

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

3-BOYUTLU KÜREDE HELİSEL GEODEZİK Lİ YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müjgan POYRAZ

(07121107)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

OCAK-2010

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

3-BOYUTLU KÜREDE HELİSEL GEODEZİKLİ YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müjgan POYRAZ

(07121107)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:
Tezin Savunulduğu Tarih: 21 Ocak 2010

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Mahmut ERGÜT.(F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ.(F.Ü)

Yrd.Doç.Dr. Ünal İÇ.(F.Ü)

OCAK-2010

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof.Dr.Mahmut ERGÜT'e, Yrd.Doç.Dr.Mihriban Külahçı ve Yrd.Doç.Dr.Münevver Yıldırım'a teşekkürlerimi sunarım.

Müjgan POYRAZ

ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. Birinci Bölüm	1
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	1
3. İkinci Bölüm	8
3.1. Riemann Uzay Formları ve Helisel Eğriler	9
3.2. Helisel Geodezikler İçin Bazı Karakterizasyonlar	11
3.3. Helisel Geodezik ve Helisel Geodezik Yüzeyler	16
4. SONUÇ	18
5. KAYNAKLAR	19
6. ÖZGEÇMİŞ	20

ÖZET

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; Riemann uzay formları ve helisel eğriler incelenmiştir. Ayrıca, helisel geodezikler için bazı karakterizasyonlar elde edilip bunlarla ilgili yüzey örnekleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann Uzay Formu, Birim Küre, Birim Hiperbolik Küre, Helis, Şekil Operatörü, Gauss Eğrilik, Ortalama Eğriliği

SUMMARY

Surfaces Which Contain Helical Geodesics In The 3-Sphere

This thesis consist of two chapters.

In the first chapter; are given some fundamental definitions and theorems.

In the second chapter; are investigated Riemann space forms and helical curves. In addition, some characterizations are obtained for helical geodesics and surface example related to helical geodesics are given.

Keywords: Riemann Space Form, Unit Sphere, Helice, Shape Operator, Gaussian Curvature, Constant Mean Curvature

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid Uzay
$\langle , \rangle$	: Öklid Metriği
S^3	: Birim Küre
H^3	: Birim Hiperbolik 3-Uzay
S	: Şekil Operatörü
∇	: Levi-Civita Konneksiyonu
D	: Riemann Konneksiyonu
K_e	: Gauss Kroniker Eğriliği
$\chi(M)$	: Tanjant vektör alanlarının Lie Cebiri
τ	: Torsiyon
κ	: Eğrilik

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinde $M^3(c)$ ile sabit eğriliği c olan, $\langle , \rangle$ metriğine sahip 3-boyutlu basit irtibatlı Riemann uzay formu gösterilmiştir. Aksi belirtilmedikçe $M^3(c)$ deki tüm yüzeylerin düzgün (C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir) olduğu kabul edilmiş ve boyutu > 2 olan irtibatlı manifoldlar ele alınmıştır. Ayrıca helisel geodezik ve helisel geodezik yüzey örnekleri verilmiştir. $M^3(c)$ de tanımlanan eğrilik ve torsiyonun durumuna göre bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. Birinci Bölüm

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1. Tanım: Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V \quad (2.1)$$

f fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

$$(A_1): \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R) \quad (2.2)$$

$(A_2): \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır [1].}$

2.1.2. Tanım: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n -manifold) dur denir:

$(M_1): M$ bir Hausdorff uzayıdır,

$(M_2): M$ nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur,

$(M_3): M$ sayılabilir çoklukta alt cümlelerle örtülebilir [1].

2.1.3. Tanım: Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\left. \begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x_i, y_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= \{x_1, \dots, x_n\} \\ y &= \{y_1, \dots, y_n\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır [1].

2.1.4. Tanım: E^n , n -boyutlu Öklid uzayında bir açık cümle U olmak üzere bir

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.4)$$

fonksiyonunun k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f

fonksiyonuna C^k sınıfından (k -yıncı sınıftan) diferensiyellenebilir denir ve

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{ f \mid f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından} \}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{ f \mid f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \in C^k(U, \mathbb{R}) \text{ ve } k \in \mathbb{N} \} \quad (2.5)$$

dir [1].

2.1.5. Tanım: E^n nin iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir

$$\Psi: U \rightarrow V \quad (2.6)$$

fonksiyonu için aşağıdaki önermeler doğru ise Ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V ye de k . dereceden diffeomorfiktirler denir.

$$(D_1): \Psi \in C^k(U, V),$$

$$(D_2): \Psi^{-1}: V \rightarrow U \text{ var ve } \Psi^{-1} \in C^k(U, V) \quad [1]. \quad (2.7)$$

2.1.6. Tanım: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda

$$\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\} \text{ sistemi lineer bağımsız ve } \forall \alpha^{(k)}, k > r, \text{ için; } \alpha^{(k)} \in S_p\{\Psi\}$$

olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-

Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki

Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektörü adı verilir [1].

