

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN
SAYISAL ÇÖZÜMLER

Remziye SARIAYDIN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ

OCAK – 2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SAYISAL ÇÖZÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Remziye SARIAYDIN
(11121116)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :23/12/2013
Tezin Savunulduğu Tarih :10/01/2014

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Bülent KILIÇ (F.Ü)



OCAK-2014

ÖNSÖZ

Tez konumun planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ hocama üzerimdeki emeklerinden dolayı şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca saygı değer Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocamıza ve Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu zorlu süreçte bana destek veren ve hep yanımda olan sevgili aileme ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

Remziye SARIAYDIN

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	4
3. ADOMİAN AYRIŞIM METODU ve KESİRLİ STURM-LİOUVILLE PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI.....	11
3.1. Kesirli Sturm-Liouville Probleminin Çözümü için Adomian Ayrışım Metodu'nun Analizi	11
3.2. Kesirli Sturm-Liouville Problemleri İçin Özdeğerlerin Hesaplanması	14
3.2.1. Regüler Sturm-Liouville problemi	14
3.2.2. Regüler Kesirli Sturm-Liouville Problemi	16
3.2.3. Singüler Kesirli Sturm-Liouville problemi.....	19
3.2.4. Difüzyon operatörü için Kesirli Sturm-Liouville Problemi.....	21
3.2.5. Bessel denklemi için Kesirli Sturm-Liouville Problemi	24
3.2.6. Hidrojen Atom denklemi için Kesirli Sturm-Liouville Problemi	26
4. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU ve KESİRLİ STURM- LİOUVILLE PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI	30
4.1. Kesirli Sturm-Liouville Probleminin Çözümü için Homotopi Pertürbasyon Metodu	30
4.2. Kesirli Sturm-Liouville Problemleri için Homotopi Pertürbasyon Yöntemiyle Özdeğerlerin Hesaplanması	33
4.2.1. Regüler Kesirli Sturm-Liouville problemi.....	34
4.2.2. Kesirli Sturm-Liouville problemi.....	35
4.2.3. Singüler Kesirli Sturm-Liouville problemi.....	36
4.2.4. Kesirli Difüzyon Denklemi için Sturm-Liouville problemi	37

5.	MİZUTANİ YÖNTEMİ VE KESİRLİ STURM-LIOUVILLE	
	PREBLEMLERİNE UYGULAMALARI	39
5.1.	İki Spektruma Göre Ters Sturm-Liouville Problemi.....	39
5.2.	Kesirli Sturm-Liouville Problemlerine Uygulamaları.....	46
5.2.1.	Regüler Kesirli Sturm-Liouville problemi.....	46
5.2.2.	Regüler Kesirli Sturm-Liouville problemi.....	50
5.2.3.	Singüler Kesirli Sturm-Liouville problemi.....	53
6.	SONUÇ	56
	KAYNAKLAR	57
	ÖZGEÇMİŞ.....	60

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde bu alandaki gelişmelerin tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümünde temel tanım teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde kesirli Sturm-Liouville problemleri için Adomian Ayrışım metodu incelenmiştir ve ayrıca bazı uygulamalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde kesirli Sturm-Liouville problemleri için Homotopi Pertürbasyon metodu incelenmiştir ve bazı problemlerin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunmasıyla ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde ise Mizutani yöntemi ve kesirli Sturm-Liouville problemlerine uygulamaları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrışım metodu, Sturm-Liouville, Özdeğer, Kesirli hesap, Kesirli Özdeğer problemi, Caputo, Riemann Liouville, Potansiyel, Normlaştırıcı sayılar.

SUMMARY

Numerical Solutions for Fractional Eigenvalue Problems

This study consists of five chapters. In the first chapter, it is given historical development of the topic.

In the second chapter, basic definitions and theorems are presented.

In the third chapter Adomian Decomposition method is studied for fractional Sturm-Liouville problems and some applications are given.

In the forth chapter, Homotopy perturbation method is studied for same problems and numerical results are given about the topic.

In the last chapter, Mizutani method is examined . Furthermore, fractional Sturm Liouville problems are applied to Mizutani method.

Keywords: Adomian Decomposition method, Sturm-Liouville, Eigenvalue, Fractional calculus, Fractional Eigenvalue problem, Caputo, Riemann Liouville, Potential, Normalized Numbers.

TABLÖLAR LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı değerleri.....	5
Tablo 3.1. Örnek 3.2.2'deki yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri	19
Tablo 3.2. 3.2.3 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri	21
Tablo 3.3. 3.2.4 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri	24
Tablo 3.4. 3.2.5 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri	26
Tablo 3.5. 3.2.6 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri	29
Tablo 4.1. 4.2.1 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri.....	35
Tablo 4.2. 4.2.2 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri.....	36
Tablo 4.3. 4.2.3 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri.....	37
Tablo 4.4. 4.2.4 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri.....	38

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cümlesi
$!$	: Faktöriyel
λ	: Özdeğer
α	: Alfa
β	: Beta
φ	: Fi
ρ	: Ro
π	: Pi
Γ	: Gamma
$\sum$	: Toplam Sembolü
$\lim$	: Limit
$\tilde{u}$	: Yaklaşık Çözüm
A_n	: Adomian Polinomlar
$\int$	: İntegral
D	: Türev Operatörü
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
${}_0D_t^{-\alpha}$	: α .kattan integral
${}_0D_t^{\alpha}$	: α .mertebeden türev
${}_0^cD_t^{\alpha}$	: α .mertebeden Caputo türevi
$L_2[a, b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Tam sayılı mertebeden türev ve integralin geliştirilmesi ile kesirli hesap tekniği ortaya çıkmıştır. Kesirli hesaplama ile hesaplarımızın duyarlılığı artmış hatta birçok denklemin yorumlanmasında büyük ölçüde etkili olmuştur. 20. yy.dan sonra hızla gelişen teknoloji ile tıp, mühendislik, fizik, ekonomi, eczacılık gibi birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır. Kesirli türev ve integralin temelleri 300 yıla dayanmaktadır. Bu süreç 1695 yılında L'Hospital'in, Leibniz'e $y = f(x)$ olmak üzere $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevin ifadesindeki n sayısının $\frac{1}{2}$ olması ile türevin sonucunun ne olacağını sorması ile başlamıştır. Daha sonra bu alanda Euler, Lagrange, Fourier, Laplace, Sturm, Liouville gibi birçok ünlü matematikçi çalıştı. Bu matematikçiler kendi tanımlarını uyguladılar. Bu tanımların yaygın olanları Riemann-Liouville ve Grunwald-Letnikov tanımlarıdır. Fakat Caputo daha sonradan başlangıç şartları kullanarak Riemann-Liouville tanımını yenilemiştir. Caputo tanımı başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren tanım olmuştur. Bu sebeple kesirli diferensiyel denklemlere uygulanabilirliği yönünden oldukça kullanışlıdır.

Kesirli hesap konusu ile pek çok teorik çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda bu konuya ilgi oldukça artmıştır. Fizik ve mühendisliğin farklı alanlarına uygulanmıştır. Kesirli türev ve integral konusuna temel teşkil edecek çalışmalar Miller-Ross [1], Oldham-Spanier [2], Podlubny [3], Kilbas-Srivastava [4] ve [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28].

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir. Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX.–XX. yüzyıllarda birçok matematikçiler sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak

bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar, gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferensiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir. İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. 1984 yılında Mizutani spektral veri olarak özdeğerler ve normlaştırıcı sayıları kullanarak Sturm Liouville problemi için ters problemi tanımlamıştır. Daha sonra ki yıllarda Sturm Liouville problemlerinin pek çok türüne Mizutani metodu uygulanmıştır [29].

Son yıllarda Kesirli Sturm-Liouville problemleri ile ilgili çeşitli yöntemlerle sayısal sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır [5], [6], [16]. Tam sayılı mertebeden Sturm-Liouville problemleri ile ilgili çeşitli yöntemlerle sayısal çözümler elde edilmiştir. Kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemleri ise 2009 yılında Mdallal tarafından önce Adomian Ayrışım metodu [5], daha sonra Homotopi Pertürbasyon metoduyla çözülmüştür

[6]. Yine Diferensiyel Dönüşüm metodu yardımıyla benzer çözümler elde edilmiştir [16]. Ayrıca kesirli regüler Sturm-Liouville problemleri için temel teori M. Klimek ve Agrawal tarafından verilmiştir. Daha sonra 2013 yılında Bessel operatörü için kesirli Sturm-Liouville problemlerinin temel teorisi E. Baş tarafından verilmiştir [30].

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1. (Gamma Fonksiyonu)

Gamma fonksiyonu faktöriyelın reel sayılara genişletilmiş halidir.

$Re z > 0$ olmak üzere;

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Gamma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

1. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1}$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt$ ifadesine kısmi integrasyon uygulayalım.

$$u = t^z \Rightarrow du = z t^{z-1} dt \text{ ve } \int dv = \int e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \left[-e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} z t^{z-1} dt \\ &= \left[-e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \end{aligned}$$

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ kullanılarak

$\Gamma(1) = 1$, (2.1) denkleminde kullanılarak,

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1 = 3!$$

$\vdots$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

elde edilir.

Gamma fonksiyonu yardımıyla bazı değerler hesaplanmış olup aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı değerleri

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

2. $Z = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) noktalarında basit kutba sahip olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

elde edilir.

3. $1 < p < \infty$ ve eşleniği q ile Höldier eşitsizliğini Γ fonksiyonuna uygulayabiliriz. Şöyle ki $0 < x, y < \infty$ olsun. Öyle ki,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{x/p + y/q - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty (t^{x-1} e^{-t})^{1/p} (t^{y-1} e^{-t})^{1/q} dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{\infty} (t^{x-1} e^{-t})^{1/p} dt \int_0^{\infty} (t^{y-1} e^{-t})^{1/q} dt \\ &\leq \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q}$$

$$\ln \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \Gamma(x) + \frac{1}{q} \Gamma(y)$$

dır. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.2. (Hata Fonksiyonu)

$$\operatorname{erff}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1$$

Ayrıca erfc ile tanımlanan tamamlayıcı hata fonksiyonu;

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \text{ şeklindedir [3].}$$

Tanım 2.3. (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali)

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-q}}, \quad q > 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad n-1 \leq q \leq n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Riemann-Liouville kesirli integrali olarak adlandırılır [2].

Tanım 2.4. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi)

$q > 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad n-1 \leq q \leq n, \quad n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türevi ise,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-n+q}}$$

şeklindedir [2].

Tanım 2.5. (Mittag-Leffler Fonksiyonu)

e^z üstel fonksiyonu, tamsayı dereceden diferensiyel denklem teorisinde önemli bir role sahiptir. Bu fonksiyonun bir parametrelili genelleşmiş hali

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

şeklinde tanımlı Mittag-Leffler fonksiyonudur.

2-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

seri açılımıyla verilir [3].

Tanım 2.6. (Grunwald-Letnikov Kesirli Türevi)

$f(t)$ fonksiyonu alınırsa a ve t noktaları limit değerleri olmak üzere

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t - rh)$$

eşitliği sağlanır. Burada $m = p$ ise m . dereceden türevi, $m = -p$ ise m -katlı integrali temsil eder. Ayrıca şunu da belirtelim ki ν reel bir sayı olmak üzere $f(t) = (t - a)^{\nu}$ şeklindeki fonksiyonların kesirli türevleri Grunwald-Letnikov tarafından tanımlanan

$${}_a D_t^p (t - a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - p + 1)} (t - a)^{\nu - p}$$

formül ile hesaplanır [3].

Tanım 2.7. (Caputo Kesirli Türevi)

Caputo kesirli türevi,

$${}_a^c D_t^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - n}} d\tau, \quad (n - 1 < \alpha < n)$$

ile tanımlanır [1].

Tanım 2.8. (Mellin-Ross Fonksiyonu)

$E_t(v, a)$ ile gösterilen Mellin-Ross fonksiyonu e^{at} üstel fonksiyonunun kesirli integralini alırken kullanılır. Bu fonksiyonun özelliği hem Gama fonksiyonu, hem de Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazılmasındır. Öyle ki,

$$\begin{aligned} E_t(v, a) &= t^v e^{at} \Gamma^*(v, at) \\ E_t(v, a) &= t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + v + 1)} \\ &= t^v E_{1, v+1}(at) \end{aligned}$$

şeklinde olup, burada

$$\Gamma^*(v, t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx, \quad v > 0,$$

ifadesine de tamamlanmamış Gamma fonksiyonu denir [3].

Tanım 2.9. (Wright Fonksiyonu)

$$w(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Wright fonksiyonu denir [3].

Tanım 2.10. (Anger Fonksiyonu)

Anger fonksiyonu,

$$J_\gamma(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \cos(\gamma \theta - z \sin \theta) d\theta$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.11. (Adi Diferensiyel Denklem)

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden adi türevlerini ihtiva eden bir denkleme adi diferensiyel denklem denir.

