

**KdV DENKLEMİ VE TERS STURM-LIOUVILLE
PROBLEMLERİ İÇİN SAYISAL YÖNTEMLERİN
UYGULAMALARI**

Arzu YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

OCAK - 2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KdV DENKLEMİ VE TERS STURM-LİOUVILLE PROBLEMLERİ
İÇİN SAYISAL YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arzu YILMAZ

101121120

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

Danışman : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 Ocak 2013

Ocak-2013

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KdV DENKLEMİ VE TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

İÇİN SAYISAL YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arzu YILMAZ

(101121120)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 Ocak 2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 17 Ocak 2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Hasan BULUT

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

Ocak-2013

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde gerekli tüm imkanları sağlayan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI' ya, yakın ilgi ve yardımlarıyla üzerimde çok emeği bulunan Sayın Doç. Dr. Hasan BULUT ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ hocalarıma teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu güne dek aldığım tüm kararların arkasında duran, maddi manevi tüm imkanlarını sınırsız önüme seren, ömrünü geleceğime adadığını bildiğim, hayattaki en büyük şansım sevgili babam öğretmen Ali YILMAZ' a ve annem Ayşe YILMAZ' a minnettarlığımı belirtmek isterim.

Arzu YILMAZ
ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	4
3. ADOMİAN AYRIŞIM METODU, HOMOTOPİ ANALİZ METODU, HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN TANITILMASI VE UYGULANMASI.....	10
3.1. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)	10
3.2. Adomian Ayrışım Metodunun Genel KdV Denkleminde Uygulanması	13
3.3. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM).....	16
3.4. Homotopi Pertürbasyon Metodunun Genel KdV Denkleminde Uygulanması	19
3.5. Homotopi Analiz Metodu (HAM)	23
3.6. Homotopi Analiz Metodunun Genel KdV Denkleminde Uygulanması	25
4. SONLU FARKLAR İLE FARK DENKLEMLERİNİN TANITILMASI VE STURM-LİOUVILLE PROBLEMLERİNE UYGULANMASI.....	28
4.1. İleri Farklar ve Δ Operatörü.....	28
4.2. Sturm-Liouville Probleminin İleri Fark Metodu İle Yaklaşık Çözümünün Bulunması.....	30
4.3. Geri Farklar ve ∇ Operatörü.....	31
4.4. Sturm-Liouville Probleminin Geri Fark Metodu İle Yaklaşık Çözümünün Bulunması.....	32
4.5. Merkezi Farklar ve δ Operatörü	33
4.6. Sturm-Liouville Probleminin Merkezi Fark Metodu İle Yaklaşık Çözümünün Bulunması	34
4.7. Analitik Çözümünün Bulunması	35
4.8. İleri Fark, Geri Fark ve Merkezi Fark Metotlarının Sayısal Sonuçlarının Karşılaştırılması.....	37
5. STURM-LİOUVILLE PROBLEMİNİN FARKLI POTANSİYELLER VE ÖZDEĞERLER İÇİN MERKEZİ FARK METODU İLE ÇÖZÜMÜ	38
5.1. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Sturm-Liouville Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü.....	38
5.2. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması	45
5.3. Farklı λ Özdeğerleri İçin Sturm-Liouville Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü.....	46
5.4. Farklı λ Özdeğerleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması.....	53
6. DİFÜZYON PROBLEMİNİN FARKLI POTANSİYELLER VE ÖZDEĞERLER İÇİN MERKEZİ FARK METODU İLE ÇÖZÜMÜ	55
6.1. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Difüzyon Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü.....	55
6.2. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması	65

6.3. Farklı λ Özdeğerleri İçin Difüzyon Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü	66
6.4. Farklı λ Özdeğerleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması	73
SONUÇ	74
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	77

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ikinci bölümünde KdV denklemi ve Sturm-Liouville problemi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde: Adomian Ayrışım Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu ve Homotopi Analiz Metodu KdV denkleminde uygulanmıştır.

Dördüncü bölümde fark operatörleri tanıtılmış ve Sturm-Liouville problemine uygulanmıştır.

Beşinci ve altıncı bölümlerde ise potansiyelin değişik durumlarına göre ters problemin nümerik çözümleri ele alınmıştır. Farklı öz değerlere karşılık gelen potansiyeller arasındaki farklar incelenip, bu sonuçlara göre ters problemin kararlı olup olmadığı gösterilmiştir. Dolayısıyla diferansiyel durumlar için Levitan ve Hochstadt tarafından verilen bazı teoremlerin sonuçları nümerik yöntemlerle verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: KdV Denklemi, Adomian Ayrışım Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Homotopi Analiz Metodu, Sturm-Liouville Problemi, Difüzyon Denklemi

SUMMARY

Application of the Numerical Methods for KdV Equation and Inverse Sturm-Liouville Problems

In second part of this study, which consist five part, there given basic definitions and theorems of KdV equation and Sturm-Liouville problem.

In third part, Adomian Decomposition Method, Homotopy Perturbation Method and Homotopy Analysis Method was applied to KdV equation.

In fourth chapter, difference operators was introduced and applied to Sturm-Liouville Problem.

In fifth and sixth chapters, different numerical solutions of inverse problems are discussed according to their potential. Differences between potential corresponding to different cores are examined and according to these results it is determined to whether opposite problems are stable or not. Therefore, results of some theorems given by Levitan and Hochstadt for differential cases are given with numerical methods.

Keywords: KdV Equation, Adomian Decomposition Method, Homotopy Perturbation Method, Homotopy Analysis Method, Sturm-Liouville Problem, Diffusion Equation

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan önemli semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

L	: Sturm-Liouville Operatörü
ε	: Epsilon
φ	: Phi
λ	: Lamda
ξ	: Xi
α	: Alpha
$q(x)$	: Potansiyel Fonksiyon
$u(x)$	: Çözüm Fonksiyonu
$v(x)$	: Çözüm Fonksiyonu
$y(x,\lambda)$	: Öz Fnksiyon

1. GİRİŞ

Yüz elli yılı aşkın zaman önce, John Scott Russell isimli genç bir İskoç mühendis, kanal botları ile ilgili en etkin dizaynı saptamak için deneyler yaptığı esnada, kayda değer bir bilimsel keşifte bulundu.1834 yılında gerçekleşen bu olay ilk olarak 1845 yılında Russell tarafından bir metinde aktarılmıştır. Orijinal metin şu şekildedir:

“Dar bir kanalda bir çift at ile çekilen bir botun hareketlerini gözlemliyordum. Hareket ettiği suyun hacmi fazla değildi. Bot çekilirken, sular botun pruvası etrafında birikti ve sonra onu ardında bırakarak büyük bir hızla ileri sürüklendi. Yuvarlak ve düzgün bir su kümesi kendi seyrinde, kanal boyunca, gözle görülür bir biçim ya da hız düşüşü olmaksızın devam ediyordu. Onu at üstünde takip ettim ve yetiştiğimde, 300 feet uzunluğunda ve 1,5 foot yüksekliğindeki orijinal şeklini koruyarak saatte sekiz veya dokuz mil ile sürüklendiğini gördüm. Yüksekliği giderek azalmaya başladı. Bir iki kovalamacadan kanalın dönemecinde onu kaybettim. Bu olay Riccarton Heriot-Watt Üniversitesi, Edinburgh yakınlarındaki Hermiston’da Union kanalında gerçekleşti.”

Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle Russell tarafından bunlara “solitary waves (bağımsız dalga)” adı verilmiştir. Russell hayatı boyunca bağımsız dalgaların önemine inandı. Fakat bu konuda daha fazla ilerleme kaydedemedi. On dokuzuncu yüzyıl deniz mimarisini tamamen değiştiren bir gövde inşaat sistemi olan dalga hattını geliştirdi ve Edinburgh kraliyet topluluğu altın madalyası ile ödüllendirildi.1834’te Glasgow ve Paisley arası buharlı taşıma hizmetine başladı ve ilk deneysel gözlemi tren geçişi gibi ses frekansının doppler kaymasını yaptı. Sanatsal kraliyet topluluğunu yeniden organize etti. Deniz enstitüsünün temellerini attı ve 1849 da Londra kraliyet topluluğu üyesi seçildi. Brunel ile birlikte büyük doğuyu tasarladı ve inşa etti. Vienna Rotunda’yı inşa etti ve Britanya’nın ilk zırhlı savaş gemisinin yapımına yardım etti. Britanya’da teknik eğitim için müfredat geliştirdi ve yaşamının son zamanlarında amerikan iç savaşı esnasında görüşmelere katılmış biri olarak tanındı.

Russell’ın hayat hikayesi böyle sonlansa da bağımsız dalgaların hikayesi böyle bitmedi.

1847 yılında Stokes ve 1872 yılında Boussinesq gibi birçok matematikçi kısaca bu konudan bahsetmiş olsa da, sığ sulardaki bağımsız dalgaların profilini gözlemleyen Scott Russell'dan sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında alman matematikçi Diederik Korteweg ve öğrencisi Gustov de Vries tarafından gerçekleştirilmiştir.

Korteweg ve de Vries sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair günümüzde oldukça ilgi çeken ve kendi adları ile adlandırılan KdV denklemini bulmuşlardır. Bu modele göre sığ suda hareket eden dalgalardan yüksekliği fazla olan dalga daha hızlı hareket eder, öndeki küçük dalga ile çarpışır ve onu geçer. Ancak ilginç olan bu iki dalganın da çarpışmadan sonra, çarpışmadan önceki durumlarına geri dönmeleridir.

Hatırladığımız gibi en basit matematik dalgası $u(x,t) = f(x-ct)$ formunun, örneğin

$$u_t + c u_x = 0$$

u çözüm olarak c 'nin dalga hızını belirttiği fonksiyonudur. İyi bilinen dalga eşitliği

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

İki dalga yüzüne öncülük eder. Bundan dolayı burada bir deneme çözümü yaparsak:

$$u(x, t) = Z(x - \beta t) = Z(\xi)$$

Önceki sayfada c ile gösterilen parametre burada β ile ve f fonksiyonu Z ile gösterilmektedir. Ve bu şartlar altında şu eşitlik elde edilir:

$$-\beta \frac{dZ}{d\xi} - 6Z \frac{dZ}{d\xi} + \frac{d^3 Z}{d\xi^3} = 0$$

Bu denkleme integral uygulanır ve c_1 integrasyon sabiti olarak alınır:

$$-\beta Z + 3 Z^2 + \frac{d^2 Z}{d\xi^2} = c_1$$

Z için birinci dereceden bir eşitlik elde etmek amacıyla $\frac{dZ}{d\xi}$ yani Z' ile çarpım yapılırsa:

$$-\beta Z \frac{dZ}{d\xi} + 3 Z^2 \frac{dZ}{d\xi} + \frac{d^2 Z}{d\xi^2} \frac{dZ}{d\xi} = c_1 \frac{dZ}{d\xi}$$

$$-\beta Z Z' + 3 Z^2 Z' + Z'' Z' = c_1 Z'$$

Buradaki Z' ve Z'' ifadeleri ξ ye göre Z in birinci ve ikinci türevlerini ifade eder. Eşitliğin her iki tarafının ξ ye göre integrali alınırsa:

$$-\beta \int Z Z' d\xi + 3 \int Z^2 Z' d\xi + \int Z'' Z' d\xi = c_1 \int Z' d\xi$$

elde edilir. İntegral işlemi yapılır ve yeni integrasyon sabiti c_2 olarak kabul edilirse

$$-\frac{\beta}{2} Z^2 + Z^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{dZ}{d\xi} \right)^2 = c_1 Z + c_2$$

ξ ye göre türev alınıp zincir kuralı uygulanırsa sonuç kolayca doğrulanabilir. Burada :

$$x \rightarrow \pm \infty \text{ iken}$$

$$Z \rightarrow 0, \quad \frac{dZ}{d\xi} \rightarrow 0 \text{ ve } \frac{d^2 Z}{d\xi^2} \rightarrow 0$$

olması gereklidir. Bu gerekliliği

$$c_1 = c_2 = 0$$

takip eder.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım.2.1

Bağımlı bir değişkeni ve bu bağımlı değişkenin bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme “diferansiyel denklem” denir [3].