2.1.7. Tanım: V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun, $p \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için

$(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir. $T_p(A)$ de

toplama ve skaler çarpma işlemleri, sırasıyla,

$$\oplus: T(A)_p \times T_p(A) \rightarrow T_p(A)$$

$$:(p, \vec{v}) \times (p, \vec{u}) \rightarrow (p, \vec{v}) + (p, \vec{u}) = (p, \vec{v} + \vec{u}) \quad (2.8)$$

veya

$$(\vec{v}_p, \vec{u}_p) \rightarrow \vec{v}_p \oplus \vec{u}_p = (\vec{v} + \vec{u})_p \quad (2.9)$$

ve

$$\begin{aligned} \otimes: \mathbb{R} \times T_p(A) &\rightarrow T_p(A) \\ :(\lambda, (p, \vec{v})) &\rightarrow \lambda \otimes (p, \vec{v}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

veya

$$(\lambda, \vec{v}_p) \rightarrow \lambda \otimes \vec{v}_p = (\lambda, \vec{v})_p \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\mathbb{R}$ ile A nın birleştiği V vektör uzayının cismi gösterilmektedir.

$\{T_p(A), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes\}$ altılısının bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir.

$\{T_p(A), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_p(A)$ ile gösterilir [1].

2.1.8. Tanım: M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $p \in V$

noktasındaki tanjant uzay $T_p(V)$ olsun. V nin bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi;

$$\bigcup_{p \in V} T_p(V) \quad (2.12)$$

şeklinde olsun. Bir

$$\pi: \bigcup_{p \in V} T_p(V) \rightarrow V \quad (2.13)$$

Dönüşümü $\forall t_p \in T_p(V)$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_p) = p \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlansın.

$V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü X olmak üzere

$$X: V \rightarrow \bigcup_{p \in V} T_p(V) \quad (2.15)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I: V \rightarrow V \quad (2.16)$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur.

E^n de vektör alanlarının cümlesini $\chi(E^n)$ le gösterirsek $\chi(E^n, +)$ ikilisi bir Abel gruptur.

$$\begin{aligned} \odot: \mathbb{R} \times \chi(E^n) &\rightarrow \chi(E^n) \\ :(\lambda, X) &\rightarrow \lambda X \end{aligned} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanan işlem X vektör alanının λ skaları ile çarpım olarak adlandırılır ve $\forall p \in E^n$ noktası için

$$(\lambda X)P = \lambda X(p) = \lambda X_p \quad (2.18)$$

biçiminde tanımlanır. Eğer bir

$$f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu ile bir $\chi(E^n)$ vektör alanının çarpımı da $\forall p \in E^n$ için

$$(fX)(p) = f(p)X_p \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$\{\chi(E^n), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes\}$ altılısının bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir. Bu vektör uzayına E^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir ve kısaca $\chi(E^n)$ ile gösterilir [1].

2.1.9. Tanım: M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (2.20)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir [1].

2.1.10. Tanım: M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası da $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere fonksiyonu,

1) 2-lineer,

2) Simetrik,

$$3) \forall X \in \chi(M) \text{ için } \langle X, Y \rangle = 0 = Y \Rightarrow Y = 0 \in \chi(M) \quad (2.21)$$

özelliklerini sağlıyor ise, M ye yarı-Riemann manifoldu denir [1].

2.1.11. Tanım: M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$:(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y \quad (2.22)$$

fonksiyonu için,

$$1) D_{fX+gY} Z = f D_X Z + g D_Y Z, \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad (2.23)$$

$$2) D_X(fY) = f D_X Y + (Xf)Y, \quad \forall X, Y \in \chi(M) \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad (2.24)$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir [1].

2.1.12. Tanım: M bir yarı-Riemann manifoldu ve D , M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer

1) D , C^∞ sınıfındandır,

2) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y] \quad \text{dir.} \quad (2.25)$$

3) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall p \in A$ için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle_p + \langle Y, D_X Z \rangle_p \quad (2.26)$$

özellikleri sağlanıyorsa, D konneksiyonuna, M üstünde bir Riemann konneksiyonu D_X e de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir [1].

2.1.13. Tanım: E^n nin bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^\perp$ bir bazı $\{N\}$ ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir. $\chi(M)^\perp$ nin iki tane birim normal vektör alanı vardır. Bunlardan biri $\{N\}$ ise diğeri $\{-N\}$ dir [1].

2.1.14. Tanım: E^n nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için
şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [1].

2.1.15. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir p noktasına karşılık gelen $S(p)$ nin karakteristik (eigen) değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılırlar. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik (eigen) vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu p noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir [1].

2.1.16. Tanım: E^n in bir M hiperyüzeyi üzerinde $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$:(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna q -yuncu temel form denir [1].

2.1.17. Tanım: E^n de M bir $(n - 1)$ -manifold ve p noktasında M nin tanjant uzayı $T_p(M)$ olduğuna göre M üzerinde Weingarten dönüşümü

$$S: T_p(M) \rightarrow T_p(M) \quad (2.28)$$

şeklindedir. S ile tanımlanan ikinci temel form M üzerinde ikinci dereceden bir kovaryant tensör olarak $\forall X_p, Y_p \in T_p(M)$ için

$$II(X_p, Y_p) = \langle S(X_p), Y_p \rangle \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.1.18. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere,

$$K: M \rightarrow \mathbb{R} \\ :p \rightarrow K(p) = \det S(p) \quad (2.30)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği (total eğrilik) denir [1].

2.1.19. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere,

$$H: M \rightarrow \mathbb{R} \\ :p \rightarrow H(p) = \text{İz } S(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir [1].

2.1.20. Tanım: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere,

- 1) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için, $S = \lambda I_{n-1}$ ise p noktasına M nin bir umbilik noktası denir.
- 2) $S = 0$ şeklinde S bir sıfır dönüşümü ise p noktasına M nin bir düzlemsel noktasıdır (flat noktası) denir [1].