Tanım 2.12. (Kısmi Diferensiyel Denklem)

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini ihtiva eden denkleme kısmi (parçalı) diferensiyel denklem denir.

Tanım 2.13. (Lineer Diferensiyel Denklem)

Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve bunun türevlerine göre 1. dereceden ve katsayılar sadece bağımsız değişkenin fonksiyonu veya sabit ise denkleme lineer diferensiyel denklem denir.

Tanım 2.14. (Yarı-lineer Diferensiyel Denklem)

Bir diferensiyel denklem denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer diferensiyel denklem adı verilir.

Tanım 2.15. (Operatör)

Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.16. (Başlangıç Değer Problemi)

Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ile onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine başlangıç değer problemi, verilen şartlara da başlangıç şartları adı verilir [17].

Tanım 2.17. (Sınır Değer Problemi)

Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyonun kendisi veya türevleri üzerinde bağımsız değişkene farklı değerler için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine sınır değer problemi, verilen şartlara da sınır değer şartları adı verilir [17].

Tanım 2.18. (Sturm-Liouville Denklemi)

$p(x)$, $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

şeklinde tanımlı L operatörüne Sturm-Liouville operatörü,

$$Ly + \lambda s(x)y = 0$$

şeklinde tanımlı denkleme ise Sturm-Liouville diferensiyel denklemi denir.

3. ADOMIAN AYRIŞIM METODU ve KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

3.1. Kesirli Sturm-Liouville Probleminin Çözümü için Adomian Ayrışım Metodu'nun Analizi

Kesirli mertebeden diferensiyel denklemleri göz önüne alalım. Buna göre kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunmasıyla ilgili sayısal çözümler vereceğiz.

Şimdi aşağıdaki özdeğer problemini ele alalım:

$$D^\alpha[p(x)y'(x)] + \lambda q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.1.1)$$

$$a y(0) + b y'(0) = 0, \quad c y(1) + d y'(1) = 0, \quad (3.1.2)$$

burada $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $q(x)$ ve $p(x)$ de sıfırdan büyük sürekli fonksiyonlardır. α . dereceden kesirli diferensiyeli

$$D^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{k-\alpha-1} y^{(k)}(t) dt \quad (3.1.3)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $k \in \mathbb{N}$ ve $k-1 < \alpha < k$ dır.

Kesirli Sturm-Liouville problemini çözebilmek için aşağıdaki algoritmayı verelim. (3.1.1) kesirli Sturm-Liouville denklemini göz önüne alalım. Yani,

$$D^\alpha[p(x)y'(x)] + \lambda q(x)y(x) = g(x), \quad x \in (0,1) \quad (3.1.4)$$

Burada (3.1.4) denklemini aşağıdaki formda yeniden yazabiliriz.

$$Ly(x) = N \quad (3.1.5)$$

Burada $L = L(x, D^\alpha, D') = D^\alpha p D'$ şeklinde seçilen operatörün tersinin olabilmesi için $N = N(\lambda, x, y, y')$ şeklinde bir lineer operatörü ele alalım. Burada, $D' = \frac{d}{dx}$ dır. L

operatörünü şu şekilde seçebiliriz,

$$L(x, D^\alpha, D') = D^\alpha p D' \quad (3.1.6)$$

Tanım 2.3.' te verilen integral operatörünü göz önüne alalım ve aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.1.

$k \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için eğer $k-1 < \alpha < k$ ve $y \in L_1[a, b]$ ise, bu takdirde

$$D_a^\alpha J_a^\alpha y(x) = y(x)$$

ve

$$J_a^\alpha D_a^\alpha y(x) = y(x) - \sum_{m=0}^{k-1} y^{(k)}(0^+) \frac{x^m}{m!} \quad (3.1.7)$$

olur.

Burada $b > a \geq 0$ ve $x > 0$ dır.

L operatörünün tersini

$$L^{-1} = \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha(.) dt$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi (3.1.5) denkleminin her iki tarafına L^{-1} operatörünü uygularsak,

$$(L^{-1}L)(y(x)) = \int_0^x \frac{1}{p(t)} (J_0^\alpha D^\alpha p D' y(t)) dt \quad (3.1.8)$$

elde edilir. (3.1.8) eşitliğini (3.1.7)'de göz önüne alırsak

$$J_0^\alpha D^\alpha p y'(t) = p(t) y'(t) - p(0) y'(0)$$

bulunur. Bu ifade (3.1.8)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (L^{-1}L)(y(x)) &= \int_0^x \frac{1}{p(t)} (p(t) y'(t) - p(0) y'(0)) dt \\ &= y(x) - y(0) - p(0) y'(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $y(0)$ ve $y'(0)$ bilinen başlangıç koşullarıdır. Bu takdirde

$$(L^{-1}L)(y(x)) = L^{-1}N$$

ifadesini ele alırsak

$$\begin{aligned} y(x) - y(0) - p(0) y'(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt &= L^{-1}N(\lambda, x, y, y') \\ y(x) &= y(0) + p(0) y'(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt + L^{-1}N(\lambda, x, y, y') \\ &= y(0) + p(0) y'(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt + \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha N(\lambda, x, y, y') dt \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

şeklinde hesaplanır. Adomian ayrışım metoduna göre $y(x)$ çözüm fonksiyonu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (3.1.10)$$

serisiyle ifade edilir ve A_n ,

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i y_i \right) \right]_{\mu=0} \quad (3.1.11)$$

şeklinde tanımlanan Adomian polinomları ve N terimi bu polinomların bir serisi olmak üzere

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.12)$$

şeklinde ifade edilir. (3.1.9) ve (3.1.12) denklemlerini karşılaştıracak olursak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y(0) + p(0)y'(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt + \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1} A_n(x) \quad (3.1.13)$$

elde edilir. Burada L^{-1} operatörü lineer bir operatördür. Sonuç olarak (3.1.13) denkleminde,

$$y_0(x) = y(0) + p(0)y'(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt, \quad (3.1.14)$$

$$y_{n+1}(x) = L^{-1} A_n(x), \quad n \geq 0$$

eşitliklerini yazabiliriz. Burada, $A_n(x) = -\lambda q(x)y_n(x)$.

3.2. Kesirli Sturm-Liouville Problemleri İçin Özdeğerlerin Hesaplanması

Tam sayılı mertebeden Sturm-Liouville problemleri ile ilgili çeşitli yöntemlerle sayısal çözümler elde edilmiştir. Kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemleri ise 2009 yılında Mdallal tarafından önce Adomian Ayrışım metodu [5], daha sonra Homotopi Pertürbasyon metoduyla çözülmüştür [6]. Ayrıca Diferensiyel Dönüşüm metodu yardımıyla benzer çözümler elde edilmiştir [16].

Bu bölümde Kesirli Sturm-Liouville probleminin Adomian yardımıyla çözümünü ele alacağız. Ayrıca difüzyon denklemi için kısa bir seri çözümü elde edip, buna göre özdeğerleri hesaplayacağız.

3.2.1. Regüler Sturm-Liouville problemi

$$-y''(x) + x^2 y(x) = \lambda y(x) \quad (3.2.1)$$

$$y(0) = h, \quad y'(0) = 1 \quad (3.2.2)$$

problemini ele alalım. (3.2.1) denklemi,

$$y'' = (x^2 - \lambda)y \quad (3.2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Adomian metodunu uygularsak,

$$L = \frac{d^2}{dx^2}, \quad L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

olmak üzere (3.2.3) denklemi operatör formunda,

$$Ly = (x^2 - \lambda)y \quad (3.2.4)$$

şeklinde yazılır. (3.2.4) ifadesinin her iki tarafına L^{-1} uygulanırsa,

$$L^{-1}Ly = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y] \quad (3.2.5)$$

olur. (3.2.5) denklemi y için çözümlürse,

$$y(x) - x y'(0) - y(0) = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y(x)]$$

ifadesi elde edilir. Burada (3.2.2) şartları göz önüne alınırsa,

$$y(x) = x + h + L^{-1}[(x^2 - \lambda)y(x)]$$

şeklinde olup y fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ serisine ayrıştırılıp ve $y_0 = x + h$ olarak tanımlanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 + L^{-1}[(x^2 - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} y_n]$$

olur. Buradan,

$$y_{k+1} = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y_k], \quad k \geq 0$$

biçiminde yazılabilir. $y_0 = x + h$ olmak üzere çözümler,

$$y_1(x) = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y_0(x)] = \int_0^x \int_0^x (x^2 - \lambda)(x + h) dx dx$$

$$= \int_0^x \left(\frac{hx^3}{3} + \frac{x^4}{4} - hx\lambda - \frac{x^2\lambda}{2} \right) dx$$

$$y_1(x) = \frac{hx^4}{12} + \frac{x^5}{20} - \frac{1}{2}hx^2\lambda - \frac{x^3\lambda}{6}$$

$$y_2(x) = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y_1(x)] = \int_0^x \int_0^x (x^2 - \lambda)y_1(x) dx dx$$

$$y_2(x) = \frac{hx^8}{672} + \frac{x^9}{1440} - \frac{7}{360}hx^6\lambda - \frac{13x^7\lambda}{2520} + \frac{1}{24}hx^4\lambda^2 + \frac{x^5\lambda^2}{120}$$

$$y_3(x) = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y_2(x)] = \int_0^x \int_0^x (x^2 - \lambda)y_2(x) dx dx$$

$$y_3(x) = \frac{hx^{12}}{88704} + \frac{x^{13}}{224640} - \frac{211hx^{10}\lambda}{907200} - \frac{59x^{11}\lambda}{1108800} + \frac{11hx^8\lambda^2}{10080} + \frac{17x^9\lambda^2}{90720} - \frac{1}{720}hx^6\lambda^3 - \frac{x^7\lambda^3}{5040}$$

$$y_4(x) = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y_3(x)] = \int_0^x \int_0^x (x^2 - \lambda)y_3(x) dx dx$$

$$y_4(x) = \frac{hx^{16}}{21288960} + \frac{x^{17}}{61102080} - \frac{4867hx^{14}\lambda}{3632428800} - \frac{4987x^{15}\lambda}{18162144000} + \frac{1201hx^{12}\lambda^2}{119750400} + \frac{343x^{13}\lambda^2}{222393600} - \frac{hx^{10}\lambda^3}{36288} - \frac{x^{11}\lambda^3}{285120} + \frac{hx^8\lambda^4}{40320} + \frac{x^9\lambda^4}{362880}$$

$$y_5(x) = L^{-1}[(x^2 - \lambda)y_4(x)] = \int_0^x \int_0^x (x^2 - \lambda)y_4(x) dx dx$$

$$y_5(x) = \frac{hx^{20}}{8089804800} + \frac{x^{21}}{25662873600} - \frac{40301hx^{18}\lambda}{8892185702400} - \frac{718657x^{19}\lambda}{844757641728000} + \frac{30973hx^{16}\lambda^2}{653837184000} + \frac{24749x^{17}\lambda^2}{3705077376000} - \frac{643hx^{14}\lambda^3}{3113510400} - \frac{1123x^{15}\lambda^3}{46702656000} + \frac{19hx^{12}\lambda^4}{47900160} + \frac{5x^{13}\lambda^4}{124540416} - \frac{hx^{10}\lambda^5}{3628800} - \frac{x^{11}\lambda^5}{39916800}$$

olarak bulunur. Buna göre seri çözüm yaklaşık olarak,

$$\begin{aligned}
y(x) &\cong \sum_{n=0}^5 y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + y_5(x) \\
&= x + h + \frac{hx^4}{12} + \frac{x^5}{20} - \frac{1}{2}hx^2\lambda - \frac{x^3\lambda}{6} + \frac{hx^8}{672} + \frac{x^9}{1440} \\
&\quad - \frac{7}{360}hx^6\lambda - \frac{13x^7\lambda}{2520} + \frac{1}{24}hx^4\lambda^2 + \frac{x^5\lambda^2}{120} + \frac{hx^{12}}{88704} \\
&\quad + \frac{x^{13}}{224640} - \frac{211hx^{10}\lambda}{907200} - \frac{59x^{11}\lambda}{1108800} + \frac{11hx^8\lambda^2}{10080} + \frac{17x^9\lambda^2}{90720} \\
&\quad - \frac{1}{720}hx^6\lambda^3 - \frac{x^7\lambda^3}{5040} + \frac{hx^{16}}{21288960} + \frac{x^{17}}{61102080} - \frac{4867hx^{14}\lambda}{3632428800} \\
&\quad - \frac{4987x^{15}\lambda}{18162144000} + \frac{1201hx^{12}\lambda^2}{119750400} + \frac{343x^{13}\lambda^2}{222393600} - \frac{hx^{10}\lambda^3}{36288} - \frac{x^{11}\lambda^3}{285120} \\
&\quad + \frac{hx^8\lambda^4}{40320} + \frac{x^9\lambda^4}{362880} + \frac{hx^{20}}{8089804800} + \frac{x^{21}}{25662873600} - \frac{40301hx^{18}\lambda}{8892185702400} \\
&\quad - \frac{718657x^{19}\lambda}{844757641728000} + \frac{30973hx^{16}\lambda^2}{653837184000} + \frac{24749x^{17}\lambda^2}{3705077376000} - \frac{643hx^{14}\lambda^3}{3113510400} \\
&\quad - \frac{1123x^{15}\lambda^3}{46702656000} + \frac{19hx^{12}\lambda^4}{47900160} + \frac{5x^{13}\lambda^4}{124540416} - \frac{hx^{10}\lambda^5}{3628800} - \frac{x^{11}\lambda^5}{39916800}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

