convergence, *Analysis*, **5**, 301-313.
- [4] **Šalát, T.** 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca*, **30**, 139-150.
- [5] **Connor, J.S.** 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, *Analysis*, **8**, 47-63.
- [6] **Çakallı, H.** 1996, On statistical convergence in topological groups, *Pure Appl. Math. Sci.*, **43**, 27-31.
- [7] **Caserta, A.; Maio, G.D. and Kočinac, L.D.R.** 2011, Statistical convergence in function spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, **11**. Article ID420419.
- [8] **Et, M.** 2003, Strongly almost summable difference sequences of order m defined by a modulus, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **40(4)**, 463-476.
- [9] **Et, M.** 2006, Spaces of Cesàro difference sequences of order r defined by a modulus function in a locally convex space, *Taiwanese J. Math.* **10(4)**, 865-879.
- [10] **Matloka, M.** 1986, Sequences of fuzzy numbers, *BUSEFAL*, **28**, 28-37.
- [11] **Nuray, F. and Savaş, E.**, 1995, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, *Math. Slovaca*, **45(3)**, 269-273.
- [12] **Tripathy, B.C. and Baruah, A.** 2010, Lacunary statistically convergent and lacunary strongly convergent generalized difference sequences of fuzzy real numbers, *Kyungpook Math. Jour.* **50**, 565-574.
- [13] **Çanak, İ.** 2014, Tauberian theorems for Cesàro summability of sequences of fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **27(2)**, 937-942.

- [14] **Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A.** 2009, On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space, *Jour. Comput. Appl. Math.*, **233(2)**, 142-149.
- [15] **Savas, E.** 2000, A note on sequence of fuzzy numbers, *Inform. Sci.* **124(1-4)**, 297-300.
- [16] **Aytar, S. and Pehlivan, S.** 2008, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and sequences of α -cuts. *International Journal of General Systems*, **37.2**, 231-237.
- [17] **Çolak, R.**, 2010, Statistical convergence of order α , *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121–129.
- [18] **Altınok, H.; Altın, Y. and Işık, M.** 2012, Statistical Convergence and Strong p -Cesàro Summability of Order β in Sequences of Fuzzy Numbers, *Iranian J. of Fuzzy Systems* **9(2)**, 65-75.
- [19] **Kostyrko, P. Salat, T. Wilczynski, W.** 2001, I -convergence, *Real Anal. Exchange* **26(2)**, 669-686.
- [20] **Kumar, V. and Kumar, K.** 2008, On the ideal convergence of sequences of fuzzy numbers, *Information Sciences*, **178**, 4670-4678.
- [21] **Nuray, F.** 2008, I -convergence of sequences of fuzzy numbers, *New Mathematics and Natural Computation*, **4(2)**, 231-236.
- [22] **Hazarika, B.** 2012, Fuzzy real valued lacunary I -convergent sequences. *Applied Mathematics Letters*, **25(3)**, 466-470.
- [23] **Hazarika, B.** 2009, Lacunary I -convergent sequence of fuzzy real numbers. *Pacific Journal of Science and Technology*, **10(2)**, 203-206.
- [24] **Mursaleen, M., & Mohiuddine, S.** 2012, On ideal convergence in probabilistic normed spaces. *Mathematica Slovaca*, **62(1)**, 49-62.
- [25] **Mursaleen, M., & Alotaibi, A.** 2011, On I -convergence in random 2-normed spaces. *Mathematica Slovaca*, **61(6)**, 933.

- [26] **Maddox, I.J.**, 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [27] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970, Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, *Math. Z.*, **118**, 93-102.
- [28] **Niven, I. and Zuckerman, H.S.**, 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
- [29] **Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M.**, 1978, Some Cesàro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37(3)**, 508-520.
- [30] **Fridy, J.A. and Orhan, C.**, 1993, Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.*, **160(1)**, 43-51.
- [31] **Zadeh, L.A.**, 1965, Fuzzy sets, *Inform and Control*, **8**, 338-353.
- [32] **Goetschel, R. and Voxman, W.** 1986, Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets Syst.*, **18**, 31-43.
- [33] **Kaufmann, A. and Gupta, M.M.**, 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold.
- [34] **Diamond, P. and Kloeden, P.**, 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
- [35] **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.**, 1983, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **91**, 552-558.
- [36] **Kwon, J.S.**, 2000, On statistical and p -Cesàro convergence of fuzzy numbers, *Korean J. Comput. & Appl. Math.* **7(1)**, 195-203.
- [37] **Savaş, E.** 2016, I_θ -statistical and p -Cesaro summability of sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **30**, 2805-2810.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2007 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım ve 2011 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2014 yılında Bingöl iline Matematik öğretmeni olarak atandım. Halen Bingöl Anadolu İmam Hatip Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım. 2015 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.