2.1.21. Tanım: E^3 de s - yay parametresi ile verilen bir α eğrisinin birim teğet vektörü, $T = (T_1, T_2, T_3)$ olmak üzere,

$$k_g = \left\| \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right\| \quad (2.31)$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen, E^3 deki geodezik eğriliği denir [1].

2.1.22. Tanım: E^n nin bir hiperyüzeyi M ve $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer, $X_p, Y_p \in T_p(M)$ için

$$\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0 \quad (2.32)$$

ise bu iki tanjant vektöre eşleniktirler denir. Bir $X_p \neq 0$ tanjant vektörü için,

$$\langle S(X_p), X_p \rangle = 0 \quad (2.33)$$

ise X_p doğrultusuna, M nin p noktasındaki bir asimptotik doğrultusu ve X_p yi $\forall p \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir asimptotik çizgidir denir. (Şu halde M üzerindeki asimptotik çizgilerin diferensiyel denklemi, $\langle S(T), T \rangle = 0$ dır, burada T aranan asimptotik çizginin teğet vektör alanıdır) [1].

2.1.23. Tanım: Bir Riemann manifoldunun kesit eğriliğine uzay formu denir [2].

2.1.24. Tanım: Bir matematiksel nesne etrafında dönen uzaya ambient uzay (ambient space) denir.

2.1.25. Tanım: $n = 3$ özel halinde Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

veya

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

şeklindedir. Bu halde 1-inci eğrilik olan $k_1(s)$ değeri sadece eğrilik adıyla ve 2-inci eğrilik olan $k_2(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla bilinir [1].

2.1.26. Tanım: E^3 uzayında bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olsun. T vektör alanı, belirli bir u vektörüyle sabit açı yapıyorsa α eğrisine bir helis denir, α eğrisi için $\kappa > 0$ olmak üzere α nın bir helis olması için $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olması gerek ve yeterdir [3].

2.1.27. Tanım: Minimal bir yüzey olan helicoid, düzlem ve katenoidden sonra bilinen 3. minimal yüzey olup $\mathbb{R}^2$ düzlemine homeomorftur. İsmi, helise benzerliğinden dolayı

helisoiddir. Helisoid üzerindeki her nokta için bu noktadan geçen helisoid de var olan bir helis vardır, [4].

2.1.28. Tanım: $S^3 = \{x = \{x_1, x_2, x_3\} \in E^4 / \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\} \subset E^4$ boyutlu cümlesine 3-boyutlu birim küre denir [4].

2.1.29. Teorem: M, S^3 de sabit ortalama eğrilikli tam yüzey olsun. M nin her bir noktası boyunca M üzerinde iki helisel geodezik varsa M ya büyük bir küre, ya küçük bir küre ya da bir daire üzerinde Hopf torudur [5].

3. İkinci Bölüm

3.1. Riemann Uzay Formları ve Helisel Eğriler

Bu bölüm 3 kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda 3-boyutlu Riemann uzay formları tanıtılmış olup ikinci kısımda Helisel geodezikler için bazı karakterizasyonlara yer verilmiştir ve son olarak üçüncü kısımda ise Helisel geodezik ve Helisel geodezik yüzey örnekleri verilmiştir.

Bu çalışmada $M^3(c)$ ile sabit eğriliği c olan, $\langle , \rangle$ metriğine sahip 3- boyutlu basit irtibatlı Riemann uzay formu gösterilecektir. Aksi belirtilmedikçe $M^3(c)$ deki tüm yüzeylerin düzgün (C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir) olduğu kabul edilecektir ve boyutu > 2 olan irtibatlı manifoldlar ele alınacaktır.

Genelliği bozmaksızın $c = 0, \pm 1$ seçilebilir. Yani $M^3(c) = E^3$ (3- boyutlu Öklid uzayı), $M^3(1) = S^3$ (Birim küre), $M^3(-1) = H^3$ (Birim Hiperbolik 3-uzay) alınabilir.

$M, M^3(c)$ uzay formunda bir yüzey olsun. Burada $\chi(M)$, M de tüm düzgün tanjant vektör alanlarının Lie cebiri gösterilsin. $D, M^3(c)$ nin Levi-Civita konneksiyonu ve $\nabla, \langle , \rangle$ iç çarpımına karşılık gelen M nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. ξ de M de birim normal vektör alanı olmak üzere, M nin ξ den elde edilen ikinci temel formu $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Gauss formülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$II(X, Y) \xi = D_X Y - \nabla_X Y \quad (3.1)$$

M nin ξ den elde edilen şekil operatörü S olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$ dir ve M üzerinde bir $(1,1)$ - tensör alanıdır. Ayrıca

$\forall X \in \chi(M)$ için $D_X \xi = -S(X)$ olduğu bilinmektedir.

S şekil operatörü, M üzerindeki $\forall V, W$ vektör alanları için

$$(\nabla_V S)W = (\nabla_W S)V \quad (3.2)$$

Codazzi denklemini sağlar.

K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği, sırasıyla, aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$K(p) = \det S(p)$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr} S \quad (3.3)$$

S nin determinantı $\det S$, $M^3(c)$ üzerinde M nin Gauss-Kronecker eğriliği olarak adlandırılır ve K_e ile gösterilir.

γ yay uzunluğu ile parametrelendirilen $M^3(c)$ de bir helisel eğri olsun. Burada Serret-Frenet formülleri, γ boyunca X ve Y birim vektör alanları ve sabit κ ve τ eğrilikleri için,

$$\begin{aligned} D_{\gamma'} \gamma' &= \kappa X \\ D_{\gamma'} X &= -\kappa \gamma' + \tau Y \\ D_{\gamma'} Y &= -\tau X \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak yazabilir. Burada γ' , γ nın birim tanjant vektörüdür.