Tanım.2.2

Bağımlı değişkenin yalnız bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir diferansiyel denkleme “adi diferansiyel denklem” denir [3].

Tanım.2.3

Denklemini gerçekleyen bilinmeyen fonksiyondaki keyfi sabitlere özel değerler verilerek elde edilen çözüme “özel çözüm”, denklemin bütün çözümlerini kapsayan çözüme ise “genel çözüm” adı verilir.

Tanım.2.4

Diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine “başlangıç-değer problemi” denir. Verilen şartlara da “başlangıç şartları” adı verilir.

Tanım.2.5

Diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine “sınır değer problemi” denir. Verilen şartlara da “sınır şartları” adı verilir.

Tanım.2.6

Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon y ve bağımsız değişken x olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^n b_j(x)y^{(j)} + b_0(x)y = g(x)$$

biçiminde yazılabiliyorsa bu diferensiyel denkleme “lineer diferensiyel denklem” denir.

Tanım.2.7

Bir değişkenin skaler bir fonksiyon için Adomian polinomu aşağıdaki şekilde verilir. Fonksiyon n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde “Adomian polinomları”

$$A_n = \frac{1}{n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \right)$$

formülü ile tanımlanır [22].

Tanım.2.8

Sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair genel formu

$$U_t + \alpha U U_x + \beta U_{xxx} = 0$$

şeklindeki denkleme “Korteweg ve de-Vries denklemi” veya kısaca “KdV denklemi” adı verilir. Daha genel olarak ele alınırsa:

ℓ : kanalın derinliği

$\ell + \eta$: (η küçük olmak üzere) yüzeyin dipten itibaren yüksekliği

α : sıvının düzgün hareketi ile ilgili küçük bir sabit

$\sigma : \frac{\ell^3}{3} - \frac{T\ell}{pg}$ bir parametre

T : yüzey gerilimi

g : yer çekimi ivmesi

p : sıvının yoğunluğu

olmak üzere , dalganın hareketi ile ilgili kısmi diferensiyel denklem:

$$\eta_T = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \quad (2.8.1)$$

biçimindedir.

$$\eta = \beta \alpha u, \quad \xi = -\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{\sigma}} x, \quad T = \sqrt{\frac{2g\mu\alpha}{\sigma\ell}}^3 t$$

dönüşümleriyle (2.1.1) denklemi

$$u_T + u_\xi + \varepsilon u u_\xi + \mu u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.8.2)$$

şeklini alır. Burada $\varepsilon = \frac{3}{2} \beta$ ve μ bilinen parametrelerdir. (2.8.1) denkleminde $x = \xi - T$ dönüşümü yapılır ve T yerine t yazılırsa

$$u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (2.8.3)$$

KdV denklemi elde edilir.

Bununla birlikte bu denklemin pratik uygulamalarında biz sadece basit olan mesafe değişkeni x ve t değişkenlerine bağlı $u(x, t)$ fonksiyonu dalga uzamasını, alanda x , zamanda t olarak ifade eder ve

$$u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u_{xxx}(x, t) = \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$$

olarak tanımlarsak problem şu şekilde formülize edilebilir:

$$u_t(x, t) + \varepsilon u(x, t) u_x(x, t) + \mu u_{xxx}(x, t) = 0 \quad (2.8.4)$$

Tanım.1.9

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y \quad (2.9.a)$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \quad (2.9.b)$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

Buradaki α, β, a ve b bilinen sayılar olmak üzere literatürde (2.9.a) ve (2.9.b) problemine “Sturm-Liouville problemi” denir. Ayrıca (2.9.a) denkleminde de “Sturm-Liouville denklemi” denir (Levitan, 1990) [3].

Tanım.1.10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Denklemi bir çubuk boyunca sıcaklığın uçlardaki şartlara bağlı olarak zamanla nasıl değiştiğini temsil etmektedir. Buradaki c, p, k parametreler olup sırasıyla ısı kapasite, yoğunluk ve ısı iletkenlik katsayısını belirtmektedir. Bu denklemde “ $\frac{c}{k}$ ” yerine “ D ” difüzyon katsayısı olmak üzere “ $\frac{1}{D}$ ” konulması halinde elde edilen denkleme “difüzyon (yayınım) denklemi” denir [3].

Lemma.2.1

KdV Denkleminin Simetri Özelliği

$$U_t + \alpha U U_x + \beta U_{xxx} = 0$$

formundaki $U(x, t)$ denkleminde Korteweg-de Vries denklemi adı verilir. Burada α ve β ’ler keyfi sabitler olmak üzere ilk olarak

$$x = AX$$

ve benzer şekilde

$$t = BT$$

şeklinde tanımlayalım. Zincir kuralını uygularsak,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{dX}{dx} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial X}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dT}{dt} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial T}$$

olur. Ve böylece eşitlik şu hali alır:

$$\frac{1}{B}U_T + \frac{\alpha}{A}UU_x + \frac{\beta}{A^3}U_{xxx} = 0$$

daha sonra B ile çarpılırsa,

$$U_T + \frac{\alpha\beta}{A}UU_x + \frac{\beta B}{A^3}U_{xxx} = 0$$

elde edilir. Lineer olmayan KdV denklemi için

$$U = Cu$$

olarak tanımlarsak

$$U_T + \frac{\alpha BC}{A}UU_x + \frac{\beta B}{A^3}U_{xxx} = 0$$

denklemi elde edilir. Tüm katsayılar 1 olacak şekilde A,B,C değerleri seçersek

$$\frac{\alpha BC}{A} = 1 \quad ve \quad \frac{\beta B}{A^3} = 1$$

olur ki bu da örneğin,

$$A = 1 \quad B = \frac{1}{\beta} \quad C = \frac{\beta}{\alpha}$$

seçilebilir. Bu önemli bir noktadır. Fakat farkına varmalıyız ki bu değerleri saptamak için fazla bilinmeyenimiz bulunmaktadır. Bunları saptamak için eşitliğin simetri grubu ispatı olan eşitliklerimiz bulunmaktadır. Her $\lambda \neq 0$ için $U(x, t)$ ifadesi

$$U_t + \alpha UU_x + \beta U_{xxx} = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğunda KdV denklemi değişmez.

$$\lambda^2 U(\lambda X, \lambda^3 t)$$

şeklindeki her değişken için $\lambda \neq 0$ dır. Bu çeşit simetri gruplarına “ölçeklenme simetri grupları” veya “benzerlik dönüşüm grupları” adı verilir. Unutulmamalıdır ki bu grubu kapsayan $\lambda = \pm 1$ olarak tanımlı farklı dönüşüm grupları vardır. $U(x, t)$ çözüm fonksiyonu olduğunda $U(-x, -t)$ de bir çözüm fonksiyonudur.

KdV eşitliğinin bir diğer simetri grubu çeşidi ise C sabit hızı ile hareket eden referans çerçevesine gidişi içerir. Bu bağımsız değişkenler x ve t' yi kullanmak yerine

$$\xi = x - Ct \quad ve \quad T = t$$

bağımsız değişkenlerini kullanmak anlamına gelir. Daha sonra zincir kuralı kullanılarak,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} = -C \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial T}$$

elde edilir. KdV eşitliği şu hali alır:

$$U_T + (\alpha U - C)U_\xi + \beta U_{\xi\xi\xi} = 0$$

Fakat bilmeliyiz ki eğer U ya bir sabit eklersek

$$U = u + \frac{C}{\alpha}$$

$$u_T + \alpha u u_\xi + \beta u_{\xi\xi\xi} = 0$$

Bu yüzden $U(x, t)$,

$$U_t + \alpha U U_x + \beta U_{xxx} = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğunda $U(x - Ct, t) + \frac{C}{\alpha}$ da bu denklemin bir çözümüdür. Bu çeşit simetri gruplarına “dönüşümlü simetri grubu” veya “Galilean dönüşüm grubu” adı verilir.

3. ADOMIAN AYRIŞIM METODU, HOMOTOPİ ANALİZ METODU, HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN TANITILMASI VE UYGULANMASI

3.1. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Adomian Ayrışım Metodu (ADM) Amerikalı bilim adamı G. Adomian (1923–1996) tarafından tasarlanmış bir modeldir. Metot seri biçiminde bir çözüm elde edebilmek için yapılan çalışmalara dayanır. Mühendislik, fizik, biyoloji gibi birçok farklı alanda yapılan bilimsel çalışmalarda kullanılan bir yöntemdir [3].

Yapılan çalışmalarla; ADM kullanılarak, geleneksel yöntemlere göre yaklaşık çözümleri oluşturan serilerin elemanlarının hesaplanmasında daha hassas ve daha hızlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrışım metodu yalnızca başlangıç şartının kullanılmasıyla çözümün elde edilmesini sağlar.

Metod minimum hesaplama ve yüksek doğruluklu, etkili bir açık çözümü üretir ve bu yönüyle de birçok bilim adamı tarafından da güvenilir bir yöntem olarak görülür. Ayrışım metodu; lineer, lineer olmayan, homojen veya homojen olmayan gibi değişik tipteki diferansiyel denklemler için kullanılabilir. Yöntemin geleneksel yöntemlere göre birçok avantajı vardır.

Bu metotla lineer ve lineer olmayan problemlerde doğrusallaştırmalara ve aralıklara ihtiyaç duyulmaksızın yakınsak çözümü elde edebiliriz. Bazı durumlarda çözüm elemanlarının tam değerlerini bulmak mümkün olmayabilir, bu tür durumlarda sayısal olarak yaklaşık elemanlar alınır. Bu düşünce sayısal olarak ADM' nin uygulanmasını amaçlar.

Yine Adomian yönteminde önemli bir yeri olan birbirini götüren terimler (noise terms) olgusu, yalnızca iki iterasyon kullanılarak çözümün bulunmasını sağlar. Yalnızca homojen olmayan problemlerde oluşan noise terimler, çözümün çeşitli elemanlarında oluşabilecek karşıt durumlu özdeş terimler olarak tanımlanır.

Ayrışım yönteminin bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel

olarak bu metodu verecek olursak; kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olsun;

$$F(u) = g(x) \quad (3.1.1)$$

denklemini ele alalım. (3.1.1) denkleminde L ; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, R ; lineer operatörün kalan kısmını ve N ; ise lineer olmayan terimi göstermek üzere denklemi;

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (3.1.2)$$

şeklinde ayrıştırarak yazalım. L bir lineer operatör ve tersi de mevcut olsun. (3.1.2) eşitliği;

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.1.4)$$

elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (3.1.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra;

$$u = u(0) + tu'(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.1.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (3.1.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu lineer olmayan terim

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (3.1.5) eşitliğindeki u ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere

$$u_0 = a + bt - L^{-1}g$$

ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.1.6)$$

yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (3.1.5) eşitliği tekrar yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.7)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (3.1.7) eşitliği açık şekilde;

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0 \\ u_2 &= -L^{-1} R u_1 - L^{-1} A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 ise u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 ve u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (3.1.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) \\ A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) \\ A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\Phi(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n)]_{\lambda=0} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

ile verilmektedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (3.1.9) genel formülünün kullanılması, (3.1.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x, t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_n(x, t), \quad n \geq 0 \quad (3.1.10)$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x, t) \quad (3.1.11)$$

ifadesini (3.1.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (3.1.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde bir çok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Y.Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir

3.2. Adomian Ayrışım Metodunun Genel KdV Denkleminin Uygulanması

$$U_t - 6UU_x + U_{xxx} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$U(x, 0) = \frac{1}{6}(x-1) \quad (3.2.2)$$

$$U(0, t) = \frac{1}{6(1-t)}, \quad t \geq 0 \quad (3.2.3)$$

$$U(1, t) = 0$$

şeklinde başlangıç ve sınır şartları ile verilmiş ayrıca analitik çözümü de;

$$U(x, t) = \frac{1}{6} \left(\frac{x-1}{1-t} \right) \quad (3.2.4)$$

şeklinde olan lineer olmayan KdV Denklemini ADM ile çözelim. Öncelikle (3.2.4) denklemini operatör formunda yazalım:

$$L_t U = 6UU_x - U_{xxx} \quad (3.2.5)$$

Buradan

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad 0 < t < 1$$

olarak ifade edilmektedir. L_t operatörünün ters operatörü L_t^{-1} integral operatörü olup

$$L_t^{-1} = \int_0^t (.) dt$$

şeklinde gösterilir. Burada parantez içindeki ifadeler tanım kümesinde var olan ifadelerdir.