3.2.2. Regüler Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$$D^{1/2}y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (3.2.6)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (3.2.7)$$

Regüler kesirli Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (3.2.6) denklemi operatör formunda

$$Ly = -\lambda y(x) \quad (3.2.8)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.8) ün her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $x = 0$ daki koşul göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
y(x) &= c - \frac{\lambda}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} y(t) dt \\
&= c - \frac{\lambda}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} y(t) dt ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $c = y_0$ olarak alınıp (3.1.10) serisine uygulandığında, bu durumda

$$y_0(x) = c,$$

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{-\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} y_0(t) dt ds \\
&= \frac{-c\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} dt ds \quad (s-t=u, -dt=du) \\
&= \frac{c\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^s (u)^{-1/2} du ds = \frac{2A\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x -s^{1/2} ds
\end{aligned}$$

$$y_1(x) = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} c\lambda x^{3/2},$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{-\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} y_1(t) dt ds \\
&= \frac{4}{3\pi} c\lambda^2 \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} t^{3/2} dt ds \\
&= \frac{4}{3\pi} c\lambda^2 \int_0^x \frac{3\pi s^2}{8} ds \\
&= 4c\lambda^2 \frac{1}{8} \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{6} c\lambda^2 x^3,$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= \frac{-\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} y_2(t) dt ds \\
&= \frac{-c\lambda^3}{6\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} t^3 dt ds \\
&= \frac{-c\lambda^3}{6\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{32s^{7/2}}{35} ds \\
&= -\frac{16c\lambda^3}{105\sqrt{\pi}} \frac{2}{9} x^{9/2}
\end{aligned}$$

$$y_3(x) = -\frac{32}{945\sqrt{\pi}} c\lambda^3 x^{9/2},$$

$$y_4(x) = \frac{32}{945\pi} c \lambda^4 \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} t^{9/2} dt ds$$

$$= \frac{32}{945\pi} c \lambda^4 \frac{63\pi}{256} \int_0^x s^5 ds$$

$$= \frac{1}{720} c x^6 \lambda^4,$$

⋮

$$y_{20}(x) = \frac{c x^{30} \lambda^{20}}{265252859812191058636308480000000},$$

$$y_{21}(x) = -\frac{4294967296 c x^{63/2} \lambda^{21}}{112275575285571389562324404930670903477890625\sqrt{\pi}},$$

$$y_{22}(x) = \frac{c x^{33} \lambda^{22}}{8683317618811886495518194401280000000},$$

$$y_{23}(x) = -\frac{34359738368 c x^{69/2} \lambda^{23}}{33738248995437774706530672059641953140588743359375\sqrt{\pi}},$$

$$y_{24}(x) = \frac{c x^{36} \lambda^{24}}{371993326789901217467999448150835200000000},$$

$$y_{25}(x) = -\frac{274877906944 c x^{75/2} \lambda^{25}}{13114900840751548972796135496384318234575359262373046875\sqrt{\pi}},$$

$$y_{26}(x) = 4.90247 \times 10^{-47} c \lambda^{26} x^{39}.$$

olarak bulunur. Böylece, $y(x) \cong Y(x) = \sum_{n=0}^{26} y_n(x)$ serisini elde ederiz. Tablo 3.1’de

$(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}$ ve $\lambda_{3,i})$ özdeğerlerin sayısal değerleri verilmiştir. Burada i , Adomian serisinde kullanılan terimlerin sayısını ifade etmektedir.

Tablo 3.1. Örnek 3.2.2'deki yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

i	$\lambda_{1,i}$	$\lambda_{2,i}$	$\lambda_{3,i}$
20	2.11027708	13.76538223	24.24321596
21	2.11027708	13.76538223	24.24329538
22	2.11027708	13.76538223	24.24328578
23	2.11027708	13.76538223	24.24328687
24	2.11027708	13.76538223	24.24328675
25	2.11027708	13.76538223	24.24328676

3.2.3. Singüler Kesirli Sturm-Liouville problemi

$$D^{1/2}y'(x) + \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (3.2.9)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (3.2.10)$$

problemini göz önüne alalım. (3.2.10) denklemi,

$$Ly = -\left(\frac{1}{x} + \lambda\right)y(x) \quad (3.2.11)$$

operatörü gibi yazılabilir. (3.2.11)'in her iki tarafına L^{-1} uygulanarak $y(0) = 0$ kullanıldığında,

$$\begin{aligned} y(x) &= cx - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left[\left(\frac{1}{t} + \lambda \right) y(t) \right] dt \\ &= cx - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\frac{1}{t} + \lambda \right) y(t) dt ds \end{aligned}$$

olur. Burada $B = y'(0)$ olarak verilsin. $y(x)$ için (3.1.10) serisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$y_0(x) = cx$$

$$y_1(x) = -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\frac{1}{t} + \lambda \right) t dt ds$$

Burada,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\frac{1}{t} + \lambda \right) t \, dt \\
&= \int_0^s (s-t)^{-1/2} (1 + \lambda t) \, dt \\
&= \int_0^s (s-t)^{-1/2} \, dt + \lambda \int_0^s t (s-t)^{-1/2} \, dt \quad (s-t = u^2) \\
&= \int_{\sqrt{s}}^0 (u^{-1}) 2u \, du - \lambda \int_{\sqrt{s}}^0 (s-u^2) (u^{-1}) 2u \, du \\
&= \left[-2u - 2\lambda \left(us - \frac{u^3}{3} \right) \right]_{\sqrt{s}}^0 \\
&= 2s^{1/2} + 2\lambda \left(\frac{2}{3} s^{3/2} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu integrali yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(2s^{1/2} + \frac{4\lambda}{3} s^{3/2} \right) ds = -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{4}{3} s^{3/2} + \frac{8\lambda}{15} s^{5/2} \right)_0^x \\
&= -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{20}{15} x^{3/2} + \frac{8\lambda}{15} x^{5/2} \right) = -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \left[x^{3/2} \left(\frac{20}{15} + \frac{8\lambda}{15} x \right) \right] \\
&= -\frac{4cx^{3/2}(5+2\lambda x)}{15\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

olacak şekilde $y_1(x)$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $y_2(x)$

$$y_2(x) = \frac{4c}{15\pi} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (t^{1/2} + \lambda t^{3/2}) (5 + 2\lambda t) \, dt \, ds$$

şeklinde olup burada,

$$\begin{aligned}
\int_0^s (s-t)^{-1/2} (t^{1/2} + \lambda t^{3/2}) (5 + 2\lambda t) \, dt &= \frac{1}{8} \pi s (20 + s\lambda (21 + 5s\lambda)) \\
\frac{1}{8} \pi \int_0^x (20s + 21s^2\lambda + 5s^3\lambda^2) \, ds &= \frac{\pi}{8} \left(10x^2 + 7x^3\lambda + \frac{5x^4\lambda^2}{4} \right)
\end{aligned}$$

dır. Son ifadeyi $y_2(x)$ 'te yerine yazarsak,

$$y_2(x) = \frac{4c}{15\pi} \frac{\pi}{8} \left(10x^2 + 7x^3\lambda + \frac{5x^4\lambda^2}{4} \right) = \frac{c}{120} (40x^2 + 28x^3\lambda + 5x^4\lambda^2)$$

daha sade olarak,

Tablo 3.2. 3.2.3 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

i	$\lambda_{1,i}$	$\lambda_{2,i}$	$\lambda_{3,i}$
20	1.66091840	13.55041801	20.51422606
21	1.66091840	13.55041792	20.51448518
22	1.66091840	13.55041793	20.51445151
23	1.66091840	13.55041793	20.51445562
24	1.66091840	13.55041793	20.51445514
25	1.66091840	13.55041793	20.51445520

$$y_2(x) = \frac{cx^2(40 + 28x\lambda + 5x^2\lambda^2)}{120},$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$y_3(x) = -\frac{8cx^{5/2}(1155 + 1122x\lambda + 363x^2\lambda^2 + 40x^3\lambda^3)}{51975\sqrt{\pi}}.$$

Böylece $n = 26$ e kadar seri açılımı yapılırsa, bu çözümler

$$y(x) \cong Y(x) = \sum_{n=0}^{25} y_n(x) \text{ şeklinde ifade edilir. Bu çözümlere göre } \lambda \text{ özdeğerlerinin}$$

sayısal sonuçları Tablo 3.2’de verilmiştir.

3.2.4. Difüzyon operatörü için Kesirli Sturm-Liouville Problemi

Kesirli difüzyon operatörü için Sturm-Liouville denklemi

$$D^\alpha y'(x) + [2\lambda p(x) + q(x)]y = \lambda^2 y$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $p(x) = x$, $q(x) = x^2$ alalım.

$$D^{1/2} y'(x) + (2\lambda x + x^2)y = \lambda^2 y \quad (3.2.12)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.2.13)$$

problemini göz önüne alalım. Burada (3.2.12) denklemini,

$$D^{1/2} y'(x) + (2\lambda x + x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (3.2.14)$$

formunda yazalım. (3.2.14) denklemini,

$$Ly = -(2\lambda x + x^2 - \lambda^2)y \quad (3.2.15)$$

operatörü şeklinde yazabiliriz. (3.2.15)'in her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $y(0)=1$ şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left[(2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y(t) \right] dt \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y(t) dt ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $y_0(x)=1$ dır. O halde,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y_0(t) dt ds \\ y_1(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) dt ds \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(\frac{2}{15} \sqrt{s} (8s^2 + 20s\lambda - 15\lambda^2) \right) ds \\ y_1(x) &= -\frac{4x^{3/2} (8x^2 + 28x\lambda - 35\lambda^2)}{105\sqrt{\pi}} \\ y_2(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y_1(t) dt ds \\ &= \frac{4}{105\pi} \int_0^x \left(\frac{7}{128} \pi s^2 (33s^4 + 198s^3\lambda + 65s^2\lambda^2 - 560s\lambda^3 + 240\lambda^4) \right) ds \\ y_2(x) &= \frac{4}{105\pi} \left(\frac{33\pi x^7}{128} + \frac{231}{128} \pi x^6 \lambda + \frac{91}{128} \pi x^5 \lambda^2 - \frac{245}{32} \pi x^4 \lambda^3 + \frac{35}{8} \pi x^3 \lambda^4 \right) \\ y_3(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y_2(t) dt ds \\ &= \frac{-32x^{9/2}}{1527701175\sqrt{\pi}} \left(25344x^6 + 266112x^5\lambda + 553280x^4\lambda^2 - \right. \\ &\quad \left. -1329468x^3\lambda^3 - 2407965x^2\lambda^4 + 4408950x\lambda^5 - 1616615\lambda^6 \right) \\ y_4(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y_3(t) dt ds \end{aligned}$$

$$y_4(x) = \frac{32}{1527701175\pi} \left[\left(\frac{18386775\pi x^{14}}{65536} + \frac{128707425\pi x^{13}\lambda}{32768} + \frac{486895045\pi x^{12}\lambda^2}{32768} - \frac{513348745\pi x^{11}\lambda^3}{65536} - \frac{13662660011\pi x^{10}\lambda^4}{131072} + \frac{82447365\pi x^9\lambda^5}{4096} + \frac{2061184125\pi x^8\lambda^6}{8192} - \frac{63047985\pi x^7\lambda^7}{256} + \frac{33948915\pi x^6\lambda^8}{512} \right) \right]$$

$$y_5(x) = -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y_4(t) dt ds$$

$$y_5(x) = \frac{-256x^{15/2}}{149254609748619375\sqrt{\pi}} \left[(84787200x^{10} + 1483776000x^9\lambda + 8156834560x^8\lambda^2 + 7228495680x^7\lambda^3 - 60508151536x^6\lambda^4 - 91181492136x^5\lambda^5 + 227364988725x^4\lambda^6 + 156318120000x^3\lambda^7 - 522037388250x^2\lambda^8 + 346505166000x\lambda^9 - 73632347775\lambda^{10}) \right]$$

$$y_6(x) = -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y_5(t) dt ds$$

$$y_6(x) = \frac{256}{149254609748619375\pi} \left[\frac{8492330793375\pi x^{21}}{16777216} + \frac{178338946660875\pi x^{20}\lambda}{16777216} + \frac{5149355358233625\pi x^{19}\lambda^2}{67108864} + \frac{22341837372768375\pi x^{18}\lambda^3}{134217728} - \frac{59895887163663285\pi x^{17}\lambda^4}{134217728} - \frac{265912984885509045\pi x^{16}\lambda^5}{134217728} + \frac{35272572697902645\pi x^{15}\lambda^6}{33554432} + \frac{65210795262929925\pi x^{14}\lambda^7}{8388608} - \frac{22713149421110925\pi x^{13}\lambda^8}{4194304} - \frac{6274580515646625\pi x^{12}\lambda^9}{524288} + \frac{4792803149022525\pi x^{11}\lambda^{10}}{262144} - \frac{600177266714025\pi x^{10}\lambda^{11}}{65536} + \frac{52647128659125\pi x^9\lambda^{12}}{32768} \right]$$

$$y_7(x) = -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) y_6(t) dt ds.$$