3.1.1. Tanım: γ , yay uzunluğu ile parametrelendirilen $M^3(c)$ de bir helisel eğri olsun. Bu helisel eğrinin $\tau = 0$ ve $\kappa \neq 0$ ise bu helisel eğri Riemann dairesi olarak adlandırılır. Ayrıca hem $\tau \neq 0$ hem de $\kappa \neq 0$ ise bu helisel eğriye uygun denir [5].

3.1.2. Örnek: $(S^3 \text{ de Helisler}) S^3, E^4$ Öklidyen-4 uzayda daldırılmış birim 3-küre olsun. $S^3 \subset E^4$ deki bir helis modeli

$$a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi = 1 \quad (3.5)$$

olmak üzere

$$\gamma(s) = \gamma(s)(\cos \Phi \cos(as), \cos \Phi \sin(as), \sin \Phi \cos(bs), \sin \Phi \sin bs) \quad (3.6)$$

şeklindedir. Burada s yay parametresidir.

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2 \Phi, \quad x_3^2 + x_4^2 = \sin^2 \Phi \quad (3.7)$$

şeklinde verilen γ nın flat torunda yattığı kolayca gösterilebilir.

Bu flat torun $H = \cot 2\Phi$ sabit ortalama eğrilikli olduğu açıktır. Burada κ eğriliği ve τ torsiyonu

$$K = \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}, \quad \tau = ab \quad (3.8)$$

şelindedir. S^3 deki her proper helis bu helislerden birine kongruenttir.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem Lioville [6], Teorem 1 ve 2 nin ispatında temel rol oynayacaktır.

3.1.3. Yardımcı Teorem: M bir Riemann 2-manifold olsun. Eğer M üzerinde her yerde sabit bir açıda kesişen geodeziklerin iki ailesi varsa, M flattır [5].

Bu kısmın sonunda E^3 deki flat yüzeler ve $c > 0$ olmak üzere $M^3(c)$ deki izoparametrik yüzeylerin (sabit asli eğrilikli yüzeyler) sınıflandırılması yeniden ele alınacaktır.

3.1.4. Önerme: M, E^3 3-boyutlu Öklid uzayında bir tam flat yüzey olsun. Böylece M , düzlemsel eğri üzerinde bir silindirdir [5].

3.1.5. Tanım: M, E^3 3-boyutlu Öklid uzayında bir tam flat yüzey olsun. Böylece M , düzlemsel eğri üzerinde bir silindir olmak üzere,

$$\pi: S^3 \rightarrow S^2(4) \quad (3.9)$$

dönüşümü ile S^3 ün eğriliği $S^2(4)$ olan 2-kürenin üzerindeki Hopf fiberi gösterilsin ve $\bar{\gamma}$, $S^2(4)$ de $\bar{k}$ eğriliğine sahip bir eğri olsun. Buradan $M = \pi^{-1}(\gamma)$ ters görüntüsü S^3 de bir flat yüzeydir. Bu flat yüzey $H = (\bar{k} \circ \pi)/2$ ortalama eğriliğine sahiptir ve $\bar{\gamma}$, üzerindeki Hopf silindir olarak adlandırılır. Özel olarak eğer $\bar{\gamma}$, kapalıysa ozaman M bir tora diffeomorfik olur ve bu durumda $M, \bar{\gamma}$, üzerindeki Hopf toru olarak adlandırılır [7]-[8]-[9]. $S^2(4)$ deki bir Geodezik üzerinde Hopf silindir Clifford torudur (minimal). S^3 deki flat tor Kitagawa tarafından sınıflandırılmıştır [10].

3.1.6. Önerme: E^3 deki izoparametrik yüzey M olsun. Buradan M (total geodezik) bir düzlemdir, (total umbilik) bir küre ya da bir dairesel silindirdir [11].

3.1.7. Önerme: S^3 de izoparametrik yüzey M olsun. Buna göre M ya total geodezik 2-küre ya total umbilik ya da daireler üzerinde bir Hopf torudur [12].

3.2. Helisel Geodezikler İçin Bazı Karakterizasyonlar

Bu bölümde Riemann uzayları, Helisel Eğriler ve helisel geodezik kavramları incelenmiştir. Son kısımda da helisel geodezikler için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

3.2.1. Teorem: $M^3(c)$ uzay formunda sabit ortalama eğriliğin bir yüzeyi M olsun. Eğer M umbilik noktalara sahip değil ve M nin her noktası üzerinde oluşan bir helisel geodeziğin eğriliği sıfırdan farklı ise, M bir dairesel silindirdir.

Buna göre $M^3(c)$ de bir dairesel silindir olarak, $c \neq 0$ dır. O zaman S^3 deki bir daire üzerinde bir Hopf silindir ve H^3 birim hiperbolik 3-uzaydaki geodezikler etrafındaki tübler (eşit uzaklıktaki yüzeyler) kastedilir. Teorem 2.2.1 negatif c değeri için sağlanmaktadır, [13]. Teorem 2.2.1 in ispatı daha sonra verilecektir [5].

Bu teoremin ispatı için öncelikle aşağıdaki iki yardımcı teorem ele alınıp ispatlanacaklar.