Bu durumda (2.2.5) denkleminin her iki tarafına soldan L_t^{-1} uygulanırsa:

$$L_t^{-1} (L_t U) = L_t^{-1} [6UU_x - U_{xxx}] \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Buradan

$$U(x, t) = U(x, 0) + L_t^{-1} [6UU_x] - L_t^{-1} [U_{xxx}] \quad (3.2.7)$$

olur. Burada lineer olmayan terim:

$$6UU_x = 6 \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde tanımlanarak A_n Adomian polinomunun ilk birkaç terimi:

$$A_0 = U_0(U_{0_x})$$

$$A_1 = U_{0_x}(U_1) + U_0(U_{1_x})$$

$$A_2 = U_{0_x}(U_2) + U_{1_x}(U_1) + U_{2_x}(U_0)$$

$$A_3 = U_{0_x}(U_3) + U_{1_x}(U_2) + U_{2_x}(U_1) + U_{3_x}(U_0)$$

⋮

olarak alınabilir. (3.2.7) denklemi için

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= \frac{x-1}{6} \\ U_{k+1}(x, t) &= L_t^{-1} [(U_k)_{xxx} - 6A_k], \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

şeklinde rekürans bağıntısı yazılabilir. Elde edilen bu bağıntıdan,

$$\begin{aligned}
U_0(x,t) &= \frac{x-1}{6} \\
U_1(x,t) &= L_t^{-1} \left[6A_0 - U_{0,xxx} \right] = \frac{1}{6}(x-1)t \\
U_2(x,t) &= L_t^{-1} \left[6A_1 - U_{1,xxx} \right] = \frac{1}{6}(x-1)t^2 \\
U_3(x,t) &= L_t^{-1} \left[6A_2 - U_{2,xxx} \right] = \frac{1}{6}(x-1)t^3 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

şeklinde ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan U_0, U_1, U_2, U_3 terimleri yerlerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \\
&= U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots \\
&= \frac{x-1}{6} + \frac{x-1}{6}t + \frac{x-1}{6}t^2 + \frac{x-1}{6}t^3 + \dots \\
&= \frac{x-1}{6} (1 + t + t^2 + t^3 + \dots)
\end{aligned}$$

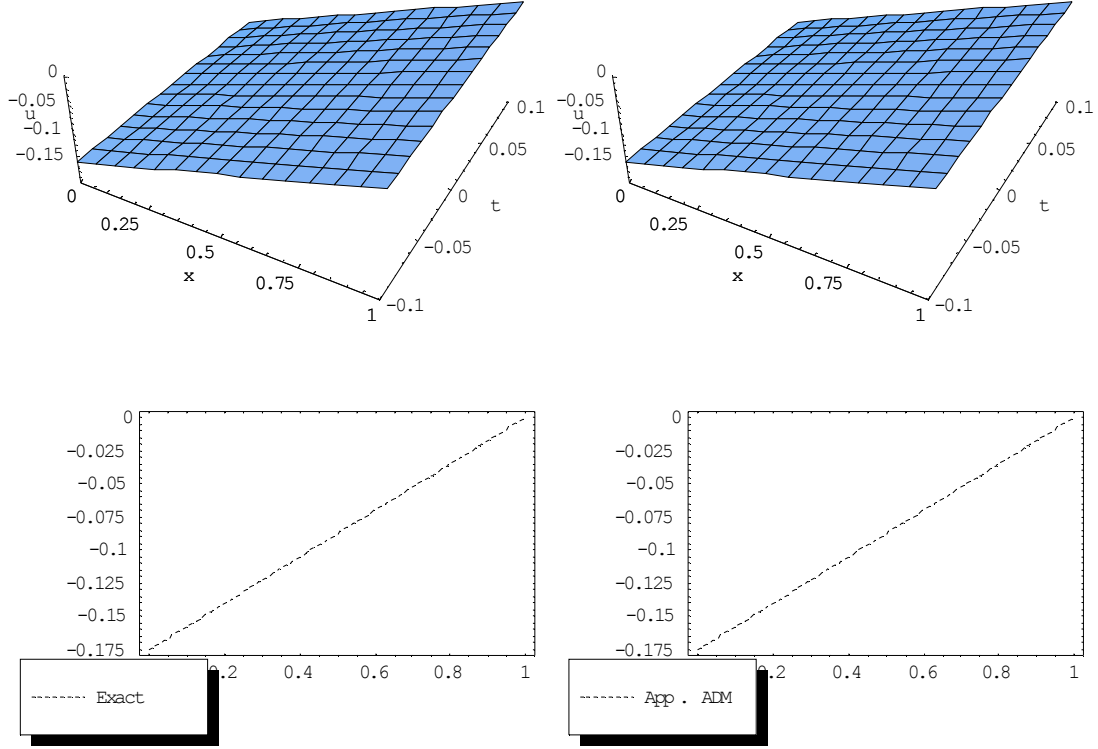
olarak elde edilir.

$$1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1-t}, \quad 0 < t < 1$$

olduğundan (3.1.1) denkleminin ADM ile çözümünün kapalı formu:

$$U(x,t) = \frac{1}{6} \left(\frac{x-1}{1-t} \right)$$

şeklinde olur.



3.3. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) alışılmamış etkileyici bir metottur ve çeşitli lineer olmayan denklemleri çözer. Özetle bu yeni metodun ana fikri, aşağıdaki lineer olmayan denklemin,

$$A(u) - f(r) = 0 \quad r \in \Omega \quad (3.3.1)$$

A nın genel diferansiyel operatörü olduğu, B nın sınır operatörü olduğu, $f(r)$ nin bilinmeyen analitik fonksiyon olduğu, Γ 'nın Ω tanım kümesinin sınırı olduğu

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (3.3.2)$$

sınır koşullarıyla göz önünde bulundururuz.

A operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir, L lineer iken N lineer değildir.

(3.3.1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0$$

(3.3.3)

Homotopi tekniğinden dolayı

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad (3.3.4a)$$

Bu denklemi düzenleyecek olursak

$$L(v) - L(u_0) - pL(v) + pL(u_0) + pA(v) - pf(r) = 0$$

$$\Rightarrow L(v) - L(u_0) - p[L(v) - L(u_0) + A(v) - f(r)] = 0$$

$$\Rightarrow L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v) + A(v) - f(r)] = 0$$

olup $A(u) - f(r) = 0$ olduğundan bunu yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v)] = 0$$

elde ederiz ve buradan

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0$$

$$\Rightarrow N(u) = -L(u) + f(r)$$

$$\Rightarrow L(u) = -N(u) + f(r)$$

bu son eşitliği yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$\Rightarrow L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[-N(v) + f(r)] = 0$$

böylece

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (3.3.4b)$$

(3.3.4a) denklemi yeniden elde edilir. Bu denklemleri sağlayan bir parametre olan $p \in (0, 1)$ ve genel sınır koşulunu sağlayan (3.3.1) denkleminin başlangıç yaklaşımı u_0 'ın olduğu

$v(r, p): \Omega \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ bir homotopi kurarız.

Açıkça, (3.3.4a) veya (3.3.4b) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (3.3.5)$$

ve

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (3.3.6)$$

denklemleri elde edilir.

Gayet açık ki $p = 0$ olduğunda (3.3.4) denklemi lineer bir denklem haline gelir; $p = 1$ olduğunda lineer olmayan orijinal bir denklem olur. Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi $L(v) - L(u_0) = 0$ denkleminin $A(v) - f(r)$ denklemine dönüşür. $L(v) - L(u_0) = 0$ aşıkâr problemi gibi 0'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi, sürekli olarak $A(v) - f(r) = 0$ problemine deforme olur.

Homotopi metodunun temel amacı zor problemi bu çalışmalar altında çözebilecek kolay probleme indirmektir.

HPM küçük bir parametre olan p parametresini kullanır. (3.1.4) denkleminin çözümü basit bir düşünceyle p nin bir kuvvet serisi gibi yazılır:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (3.3.7)$$

$p \rightarrow 1$ 'e giderken (3.3.1) denkleminin yaklaşım çözüm sonucu:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (3.3.8)$$

(3.3.7) serisi p nin tüm çözüm bölgesinde yakınsak olabilir. Pertürbasyon metodunun çift metodu ve homotopi metodu, homotopi pertürbasyon metodu (HPM) olarak adlandırılır[3].

Son zamanlarda HPM oldukça geliştirildi. Bu metod, geleneksel pertürbasyon metodunun sınırlandırmalarını kaldırır. Çeşitli pertürbasyon tekniklerinin tüm avantajlarını alarak geliştirildi.

3.4. Homotopi Pertürbasyon Metodunun Genel KdV Denklemine Uygulanması

Şimdi de (3.2.2)-(3.2.3) başlangıç koşulları ile verilen lineer olmayan (3.2.1) KdV denklemini HPM ile çözelim. Denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için :

$$A(v) = L(v) + N(v)$$

$L(v)$: denklemin lineer kısmı

$N(v)$: denklemin lineer olmayan kısmı

olmak üzere

$$(1-p) \left[\dot{Y} - \dot{U}_0 \right] + p \left[\dot{Y} - 6YY' + Y''' \right] = 0 \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} - \dot{U}_0 - p\dot{Y} + p\dot{U}_0 + p\dot{Y} - 6pYY' + pY''' &= 0 \\ \dot{Y} - \dot{U}_0 + p\dot{U}_0 - 6pYY' + pY''' &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

şeklinde bir homotopi kurulabilir. Burada:

$$Y''' = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}, \quad Y' = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \dot{Y} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

ve $p \in [0,1]$ olmak üzere,

$$U(x,0) = \frac{x-1}{6}$$

başlangıç şartı ile verilen (2.4.1) denkleminin çözümünü homotopi yapısı gereğince aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x,t) \quad (3.4.3)$$

toplamı şeklinde yazılabilir. Çünkü bu toplam terim diferensiyellenebilir dolayısı ile de sürekli'dir. Benzer şekilde:

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + \dots \quad (3.4.4)$$

$$Y' = Y'_0 + p Y'_1 + p^2 Y'_2 + p^3 Y'_3 + \dots \quad (3.4.5)$$

$$Y'' = Y''_0 + p Y''_1 + p^2 Y''_2 + p^3 Y''_3 + \dots \quad (3.4.6)$$

şeklinde ele alınabilir .(3.4.3)-(3.4.6) denklemlerinin (3.4.2) de yerine yazılmasıyla,

$$\left(\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + \dots \right) - \dot{U}_0 + p \dot{U}_0 - 6p \left(Y_0 + p Y_1 + p^2 Y_2 + p^3 Y_3 + \dots \right) \left(Y'_0 + p Y'_1 + p^2 Y'_2 + p^3 Y'_3 + \dots \right) + p \left(Y''_0 + p Y''_1 + p^2 Y''_2 + p^3 Y''_3 + \dots \right) = 0$$

$$\left(\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + \dots \right) - \dot{U}_0 + p \dot{U}_0 + \left(-6p Y_0 - 6p^2 Y_1 - 6p^3 Y_2 - 6p^4 Y_3 - \dots \right) \left(Y'_0 + p Y'_1 + p^2 Y'_2 + p^3 Y'_3 + \dots \right) + \left(p Y''_0 + p^2 Y''_1 + p^3 Y''_2 + p^4 Y''_3 + \dots \right) = 0$$

$$\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 - \dot{U}_0 + p \dot{U}_0 - 6p Y_0 Y'_0 - 6p^2 Y_0 Y'_1 - 6p^3 Y_0 Y'_2 - 6p^2 Y_1 Y'_0 - 6p^3 Y_1 Y'_1 - 6p^3 Y_2 Y'_0 + p Y''_0 + p^2 Y''_1 + p^3 Y''_2 = 0 \quad (3.4.7)$$

elde edilir. Bu denklem p nin aynı kuvvetli terimlerine göre düzenlenirse, her bir terim sıfıra eşit olur. Bunun sebebi ise denklemin sağ kısmının sıfır olmasıdır.