Tablo 3.3. 3.2.4 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

i	$\lambda_{1,i}$	$\lambda_{2,i}$	$\lambda_{3,i}$
5	0.307107	0.923288	1.04287
6	0.307107	0.923288	1.04287
7	0.307107	0.923288	1.04287
8	0.307107	0.923288	1.04287
9	0.307107	0.923288	1.04287
10	0.331758	0.975403	1.10254

$$\begin{aligned}
 y_7(x) = & -\frac{2048x^{21/2}}{144286028261598202601124628125\sqrt{\pi}} \left[907984768204800x^{14} \right. \\
 & + 22245626821017600x^{13}\lambda + 198972070236262400x^{12}\lambda^2 \\
 & + 676375253296512000x^{11}\lambda^3 - 446830660027011456x^{10}\lambda^4 \\
 & - 7711286005440329088x^9\lambda^5 - 6773246735023357680x^8\lambda^6 \\
 & + 35456789463684089592x^7\lambda^7 + 29700565961101459515x^6\lambda^8 \\
 & - 109988357370427085550x^5\lambda^9 - 945181730430102165x^4\lambda^{10} \\
 & + 174937426063592332140x^3\lambda^{11} - 174894841490548614435x^2\lambda^{12} \\
 & \left. + 70264545522134213250x\lambda^{13} - 10494055500059005875\lambda^{14} \right] \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$$y(x) \cong Y(x) = \sum_{n=0}^{10} y_n(x),$$

elde edilen seri çözümüne göre hesaplanan özdeğerlerin bazıları Tablo 3.3'te verilmiştir.

3.2.5. Bessel denklemi için Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$$D^\alpha y'(x) + \left[\lambda + x - \frac{v^2 - 1/4}{x^2} \right] y(x) = 0$$

denkleminde $\alpha = \frac{1}{2}$ alalım.

$$D^{1/2} y'(x) + \left[\lambda + x - \frac{v^2 - 1/4}{x^2} \right] y(x) = 0 \quad (3.2.16)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (3.2.17)$$

problemini göz önüne alalım. (3.2.16) denklemi operatör formunda

$$Ly = - \left[\lambda + x - \frac{v^2 - 1/4}{x^2} \right] y \quad (3.2.18)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.18)'in her iki tarafına L^{-1} uygulanarak ve $y(0) = 0$ şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned} y(x) &= cx^2 - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left(\lambda + t - \frac{v^2 - 1/4}{t^2} \right) y(t) dt \\ &= cx^2 - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + t - \frac{v^2 - 1/4}{t^2} \right) y(t) dt ds \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Burada $Bx = y'(0)$ olarak verilsin. O halde $y_0(x) = cx^2$ dır.

$$y_{k+1}(x) = - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + t - \frac{v^2 - 1/4}{t^2} \right) y_k(t) dt ds \quad (k \geq 0)$$

eşitliğini kullanarak özfonksiyonları elde edelim.

$$y_1(x) = - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + t - \frac{v^2 - 1/4}{t^2} \right) y_0(t) dt ds$$

$$y_1(x) = - \frac{cx^{3/2} (105 - 420v^2 + 64x^3 + 96x^2\lambda)}{315\sqrt{\pi}}$$

$$y_2(x) = - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + t - \frac{v^2 - 1/4}{t^2} \right) y_1(t) dt ds$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{1}{5040} c \left(420(1 - 4v^2)^2 x + \frac{605}{4} (1 - 4v^2) x^4 \right. \\ &\quad \left. + 33x^7 + 3x^3 (86 - 344v^2 + 35x^3) \lambda + 84x^5 \lambda^2 \right) \end{aligned}$$

$$y_3(x) = - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + t - \frac{v^2 - 1/4}{t^2} \right) y_2(t) dt ds$$

Tablo 3.4. 3.2.5 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

$\dot{I}$	$\lambda_{1,i}$	$\lambda_{2,i}$	$\lambda_{3,i}$
4	3.00664	3.16244	3.30174

$$y_3(x) = -\frac{1}{3859455600\sqrt{\pi}}c\left[\frac{2}{19}\sqrt{x}(x^2(1879799922\lambda + x(1015003275 + 32x(88x^2(46835 + 5376x^3) + 76x(192491 + 30912x^3)\lambda + 2907(4433 + 1344x^3)\lambda^2 + 2170560x^2\lambda^3))) + 2217072v^4(x^2(7325x + 13566\lambda) + 33075(-2 + \text{Log}[4])) - 1292v^2(2x^2(5819814\lambda + x(3142425 + 16x(12760x^2 + 45292x\lambda + 39897\lambda^2))) + 14189175(-2 + \text{Log}[4])) + 1527701175(-2 + \text{Log}[4]) - 97772875200v^6(-2 + \text{Log}[4]) - 1527701175(-1 + 4v^2)^3\text{Log}[x])\right]$$

$$y(x) \cong Y(x) = \sum_{n=0}^3 y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$$

Elde edilen seri çözümüne göre hesaplanan özdeğerlerin bazıları Tablo 3.4'te verilmiştir.

3.2.6. Hidrojen Atom denklemi için Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$$D^\alpha y'(x) + \left[\lambda + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] y(x) = 0,$$

denkleminde özel olarak $l = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ alalım.

$$D^{1/2} y'(x) + \left[\lambda + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] y(x) = 0, \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(1, \lambda) + y(1, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

problemini gözönüne alalım. (3.2.19) denklemini,

$$Ly = -\left(\lambda + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} \right) y \quad (3.2.21)$$

operatörü şeklinde yazılabiliriz. (3.2.21)'in her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $y(0) = 0$ şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned} y(x) &= cx^2 - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left[\left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) y(t) \right] dt \\ &= cx^2 - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) y(t) dt ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Bx = y'(0)$ olarak verilsin.

$$y_{k+1}(x) = -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) y_k(t) dt ds \quad (k \geq 0)$$

eşitliğini kullanarak özfonksiyonları elde edelim.

$$y_0(x) = cx^2$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) y_0(t) dt ds \\ &= -\frac{c}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) t^2 dt ds \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} I &= \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) t^2 dt ds \\ &= \int_0^s (s-t)^{-1/2} (\lambda t^2 + 2t - 6) dt ds \\ &= \lambda \int_0^s t^2 (s-t)^{-1/2} dt + 2 \int_0^s t (s-t)^{-1/2} dt - 6 \int_0^s (s-t)^{-1/2} dt \quad (s-t = u^2) \\ &= -2\lambda \int_{\sqrt{s}}^0 (s-u^2)^2 \frac{1}{u} u du - 4 \int_{\sqrt{s}}^0 (s-u^2) \frac{1}{u} u du + 12 \int_{\sqrt{s}}^0 \frac{1}{u} u du \\ &= -2\lambda \int_{\sqrt{s}}^0 (s^2 - 2su^2 + u^4) du - 4 \int_{\sqrt{s}}^0 (s-u^2) du + 12 \int_{\sqrt{s}}^0 du \\ &= -2\lambda \left(s^2 u - 2s \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right)_{\sqrt{s}}^0 - 4 \left(s u - \frac{u^3}{3} \right)_{\sqrt{s}}^0 + 12(u)_{\sqrt{s}}^0 \\ &= 2\lambda \frac{8}{15} s^{5/2} + \frac{8}{3} s^{3/2} - 12s^{1/2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu integralin sonucunu yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(\frac{16\lambda}{15} s^{5/2} + \frac{8}{3} s^{3/2} - 12 s^{1/2} \right) ds \\
&= -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{16\lambda}{15} \frac{2}{7} s^{7/2} + \frac{8}{3} \frac{2}{5} s^{5/2} - 12 \frac{2}{3} s^{3/2} \right) \Big|_0^x \\
&= -\frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{16}{15} \left(\frac{2\lambda}{7} x^{7/2} + x^{5/2} - \frac{15}{2} x^{3/2} \right) \\
&= \frac{-16cx^{3/2}}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{4\lambda x^2 + 14x - 105}{14} \right) \\
y_1(x) &= \frac{-8c x^{3/2} (-105 + 14x + 4\lambda x^2)}{105\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde $y_2(x)$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) y_1(t) dt ds \\
&= \frac{1}{420} c \left(112x(180 + (-21+x)x) + x^3(-516 + 55x)\lambda + 7x^5\lambda^2 \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve $y_3(x)$,

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda + \frac{2}{t} - \frac{6}{t^2} \right) y_2(t) dt ds \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{4729725} 16c\sqrt{x} (6006(56700 + x(8505 + 8(-42+x)x)) \right. \\
&\quad + 429x^2(20349 + x(-1857 + 74x))\lambda + 78x^4(-1023 + 92x)\lambda^2 \\
&\quad \left. + 560x^6\lambda^3 - 170270100\text{Log}[4x]) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
y(x) &\cong Y(x) = \sum_{n=0}^3 y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) \\
&= cx^2 - \frac{8Ax^{3/2}(-105 + 14x + 4\lambda x^2)}{105\sqrt{\pi}} \\
&\quad + \frac{1}{420} A \left(112x(180 + (-21+x)x) + x^3(-516 + 55x)\lambda + 7x^5\lambda^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{4729725} 16C\sqrt{x} (6006(56700 + x(8505 + 8(-42+x)x)) \right. \\
&\quad + 429x^2(20349 + x(-1857 + 74x))\lambda + 78x^4(-1023 + 92x)\lambda^2 \\
&\quad \left. + 560x^6\lambda^3 - 170270100\text{Log}[4x]) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilen seri çözümüne göre hesaplanan özdeğerler Tablo 3.5'te verilmiştir.

Tablo 3.5. 3.2.6 probleminin yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

$\dot{I}$	$\lambda_{1,i}$	$\lambda_{2,i}$	$\lambda_{3,i}$
4	-13.2509	-13.2127	-13.1746

4. HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODU ve KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

4.1. Kesirli Sturm-Liouville Probleminin Çözümü için Homotopi Pertürbasyon Metodu

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri yeniden göz önüne alıp buna göre kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının HPM metoduyla bulunan sayısal çözümlerini vereceğiz.

Şimdi aşağıdaki özdeğer problemini ele alalım:

$$D^\alpha [p(x)y'(x)] + h(x)y'(x) + \sigma(x)y(x) + \lambda q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad (4.1.1)$$

$$a y(0) + b y'(0) = 0, \quad c y(1) + d y'(1) = 0, \quad (4.1.2)$$

burada $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $q(x), p(x), \sigma(x)$ sıfırdan büyük sürekli fonksiyonlardır. α . dereceden kesirli diferansiyel operatörü

$$D^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{k-\alpha-1} y^{(k)}(t) dt \quad (4.1.4)$$

ile verilsin. Burada $k \in \mathbb{N}$ ve $k-1 < \alpha < k$ dır.

Kesirli Sturm-Liouville problemini çözebilmek için aşağıdaki algoritmayı verelim. (4.1.1) kesirli Sturm-Liouville denklemini göz önüne alalım. Yani,

$$D^\alpha [p(x)y'(x)] + h(x)y'(x) + \sigma(x)y(x) + \lambda q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad (4.1.5)$$

Tanım1.3.' te verilen integral operatörünü göz önüne alalım ve aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1.2.

$k \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için eğer $k-1 < \alpha < k$ ve $y \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$D_a^\alpha J_a^\alpha y(x) = y(x)$$

ve

$$J_a^\alpha D_a^\alpha y(x) = y(x) - \sum_{m=0}^{k-1} y^{(m)}(0^+) \frac{(x-m)^m}{m!} \quad (4.1.6)$$

olur.

Burada $b > a \geq 0$ ve $x > 0$ dır.