3.2.2. Yardımcı Teorem: Kabul edelim ki Ambient uzaydaki geodeziklerin hepsi U üzerindeki asimptotik eğrilerin iki ailesini oluştursun. M , $M^3(c)$ nin sabit ortalama eğrilikli bir yüzeyi ve U da M de bir açık cümle olsun. U üzerinde her biri ambient uzayın geodezikleri olan asimptotik eğrilerin iki ailesinin var olduğunu kabul edelim. Böylece U ya total geodeziktir ya E^3 de bir dairesel silindirin açık bir parçasına kongruenttir ya da S^3 deki bir daire üzerinde bir Hopf torudur [5].

3.2.3. İspat: Eğer U total geodezik ise ambient geodeziği olan asimptotik eğrilerin iki ailesini içerir. Böylece genelliği bozmaksızın U nun total geodezik olmama şartı göz önünde bulundurulsun. $M^3(c)$ de bir eğri üzerinde geodezikler aracılığıyla $p \in U$ noktasında U üzerindeki asimptotik eğriler α_1 ve α_2 olsun.

λ ve $2H-\lambda$, M nin E_1 ve E_2 vektör alanlarına karşılık gelen asli eğrilikleri olsun. Burada H , M nin ortalama eğriliği olarak alınsın. Ayrıca θ da E_1 ve α arasındaki açı olmak üzere,

$$\alpha'_1 = \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2$$

$$\alpha'_2 = -\cos \theta E_1 + \sin \theta E_2 \quad (3.10)$$

Burada α'_1 ve α'_2 sırasıyla α_1 ve α_2 nin birim tanjant vektör alanlarını göstermektedir.

$\nabla_{E_1} E_1 = \alpha E_2$ ve $\nabla_{E_2} E_1 = \beta E_2$ ayrıca $\nabla_{E_1} E_2 = -\alpha E_1$ ve $\nabla_{E_2} E_2 = -\beta E_1$ şeklinde ifade edersek, Codazzi denklemi (2.11) aşağıdaki şekildedir.

$$\nabla_{E_1} \lambda = 2\beta(\lambda - H) \quad , \quad \nabla_{E_2} \lambda = 2\alpha(\lambda - H) \quad (3.11)$$

Ayrıca α_1 ve α_2 asimptotik eğrilerinin ikisi M de geodezik oldukları için aşağıdaki denklemler yazılır.

$$\nabla_{\alpha_1'} \theta + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 0 \quad (3.12)$$

$$\nabla_{\alpha_2'} \theta + \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta = 0 \quad (3.13)$$

α_1 ve α_2 asimptotik eğrileri ve $II(E_1, E_1) = \alpha$, $II(E_2, E_2) = 2H - \lambda$ olmak üzere,

$$\lambda \cos^2 \theta + (2H - \lambda) \sin^2 \theta = 0 \quad (3.14)$$

bulunur.

(3.14) ü α_1' ve α_2' ye göre diferensiyellersek ve (3.12) ve (3.13) ü kullanarak sırasıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\alpha \sin \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \beta \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) = 0 \quad (3.15)$$

$$\alpha \sin \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \beta \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) = 0 \quad (3.16)$$

Sonuç olarak α veya β sıfır, $3 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$, veya $\cos^2 \theta = 3 \sin^2 \theta$ dir. (3.11) ve (3.14) nolu denklemler U üzerindeki geodeziklerin eğrilik çizgileri olduğunu gösterir. Böylece U total geodezik değildir.

Bilindiği gibi eğrilik çizgisinin iki ailesi sabit bir $\frac{\pi}{2}$ açısı ile kesişmektedir. Bu sebeple Yardımcı Teorem 3.1.1 den U bir flattır. Böylece $\det S = -c$ dir. Bir başka ifadeyle U asimptotik eğrilerin iki ailesini kabul ettiği için, $\det S \leq 0$ dir. O halde $c \geq 0$ dir. Üstelik (3.11) nolu denklemden U sabit temel eğriliğe sahiptir.

3.2.4. Teorem: $M^3(c)$ negatif olmayan eğrilikli M de sabit ortalama eğriliğe sahip tam bir yüzey olsun. Eğer M nin her bir noktası boyunca M üzerinde helisel iki geodezik varsa, buradan M ya bir total geodezik yüzey, total umbulical yüzey, bir dairesel silindir ($c = 0$), ya da bir hopf torudur ($c > 0$) [5].

3.2.5. İspat: $M^3(c) = E^3$ durumu daha önce ispatlanmıştı [13]. Bu yüzden $M^3(c) = S^3$ durumunu göz önünde bulundurmak yeterlidir.

M nin bir helisel geodeziği γ olmak üzere aşağıdaki 3 durum oluşacaktır.

1. Durum: $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$. Buna göre M ye normal olduğundan Serret-Frenet formüllerinde $X = \xi$ alınabilir. $D_{\gamma'} \gamma' = II(\gamma', \gamma') \xi$ olmak üzere

$$D_{\gamma'} \xi = -\kappa \gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad D_{\gamma'} Y = -\tau \xi \quad (3.17)$$

bulunur.

2. Durum: $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$. Serret-Frenet formüllerinde $X = \xi$ alınır,

$$D_{\gamma'} \xi = -\kappa \gamma' \quad (3.18)$$

elde edilir.

3. Durum: $\kappa = 0$. Gauss formülü (2.1) ve Serret-Frenet formüllerinden

$$II(\gamma', \gamma') = 0 \quad (3.19)$$

bulunur.

Şimdi γ_1 ve $\gamma_2 \in M$ noktası aracılığıyla M üzerinde helisel geodezikler olsun. Aşağıdaki durumlar elde edilir.