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{U}_0 = 0 \quad (3.4.8)$$

$$p^1 : \dot{Y}_0 + \dot{U}_0 - 6Y_0 Y'_0 + Y''_0 = 0 \quad (3.4.9)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 - 6Y_0 Y'_1 - 6Y_1 Y'_0 + Y''_1 = 0 \quad (3.4.10)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 - 6Y_0Y_2' - 6Y_1Y_1' - 6Y_2Y_0' + Y_2''' = 0$$

$$\vdots$$
(3.4.11)

bulunur. (3.4.8)-(3.4.11) denklemlerini sırasıyla çözecek olursak,

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{U}_0 = 0 \Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{U}_0$$

$$\Rightarrow Y_0 = U_0(x, 0) = \frac{x-1}{6}$$

$$\Rightarrow Y_0 = \frac{x-1}{6},$$
(3.4.12)

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{U}_0 - 6Y_0Y_0' + Y_0''' = 0 \Rightarrow Y_1 = -U_0 + 6Y_0Y_0' - Y_0''' \text{ ve } U_0 = 0$$

$$\Rightarrow Y_1 = \int_0^t [6Y_0Y_0' - Y_0'''] dt$$

$$\Rightarrow Y_1 = 6 \int_0^t \left(\frac{x-1}{6} \frac{6}{36} - 0 \right) dt$$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{1}{6}(x-1)t,$$
(3.4.13)

$$p^2 : \dot{Y}_2 - 6Y_0Y_1' - 6Y_1Y_0' + Y_1''' = 0 \Rightarrow Y_2 = 6Y_0Y_1' + 6Y_1Y_0' - Y_1'''$$

$$\Rightarrow Y_2 = \int_0^t [6Y_0Y_1' + 6Y_1Y_0' - Y_1'''] dt$$

$$\Rightarrow Y_2 = 6 \int_0^t \left(\frac{x-1}{6} \frac{t}{6} \right) dt + 6 \int_0^t \left(\frac{1}{6}(x-1)t \frac{6}{36} \right) dt - \int_0^t 0 dt$$

$$\Rightarrow Y_2 = \frac{1}{6}(x-1)t^2,$$
(3.4.14)

$$p^3 : \dot{Y}_3 - 6Y_0Y_2' - 6Y_1Y_1' - 6Y_2Y_0' + Y_2''' = 0 \Rightarrow Y_3 = 6Y_0Y_2' + 6Y_1Y_1' + 6Y_2Y_0' - Y_2'''$$

$$\Rightarrow Y_3 = \frac{1}{6}(x-1)t^3, \quad (3.4.15)$$

şeklinde serinin ilk üç terimi elde edilmiş olur. (3.4.12)-(3.4.15) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.4.3) de yerine yazılırsa (3.2.1) lineer olmayan KdV denkleminin HPM aracılığıyla yaklaşık çözümü;

$$U(x, t) = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots$$

$$U(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} (Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots)$$

$$U(x, t) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots$$

$$U(x, t) = \frac{x-1}{6} + \frac{1}{6}(x-1)t + \frac{1}{6}(x-1)t^2 + \frac{1}{6}(x-1)t^3 + \dots$$

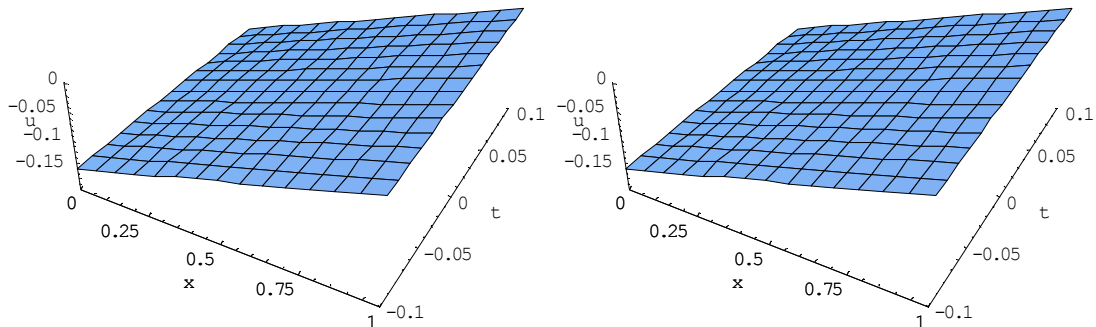
$$U(x, t) = \frac{x-1}{6} (1 + t + t^2 + t^3 + \dots)$$

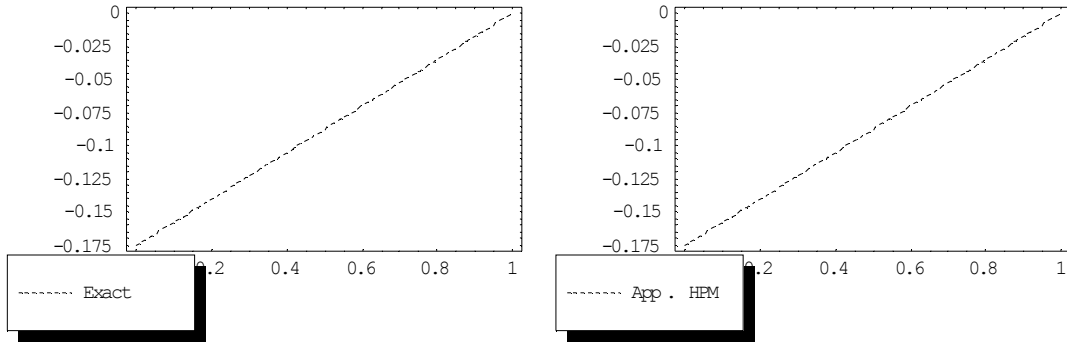
(3.4.16)

olarak elde edilir. (3.2.1) KdV denkleminin kapalı formu ise:

$$U(x, t) = \frac{1}{6} \left(\frac{x-1}{1-t} \right)$$

şeklindedir.





3.5. Homotopi Analiz Metodu (HAM)

İlk kez 1992 yılında Liao tarafından doktora tezi olarak sunulan, daha sonra 2003 yılında yine Liao tarafından bir kitap halinde literatüre kazandırılan homotopi analiz metodu pek çok lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denkleme başarılı bir şekilde uygulanabilmektedir. Homotopi analiz metodunun uygulanacağı problemin başlangıç fonksiyonu iyi seçilirse, çoğunda Taylor serisi yardımıyla çok iyi yaklaşımlar elde edilebilmektedir. Metodu açıklamak için

$$N[U(x, t)] = 0 \quad (3.5.1)$$

olacak şekilde lineer olamayan bir diferansiyel denklem alalım. Burada N hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan adi diferansiyel bir operatördür. x ve t bağımsız değişkenlerdir. $U(x, t)$ ise denklemin çözümüdür. Ayrıca

$$\lim_{p \rightarrow 0} \phi(x, t; p) = U_0(x, t) = U(x, 0) \quad (3.5.2)$$

şeklinde bir $\phi(x, t; p)$ fonksiyonu tanımlansın. $p \in [0, 1]$ ve $U_0(x, t)$ başlangıç veya sınır şartını sağlayan tahmini bir başlangıç fonksiyonu olur. Genel homotopi tekniğinden faydalanılarak,

$$\lim_{p \rightarrow 1} \phi(x, t; p) = U(x, t) \quad (3.5.3)$$

yazılırsa Liao'nun sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi olan

$$(1 - p)L[\phi(x, t; p) - U_0(x, t)] = hpH(x, t)N[\phi(x, t; p)] \quad (3.5.4)$$

elde edilmiş olur. Burada h yakınsaklık aralığını belirlemede kullanılan keyfi bir parametre, $H(x, t)$ keyfi bir fonksiyon, L lineer bir operatördür.

HAM' ı diğer metotlar arasında önemli kılan sebep, h parametresinin ve $H(x, t)$ fonksiyonunun keyfi bir şekilde seçilebiliyor olmasıdır.

$\phi(x, t; p)$ fonksiyonunun p ye göre Taylor seri açılımı,

$$\phi(x, t; p) = U_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x, t) p^m \quad (3.5.5)$$

olarak yazılır. Burada;

$$U_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^{m-1} \phi(x, t; p)}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} \quad (3.5.6)$$

yazılır. Eğer $p \rightarrow 1$ ise

$$U(x, t) = U_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x, t) \quad (3.5.7)$$

olarak yazılır. (3.1.4) ile verilen sıfırıncı dereceden deformasyon denklemi p ye göre m kez diferensiyellenir, $m!$ ile bölünür ve sonuçta $p = 0$ alınırsa

$$L[U_m(x, t) - X_m U_{m-1}(x, t)] = h H(x, t) R_m[U_{m-1}(x, t)] \quad (3.5.8)$$

olacak şekilde deformasyon denklemi yeniden yazılabilir. Burada

$$R_m(U_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, t; p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} \quad (3.5.9)$$

ve

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [21].

3.6. Homotopi Analiz Metodunun Genel KdV Denkleminin Uygulanması

Şimdi ise (3.2.2)-(3.2.3) başlangıç ve sınır şartları ile verilen (3.2.1) KdV denklemini HAM ile çözelim:

$$L[U_m(x, t) - X_m U_{m-1}(x, t)] = h H(x, t) R_m[U_{m-1}(x, t)] \quad , m \geq 1 \quad (3.6.1)$$

m. mertebeden deformasyon denklemini yeniden ele alalım. (3.6.1) denklemindeki $R_m[U_{m-1}(x, t)]$ ifadesi,

$$R_m[U_{m-1}(x, t)] = \frac{\partial U_{m-1}}{\partial t} - 6 \sum_{n=0}^{m-1} U_n(x, t) \frac{\partial [U_{m-1-n}(x, t)]}{\partial x} + \frac{\partial^3 U_{m-1}}{\partial x^3} \quad (3.6.2)$$

elde edilir. $m=1$, $H(x, t) = 1$ ve

$$\begin{aligned} L[U_1(x, t)] &= h R_1[U_0(x, t)] \\ &= h \left(\frac{\partial U_0}{\partial t} - 6 \sum_{n=0}^{m-1} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial^3 U_0}{\partial x^3} \right) \\ &= h \left(\frac{\partial U_0}{\partial t} - 6 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial^3 U_0}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

$$R_1[U_0(x, t)] = \frac{1 - x}{6}$$

olarak elde edilir. (3.6.1) denklemini yeniden düzenlenirse,

$$U_m(x, t) = X_m U_{m-1}(x, t) + h L^{-1} [R_m (U_{m-1}(x, t))] \quad (3.6.3)$$

buradan

$$U_0(x, t) = \frac{x - 1}{6}$$

olmak üzere (3.6.3) denklemini seriye açalım:

$m=1$ için,

$$\begin{aligned} U_1(x, t) &= X_1 U_0(x, t) + h L^{-1} [R_1 (U_0(x, t))] \\ &= \frac{1}{6} h t (1 - t) \end{aligned}$$