Kolaylık için (4.1.5) diferansiyel denklemini aşağıdaki genel formda ele alalım.

$$F_H(y) = 0, \quad x \in \Omega \quad (4.1.7)$$

Burada F_H bir diferensiyel operatördür. Bir homotopi oluşturalım,

$$\tilde{y}(x, \eta) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

ki bu (4.1.8) denklemini karşılar.

$$H(\tilde{y}, \eta) = (1 - B(\eta)) \{L_H[\tilde{y} - y_0]\} + h A(\eta) F_H(\tilde{y}) = 0 \quad (4.1.8)$$

Burada L_H ,

$$L_H[0] = 0,$$

$$h \neq 0, \quad A(0) = B(0) = 0 \quad \text{ve} \quad A(1) = B(1) = 1$$

lineer operatörünü sağlar.

Burada $\eta \in (0, 1)$ bir parametredir ve y_0 da başlangıç yaklaşımıdır.

O halde şunu belirtebiliriz;

$$\begin{aligned} H(\tilde{y}, 0) &:= L_H[\tilde{y}(x, 0) - y_0(x)] = 0, \\ H(\tilde{y}, 1) &:= F_H(\tilde{y}(x, 1)) = 0, \end{aligned}$$

ve bunların sırasıyla karşılıklı olarak denk olduğunu göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x, 0) &= y_0(x), \\ \tilde{y}(x, 1) &= y(x), \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

(4.1.9) denklemi şunu gösterir, (4.1.8) denkleminin $\tilde{y}$ çözümü, başlangıç yaklaşımı y_0 dan y ye sürekli olarak değişir. $A(\eta)$ ve $B(\eta)$ tümü analitik ve η küçük bir parametre olmak üzere $\tilde{y}$ nin çözümü olduğunu varsayarak, bunları ifade etmek için pertürbasyon teorisini kullanabiliriz.

$$\tilde{y}(x, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n(x) \eta^n \quad (4.1.10)$$

$$A(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{1,n} \eta^n \quad \text{ve} \quad B(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2,n} \eta^n, \quad (4.1.11)$$

(4.1.10) ve (4.1.11), (4.1.8) denkleminde yerine yazılıp ve η^n nin katsayıları sıfıra eşitlenip homojen koşullara göre çözüldüğünde

$$\begin{aligned} H(\tilde{y}, \eta) &= \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} S_{2,n} \eta^n\right) \{L_H[\tilde{y} - y_0]\} + h \sum_{n=0}^{\infty} S_{1,n} \eta^n F_H(\tilde{y}) = 0 \\ H(\tilde{y}, \eta) &= L_H[\tilde{y} - y_0] - \sum_{n=0}^{\infty} S_{2,n} \eta^n L_H[\tilde{y} - y_0] + h \sum_{n=0}^{\infty} S_{1,n} \eta^n F_H(\tilde{y}) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$L_H[\tilde{y}(x, 0) - y_0(x)] = 0$ eşitliğini (4.1.12) denkleminde göz önüne aldığımızda,

$$H(\tilde{y}, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} S_{2,n} \eta^n L_H \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n(x) \eta^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_{n-1}(x) \eta^n \right] + h \sum_{n=0}^{\infty} S_{1,n} \eta^n F_H(\tilde{y}) = 0 \quad (4.1.13)$$

elde edilir.

(4.1.5) denklemini $F_H(y) = 0$, $x \in \Omega$ formunda ele alıp (4.1.13) denkleminde uygularsak

$\tilde{y}_n(x)$ ($n \geq 1$) için denklem elde edilir. A ve B operatörlerini

$$A(\eta) = \eta \text{ ve } B(\eta) = \eta, \quad (4.1.14)$$

şeklinde seçelim ve $h = 1$ parametresine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{L_H[\tilde{y}_n] - L_H[\tilde{y}_{n-1}] + D^\alpha[p(x)\tilde{y}_{n-1}'(x)] + h(x)\tilde{y}_{n-1}'(x) + \sigma(x)\tilde{y}_{n-1}(x) + \lambda q(x)\tilde{y}_{n-1}(x)\} \eta^n = 0, \quad (4.1.15)$$

denklemini elde edilir. η^n 'in kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$L_H[\tilde{y}_n] - L_H[\tilde{y}_{n-1}] + D^\alpha[p(x)\tilde{y}_{n-1}'(x)] + h(x)\tilde{y}_{n-1}'(x) + \sigma(x)\tilde{y}_{n-1}(x) + \lambda q(x)\tilde{y}_{n-1}(x) = 0, \quad (4.1.16)$$

Başlangıç yaklaşımı y_0 , bir çözüm olarak seçilirse

$$L_H[\tilde{y}_0(x)] = 0, \quad (4.1.17)$$

olur.

Bununla birlikte $y(x)$ 'in tam çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = \lim_{\eta \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n(x) \eta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n(x)$$

Lineer operatör L_H için birçok seçenek vardır, bu nedenle $y_0(x)$ 'in başlangıç yaklaşımı için birden fazla seçeneğimiz olabilir, fakat burada aşağıdaki ifadeyi kullanalım.

$$L_H[\tilde{y}] = D^\alpha[p \tilde{y}'].$$

Şimdi (4.1.16) denkleminin her iki tarafına L^{-1} operatörünü uygulandığında,

$$\tilde{y}_n(x) - \tilde{y}_{n-1}(x) + \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha D^\alpha [p(t)\tilde{y}_{n-1}'(t)] dt + \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha H dt = 0$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_n(x) - \tilde{y}_{n-1}(x) + \int_0^x \frac{1}{p(t)} [p(t)\tilde{y}'_{n-1}(t) - p(0)\tilde{y}'_{n-1}(0)] dt + \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha H dt &= 0, \\ \tilde{y}_n(x) - \tilde{y}_{n-1}(x) + \int_0^x \tilde{y}'_{n-1}(t) dt - p(0)\tilde{y}'_{n-1}(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt + \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha H dt &= 0, \\ \tilde{y}_n(x) - \tilde{y}_{n-1}(x) + \tilde{y}_{n-1}(x) - \tilde{y}_{n-1}(0) - p(0)\tilde{y}'_{n-1}(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt + \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha H dt &= 0,\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\tilde{y}_n(x) = \tilde{y}_n(0) + p(0)\tilde{y}'_n(0) \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt + \int_0^x \frac{1}{p(t)} J_0^\alpha H dt,$$

genel çözümünü elde ederiz. Burada

$$H = -h(x)\tilde{y}_{n-1}'(x) - \sigma(x)\tilde{y}_{n-1}(x) - \lambda q(x)\tilde{y}_{n-1}(x),$$

ve

$$\tilde{y}_0(x) = y(0) + p(0)y'(0)x,$$

dır.

4.2. Kesirli Sturm-Liouville Problemleri için Homotopi Pertürbasyon Yöntemiyle Özdeğerlerin Hesaplanması

Tam sayılı mertebeden Sturm-Liouville problemleri ile ilgili çeşitli yöntemlerle sayısal çözümler elde edilmiştir. Kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemleri ise 2009 yılında Mdallal tarafından önce Adomian Ayrışım metodu [5], daha sonra Homotopi Pertürbasyon metoduyla çözülmüştür [6]. Ayrıca Diferensiyel Dönüşüm metodu yardımıyla benzer çözümler elde edilmiştir [16].

Bu bölümde de Kesirli Sturm-Liouville problemleri (4.1.1) ve (4.1.2)'de Homotopi Pertürbasyon metodu kullanılarak özdeğerlerin sayısal hesaplamalarını yapacağız. Sayısal simülasyonların kapsamlı bir dizisi $\alpha = 0.70$ ve 1.0 aralığında gerçekleşmiştir. Artan α etkisinde özdeğerler ve özfonksiyonları incelemek için bu sonuçları vereceğiz. $\alpha_1 = 0.75$, $\alpha_2 = 0.85$, $\alpha_3 = 0.90$, $\alpha_4 = 0.95$ ve $\alpha_5 = 1.0$ olmak üzere α 'nın bu değerleri için aşağıdaki uygulamaları verelim.

4.2.1. Regüler Kesirli Sturm-Liouville problemi

$$D^\alpha[y'(x)] + y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (4.2.1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (4.2.2)$$

Regüler kesirli özdeğer problemini ele alalım. Burada $0 < \alpha \leq 1$ dir.

L_H lineer operatörünü aşağıdaki gibi seçelim.

$$L_H[\tilde{y}(x, \eta)] = D^\alpha[\tilde{y}'].$$

Metod uygulandığında $\tilde{y}_n$ için kesirli bir diferensiyel denklem elde ederiz.

$$D^\alpha[\tilde{y}_n'(x)] + \tilde{y}_{n-1}'(x) + \lambda \tilde{y}_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.2.3)$$

dolayısıyla $\tilde{y}_n(0) = \tilde{y}_n'(0) = 0$ dır.

(4.2.3) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x J_0^\alpha [\tilde{y}_{n-1}'(t) + \lambda \tilde{y}_{n-1}(t)] dt, \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{\alpha-1} [\tilde{y}_{n-1}'(t) + \lambda \tilde{y}_{n-1}(t)] dt ds. \end{aligned}$$

Burada $\tilde{y}_0(x) = y(0)$.

Dolayısıyla homotopi serisinin ilk birkaç terimi,

$$\tilde{y}_0(x) = y(0),$$

$$\tilde{y}_1(x) = -\frac{y(0) x^{\alpha+1} \lambda}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{2^{-2(\alpha+1)} y(0) \sqrt{\pi} x^{2\alpha+1} \lambda (2\alpha + x\lambda + 2)}{\Gamma(\alpha + \frac{3}{2}) \Gamma(\alpha + 2)},$$

$$\tilde{y}_3(x) = -\frac{2y(0) x^{3\alpha+1} \lambda ((9\alpha^2 + 2x\lambda + 5)\alpha + x\lambda(x\lambda + 6) + 6)\Gamma(2\alpha + 2)}{3\Gamma(2\alpha + 3)\Gamma(3\alpha + 3)},$$

şeklinde elde edilen seri çözümüne göre hesaplanan özdeğerler Tablo 4.1’de verilmiştir.

Tablo 4.1. 4.2.1 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

i	$\lambda_1^{\alpha_i}$	$\lambda_2^{\alpha_i}$	$\lambda_3^{\alpha_i}$
1	3.7921553	19.5210356	42.8785424
2	3.6813513	20.4291319	49.0908959
3	3.6480622	21.2151013	52.9993821
4	3.6287583	22.2173756	57.5810164
5	3.6230893	23.4423372	62.9297232

4.2.2. Kesirli Sturm-Liouville problemi

$$D^\alpha[y'(x)] + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (4.2.4)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0, \quad (4.2.5)$$

kesirli özdeğer problemini ele alalım. Burada $0 < \alpha \leq 1$ dir. L_H yardımcı lineer operatörüne göre

$$L_H[\tilde{y}(x, \eta)] = D^\alpha[\tilde{y}']$$

ifadesi yazılabilir. $\tilde{y}_n$ için kesirli diferansiyel denklem ise

$$D^\alpha[\tilde{y}'(x)] + \lambda \tilde{y}_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1,$$

şeklindedir. Yine bu denklemin genel çözümü ise

$$\tilde{y}_n(x) = -\frac{\lambda^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{\alpha-1} \tilde{y}_{n-1}(t) dt ds.$$

Burada $\tilde{y}_0(x) = y'(0)x$.

Dolayısıyla yaklaşık homotopi çözümü;

$$y(x) = \lim_{\eta \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n(x) \eta^n \approx \sum_{n=0}^{25} \tilde{y}_n(x),$$

ile verilir.

Burada

$$\tilde{y}_0(x) = y'(0)x,$$

$$\tilde{y}_1(x) = -\frac{y'(0)x^{\alpha+2}\lambda^2}{(\alpha^2 + 3\alpha + 2)\Gamma(\alpha+1)},$$

Tablo 4.2. 4.2.2 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

i	$\lambda_1^{\alpha_i}$	$\lambda_2^{\alpha_i}$	$\lambda_3^{\alpha_i}$
1	1.9436127	4.1057524	6.2985200
2	1.9648174	4.3916281	6.8808742
3	1.9822434	4.5523140	7.2160595
4	2.0036520	4.7259188	7.5815118
5	2.0287578	4.9131804	7.9786657

$$\tilde{y}_2(x) = \frac{y'(0)(1/x)^{-\alpha} x^{\alpha+3} \lambda^4}{\Gamma(2(\alpha+2))},$$

$$\tilde{y}_3(x) = \frac{y'(0) \pi x^{3\alpha+4} \lambda^6 \csc(\pi\alpha)}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(3\alpha+5)}.$$

şeklinde elde edilen seri çözümüne göre hesaplanan özdeğerler Tablo 4.2’de verilmiştir.