- (1) γ_1 ve γ_2 ambient geodezikler,
- (2) γ_1 ve γ_2 Riemann daireleri,
- (3) γ_1 ve γ_2 proper helisler,
- (4) γ_1 ambient geodezik ve γ_2 bir Riemann daire,
- (5) γ_1 ambient geodezik ve γ_2 bir proper helis,
- (6) γ_1 bir Riemann dairesi ve γ_2 bir proper helis.

İlk olarak Gauss- Kronecker K_e eğriliğinin en az bir noktada pozitif olduğu kabul edilmek üzere

$$M_1 = \{p \in M / K_e(p) > 0\} \quad (3.20)$$

olsun.

Buna göre M_1 in herbir noktası (2), (3), (4) şartlarının bir noktasıdır. M_{11} , M_1 ve $M_{12} = M_1 - M_{11}$ in tüm umbilik noktalarının cümlesi olsun. Eğer , burada $M_{12} \neq 0$, burada Teorem 2.2.1 den M_{12} üzerinde $K_e > 0$ la çelişir. Böylece M_1 total umbiliktir. Buradan M_1 açık ve kapalı olduğu için M_1 total umbilik bir yüzeydir.

İkinci olarak M üzerinde $K_e < 0$ olduğunu kabul edilsin ve

$$M_2 = \{p \in M / K_e(p) < 0\} \quad (3.21)$$

olsun.

Burada M_2 nin her noktası (1)-(6) tiplerinin noktası olabilir. Bir A cümlesi için ClA , A nın kapanışıdır, $intA$ A nın içini gösterir. Böylece M_{21} ve M_{22} iç noktalara sahip ya da M_{21} veya M_{22} , M_2 de yoğundur. Şimdi M_2 nin bir flat düzlem olduğu gösterilecek. Eğer $intM_{21} \neq \emptyset$ veya M_{21} M_2 de yoğun ise o zaman Teorem 3.2.1 den M_2 flattır. Sonrasında eğer $M_{22} \neq \emptyset$ ve M_{22} , M_2 de yoğun ise M_2 üzerindeki tüm asimptotik eğriler ambient geodeziktir.

$$M_{21} = \{p \in M \setminus \text{bir daire veya } p \text{ sayasinde bir proper helisidir}\}$$

ve $M_{22} = M_2 - M_{21}$ dir. O zaman $M_2 = M_{21} \cup M_{22}$ den $M_2 = ClM_{21} \cup intM_{22}$ ve $M_2 = ClM_{22} \cup intM_{21}$ dir.

Sonuç olarak; Yardımcı Teorem 3.2.1 den M_2 üzerinde $K = 0$ dir. Bu nedenle

$M_2 = \{p \in M / K_e(p) = -1\}$ dir. O halde M_2 kapalıdır. Bu sebeple M_2 nin açık ve kapalı olması M nin flat olmasını gerektirir. Buradan da M bir daire üzerinde Hopf torudur.

Çünkü M tam flat ve izoparametrik.

Bu da ispatı tamamlar.

3.2.6. Önerme: H^3 hiperbolik 3-uzayda bir tam flat yüzey M olsun. Böylece M ya bir (total umbilik) horoküre ya da H^3 deki bir geodizinin aynı uzaklıkta olan tübüdür [13] [14].

3.2.7. Önerme: M , H^3 de izoparametrik yüzey olsun. M ya total bir geodezik hiperbolik 2-yüzey ya da tam bir umbilical yüzey ya da geodezik etrafında equidistant tüptür [15].

3.2.8. Teorem 3.2.1'in İspatı: γ , $p \in M$ noktası aracılığıyla M üzerinde bir helisel geodezik olsun. Gauss formülünden M ye normal olan $D_{\gamma'} \gamma' = II(\gamma', \gamma')$ elde edilir.

Burada Serret-Frenet formüllerinden $X = \xi$ alabiliriz. O halde

$$II(\gamma', \gamma') = \kappa \quad II(\gamma', Y) = -\tau \quad (3.22)$$

λ ve $2H - \lambda$, M üzerindeki temel vektör alanlarına karşılık gelen M nin esas eğrilikleri olsun. γ' ve E_1 arasındaki açı θ olmak üzere

$$\gamma' = \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2 \quad (3.23)$$

$$Y = -\sin \theta E_1 + \cos \theta E_2 \quad (3.24)$$

yazabiliriz. O zaman $II(E_1, E_1) = \lambda$ ve $II(E_2, E_2) = 2H - \lambda$ olduğu için

$$II(\gamma', \gamma') = \lambda \cos^2 \theta + (2H - \lambda) \sin^2 \theta \quad (3.25)$$

$$II(Y, Y) = \lambda \sin^2 \theta + (2H - \lambda) \cos^2 \theta \quad (3.26)$$

bulunur.

(3.22) ve (3.25) denklemleri $\kappa = \lambda \cos^2 \theta + (2H - \lambda)$ gerektirir. Böylece

$II(Y, Y) = 2H - \lambda$ (3.26) ile bulunur. O zaman M nin K Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= c + II(\gamma', \gamma') \cdot II(Y, Y) - \{II(\gamma', Y)\}^2 \\ &= c + \kappa(2H - \kappa) - \tau^2 \end{aligned}$$

dir. K Gauss eğriliği $c + (2H - \lambda)$ eşit olduğu için λ fonksiyonu γ boyunca sabittir (ve sonuç olarak $(2H - \lambda)$ her zaman γ boyunca sabittir).