$m=2$ için,

$$\begin{aligned}
U_2(x, t) &= X_2 U_1(x, t) + h L^{-1}[R_2(U_1(x, t))] \\
&= \frac{1}{6} h(-1 + h(-1 + t)) t(-1 - x)
\end{aligned}$$

m=3 için,

$$\begin{aligned}
U_3(x, t) &= X_3 U_2(x, t) + h L^{-1}[R_3(U_2(x, t))] \\
&= -\frac{1}{6} h(-1 + h(-1 + t))^2 t(-1 + x)
\end{aligned}$$

benzer şekilde

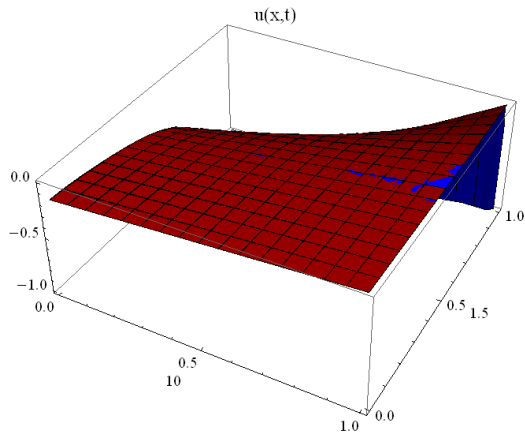
$$\begin{aligned}
U_4(x, t) &= \frac{1}{6} h(-1 + h(-1 + t))^3 t(-1 + x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olacak şekilde U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 terimleri elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de bulunabilir. Böylece,

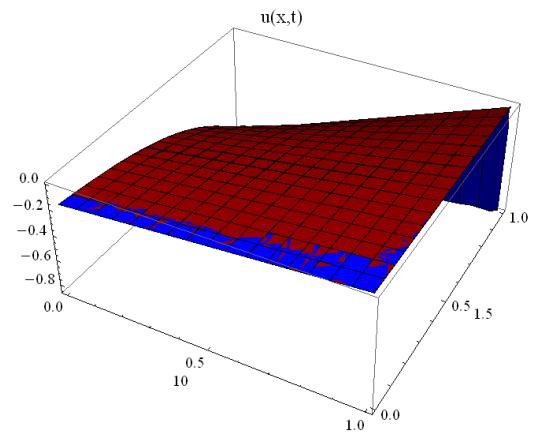
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^4 U_i(x, t) &= U_0(x, t) + U_1(x, t) + U_2(x, t) + U_3(x, t) + U_4(x, t) \\
&= \frac{x-1}{6} + \frac{1}{6} h t(1-t) + \frac{1}{6} h(-1 + h(-1 + t)) t(-1 - x) \\
&\quad + -\frac{1}{6} h(-1 + h(-1 + t))^2 t(-1 + x) \\
&\quad + \frac{1}{6} h(-1 + h(-1 + t))^3 t(-1 + x)
\end{aligned}$$

şeklindeki çözüm serisi bulunur. h ın hangi değerler için yaklaşık sonuç verdiğini çözüm serisinin dört terimini kullanarak aşağıdaki grafik yardımıyla hesaplayabiliriz.

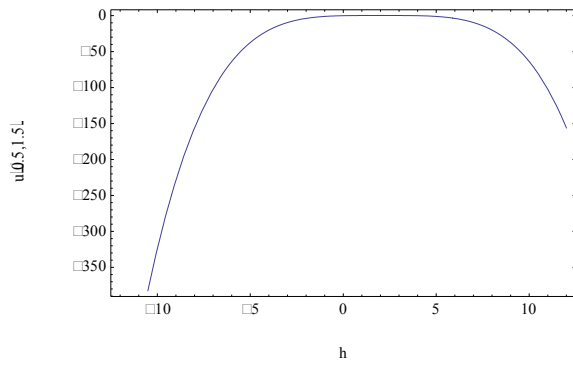
$h = -1$ için,



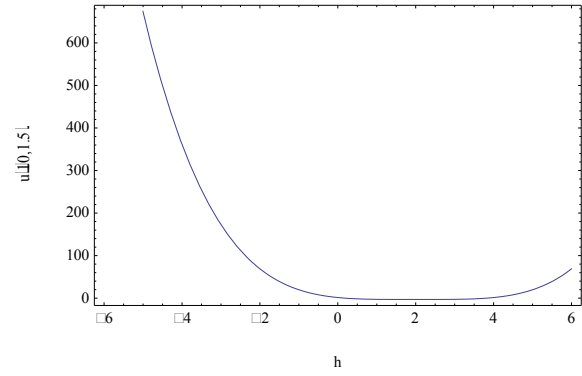
$h = -2$ için,



$x = 0,5$ için,



$x = 10$ için,



4. SONLU FARKLAR İLE FARK DENKLEMLERİNİN TANITILMASI VE STURM-LİOUVILLE PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Fonksiyonun analitik olarak verildiği durumlarda, istenilen noktadaki fonksiyon belirli noktalarında değerlerini hesaplamak, fonksiyonun istenilen mertebeden türevlerini bulmak ya da fonksiyonun belirli aralıklardaki integrallerini hesaplamak kolaylıkla yapılabilmektedir. Ancak, fonksiyonların bazı ayrık noktalardaki değerleri belli iken bu tür hesaplamalar sonlu farklar aritmetiği kullanılarak yaklaşık olarak yapılabilmektedir. Hatta, analitik çözümlerin belli olduğu durumlarda bile sonlu farklar kullanım kolaylığı açısından tercih edilmektedir.

Bu bölümde, fonksiyonun belli bir x_i noktasındaki değeri, gösterim kolaylığı bakımından $f(x_i)$ yerine f_i ile gösterilecektir.

4.1. İleri Farklar ve Δ Operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasında f_i , x_{i+h} noktasında f_{i+1} , ... ve x_{i+kh} noktasında ise f_{i+k} değerini aldığını varsayalım. Bu halde $f_{i+1} - f_i$ farkına f fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri farkı denir [22] ve

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad (4.1.1)$$

ile gösterilir. Daha açık olarak (4.1.1) formülü,

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde ikinci mertebeden ileri fark tanımı yapılabilir.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x + h) - f(x)] = \Delta f(x + h) - \Delta f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x + 2h) - f(x + h) - f(x + h) + f(x)$$

veya

$$\Delta^2 f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)$$

elde edilir. Bu sonuç kısaltılmış biçimde

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad (4.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı şekilde üçüncü mertebeden ileri fark,

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \quad (4.1.3)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Şimdi de fonksiyonun birinci mertebeden türevinin, ileri farklar yardımıyla nasıl hesaplanacağını görelim:

$f(x)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımını göz önüne alırsak;

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!} f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

yazılabilir ve böylece

$$f_{i+1} - f_i = h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

elde edilmiş olur. Buradaki h değerinin çok küçük olması durumunda h^2 li ve daha sonraki terimler ihmal edilerek,

$$f'_i \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{1}{h} \Delta f_i \quad (4.1.4)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$f_{i+2} = f_i + \frac{2h}{1!} f'_i + \frac{4h^2}{2!} f''_i + \dots$$

$$2f_{i+1} = 2f_i + \frac{2h}{1!} f'_i + \frac{2h^2}{2!} f''_i + \dots$$

taraf tarafa çıkartılarak,

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i = h^2 f''_i + \dots$$

elde edilebilir. Bu kısımdaki h^3 ve sonraki terimlerin ihmal edilmesiyle

$$f''_i \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad (4.1.5)$$

Bulunur ki bu yolla daha yüksek mertebeden türevler hesaplanmaya devam edilebilir.

4.2. Sturm-Liouville Probleminin İleri Fark Metodu İle Yaklaşık Çözümünün Bulunması

$y'' - y = 0$ ve $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşullarıyla verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemi $h=0,25$ aralığında alarak yaklaşık çözümlerini ileri fark metodu ile bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}$$

$$y'' = y$$

$$y_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}$$

$$h^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$(1 - h^2)y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} = 0$$

$i=0,1,2,\dots$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)y_0 - 2y_1 + y_2 = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)y_2 - 2y_3 + y_4 = 0$$

$y_0 = 0$ ve $y_4 = 1$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{15}{16} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{15}{16} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan da katsayılar matrisinin determinanı:

$$\Delta = 0 + (-1) \cdot 1 \cdot \left(\frac{-30}{16} - 0\right) + (-2) \left(4 - \frac{15}{16}\right)$$

$$\Delta = -4,25$$

elde edilir.

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & \frac{15}{16} & -2 \end{vmatrix}}{-4,25}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ \frac{15}{16} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-4,25}, \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{15}{16} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{15}{16} & -1 \end{vmatrix}}{-4,25}$$

şeklinde hesaplanabilir ki buradan da

$$y_1 = 0,235294$$

$$y_2 = 0,470588$$

$$y_3 = 0,720588$$

olarak elde edilir.

4.3. Geri Farklar ve ∇ Operatörü

İleri fark metoduna benzer olarak f fonksiyonunun x_i noktasındaki geri farkı

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \tag{4.3.1}$$

şeklinde gösterilir.(3.3.1) ifadesi daha açık olarak,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$$

dir. $f(x)$ in yüksek mertebeden geri farkları da benzer şekilde tanımlanabilir [22].

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i \tag{4.3.2}$$

$$\nabla^3 f_i = -f_{i-3} + 3f_{i-2} - 3f_{i-1} + f_i \tag{4.3.3}$$

Şimdi de geri farklar ile fonksiyonun türevleri arasındaki ilişkileri elde etmeye çalışalım:

$$f_{i-1} = f_i - \frac{h}{1!} f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i - \dots$$

ve buradan da

$$f_i - f_{i-1} = h f'_i - \frac{h^2}{2} f''_i + \dots$$

yazılabilir. Yine h^2 'li terimler ihmal edilerek

$$f'_i \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{1}{h} \nabla f_i \quad (4.3.4)$$

bulunur. İleri fark operatörüne benzer işlemler yapılarak,

$$f''_i \cong \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} = \frac{\nabla^2 f_i}{h^2} \quad (4.3.5)$$

elde edilir.

4.4. Sturm-Liouville Probleminin Geri Fark Metodu İle Yaklaşık Çözümünün Bulunması

$y'' - y = 0$ ve $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşullarıyla verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemi $h=0,25$ aralığında alarak yaklaşık çözümlerini geri fark metodu ile bulalım:

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2}$$

$$y'' = y$$

$$y_i = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2}$$

$$h^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

$$(1 - h^2)y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} = 0$$

$i=2,3,4,\dots$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)y_2 - 2y_1 + y_0 = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)y_3 - 2y_2 + y_1 = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)y_4 - 2y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$ ve $y_4 = 1$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{15}{16} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{15}{16} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{15}{16} \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan da katsayılar matrisinin determinanı:

$$\Delta = 0 + (-1) \cdot \frac{15}{16} \cdot (-2) + (-2) \left(4 - \frac{15}{16}\right)$$

$$\Delta = -4,25$$

elde edilir.

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{15}{16} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{15}{16} \\ -\frac{15}{16} & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-4,25}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{15}{16} \\ 0 & -\frac{15}{16} & -2 \end{vmatrix}}{-4,25}, \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & \frac{15}{16} & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{16} \end{vmatrix}}{-4,25}$$

şeklinde hesaplanabilir ki buradan da

$$y_1 = 0,193876$$

$$y_2 = 0,413603$$

$$y_3 = 0,675552$$

olarak elde edilir.

4.5. Merkezi Farklar ve δ Operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunda, bağımsız değişkenin yarım adım ilerisindeki değer ile, yarım adım gerisindeki değer arasındaki fark, merkezi fark olarak bilinir [22] ve

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (4.5.1)$$

şeklinde ya da kısaca

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \quad (4.5.2)$$

biçiminde gösterilir. İkinci mertebeden merkezi fark ise yine tanımdan ,

$$\delta^2 f_i = \delta\left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}\right) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad (4.5.3)$$

şeklinde elde edilir.