4.2.3. Singüler Kesirli Sturm-Liouville problemi

$$D^\alpha[y'(x)] + \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (4.2.6)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0, \quad (4.2.7)$$

Singüler kesirli özdeğer problemini ele alalım. Burada $0 < \alpha \leq 1$ dır. L_H yardımcı lineer operatörüne göre

$$L_H[\tilde{y}(x, \eta)] = D^\alpha[\tilde{y}']$$

ifadesi yazılabilir. $\tilde{y}_n$ için kesirli bir diferensiyel denklem

$$D^\alpha[\tilde{y}_n'(x)] + \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)\tilde{y}_{n-1}(x) = 0,$$

şeklinde yazılarak bu denklemin genel çözümü ise,

$$\tilde{y}_n(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{t} + \lambda\right) \tilde{y}_{n-1}(t) dt ds.$$

Burada yaklaşık homotopi serisinin ilk birkaç terimi,

$$\tilde{y}_0(x) = y'(0)x,$$

Tablo 4.3. 4.2.3 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

i	$\lambda_1^{\alpha_i}$	$\lambda_2^{\alpha_i}$	$\lambda_3^{\alpha_i}$
1	0.9968539	13.6966325	35.5149952
2	0.8671438	15.4253389	42.8489326
3	0.8247511	16.5498928	47.3349446
4	0.7960983	17.8574076	52.4663825
5	0.7805164	19.3607236	58.3363502

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{y'(0)x^{\alpha+1}(\alpha + x\lambda + 2)}{(\alpha^2 + 3\alpha + 2)\Gamma(\alpha + 1)},$$

$$\tilde{y}_2(x) = \frac{2^{-2\alpha-3}y'(0)\sqrt{\pi}x^{2\alpha+1}(x^2(\alpha + 2)\lambda^2 + x(\alpha + 3)(2\alpha + 3)\lambda + 2(\alpha + 2)(2\alpha + 3))}{\Gamma(\alpha + 5/2)\Gamma(\alpha + 3)}$$

şeklinde elde edilen seri çözümüne göre hesaplanan özdeğerler Tablo 4.3'te verilmiştir.

4.2.4. Kesirli Difüzyon Denklemi için Sturm-Liouville problemi

$$D^\alpha y'(x) + (2\lambda x + x^2)y(x) = \lambda^2 y(x) \quad (4.2.8)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (4.2.9)$$

problemini göz önüne alalım. Burada (4.2.8) denklemini,

$$D^\alpha y'(x) + (2\lambda x + x^2 - \lambda^2)y(x) = 0 \quad (4.2.10)$$

şeklinde yazalım. Burada $0 < \alpha \leq 1$ dir. (4.2.10) denklemini L_H lineer operatörüne göre,

$$L_H [\tilde{y}(x, \mu)] = D^\alpha [\tilde{y}']$$

operatörü formunda yazabiliriz.

Yukarıdaki analizden sonra $\tilde{y}_n$ için kesirli bir adi diferensiyel denklem elde ederiz.

$$D^\alpha [\tilde{y}_n(x)] + (2\lambda x + x^2 - \lambda^2)\tilde{y}_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1 \quad (4.2.11)$$

Dolayısıyla $\tilde{y}_n(0) = \tilde{y}_n'(0) = 0$ dır.

(4.2.11) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x J_0^\alpha \left[(2\lambda t + t^2 - \lambda^2) \tilde{y}_{n-1}(t) \right] dt, \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{\alpha-1} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) \tilde{y}_{n-1}(t) dt ds \end{aligned}$$

şeklinde olup burada $\tilde{y}_0(x) = y(0)$.

Dolayısıyla homotopi serisinin ilk birkaç terimi,

$$\tilde{y}_0(x) = y(0),$$

$$\tilde{y}_1(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{\alpha-1} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) \tilde{y}_0(t) dt ds$$

$$\tilde{y}_1(x) = -\frac{y(0) x^{1+\alpha} \left((2x^2 + 2x(3+\alpha)\lambda - (2+\alpha)(3+\alpha)\lambda^2) \right)}{(3+\alpha)\alpha(2+3\alpha+\alpha^2)\Gamma[\alpha]},$$

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{\alpha-1} (2\lambda t + t^2 - \lambda^2) \tilde{y}_1(t) dt ds$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(x) = & \frac{y(0)}{\alpha(2+3\alpha+\alpha^2)\Gamma[\alpha]\Gamma[7+2\alpha]} 4\Gamma[4+\alpha] \\ & \left(\frac{x^{2+2\alpha} (x^4(4+\alpha)(5+\alpha) + 2x^3(3+\alpha)(4+\alpha)(5+\alpha)\lambda}{2(3+\alpha)} \right. \\ & + \frac{-x^2(3+\alpha)(5+2\alpha)(-4+\alpha+\alpha^2)\lambda^2}{2(3+\alpha)} \\ & \left. + \frac{-4x(2+\alpha)(3+\alpha)^2(5+2\alpha)\lambda^3 + 2(2+\alpha)(3+\alpha)(3+2\alpha)(5+2\alpha)\lambda^4}{2(3+\alpha)} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilen seri çözümüne göre hesaplanan özdeğerler Tablo 4.4'te verilmiştir.

Tablo 4.4. 4.2.4 probleminde yaklaşık çözüm fonksiyonuna göre bazı λ değerleri

i	$\lambda_1^{\alpha_i}$	$\lambda_2^{\alpha_i}$	$\lambda_3^{\alpha_i}$
1	0.382809	0.569984	0.700347
2	0.414218	0.588733	0.717327
3	0.443732	0.608099	0.735050
4	0.472051	0.628058	0.753510
5	0.526505	0.669648	0.792593

5. MİZUTANİ YÖNTEMİ VE KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PREBLEMLERİNE UYGULAMALARI

5.1. İki Spektruma Göre Ters Sturm-Liouville Problemi

$p(x)$ ve $q(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, h ve H reel sayılar olmak üzere

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (5.1.1)$$

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$$y'' + (\mu - p(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (5.1.3)$$

şeklindeki iki Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım.

(5.1.1) - (5.1.2) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve (5.1.3) - (5.1.2) probleminin özdeğerleri de $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. (5.1.1) - (5.1.2) probleminin özfonksiyonu $\phi(x, \lambda_n)$, (5.1.3) - (5.1.2) probleminin özfonksiyonu da $\phi(x, \mu_n)$ olsun. (5.1.1) - (5.1.2) probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\rho_n = \int_0^{\pi} \phi^2(x, \lambda_n) dx$$

olacak şekilde özdeğer ve normlaştırıcı sayıları için asimptotik formüller

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (5.1.4)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (5.1.5)$$

formundadır. Ayrıca $\phi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları

$$\phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (5.1.6)$$

formundadır. Benzer şekilde (5.1.3) - (5.1.2) problemi için de asimptotik formüller

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir.

Spektral verilere göre $q(x)$ potansiyelinin, h ve H sayılarının bulunmasına ters Sturm-Liouville problemi denir. Bu spektral veriler Sturm-Liouville operatörünün spektrumu, normlaştırıcı sayıları, spektral fonksiyonu, nodal noktaları olabilir.

$q(x) \in C^1[0, \pi]$ reel değerli bir fonksiyon, h ve H 'ın bilinen reel sayılar olduğunu kabul edelim. Ayrıca (5.1.1)-(5.1.2) probleminin spektral karakteristikleri $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'lerde verilsin. $p(x) \in C^1[0, \pi]$ bilinmeyeniyle (5.1.3)-(5.1.2) probleminin $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ farklı spektral karakteristiklerinin verildiğini kabul edelim.

Lemma 5.1.1. $\lambda \geq 1$ ve $0 \leq x \leq \pi$ olmak üzere

$$|\phi(x, \lambda)| + \frac{|\phi'(x, \lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \leq M, \quad (5.1.7)$$

$$\sqrt{\lambda} |\dot{\phi}(x, \lambda)| + |\dot{\phi}'(x, \lambda)| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır.

İspat. $\lambda \geq 1$ olduğundan

$$\phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

alınabilir. (5.6) eşitliğinin x 'e ve λ 'ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$\phi'(x, \lambda) = \phi_x(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + h \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\dot{\phi}(x, \lambda) = \phi_{\lambda}(x, \lambda) = -\frac{x}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{hx}{2\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x$$

$$- \frac{h}{2\sqrt{\lambda}\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right)$$

$$\dot{\phi}'(x, \lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x - \frac{x}{2} \cos \sqrt{\lambda} x$$

$$+ \frac{h}{2\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} x - \frac{hx}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right)$$

elde edilir. $-1 \leq \cos \sqrt{\lambda} x \leq 1$, $-1 \leq \sin \sqrt{\lambda} x \leq 1$, $0 \leq x \leq \pi$ eşitsizlikleri göz önüne alınarak ve yukarıda elde edilen eşitlikler (5.7) de yazılarak

$$\begin{aligned} |\phi(x, \lambda)| + |\phi'(x, \lambda)| / \sqrt{\lambda} &\leq M, \\ \sqrt{\lambda} |\dot{\phi}(x, \lambda)| + |\dot{\phi}'(x, \lambda)| &\leq M \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.1. Eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n|$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |p(x) - q(x)| \leq CA$$

dır. Burada $C; h, H$ ve $q(x)$ 'e bağlı pozitif bir sabittir.

İspat.

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right] \quad (5.1.8)$$

olmak üzere $F(x, s)$ fonksiyonu $0 \leq x, s \leq \pi$ de sürekli, iki defa diferensiyellenebilirdir.

$$K(x, s) + \int_0^x K(x, t) F(t, s) dt + F(x, s) = 0, \quad 0 \leq s \leq x \leq \pi \quad (5.1.9)$$

Esas integral denklemi ikinci tür Volterra integral denklemdir ve her sabit x için bir tek sürekli $K(x, s)$ çözümüne sahiptir. Ayrıca $K(x, s)$ çözümü $0 \leq s \leq x \leq \pi$ aralığında ikinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilirdir. Ayrıca

$$K_{xx} - p(x)K = K_{ss} - q(s)K, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (5.1.10)$$

diferensiyel denkleminin

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (p(t) - q(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (5.1.11)$$

$$K_s(x, 0) - hK(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (5.1.12)$$

sınır şartlarını sağlayan bir tek $K(x, s)$ çözüm fonksiyonu vardır.

(5.1.9) integral denklemi ardışık yaklaşımlar yöntemiyle çözelim. Bu denklemde $F(x, s)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyon olup $K(x, s)$ çözümü bulunacaktır.

Önce $F(s, t)$ 'i ele alalım ve aşağıdaki gibi $F^{(n)}(s, t; x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) fonksiyonlarını oluşturalım:

$$F^{(1)}(s, t; x) = F(s, t), \quad (5.1.13)$$

$$F^{(n+1)}(s, t; x) = \int_0^x F(s, u) F^{(n)}(u, t; x) du, \quad n \geq 1$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |F(s, t)|^2 ds dt < 1 \quad (5.1.14)$$

olmak üzere $K(x, s)$ çözümü

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(x, s) \quad 0 \leq s \leq x \leq \pi \quad (5.1.15)$$

dir. (5.1.11) eşitliğinin x 'e göre diferensiyeli alınarak

$$\frac{1}{2}(q(x) - p(x)) = -\frac{d}{dx} K(x, x) \quad (5.1.16)$$

bulunur. (5.1.16) ifadesi (5.1.15) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(q(x) - p(x)) &= -\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(x, x; x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} F(x, x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x) \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

elde edilir. $\frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x)$ 'i hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x) &= \left\{ F_s^{(n+1)} + F_t^{(n+1)} + F_x^{(n+1)} \right\}_{\substack{s=x \\ t=x}} \\ &= \int_0^x F_s(s, u) F^{(n)}(u, t; x) du \\ &\quad + \int_0^x F_t(u, t) F^{(n)}(s, u; x) du + F_x^{(n+1)}(s, t; x)_{\substack{s=x \\ t=x}} \\ &= 2 \int_0^x F_x(x, u) F^{(n)}(x, u; x) du + \sum_{k=1}^n F^{(k)}(x, x; x) F^{(n+1-k)}(x, x; x) \end{aligned}$$

olup bu eşitlik (5.1.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(q(x) - p(x)) &= \frac{d}{dx} F(x, x) + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^n F^{(k)}(x, x; x) F^{(n+1-k)}(x, x; x) \\ &= \frac{d}{dx} F(x, x) - K^2(x, x) + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

elde edilir.

$$A_0 = \frac{1}{2} \inf_n \rho_n$$

alalım.

$\rho_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ asimptotik formülünden A_0 'ın pozitif olduğu bulunur.

$$A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \leq A_0 \quad (5.1.19)$$

olsun. Bu takdirde her bir n için

$$\rho_n \geq 2A_0, \quad \sigma_n \geq A_0 \quad (5.1.20)$$

elde edilir.