(3.25) denklemini γ ye göre diferensiyellersek M umbulic noktaya sahip olmadığından

$$\nabla_{\gamma'} \theta = 0 \quad (3.27)$$

bulunur. $\nabla_{E_1} E_1 = \alpha E_2$ ve $\nabla_{E_2} E_1 = \beta E_2$ olsun. Buradan $\nabla_{E_1} E_2 = -\alpha E_2$ bir geodezik olduğu için (2.27) den

$$\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. Bir başka deyişle Codazzi denklemini kullanarak (3.11) elde edilir.

Sonuç olarak (3.5) denklemi $ve D_{\gamma'} (\lambda \xi)$ nin normal kısmının sıfıra eşit olduğundan

$$\alpha \sin \theta - \beta \cos \theta = 0 \quad (3.29)$$

elde edilir. O halde (2.27) ve (2.28) den γ boyunca $\alpha = \beta = 0$ dır. Böylece M nin eğrilik çizgileri M üzerindeki geodeziklere karşılık gelir. Sonuçta Yardımcı Teorem 3.1.1 in ispatı ve Yardımcı Teorem 3.2.1 den M bir flattır.

Böylece M , λ ve $2H - \lambda$ temel sabit eğriliklerine sahiptir. O halde M ya total geodezik bir yüzey ya total umbilik yüzey ya da dairesel silindirdir. Kabule göre M umbilik noktalara sahip olmadığından M bir dairesel silindirdir. Böylece tamamlanmış olur.

3.3. Helisel Geodezik ve Helisel Geodezik Yüzeyler

3.3.1. Teorem: M negatif olmayan eğrilikli $M^3(c)$ de sabit ortalama eğriliğe sahip tam bir yüzey olsun. Ayrıca γ M nin bir helisel geodeziği olsun. $M^3(c)$ deki κ eğriliği sabit olan α eğrisinin teğetleri üzerinde eğriden itibaren sabit L uzaklığında alınan β noktalarının çizdiği eğriği düşünelim. β eğrisiyle α eğrisinin karşılıklı noktalarındaki B_1 ve B_2 binormalleri arasındaki açı θ ise

$$\tan \theta = \frac{\tau L}{\sqrt{1+L^2(\kappa^2+\tau^2)}} \quad (3.30)$$

dir.

3.3.2. İspat: $M^3(c)$ deki κ eğriliği sabit olan bir α eğrisinin teğetler üzerinde eğriden itibaren sabit L uzaklığında alınan noktaların çizdiği eğri β ise α nın yay parametresi s olmak üzere

üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) + LT \quad (3.31)$$

dir. α eğrisi üzerindeki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ve eğrilik ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ olmak üzere

$$\beta'(s) = T + LT' = T + \kappa LN \quad (3.32)$$

$$\beta''(s) = \kappa N + \kappa L(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 LT + \kappa N + \kappa \tau LB$$

$$(\beta' \wedge \beta'')(s) = \kappa^2 \tau L^2 T - \kappa \tau LN + \kappa(1 + \kappa^2 L^2)B; (T \wedge N = B, N \wedge B = T, B \wedge T = N)$$

$$\tan \theta = \frac{\|\beta' \wedge \beta''(s)\|}{\|\beta'\| \|\beta''\|} = \frac{\sqrt{\kappa^4 \tau^2 L^4 + \kappa^2 L^2 \tau^2}}{\sqrt{\kappa^2(1 + \kappa^2 L^2)^2 + \kappa^4 L^2 T^2 + \kappa^2 \tau^2 L^2}} \quad (3.33)$$

$$= \frac{\kappa \tau L \sqrt{\kappa^2 L^2 + 1}}{\sqrt{\kappa^2(1 + \kappa^2 L^2)^2 + \kappa^4 L^2 T^2 + \kappa^2 \tau^2 L^2}}$$

$$= \frac{\kappa \tau L \sqrt{\kappa^2 L^2 + 1}}{\sqrt{(1 + \kappa^2 L^2) \sqrt{\kappa^2(1 + \kappa^2 L^2) + \kappa^2 \tau^2 L^2}}}$$

$$= \frac{\kappa \tau L}{\kappa \sqrt{1 + \kappa^2 L^2 + \tau^2 L^2}} = \frac{\tau L}{\sqrt{1 + \kappa^2 L^2 + \tau^2 L^2}}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\tau L}{\sqrt{1 + \kappa^2 L^2 + \tau^2 L^2}} \quad (3.34)$$

elde edilir.

3.3.3. Teorem: M negatif olmayan eğrilikli $M^3(c)$ de sabit ortalama eğriliğe sahip tam bir yüzey olsun. Ayrıca γ M nin bir helisel geodeziği olsun $M^3(c)$ deki τ eğriliği sabit olan α eğrisinin teğetleri üzerinde eğriden itibaren sabit L uzaklığında alınan β noktalarının çizdiği eğriği düşünelim. β eğrisiyle α eğrisinin karşılıklı noktalarındaki B_1 ve B_2 binormalleri arasındaki açı θ ise

$$\tan \theta = \frac{\tau^2 L}{\sqrt{\tau^2 L^2 (\tau^2 L^2 + \kappa^2)}} \quad (3.35)$$

dir.