4.6. Sturm-Liouville Probleminin Merkezi Fark Metodu İle Yaklaşık Çözümünün Bulunması

$y'' - y = 0$ ve $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşullarıyla verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemi $h=0,25$ aralığında alarak yaklaşık çözümlerini merkezi fark metodu ile bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' = y$$

$$y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$h^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

$$y_{i+1} - (2 + h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i=1,2,3,\dots$

$$y_2 - \left(2 + \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + \frac{1}{16}\right)y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + \frac{1}{16}\right)y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$ ve $y_4 = 1$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} -\frac{33}{16} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{33}{16} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{33}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan da katsayılar matrisinin determinanı:

$$\Delta = 0 + (-1) \cdot 1 \cdot \left(-\frac{33}{16}\right) + \left(-\frac{33}{16}\right) \left(\frac{33}{16} \frac{33}{16} - 1\right)$$

$$\Delta = -4,648681$$

elde edilir.

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{33}{16} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{33}{16} \end{vmatrix}}{-4,648681}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{33}{16} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{33}{16} \end{vmatrix}}{-4,648681}, \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{33}{16} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{33}{16} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,648681}$$

şeklinde hesaplanabilir ki buradan da

$$y_1 = 0,215115$$

$$y_2 = 0,443674$$

$$y_3 = 0,699963$$

olarak elde edilir.

4.7. Analitik Çözümün Bulunması

$y'' - y = 0$ ve $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır değer şartlarıyla verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemin $h=0,25$ aralığındaki analitik çözümlerini bulalım:

Denklem sabit katsayılı lineer bir denklemdir. Buradan yola çıkarsak, ikinci mertebeden diferansiyel denklemimizin karakteristik denklemi:

$$\varphi(k) = k^2 - 1 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1$$

kökleri elde edilir.

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$$

çözümünde sınır şartları yerine koyulursa,

$$y(x) = c_1 \cdot e^0 + c_2 e^0 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = -c_1$$

bulunur.

$$y(1) = c_1 \cdot e^1 + c_2 \cdot e^{-1} = 1$$

$$c_1 e + \frac{c_2}{e} = 1$$

$$c_1 e - \frac{c_1}{e} = 1$$

$$c_1 = \frac{e}{e^2-1}, \quad c_2 = \frac{e}{1-e^2}$$

$$y(x) = \frac{e}{e^2-1} \cdot e^x + \frac{e}{1-e^2} \cdot e^{-x}$$

bulunur. Buradan,

$$y(0,25) = y_1 = 0,214952$$

$$y(0,5) = y_2 = 0,443409$$

$$y(0,75) = y_3 = 0,699724$$

elde edilir.

4.8. İleri Fark, Geri Fark ve Merkezi Fark Metotlarının Sayısal Sonuçlarının Karşılaştırılması

İleri fark metodu için:

$$y_1 = 0,235294$$

$$y_2 = 0,470588$$

$$y_3 = 0,720588$$

bulunmuştu. Analitik çözümdeki

$$y(0,25) = y_1 = 0,214952$$

$$y(0,5) = y_2 = 0,443409$$

$$y(0,75) = y_3 = 0,699724$$

sonuçlarıyla arasındaki fark bize hatayı vereceğinden ileri fark metodunda;

$$y_1 \text{ için hata; } 0,235294 - 0,214952 = 0,020342$$

$$y_2 \text{ için hata; } 0,470588 - 0,443409 = 0,027179$$

$$y_3 \text{ için hata; } 0,720588 - 0,699724 = 0,020864$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde geri fark metodunda oluşan hata;

$$y_1 \text{ için hata; } 0,214952 - 0,193876 = 0,021076$$

$$y_2 \text{ için hata; } 0,443409 - 0,413603 = 0,029806$$

$$y_3 \text{ için hata; } 0,699724 - 0,675552 = 0,024172$$

olarak bulunur. Son olarak merkezi fark metodunda oluşan hatayı inceleyecek olursak;

$$y_1 \text{ için hata; } 0,215115 - 0,214952 = 0,000163$$

$$y_2 \text{ için hata; } 0,443674 - 0,443409 = 0,000265$$

$$y_3 \text{ için hata; } 0,699963 - 0,699724 = 0,000239$$

sonuçlarını buluruz ki buradan da anlaşıldığı gibi hata payı en düşük ve hassasiyeti en yüksek metod merkezi fark metodudur.

5. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN FARKLI POTANSİYELLER VE ÖZDEĞERLER İÇİN MERKEZİ FARK METODU İLE ÇÖZÜMÜ

5.1. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Sturm-Liouville Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü

$q(x) = x$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - xy = \lambda y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{2}y = y$$

$$y'' = \frac{3}{2}y$$

$$\frac{3}{2}y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + \frac{3}{2}h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + \frac{3}{2} \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + \frac{3}{2} \frac{1}{16}\right)y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + \frac{3}{2} \frac{1}{16}\right)y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-\frac{67}{32}y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - \frac{67}{32}y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - \frac{67}{32}y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-67}{32} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-67}{32} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-67}{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot \left(\frac{-67}{32}\right) + \left(\frac{-67}{32}\right) \left[\frac{-67}{32} \left(\frac{-67}{32}\right) - 1\right]$$

$$\Delta = -4,991058$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-67}{32} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{-67}{32} \end{vmatrix}}{-4,991058} = \frac{-1}{-4,991058} = 0,200358$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-67}{32} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{-67}{32} \end{vmatrix}}{-4,991058} = \frac{(-1)(-1)\left(\frac{-67}{32}\right)}{-4,991058} = 0,419500$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-67}{32} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-67}{32} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,991058} = \frac{(-1)\left[\left(\frac{-67}{32}\right)\left(\frac{-67}{32}\right) - 1\right]}{-4,991058} = 0,677970$$

elde edilir.

$q(x) = x^2$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - x^2 y = \lambda y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{4}y = y$$

$$y'' = \frac{5}{4}y$$

$$\frac{5}{4}y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + \frac{5}{4}h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + \frac{5}{4} \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + \frac{5}{4} \frac{1}{16}\right)y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + \frac{5}{4} \frac{1}{16}\right)y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-\frac{133}{64}y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - \frac{133}{64}y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - \frac{133}{64}y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-133}{64} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-133}{64} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-133}{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot \left(\frac{-133}{64} \right) + \left(\frac{-133}{64} \right) \left[\frac{-133}{64} \left(\frac{-133}{64} \right) - 1 \right]$$

$$\Delta = -4,818347$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-133}{64} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{-133}{64} \end{vmatrix}}{-4,818347} = \frac{-1}{-4,818347} = 0,207540$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-67}{32} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{-67}{32} \end{vmatrix}}{-4,818347} = \frac{(-1)(-1)\left(\frac{-133}{64}\right)}{-4,818347} = 0,431294$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-133}{64} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-133}{64} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,818347} = \frac{(-1)\left[\left(\frac{-133}{64}\right)\left(\frac{-133}{64}\right)-1\right]}{-4,818347} = 0,688743$$

elde edilir.

$q(x) = x^3$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - x^3 y = \lambda y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{8}y = y$$

$$y'' = \frac{9}{8}y$$

$$\frac{9}{8}y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + \frac{9}{8}h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + \frac{9}{8} \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + \frac{9}{8} \frac{1}{16}\right)y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + \frac{9}{8} \frac{1}{16}\right)y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-\frac{265}{128}y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - \frac{265}{128}y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - \frac{265}{128} y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-265}{128} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-265}{128} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-265}{128} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot \left(\frac{-265}{128} \right) + \left(\frac{-265}{128} \right) \left[\frac{-265}{128} \left(\frac{-265}{128} \right) - 1 \right]$$

$$\Delta = -4,733135$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-265}{128} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{-265}{128} \end{vmatrix}}{-4,733135} = \frac{-1}{-4,733135} = 0,211276$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-265}{128} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{-265}{128} \end{vmatrix}}{-4,733135} = \frac{(-1)(-1)\left(\frac{-265}{128}\right)}{-4,733135} = 0,437408$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-265}{128} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-265}{128} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,733135} = \frac{(-1)\left[\left(\frac{-265}{128}\right)\left(\frac{-265}{128}\right) - 1\right]}{-4,733135} = 0,694296$$

elde edilir.

$q(x) = x^4$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - x^4 y = \lambda y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{16}y = y$$

$$y'' = \frac{17}{16}y$$

$$\frac{17}{16}y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + \frac{17}{16}h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + \frac{17}{16} \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + \frac{17}{16} \frac{1}{16}\right)y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + \frac{17}{16} \frac{1}{16}\right)y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-\frac{529}{256}y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - \frac{529}{156}y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - \frac{529}{256}y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-529}{256} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-529}{256} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-529}{256} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot \left(\frac{-529}{256} \right) + \left(\frac{-529}{256} \right) \left[\frac{-529}{256} \left(\frac{-529}{256} \right) - 1 \right]$$

$$\Delta = -4,690812$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-529}{256} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{-529}{256} \end{vmatrix}}{-4,690812} = \frac{-1}{-4,690812} = 0,213182$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-529}{256} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{-529}{256} \end{vmatrix}}{-4,690812} = \frac{(-1)(-1)\left(\frac{-529}{256}\right)}{-4,690812} = 0,440522$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-529}{256} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-529}{256} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,690812} = \frac{(-1)\left[\left(\frac{-529}{256}\right)\left(\frac{-529}{256}\right) - 1\right]}{-4,690812} = 0,697114$$

elde edilir.

5.2. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması

$$|x - x^2| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} = \frac{4}{16} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ ler farkı } |0,200358 - 0,207540| = 0,007182$$

$$y_2 \text{ ler farkı } |0,419500 - 0,431294| = 0,011794$$

$$y_3 \text{ ler farkı } |0,677970 - 0,688743| = 0,010773$$

$$|x - x^3| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right| = \frac{3}{8} = \frac{6}{16} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ler farkı } |0,200358 - 0,211276| = 0,010918$$

$$y_2 \text{ler farkı } |0,419500 - 0,437408| = 0,01790$$

$$y_3 \text{ler farkı } |0,677970 - 0,694295| = 0,016325$$

$$|x - x^4| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right| = \frac{7}{16} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ler farkı } |0,200358 - 0,213182| = 0,012824$$

$$y_2 \text{ler farkı } |0,419500 - 0,440522| = 0,021022$$

$$y_3 \text{ler farkı } |0,677970 - 0,697114| = 0,010144$$

olarak bulunmaktadır. Buradan da anlaşılacağı gibi $q(x)$ potansiyelleri arasındaki fark arttıkça, bu potansiyellere karşılık gelen fonksiyonların yani y değerlerinin arasındaki fark da artmaktadır.

5.3. Farklı λ Özdeğerleri İçin Sturm-Liouville Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü

$\lambda = 1$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - xy = \lambda y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{2}y = y$$

$$y'' = \frac{3}{2}y$$

$$\frac{3}{2}y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + \frac{3}{2}h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + \frac{3}{2} \frac{1}{16}\right) y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + \frac{3}{2} \frac{1}{16}\right) y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + \frac{3}{2} \frac{1}{16}\right) y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-\frac{67}{32} y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - \frac{67}{32} y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - \frac{67}{32} y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{67}{32} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{67}{32} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{67}{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot \left(\frac{-67}{32}\right) + \left(\frac{-67}{32}\right) \left[\frac{-67}{32} \left(\frac{-67}{32}\right) - 1\right]$$

$$\Delta = -4,991058$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{67}{32} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{67}{32} \end{vmatrix}}{-4,991058} = \frac{-1}{-4,991058} = 0,200358$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-67}{32} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{-67}{32} \end{vmatrix}}{-4,991058} = \frac{(-1)(-1)\left(\frac{-67}{32}\right)}{-4,991058} = 0,419500$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-67}{32} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-67}{32} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,991058} = \frac{(-1)\left[\left(\frac{-67}{32}\right)\left(\frac{-67}{32}\right)-1\right]}{-4,991058} = 0,677970$$

elde edilir.