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

eşitliğinin sağ tarafı x 'e göre diferensiyellenirse

$$F_x(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

olur. Bu ifadeye $\frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve gerekli düzenlemeler

yapılırsa

$$\begin{aligned} F_x(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma_n} (\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n) - \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} (\phi'(x, \lambda) \phi(s, \lambda))' d\lambda \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda) \right) d\lambda \right]$$

elde edilir. Buradan

$$|F_x(x, s)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{\sigma_n - \rho_n}{\sigma_n \rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda) \right) d\lambda \right|$$

olup (5.1.19), (5.1.20) ve Lemma 5.1.1 den

$$|F_x(x, s)| \leq C' \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \equiv C' A$$

elde edilir. Buradan da

$$\left| \frac{d}{dx} F(x, x) \right| \leq 2C' A \quad (5.1.21)$$

olur. Benzer şekilde

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

olup bu eşitliğe $\frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\phi(x, \lambda) \phi(s, \lambda) \right) d\lambda \right]$$

olup buradan

$$\begin{aligned} |F(x, s)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right| \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\phi(x, \lambda) \phi(s, \lambda) \right) d\lambda \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right| \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \dot{\phi}(s, \lambda) \phi(x, \lambda) \right) d\lambda \right| \end{aligned}$$

$$|F(x, s)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + |\sqrt{\mu_n} - \sqrt{\lambda_n}| \right] \leq C'' A \quad (5.1.22)$$

elde edilir. Burada C' ve C'' sadece $q(x)$, h ve H 'a bağlı sabitlerdir.

$0 \leq x \leq \pi$ olduğundan (5.1.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned} |F^{(2)}(s, t; x)| &= \left| \int_0^x F(s, u) F^{(1)}(u, t; x) du \right| \leq \int_0^x (C'' A)^2 du \leq (C'' A)^2 \pi \\ |F^{(3)}(s, t; x)| &= \left| \int_0^x F(s, u) F^{(2)}(u, t; x) du \right| \leq \int_0^x (C'' A)^3 du \leq (C'' A)^3 \pi^2 \\ &\vdots = \vdots \\ |F^{(n)}(s, t; x)| &= \left| \int_0^x F(s, u) F^{(n-1)}(u, t; x) du \right| \leq \int_0^x (C'' A)^n du \\ &\leq \frac{1}{\pi} (C'' A \pi)^n \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

bulunur.

Eğer $\pi C'' A$ yeteri kadar küçük ise yani $\pi C'' A < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda (5.1.23)

eşitsizliğinden

$$|K(x, s)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(x, s; x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} (\pi C'' A)^n \leq 2C'' A \quad (5.1.24)$$

olur. $A \leq \min \{A_0, (2\pi C'')^{-1}\}$ olmak üzere (5.1.21), (5.1.22) ve (5.1.24) eşitsizlikleri (5.1.18) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$|p(x) - q(x)| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$$

5.2. Kesirli Sturm-Liouville Problemlerine Uygulamaları

Bu bölümde Kesirli Sturm-Liouville problemlerini Adomian yardımıyla çözüp, Mizutani yaklaşımının bu problemlere uygulanmasını ele alacağız.

$q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$, $0 < x < 1$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$D^{1/2}y' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (5.2.1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.2.2)$$

$$D^{1/2}y' + (\tilde{\lambda} - \tilde{q}(x))y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (5.2.3)$$

şeklindeki iki Sturm-Liouville problemini gözönüne alalım. (5.2.1)-(5.2.2) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve (5.2.3)-(5.2.2) probleminin özdeğerleri de $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. (5.2.1)-(5.2.2) probleminin özfonksiyonu $\varphi(x, \lambda_n)$, (5.2.3)-(5.2.2) probleminin özfonksiyonu $\tilde{\varphi}(x, \tilde{\lambda}_n)$ olsun. (5.2.1)-(5.2.2) probleminin normlaştırmacı sayıları

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

ve (5.2.3)-(5.2.2) probleminin normlaştırmacı sayıları da

$$\tilde{\alpha}_n = \int_0^1 \tilde{\varphi}^2(x, \tilde{\lambda}_n) dx$$

olsun.

5.2.1. Regüler Kesirli Sturm-Liouville problemi

(5.2.1) kesirli Sturm-Liouville denkleminde özel olarak $q(x) = -1$ alıp çözüm yapalım.

$$D^{1/2}y'(x) + (1 + \lambda)y(x) = 0, \quad x \in (0, 1) \quad (5.2.4)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.2.5)$$

Regüler kesirli Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (5.2.4) denklemini operatör formunda

$$Ly = -(1 + \lambda)y \quad (5.2.6)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.6) nin her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $x = 0$ daki koşul göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2}(1+\lambda) y(t) dt \\
&= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} (1+\lambda) y(t) dt ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\mu = y_0$ ve özel olarak $\mu = 1$ sabit sayı olarak alınıp $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

serisine uygulandığında, bu durumda

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1, \\
y_1(x) &= -\frac{4x^{3/2}(1+\lambda)}{3\sqrt{\pi}}, \\
y_2(x) &= \frac{1}{2}(1+\lambda)^2 \frac{x^3}{3}, \\
y_3(x) &= -\frac{32x^{9/2}(1+\lambda)^3}{945\sqrt{\pi}}, \\
y_4(x) &= \frac{1}{720} x^6 (1+\lambda)^4, \\
y_5(x) &= -\frac{256x^{15/2}(1+\lambda)^5}{2027025\sqrt{\pi}}, \\
y_6(x) &= \frac{x^9(1+\lambda)^6}{362880}, \\
y_7(x) &= -\frac{2048x^{21/2}(1+\lambda)^7}{13749310575\sqrt{\pi}}, \\
y_8(x) &= \frac{(1+\lambda)^8 \frac{x^{12}}{12}}{39916800}, \\
y_9(x) &= -\frac{16384x^{27/2}(1+\lambda)^9}{213458046676875\sqrt{\pi}}, \\
y_{10}(x) &= \frac{(1+\lambda)^{10} \frac{x^{15}}{15}}{87178291200},
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $y(x) \cong \varphi(x, \lambda_n) = \sum_{n=0}^{10} y_n(x)$ serisini elde ederiz.

$\lambda_{10} = 14.1097$ olarak elde edilen λ özdeğeri için normlaştırıcı sayı,

$$\alpha_{10}(x, \lambda) = \int_0^1 (y_0[x] + y_1[x] + y_2[x] + \dots + y_{10}[x])^2 dx$$

şeklinde hesaplandığında

$$\alpha_{10} = 0.125916$$

elde edilir.

(5.2.3) kesirli Sturm-Liouville denkleminde özel olarak $\tilde{q}(x) = -\frac{1}{3}$ alalım.

$$D^{1/2}y'(x) + \left(\tilde{\lambda} + \frac{1}{3}\right)y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (5.2.7)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.2.8)$$

Regüler kesirli Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (5.2.7) denklemi operatör formunda

$$Ly = -\left(\tilde{\lambda} + \frac{1}{3}\right)y \quad (5.2.9)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.9) nin her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $x=0$ daki koşul göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} y(x) &= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left(\tilde{\lambda} + \frac{1}{3} \right) y(t) dt \\ &= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\tilde{\lambda} + \frac{1}{3} \right) y(t) dt ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\mu = y_0$ olup özel olarak $\mu = 1$ alınıp $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ serisine

uygulandığında, bu durumda

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = -\frac{4x^{3/2}(1+3\lambda)}{9\sqrt{\pi}},$$

$$y_2(x) = \frac{1}{18}(1+3\lambda)^2 \frac{x^3}{3},$$

$$y_3(x) = -\frac{32x^{9/2}(1+3\lambda)^3}{25515\sqrt{\pi}},$$

$$y_4(x) = \frac{(1+3\lambda)^4 \frac{x^6}{6}}{9720},$$

$$y_5(x) = -\frac{256x^{15/2}(1+3\lambda)^5}{492567075\sqrt{\pi}},$$

$$y_6(x) = \frac{(1+3\lambda)^6 \frac{x^9}{9}}{29393280},$$

$$y_7(x) = -\frac{2048x^{21/2}(1+3\lambda)^7}{30069742227525\sqrt{\pi}},$$

$$y_8(x) = \frac{(1+3\lambda)^8 \frac{x^{12}}{12}}{261894124800},$$

$$y_9(x) = -\frac{16384x^{27/2}(1+3\lambda)^9}{4201494732740930625\sqrt{\pi}},$$

$$y_{10}(x) = \frac{(1+3\lambda)^{10} \frac{x^{15}}{15}}{5147790917068800},$$

olarak bulunur. Böylece $y(x) \cong \tilde{\varphi}(x, \lambda_n) = \sum_{n=0}^{10} y_n(x)$ serisini elde ederiz.

$\tilde{\lambda}_{10} = 14.7764$ özdeğeri için normlaştırıcı sayı

$$\tilde{\alpha}_{10}(x, \lambda) = \int_0^1 (y_0[x] + y_1[x] + y_2[x] + \dots + y_{10}[x])^2 dx$$

olacak şekilde

$$\tilde{\alpha}_{10} = 0.125916$$

elde edilir.

$$A \equiv \sum_{n=1}^{10} |\tilde{\alpha}_n - \alpha_n| + |\tilde{\lambda}_n - \lambda_n|$$

yeterince küçük seçildiğinde,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| \leq C A$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$A = |0.125916 - 0.125916| + |14.7764 - 14.1097| \\ = 0.6667$$

$$C = \left| \frac{q(x)}{2^{-1}} \right|$$

$$C = 2$$

alınıp çözüm yapıldığında $CA \cong 1.334$ olarak elde edilir.

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| = \left| -1 - \frac{1}{3} \right| \cong 1.333$$

buradan

$$1.333 \leq 1.334$$

olduğu görülür.

5.2.2. Regüler Kesirli Sturm-Liouville problemi

(5.2.1) kesirli Sturm-Liouville denkleminde özel olarak $q(x) = \frac{x}{2}$ alıp çözüm yapalım.

$$D^{1/2} y'(x) + \left(\lambda - \frac{x}{2} \right) y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (5.2.10)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.2.11)$$

Regüler kesirli Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (5.2.10) denklemi operatör formunda

$$Ly = - \left(\lambda - \frac{x}{2} \right) y \quad (5.2.12)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.12) nin her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $x=0$ daki koşul göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} y(x) &= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left(\lambda - \frac{t}{2} \right) y(t) dt \\ &= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda - \frac{t}{2} \right) y(t) dt ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\mu = y_0$ olup özel olarak $\mu = 1$ seçilip $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ serisine

uygulandığında, bu durumda

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = \frac{4x^{3/2}(x-5\lambda)}{15\sqrt{\pi}},$$

$$y_2(x) = \frac{1}{192} \left(\frac{7x^5}{5} - 14x^4\lambda + 32x^3\lambda^2 \right),$$

$$y_3(x) = \frac{16x^{9/2}(14x^3 - 210x^2\lambda + 975x\lambda^2 - 1430\lambda^3)}{675675\sqrt{\pi}},$$

$$y_4(x) = \frac{\left(\frac{119x^{10}}{10} - 238x^9\lambda + 1674x^8\lambda^2 - 4992x^7\lambda^3 + 5376x^6\lambda^4\right)}{3870720},$$

$$y_5(x) = \frac{64x^{15/2}(2618x^5 - 65450x^4\lambda + 618125x^3\lambda^2)}{2635284526875\sqrt{\pi}} +$$

$$\frac{64x^{15/2}(-2797375x^2\lambda^3 + 6118000x\lambda^4 - 5200300\lambda^5)}{2635284526875\sqrt{\pi}},$$

olarak bulunur. Böylece $y(x) \cong \varphi(x, \lambda_n) = \sum_{n=0}^5 y_n(x)$ serisini elde ederiz.

$\alpha_5 = 4612.41$ ve $\lambda_5 = 26.287$ olarak elde edilir.