3.3.4. İspat: $M^3(c)$ deki τ eğriliği sabit olan bir α eğrisinin teğetler üzerinde eğriden itibaren sabit L uzaklığında alınan noktaların çizdiği eğri β ise α nın yay parametresi s olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) + LB \quad (3.36)$$

$$\beta'(s) = T + LB' = T - \tau LN$$

$$\beta''(s) = \kappa N - \tau L(-\kappa T + \tau B) = \kappa \tau LT + \kappa N - \tau^2 LB$$

$$\begin{aligned} (\beta' \wedge \beta'')(s) &= \kappa B + \tau^2 LN + \tau^2 L^2 \kappa B + \tau^3 L^2 T \\ &= \tau^2 L^2 T + \tau^2 LN + \kappa(1 + \tau^2 L^2)B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\beta' \wedge \beta''(s)) \wedge B = -\tau^3 L^2 N + \tau^2 LT = \tau^2 L(T - \tau L)$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\|\beta' \wedge \beta''(s) \wedge B\|}{\|\beta' \wedge \beta''\| \cdot \|B\|} = \frac{\sqrt{L^4 \tau^6 + L^2 \tau^4}}{\sqrt{\tau^6 L^4 + L^2 \tau^4 + \kappa^2 (1 + \tau^2 L^2)^2}} \\ &= \frac{\tau^2 L \sqrt{1 + \tau^2 L^2}}{\sqrt{\tau^4 L^2 (1 + \tau^2 L^2) + \sqrt{L^2 \tau^4 + \kappa^2 (1 + \tau^2 L^2)}}} \\ &= \frac{\tau^2 L}{\sqrt{\tau^2 L^2 (\tau^2 L^2 + \kappa^2)}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

bulunur.

4. SONUÇ

Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 ye bağılı üç tane sonuç elde edildi. Bu sonuçlar;

4.1. Sonuç: M , torsiyonu $\tau \neq 0$ ve eğriliğı $\kappa \neq 0$ olan $M^3(c)$ de sabit ortalama eğriliğıne sahip bir yüzey olmak üzere Teorem 3.2.2 nin 1.Durumu Teorem 3.3.1 de göz önüne alındığında $\tan \theta \neq 0$ elde edilir.

4.2. Sonuç: M , torsiyonu $\tau = 0$ ve eğriliğı $\kappa \neq 0$ olan $M^3(c)$ de sabit ortalama eğriliğıne sahip bir yüzey olmak üzere Teorem 3.2.2 nin 1.Durumu Teorem 3.3.1 de göz önüne alındığında $\tan \theta = 0$ elde edilir.

4.3. Sonuç: M , torsiyonu $\tau \neq 0$ ve eğriliğı $\kappa \neq 0$ olan $M^3(c)$ de sabit ortalama eğriliğıne sahip bir yüzey olmak üzere Teorem 3.2.2 nin 1.Durumu Teorem 3.3.2 de göz önüne alındığında $\tan \theta \neq 0$ elde edilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Hacısalihoğlu, H.,H.**, 1983, “Diferensiyel geometri”, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- [2] **Pourreza E., Abedi E.**, 2006, “Complete hypersurfaces in the hyperbolic space form with parallel shape oprator”, International Mathematical Forum ,no., **2**, 77-81
- [3] **Hacısalihoğlu, H.,H.**, 2002, “Lineer Cebir”, Cilt 1, 7.Baskı
- [4] **Sabuncuoğlu, A.**, 2004, “Diferensiyel geometri”, Ankara.
- [5] **Tamura, Michiko**, 2003. “Surfaces which contain helical geodesics in the 3-sphere”,Mathematical Science ,**37**, 59-65.
- [6] **O’Neil, B.**, 1966 ,”Elementary Differential Geometry”, Academic Press, New York.
- [7] **Spivak M.**, 1975, “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry”, Vol.III, Publish or Perish, Berkley.
- [8] **Massay W.S.**,1962, “Surfaces of Gaussssian curvature zero in Euclidean 3-space”, Tōhoku Math. J., **14**, 73-79.
- [9] **Pogorelov A. V.**,1956, “Extensions of the theorem of Gauss on sphercal representation to the case of surfaces of boundede extrinsic curvature”, (Russian) Dokl. Akad.Nauk. SSSR (N.S.) ,**111**,945-947.
- [10] **Hartman P. And Nirenberg L.**, 1951, “On spherical image maps whose Jacobians do not change sign”, Amer. J. Math., **81**.
- [11] **Kitagawa Y.**, 1988, “Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3 ”, j. Math. Soc. Japan, no., **3**, 457-476.
- [12] **Levi-Civita T.**, 1937, “Famiglie di superficie isoparametriche nell’ordinariospacio euclideo”, Atti. Accad. Naz Lincei. Rend. Cl.Sci. Fis. Mat. Natur. **26**, 355-362
- [13] **Pinkal.U.**, 1985, “Hopf Tori in S^3 ”, Invent. Math., **81**, 379-386
- [14] **Sasaki S.**, “On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space”, Kodai Math. Sem. Rep., **25**, 449-457
- [15] **Volkov Ju. A. And Vlademireova S. M.**, 1971, “Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobacevskiî space (Russian)”, Mat. Zamatki. **10**, English translation:Math. Notes ,**10**, 655-661
- [16] **Cartan E.**, **1938**, “Families de surfaces isoparametriques dans les escapes a courbure constante”, Ann. Mat. Pura Appl. **17**, 177-191
- [17] **Tamura M.**, 1992, “Surfaces which contain helical geodesics”, Geom. Dedicate **42**.
- [18] **Sasaki S.**, "On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space" ,Kodai Math.Sem.Rep.,**25**,449-457

6. ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Batman'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Adana'da tamamladım. 2002 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2006 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi dalında tezsiz yüksek lisansa başladım. 2007 yılında tezsiz programını bitirip Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisansa başladım ve devam etmekteyim.