$\lambda = 1,03$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - xy = \lambda y$, $\lambda=1,03$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{2}y = 1,03y$$

$$y'' = 1,53y$$

$$1,53y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + 1,53h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + 1,53 \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + 1,53 \frac{1}{16}\right) y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + 1,53 \frac{1}{16}\right) y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,095625y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,095625y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,095625y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,095625 & 1 & 0 \\ 1 & -2,095625 & 1 \\ 0 & 1 & -2,095625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,095625) + (-2,095625)[(-2,095625)(-2,095625) - 1]$$

$$\Delta = -5,011989$$

olarak bulunur.

Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,095625 & 1 \\ -1 & 1 & -2,095625 \end{vmatrix}}{-5,011989} = \frac{-1}{-5,011989} = 0,199522$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,095625 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,095625 \end{vmatrix}}{-5,011989} = \frac{(-1)(-1)(-2,095625)}{-5,011989} = 0,418122$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,095625 & 1 & 0 \\ 1 & -2,095625 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5,011989} = \frac{(-1)[(-2,095625)(-2,095625)-1]}{-5,011989} = 0,676706$$

elde edilir

$\lambda = 1,06$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - xy = \lambda y$, $\lambda=1,06$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{2}y = 1,06y$$

$$y'' = 1,56y$$

$$1,56y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + 1,56h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + 1,56 \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + 1,56 \frac{1}{16}\right)y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + 1,56 \frac{1}{16}\right)y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,097500 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,097500y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,097500y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,097500 & 1 & 0 \\ 1 & -2,097500 & 1 \\ 0 & 1 & -2,097500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,097500) + (-2,097500)[(-2,097500)(-2,097500) - 1]$$

$$\Delta = -5,032964$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,097500 & 1 \\ -1 & 1 & -2,097500 \end{vmatrix}}{-5,032964} = \frac{-1}{-5,032964} = 0,198690$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,097500 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,097500 \end{vmatrix}}{-5,032964} = \frac{(-1)(-1)(-2,097500)}{-5,032964} = 0,416752$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,097500 & 1 & 0 \\ 1 & -2,097500 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5,032964} = \frac{(-1)[(-2,097500)(-2,097500) - 1]}{-5,032964} = 0,675448$$

elde edilir.

$\lambda = 1,09$ İçin Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$y'' - xy = \lambda y$, $\lambda=1,09$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$y'' - \frac{1}{2}y = 1,09y$$

$$y'' = 1,59y$$

$$1,569 = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - (2 + 1,59h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - \left(2 + 1,59 \frac{1}{16}\right)y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - \left(2 + 1,59 \frac{1}{16}\right)y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - \left(2 + 1,59 \frac{1}{16}\right)y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,099375 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,099375y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,099375y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,099375 & 1 & 0 \\ 1 & -2,099375 & 1 \\ 0 & 1 & -2,099375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,099375) + (-2,099375)[(-2,099375)(-2,099375) - 1]$$

$$\Delta = -5,053983$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,099375 & 1 \\ -1 & 1 & -2,099375 \end{vmatrix}}{-5,053983} = \frac{-1}{-5,053983} = 0,197864$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,099375 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,099375 \end{vmatrix}}{-5,053983} = \frac{(-1)(-1)(-2,099375)}{-5,053983} = 0,415390$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,099375 & 1 & 0 \\ 1 & -2,099375 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5,053983} = \frac{(-1)[(-2,099375)(-2,099375)-1]}{-5,053983} = 0,674196$$

elde edilir.

5.4. Farklı λ Özdeğerleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması

$$|1 - 1,03| = 0,03 \text{ için } y_1 \text{ ler farkı } |0,200358 - 0,199522| = 0,000836$$

$$y_2 \text{ ler farkı } |0,419500 - 0,418122| = 0,001378$$

$$y_3 \text{ ler farkı } |0,677970 - 0,676706| = 0,001264$$

$$|1 - 1,06| = 0,06 \text{ için } y_1 \text{ ler farkı } |0,200358 - 0,198690| = 0,001668$$

$$y_2 \text{ ler farkı } |0,419500 - 0,416752| = 0,002748$$

$$y_3 \text{ ler farkı } |0,677970 - 0,675448| = 0,002522$$

$$|1 - 1,09| = 0,09 \text{ için } y_1 \text{ ler farkı } |0,200358 - 0,197864| = 0,002494$$

$$y_2 \text{ ler farkı } |0,419500 - 0,415390| = 0,004110$$

$$y_3 \text{ ler farkı } |0,677970 - 0,674196| = 0,003774$$

olarak bulunmaktadır. Buradan da anlaşılacağı gibi λ özdeğerleri arasındaki fark arttıkça, bu değerlere karşılık gelen fonksiyonların yani y değerlerinin arasındaki fark da artmaktadır.

6. DİFÜZYON PROBLEMİNİN FARKLI POTANSİYELLER VE ÖZDEĞERLER İÇİN MERKEZİ FARK METODU İLE ÇÖZÜMÜ

6.1. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Difüzyon Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü

$q(x) = x$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right]y = y$$

$$y'' = 0,914214y$$

$$0,914214y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,057138y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - 2,057138y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,057138y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,057138y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,057138y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,057138y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,057138y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,057138 & 1 & 0 \\ 1 & -2,057138 & 1 \\ 0 & 1 & -2,057138 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,057138) + (-2,057138)[-2,057138(-2,057138) - 1]$$

$$\Delta = -4,591156$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,057138 & 1 \\ -1 & 1 & -2,057138 \end{vmatrix}}{-4,591156} = \frac{-1}{-4,591156} = 0,217810$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,057138 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,057138 \end{vmatrix}}{-4,591156} = \frac{(-1)(-1)(-2,057138)}{-4,591156} = 0,448065$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,057138 & 1 & 0 \\ 1 & -2,057138 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,591156} = \frac{(-1)[(-2,057138)(-2,057138)-1]}{-4,591156} = 0,703922$$

elde edilir.

$q(x) = x^2$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x^2]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \right] y = y$$

$$y'' = 0,664214y$$

$$0,664214y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,041513y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - 2,041513y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,041513y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,041513y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,041513y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,041513y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,041513y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,041513 & 1 & 0 \\ 1 & -2,041513 & 1 \\ 0 & 1 & -2,041513 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,041513) + (-2,041513)[(-2,041513)(-2,041513) - 1]$$

$$\Delta = -4,425541$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,041513 & 1 \\ -1 & 1 & -2,041513 \end{vmatrix}}{-4,425541} = \frac{-1}{-4,425541} = 0,225961$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,041513 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,041513 \end{vmatrix}}{-4,425541} = \frac{(-1)(-1)(-2,041513)}{-4,425541} = 0,461302$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,041513 & 1 & 0 \\ 1 & -2,041513 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,425541} = \frac{(-1)[(-2,041513)(-2,041513)-1]}{-4,425541} = 0,715794$$

elde edilir.

$q(x) = x^3$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x^3]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\right]y = y$$

$$y'' = 0,539214y$$

$$0,539214y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,033701y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - 2,033701y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,033701y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,033701y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,033701y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,033701y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,033701y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,033701 & 1 & 0 \\ 1 & -2,033701 & 1 \\ 0 & 1 & -2,033701 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,033701) + (-2,033701)[(-2,033701)(-2,033701) - 1]$$

$$\Delta = -4,343863$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,033701 & 1 \\ -1 & 1 & -2,033701 \end{vmatrix}}{-4,343863} = \frac{-1}{-4,343863} = 0,230210$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,033701 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,033701 \end{vmatrix}}{-4,343863} = \frac{(-1)(-1)(-2,033701)}{-4,343863} = 0,468178$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,033701 & 1 & 0 \\ 1 & -2,033701 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,343863} = \frac{(-1)[(-2,033701)(-2,033701)-1]}{-4,343863} = 0,721924$$

elde edilir.

$q(x) = x^4$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x^4]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}\right]y = y$$

$$y'' = 0,476714y$$

$$0,476714y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,029795y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - 2,029795y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,029795y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,029795y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,029795y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,029795y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,029795y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,029795 & 1 & 0 \\ 1 & -2,029795 & 1 \\ 0 & 1 & -2,029795 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,029795) + (-2,029795)[(-2,029795)(-2,029795) - 1]$$

$$\Delta = -4,303303$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,029795 & 1 \\ -1 & 1 & -2,029795 \end{vmatrix}}{-4,303303} = \frac{-1}{-4,303303} = 0,232380$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,029795 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,029795 \end{vmatrix}}{-4,303303} = \frac{(-1)(-1)(-2,029795)}{-4,303303} = 0,471683$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,029795 & 1 & 0 \\ 1 & -2,029795 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,303303} = \frac{(-1)[(-2,029795)(-2,029795) - 1]}{-4,303303} = 0,724998$$

elde edilir.

$q(x) = x^5$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x^5]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon denkleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{32}\right]y = y$$

$$y'' = 0,445464y$$

$$0,445464y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,027842 + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - 2,027842y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,027842y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,027842y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,027842y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,027842y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,027842y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,027842 & 1 & 0 \\ 1 & -2,027842 & 1 \\ 0 & 1 & -2,027842 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,027842) + (-2,027842)[(-2,027842)(-2,027842) - 1]$$

$$\Delta = -4,283092$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,027842 & 1 \\ -1 & 1 & -2,027842 \end{vmatrix}}{-4,283092} = \frac{-1}{-4,283092} = 0,233476$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,027842 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,027842 \end{vmatrix}}{-4,283092} = \frac{(-1)(-1)(-2,027842)}{-4,283092} = 0,473453$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,027842 & 1 & 0 \\ 1 & -2,027842 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,283092} = \frac{(-1)[(-2,027842)(-2,027842)-1]}{-4,283092} = 0,726611$$

elde edilir.

$q(x) = x^6$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x^6]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64} \right] y = y$$

$$y'' = 0,429838y$$

$$0,429838y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,026864 + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - 2,026864y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,026864y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,026864y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,026864y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,026864y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,026864y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,026864 & 1 & 0 \\ 1 & -2,026864 & 1 \\ 0 & 1 & -2,026864 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,026864) + (-2,026864)[(-2,026864)(-2,026864) - 1]$$

$$\Delta = -4,272989$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,026864 & 1 \\ -1 & 1 & -2,026864 \end{vmatrix}}{-4,272989} = \frac{-1}{-4,272989} = 0,234028$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,026864 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,026864 \end{vmatrix}}{-4,272989} = \frac{(-1)(-1)(-2,026864)}{-4,272989} = 0,474343$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,026864 & 1 & 0 \\ 1 & -2,026864 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,272989} = \frac{(-1)[(-2,026864)(-2,026864)-1]}{-4,272989} = 0,727401$$

elde edilir.

6.2. Farklı $q(x)$ Potansiyelleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması

$$|x - x^2| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} = \frac{16}{64} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ler farkı } |0,217810 - 0,225961| = 0,008151$$

$$y_2 \text{ler farkı } |0,448065 - 0,461302| = 0,013237$$

$$y_3 \text{ler farkı } |0,703922 - 0,715794| = 0,011872$$

$$|x - x^3| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right| = \frac{3}{8} = \frac{24}{64} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ler farkı } |0,217810 - 0,230210| = 0,012400$$

$$y_2 \text{ler farkı } |0,448065 - 0,468178| = 0,020113$$

$$y_3 \text{ler farkı } |0,703922 - 0,721924| = 0,018002$$

$$|x - x^4| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right| = \frac{28}{64} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ler farkı } |0,217810 - 0,232380| = 0,014570$$

$$y_2 \text{ler farkı } |0,448065 - 0,471683| = 0,023618$$

$$y_3 \text{ler farkı } |0,703922 - 0,724998| = 0,021076$$

$$|x - x^5| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right| = \frac{30}{64} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ler farkı } |0,217810 - 0,233476| = 0,015666$$

$$y_2 \text{ler farkı } |0,448065 - 0,473453| = 0,025388$$

$$y_3 \text{ler farkı } |0,703922 - 0,726611| = 0,022689$$

$$|x - x^6| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{64} \right| = \frac{31}{64} \quad \text{için} \quad y_1 \text{ler farkı } |0,217810 - 0,234028| = 0,016218$$

$$y_2 \text{ler farkı } |0,448065 - 0,474343| = 0,026278$$

$$y_3 \text{ler farkı } |0,703922 - 0,727401| = 0,023481$$

olarak bulunmaktadır. Buradan da anlaşılacağı gibi $q(x)$ potansiyelleri arasındaki fark arttıkça, bu potansiyellere karşılık gelen fonksiyonların yani y değerlerinin arasındaki fark da artmaktadır.