(5.2.3) kesirli Sturm-Liouville denkleminde özel olarak $\tilde{q}(x) = \frac{x}{4}$ alıp çözüm yapalım.

$$D^{1/2}y'(x) + \left(\tilde{\lambda} - \frac{x}{4}\right)y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (5.2.13)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.2.14)$$

Regüler kesirli Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (5.2.13) denklemini operatör formunda

$$Ly = -\left(\tilde{\lambda} - \frac{x}{4}\right)y \quad (5.2.15)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.15) nin her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $x=0$ daki koşul göz önüne alındığında,

$$y(x) = \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left(\tilde{\lambda} - \frac{t}{4} \right) y(t) dt$$

$$= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\tilde{\lambda} - \frac{t}{4} \right) y(t) dt ds$$

elde edilir. Burada, $\mu = y_0$ olup özel olarak $\mu = 1$ alınıp $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ serisine

uygulandığında, bu durumda

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = \frac{2x^{3/2}(x-10\lambda)}{15\sqrt{\pi}},$$

$$y_2(x) = \frac{1}{768} \left(\frac{7x^5}{5} - 28x^4\lambda + 128x^3\lambda^2 \right),$$

$$y_3(x) = \frac{4x^{9/2}(7x^3 - 210x^2\lambda + 1950x\lambda^2 - 5720\lambda^3)}{675675\sqrt{\pi}},$$

$$y_4(x) = \frac{\frac{119x^{10}}{10} - 476x^9\lambda + 6696x^8\lambda^2 - 39936x^7\lambda^3 + 86016x^6\lambda^4}{61931520},$$

$$y_5(x) = \frac{4x^{15/2}(1309x^5 - 65450x^4\lambda + 1236250x^3\lambda^2)}{2635284526875\sqrt{\pi}} + \frac{4x^{15/2}(-11189500x^2\lambda^3 + 48944000x\lambda^4 - 83204800\lambda^5)}{2635284526875\sqrt{\pi}},$$

olarak bulunur. Böylece $y(x) \cong \tilde{\varphi}(x, \lambda_n) = \sum_{n=0}^5 y_n(x)$ serisini elde ederiz.

$$\tilde{\alpha}_5 = 3796.21 \text{ ve } \tilde{\lambda}_5 = 3796.21$$

olarak elde edilir.

$$A \equiv \sum_{n=0}^5 |\tilde{\alpha}_n - \alpha_n| + |\tilde{\lambda}_n - \lambda_n|$$

yeterince küçük seçildiğinde,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| \leq CA$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} [|\tilde{\alpha}_n - \alpha_n| + |\tilde{\lambda}_n - \lambda_n|].$$

$$\begin{aligned} A &= |3796.21 - 4612.41| + |23.6008 - 26.287| \\ &= 816.2 + 2.6862 \\ &\cong 818.89 \end{aligned}$$

$$C = \frac{4}{10^4}$$

alınıp çözüm yapıldığında $CA \cong 0.33$ olarak elde edilir.

$$|q(x) - \tilde{q}(x)| = \left| \frac{x}{2} - \frac{x}{4} \right|$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| = \frac{1}{4}$$

$$\cong 0.25$$

buradan

$$0.25 \leq 0.33$$

olduğu görülür.

5.2.3. Singüler Kesirli Sturm-Liouville problemi

(5.2.1) kesirli Sturm-Liouville denkleminde özel olarak $q(x) = \frac{1}{x}$ alıp çözüm yapalım.

$$D^{1/2} y'(x) + \left(\lambda - \frac{1}{x} \right) y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (5.2.16)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.2.17)$$

Regüler kesirli Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (5.2.16) denklemi operatör formunda

$$Ly = - \left(\lambda - \frac{1}{x} \right) y \quad (5.2.18)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.18) nin her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $x=0$ daki koşul göz önüne alındığında,

$$y(x) = \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left(\lambda - \frac{1}{t} \right) y(t) dt$$

$$= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\lambda - \frac{1}{t} \right) y(t) dt ds$$

elde edilir. Burada, $\mu x = y_0$ olup özel olarak $\mu = 1$ alınıp $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ serisine

uygulandığında, bu durumda

$$y_0(x) = x,$$

$$y_1(x) = - \frac{4x^{3/2}(-5 + 2x\lambda)}{15\sqrt{\pi}},$$

$$y_2(x) = \frac{x^2}{120} (40 + x\lambda(-28 + 5x\lambda)),$$

$$y_3(x) = -\frac{8x^{5/2}(-1155 + x\lambda(1122 + x\lambda(-363 + 40x\lambda)))}{51975\sqrt{\pi}},$$

$$y_4(x) = \frac{x^3 \{24640 + x\lambda[-30360 + x\lambda(13860 + x\lambda(-2821 + 220x\lambda))]\}}{1108800},$$

$$y_5(x) = -\frac{8x^{7/2}}{13266878625\sqrt{\pi}} \left\{ -11231220 + x\lambda[16713125 + 2x\lambda(-4886310 + x\lambda(1417885 + 4x\lambda(-51697 + 3080x\lambda)))] \right\},$$

olarak bulunur. Böylece $y(x) \cong \varphi(x, \lambda_n) = \sum_{n=0}^5 y_n(x)$ serisini elde ederiz.

$$\alpha_5 = 0.0253079 \text{ ve } \lambda_5 = 12.5452.$$

(5.2.3) kesirli Sturm-Liouville denkleminde özel olarak $\tilde{q}(x) = \frac{1}{2x}$ alıp çözüm yapalım.

$$D^{1/2}y'(x) + \left(\tilde{\lambda} - \frac{1}{2x} \right) y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (5.2.19)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.2.20)$$

Regüler kesirli Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (5.2.19) denklemi operatör formunda

$$Ly = -\left(\tilde{\lambda} - \frac{1}{2x} \right) y \quad (5.2.21)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.21) nin her iki tarafına L^{-1} uygulanarak, $x=0$ daki koşul göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} y(x) &= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x J_0^{1/2} \left(\tilde{\lambda} - \frac{1}{2x} \right) y(t) dt \\ &= \mu - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \int_0^s (s-t)^{-1/2} \left(\tilde{\lambda} - \frac{1}{2x} \right) y(t) dt ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\mu x = y_0$ olup özel olarak $\mu = 1$ alınıp $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ serisine uygulandığında, bu durumda

$$y_0(x) = x,$$

$$y_1(x) = -\frac{2x^{3/2}(-5+4x\lambda)}{15\sqrt{\pi}},$$

$$y_2(x) = \frac{1}{60} \left(5x^2 - 7x^3\lambda + \frac{5x^4\lambda^2}{2} \right),$$

$$y_3(x) = -\frac{x^{5/2} \left[-1155 + 4x\lambda (561 + x\lambda (-363 + 80x\lambda)) \right]}{51975\sqrt{\pi}},$$

$$y_4(x) = \frac{x^3 \left\{ 3080 + x\lambda \left[-7590 + x\lambda (6930 + x\lambda (-2821 + 440x\lambda)) \right] \right\}}{2217600},$$

$$y_5(x) = -\frac{-x^{7/2}}{26533757250\sqrt{\pi}} \left\{ -5615610 + x\lambda \left[16713125 + 8x\lambda \right. \right. \\ \left. \left. (-2443155 + x\lambda (1417885 + 8x\lambda (-51697 + 6160x\lambda))) \right] \right\},$$

olarak bulunur. Böylece $y(x) \cong \tilde{\varphi}(x, \lambda_n) = \sum_{n=0}^5 y_n(x)$ serisini elde ederiz.

$\tilde{\alpha}_5 = 0.0204058$ ve $\tilde{\lambda}_5 = 11.1815$.

$$A \equiv \sum_{n=0}^5 \left[|\tilde{\alpha}_n - \alpha_n| + |\tilde{\lambda}_n - \lambda_n| \right]$$

yeterince küçük seçildiğinde,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| \leq CA$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| \leq C \sum_{n=0}^5 \left[|\tilde{\alpha}_n - \alpha_n| + |\tilde{\lambda}_n - \lambda_n| \right].$$

$$A = |0.0204058 - 0.0253079| + |11.1815 - 12.5452| \\ = 0.0049021 + 1.3637 \\ \cong 1.37$$

$$C = \left| \frac{q(x)}{2} \right|$$

olup alınıp çözüm yapıldığında $CA \cong 0.616$ olarak elde edilir.

$$|q(x) - \tilde{q}(x)| = \left| \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} \right|$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x) - \tilde{q}(x)| = \frac{1}{2} \\ \cong 0.5$$

buradan

$0.5 \leq 0.616$ olduğu görülür.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, regüler ve singüler kesirli Sturm-Liouville problemi için Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu kullanılarak özdeğerlerin hesaplanması ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir. Ayrıca difüzyon, Bessel ve hidrojen atom denklemleri için çözüm fonksiyonları elde edilmiş ve özdeğerler hesaplanmıştır. Sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Sabit mertebeli Sturm-Liouville problemi için Mizutani yöntemi incelenmiştir ve bu yöntem kullanılarak kesirli Sturm-Liouville problemleri için teklik teoremi sayısal sonuçlarla verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1]. **K. S., Miller, B., Ross**, 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential Equations. New York: Wiley.
- [2]. **K., Oldham, J., Spanier**, 1974. The Fractional Calculus, Academic press, New York.
- [3]. **I., Podlubny**, 1999. Fractional differential equations. New York: Academic Press.
- [4]. **S. G., Samko, A. A., Kilbas, O. I., Marichev**, 1993. Fractional integrals and derivatives. Berlin: Gordon & Breach.
- [5]. **Q. M., Al-Mdallal**, 2009. An efficient method for solving fractional Sturm-Liouville problems. Chaos Solutions Fractals **40**: 183-189.
- [6]. **Q. M., Al-Mdallal**, 2010. On the numerical solution of fractional Sturm-Liouville problems. International Journal of Computer Mathematics. Vol. **87**, 2837-2845.
- [7]. **W. G., Glockle, T. F., Nonnenmacher**, 1995. A fractional calculus approach to self-similar protein Dynamics. Biophys J; **68**:46-53.
- [8]. **B. M., Levitan, I. S., Sargsjan**, 1975. Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.
- [9]. **E. S., Panakhov, E., Bas**, 2008. On Inverse Problem For Singular Sturm-Liouville Operatör From Two Spectra, National Academy Of Sciences Of Azerbaijan Vol. **XXVIII**, 85-92.
- [10]. **K., Diethelm, N. J., Ford**, 2002. "Numerical solution of the Bagley Torvik equation" BIT ;**42**:490-507.
- [11]. **S. A., El-Wakil, M. A., Abdou**, 2007. New applications of Adomian decomposition method. Chaos, Solutions & Fractals; **33**:513-22.
- [12]. **V. V., Kulish, J. L., Large**, 2000. Fractional-diffusion solutions for transient lokal temperature and heat flux. ASME J Heat Transfer; **122(2)**:372376.
- [13]. **G., Adomian**, 1994. Solving frontier problems on physics: the decomposition method. Boston: Kluwer Academic Publisher
- [14]. **R., Metzler, J., Klafter**, 2000. Boundary value problems fractional diffusion equations. Physica A; **278**:107125.

- [15]. **E., Bas, E. S., Panakhov, R., Yilmazer,** 2013. ‘On the Well Posed Problem for Hydrogen Atom Equation’ TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. **4 (1)**, 20-29.
- [16]. **V. S., Ertürk,** 2011. Computing Eigenelements of Sturm-Liouville Problems of Fractional Order via Fractional Differential Transform Method. Math. Comp. App. **16**, 712-720.
- [17]. **Y., Cesur,** 2011. Diferansiyel Denklemler ve Mathematica, Avcı Yayınevi.
- [18]. **W. M., Ahmad, R., El-Khazali,** 2007. Fractional-order dynamical models of love. Chaos, Solitons & Fractals. **33**:1367-75.
- [19]. **K., Diethelm, N. J., Ford,** 2002. Numerical solution of the Bagley Torvik equation. BIT **42**:490-507.
- [20]. **K., Diethelm, N. J., Ford,** 2002. Analysis of fractional differential equation. J Math Anal Appl. **265**:229-48.
- [21]. **K., Diethelm, A. D., Freed,** 1999. On the solution of nonlinear fractional-order differential equation used in the modeling of viscoplasticity. In: F. Keil, W. Mackens, H. Voss, J. Werther, editors. Scientific computing in chemical engineering II. Computational fluid Dynamics, reaction engineering and molecular properties. Heidelberg: Springer; p. 217-24.
- [22]. **L., Gaul, P., Klein, S., Kempfle,** 1991. Damping and description involving fractional operators. Mech Syst Signal Process. **5**:81-8.
- [23]. **W. G., Glockle, T. F., Nonnenmacher,** 1995. A fractional calculus approach to self-similar protein Dynamics. Biophys J; **68**:46-53.
- [24]. **V. V., Kulish, J. L., Large,** 2000. Fractional-diffusion solutions for transient local temperature and heat flux. ASME J Heat Transfer. **122(2)**:372376.
- [25]. **Y. S., Liang, W. Y., Su,** 2007. The relationship between the fractal dimensions of a type of fractal functions and order of their fractional calculus. Chaos, Solitons & Fractals. **34**:682-92.
- [26]. **F., Mainardi,** 1997. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. In: **A., Carpinteri, F., Mainardi,** editors. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. Wien: Springer; p. 291-348.
- [27]. **R., Metzler, J., Klafter,** 2000. Boundary value problems fractional diffusion equations. Physica A; **278**:107125.

- [28]. **M. I., Syam, H. A., Khashan, Q. M., Al-Mdallal,** 2006. Nonlinear eigenvalue problems with symmetry. *Chaos, Solutions & Fractals*, in press. doi:**10**-1016.
- [29]. **A., Mizutani,** 1984. On The Inverse Sturm-Liouville Problem *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* **31**: 319-350.
- [30]. **E., Bas,** 2013. Fundamental Spectral Theory of Fractional Singular Sturm-Liouville Operator. *Journal of Func. Spaces and Appl.* Article ID 915830, 1- 7.
- [31]. **E., Bas, F., Metin,** 2013. Fractional Singular Sturm-Liouville Operator for Coulomb Potential. *Advances in Differences Equations*, doi:**10**.1186/1687-1847-300.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2011 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım. Halen Fırat Üniversitesi Matematik Bölümünde Yüksek lisans öğrencisiyim.