6.3. Farklı λ Özdeğerleri İçin Difüzyon Probleminin Merkezi Fark Metoduyla Çözümü

$\lambda = 1$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right] y = y$$

$$y'' = 0,914214y$$

$$0,914214y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,057138y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - 2,057138y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,057138y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,057138y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,057138 y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,057138y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,057138y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,057138 & 1 & 0 \\ 1 & -2,057138 & 1 \\ 0 & 1 & -2,057138 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,057138) + (-2,057138)[-2,057138(-2,057138) - 1]$$

$$\Delta = -4,591156$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,057138 & 1 \\ -1 & 1 & -2,057138 \end{vmatrix}}{-4,591156} = \frac{-1}{-4,591156} = 0,217810$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,057138 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,057138 \end{vmatrix}}{-4,591156} = \frac{(-1)(-1)(-2,057138)}{-4,591156} = 0,448065$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,057138 & 1 & 0 \\ 1 & -2,057138 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,591156} = \frac{(-1)[(-2,057138)(-2,057138)-1]}{-4,591156} = 0,703922$$

elde edilir.

$\lambda = 1,03$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1,03$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2(1,03)\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right] y = (1,03)^2 y$$

$$y'' = 0,469100y$$

$$0,469100y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,029319y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1,2,3, \dots$ için

$$y_2 - 2,029319 y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,029319 y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,029319 y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,029319 y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,029319 y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,029319 y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,029319 & 1 & 0 \\ 1 & -2,029319 & 1 \\ 0 & 1 & -2,029319 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,029319) + (-2,029319) [(-2,029319)(-2,029319) - 1]$$

$$\Delta = -4,298374$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,029319 & 1 \\ -1 & 1 & -2,029319 \end{vmatrix}}{-4,298374} = \frac{-1}{-4,298374} = 0,232646$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,029319 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,029319 \end{vmatrix}}{-4,298374} = \frac{(-1)(-1)(-2,029319)}{-4,298374} = 0,472113$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,029319 & 1 & 0 \\ 1 & -2,029319 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,298374} = \frac{(-1)[(-2,029319)(-2,029319)-1]}{-4,298374} = 0,725422$$

elde edilir.

$\lambda = 1,06$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1,06$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2(1,06) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right] y = (1,06)^2 y$$

$$y'' = 0,436400y$$

$$0,436400y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,027275y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - 2,027275 y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,027275 y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,027275 y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,027275y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,027275 y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,027275 y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,027275 & 1 & 0 \\ 1 & -2,027275 & 1 \\ 0 & 1 & -2,027275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,027275) + (-2,027275) [(-2,027275)(-2,027275) - 1]$$

$$\Delta = -4,277234$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,027275 & 1 \\ -1 & 1 & -2,027275 \end{vmatrix}}{-4,277234} = \frac{-1}{-4,277234} = 0,233796$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,027275 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,027275 \end{vmatrix}}{-4,277234} = \frac{(-1)(-1)(-2,027275)}{-4,277234} = 0,473969$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,027275 & 1 & 0 \\ 1 & -2,027275 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,277234} = \frac{(-1)[(-2,027275)(-2,027275)-1]}{-4,277234} = 0,727069$$

elde edilir.

$\lambda = 1,09$ İçin Difüzyon Probleminin Çözümü

$-y'' + [2\lambda\sqrt{x} + x]y = \lambda^2 y$, $\lambda=1,09$, $x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$ olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları ile verilen difüzyon probleminin $h=0,25$ aralığında merkezi fark metodu ile yaklaşık çözümlerini bulalım:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$-y'' + \left[2(1,09)\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right] y = (1,09)^2 y$$

$$y'' = 0,401900y$$

$$0,401900y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2,025119y_i + y_{i-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$y_2 - 2,025119y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2,025119y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2,025119y_3 + y_2 = 0$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ olduğundan,

$$-2,025119y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - 2,025119y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2 - 2,025119y_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2,025119 & 1 & 0 \\ 1 & -2,025119 & 1 \\ 0 & 1 & -2,025119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (-1) \cdot 1 \cdot (-2,025119) + (-2,025119)[(-2,025119)(-2,025119) - 1]$$

$$\Delta = -4,254992$$

olarak bulunur. Buna göre yaklaşık çözümler;

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,025119 & -2,025119 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4,254992} = \frac{-1}{-4,254992} = 0,235018$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2,025119 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2,025119 \end{vmatrix}}{-4,254992} = \frac{(-1)(-1)(-2,025119)}{-4,254992} = 0,475940$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2,025119 & 1 & 0 \\ 1 & -2,025119 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4,254992} = \frac{(-1)[(-2,025119)(-2,025119)-1]}{-4,254992} = 0,728816$$

elde edilir.

6.4. Farklı λ Özdeğerleri İçin Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması

$$|1 - 1,03| = 0,03 \text{ için } y_1 \text{ ler farkı } |0,217810 - 0,232646| = 0,014836$$

$$y_2 \text{ ler farkı } |0,448065 - 0,472113| = 0,024048$$

$$y_3 \text{ ler farkı } |0,703922 - 0,725422| = 0,021500$$

$$|1 - 1,06| = 0,06 \text{ için } y_1 \text{ ler farkı } |0,217810 - 0,233796| = 0,015986$$

$$y_2 \text{ ler farkı } |0,448065 - 0,473969| = 0,025904$$

$$y_3 \text{ ler farkı } |0,703922 - 0,727069| = 0,023147$$

$$|1 - 1,09| = 0,09 \text{ için } y_1 \text{ ler farkı } |0,217810 - 0,235018| = 0,017208$$

$$y_2 \text{ ler farkı } |0,448065 - 0,475940| = 0,027875$$

$$y_3 \text{ ler farkı } |0,703922 - 0,728816| = 0,024894$$

olarak bulunmaktadır. Buradan da anlaşılacağı gibi λ özdeğerleri arasındaki fark arttıkça, bu değerlere karşılık gelen fonksiyonların yani y değerlerinin arasındaki fark da artmaktadır.

SONUÇ

Bu çalışmamızda öncelikle diferansiyel denklemlerin en yaygın kullanılan problemlerinden KdV denklemi, Sturm-Liouville ve Difüzyon problemleri detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Daha sonra nümerik yöntemlerden Adomian Ayrışım Metodu (ADM), Homotopi Analiz Metodu (HAM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) anlatılmış ve genel KdV denkleminin bu üç metot ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlere göre iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiş ve görülmüştür ki Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metoduyla elde edilen çözümler ve grafikler aynı olmaktadır. Ve analitik çözüme en yakın bu iki metot olarak görülmektedir. Bununla birlikte Homotopi Analiz Metodunun grafiği diğer iki metottan daha farklıdır.

Çalışmamızın ilerleyen kısımlarında sonlu farklar ile fark denklemleri tanıtılmış, İleri Fark, Geri Fark ve Merkezi Fark metotları incelenmiştir. Ele alınan bir Sturm-Liouville probleminin bu üç sonlu fark metodu ile yaklaşık çözümleri yapıldıktan sonra bu çözümler aynı problem için bulunan analitik çözüm ile mukayase edilmiş ve görülmüştür ki; bu üç metot arasından hassasiyeti en yüksek ve hata payı en düşük olan metot merkezi fark metodudur. Bu nedenle çalışmanın bundan sonraki kısımlarında merkezi fark metodu uygulamaya konulmuştur.

Farklı potansiyeller için Sturm-Liouville ve Difüzyon problemi merkezi fark metodu ile çözülmüş ve görülmüştür ki potansiyeller arasındaki fark arttıkça bu potansiyellere karşılık gelen çözüm fonksiyonlarının arasındaki fark da artmaktadır. Yine benzer biçimde farklı özdeğerler ele alınmış ve özdeğerler arasındaki fark arttıkça bu özdeğerlere karşılık gelen çözüm fonksiyonlarının arasındaki fark da artmaktadır.

KAYNAKLAR

- 1) Cherruault, Y., (1988), Convergence of Adomian's method, *Kybernetes* 18 (2),31-38
- 2) Wazwaz, A.M. (2005), Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratutype equations, *Appl. Math Comput.* 166, 652,663.
- 3) Wazwaz, A. M. (2002), *Partial Differential Equations Methods and Applications*
- 4) Klaus Branuer, (2000), University of Osnabrück/Germany ,The Korteweg-de Vries Equation's history , exact solutions and graphical representation
- 5) G. I. M. & Levitan, B. M., (1955), On the determination of a differential equation from its spectral function. *Amer. Math. Soe. Transl. Series 2*, 1 253-304.
- 6) Gardner, G., Gren, J., Kruskal, M., Miura R (1967) A method for solving the Korteweg-de Vries equation.- *Phys.Rev. Lett.*, v. 19, p. 1095-1098
- 7) Mavoungou, T., Cherruault, Y., (1992), Convergence of Adomian's method and applications to nonlinear partial differential equations, *Kybernetes*, 21 (6), 13-25
- 8) Adomian, G., Rach, R., (1992), Noise terms in decomposition solution series, *Comp. Math. Applic.* 24 (11),61-64
- 9) Khuri,S.A., (2001), On the Decomposition metod for the approximatesolutions of nonlinear ordinary differential equations, *Intern. J. Math. Ed. Sci. Tech.* 32 (4), 525-539
- 10) D.D.Ganji and A. Sadighi, (2007), Application of homotopy- Perturbation and variational iteration methods to nonlinear heat transver and porous media equations, *J Comput Appl Math*
- 11) Neumark, M. A.(1963), *Lineare Di]/erential Operatoren*. Akademie-Verlag, Berlin.
- 12) H.Song, L.Tao (,2008), Soliton solutions for KdV equation by homotopy analysis method
- 13) J.H. He, (2000), A coupling method a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *Int. J Non-Linear Mech* 35, 37,43
- 14) A.D. Polyanin, (2002), *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Champan & Hall/CRC Pres, Boca Raton,

- 15) Lamb, G.L. (1980) Elements of soliton theory, Interscience Publication, New York.
- 16) Levinson, N., (1949), The inverse Sturm-Liouville problem. *Mat. Tidsskr. B.*, 25-30
- 17) Coddington, E. & Levinson, N., (1955), *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, New York.
- 18) Gasymov, G. M. & Levitan, B. M., (1968), On Sturm-Liouville differential operators with discrete spectra. *Amer. Math. Soc. Transl. Series 2*, 68 21-33.
- 19) Hochstadt, H., (1973), The inverse Sturm-Liouville problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 26, 715-729.
- 20) Levitan, B. M., (1968), On the determination of a Sturm-Liouville equation by two spectra. *Amer. Math. Soc. Transl. Series 2*, 68 , 1-20.
- 21) Kaya D., Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri İçin Bazı Yarı Analitik Metotlar
- 22) Türker, E. S. Can E., Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri

ÖZGEÇMİŞ

13 Temmuz 1988 tarihinde eğitimci bir ailenin tek evladı olarak Mersin’de dünyaya geldim. İlk ve orta öğrenimimi Mersin 24 Kasım İlköğretim okulunda tamamladıktan sonra 2002 yılında Mersin Salim Yılmaz Anadolu Lisesi’ne başladım. 2006 yılında bu liseden okul ikincisi olarak mezun oldum ve aynı yılın eylül ayında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. Dört yıllık lisans eğitim sürecini 2010 yılında tamamladım. Ve aynı yılın eylül ayında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünün Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisansa başladım halen yüksek lisansına devam etmekteyim.