

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ℓ_p VE bv_p DİZİ UZAYLARINDA $B(r,s)$ VE $B(r,s,t)$
OPERATÖRLERİNİN İNCE SPEKTRUMLARI**

Yüksek Lisans Tezi

Burcu ÖZALTIN
091121111

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

ELAZIĞ-2012

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ℓ_p VE bv_p DİZİ UZAYLARINDA $B(r,s)$ VE $B(r,s,t)$ OPERATÖRLERİNİN İNCE
SPEKTRUMLARI**

Yüksek Lisans Tezi

Burcu ÖZALTIN

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:
Tezin Savunulduğu Tarih:**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mikail ET (Dan.)

Prof.Dr. Rıfat ÇOLAK

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK

ELAZIĞ – 2012

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımını gördüğüm, bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e teşekkürü bir borç bilirim.

Burcu ÖZALTIN

ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SİMGELER DİZİNİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. $B(r,s)$ ve $B(r,s,t)$ Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar	3
2.2. Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori	8
2.2.1. Tanım (Kreyszig [11])	8
2.2.2. Teorem (Kreyszig [11])	9
2.2.3. Teorem (Kreyszig [11])	9
2.2.4. Teorem (Kreyszig [11])	10
2.3. Sonsuz Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori	11
3. ℓ_p VE BV_p DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE $B(R,S)$ OPERATÖRÜNÜN İNCE SPEKTRUMU	18
3.1. ℓ_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s)$ Operatörünün İnce Spektrumu	18
3.2. bv_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s)$ Operatörünün İnce Spektrumu	24
4. ℓ_p VE BV_p DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE $B(R,S,T)$ OPERATÖRÜNÜN İNCE SPEKTRUMU	26
4.1. ℓ_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s,t)$ Operatörünün İnce Spektrumu	26
4.2. bv_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s,t)$ Operatörünün İnce Spekturumu	37
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; bazı temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde; spektral teori hakkında bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde; ℓ_p ve bv_p dizi uzayları üzerinde $B(r,s)$ operatörünün ince spektrumu kavramı verilmiştir. Dördüncü bölümde; ℓ_p ve bv_p dizi uzayları üzerinde $B(r,s,t)$ operatörünün ince spektrumu kavramı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bir operatörün spektrumu, ℓ_p ve bv_p dizi uzayları, Fark operatörü, Genelleştirilmiş fark operatörü.

SUMMARY

On The Fine Spectrum of The Difference Operators $B(r,s)$ and $B(r,s,t)$ Over The Sequence Spaces ℓ_p and bv_p

This thesis consists of four chapters. In the first chapter some fundamental notions were given. In the second chapter some information about spectral theory were given. In the third chapter the fine spectrum of the difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_p and bv_p were given. In the four chapter the fine spectrum of the difference operator $B(r,s,t)$ over the sequence spaces ℓ_p and bv_p were given.

Key Words : Spectrum of an operator, The sequence spaces ℓ_p and bv_p , Difference operator, Generalized difference operator.

SİMGELER DİZİNİ

$B(X, Y)$	: X 'den Y 'ye sınırlı lineer dönüşümlerin uzayı,
C	: Kompleks sayılar cümlesi,
R	: Reel sayılar kümesi,
ℓ_p	: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere p . kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,
b_v	: Sınırlı salınımlı (varyasyon) dizilerin uzayı,
K	: R veya C cümlesi,
ℓ_1	: Mutlak yakınsak serilerin uzayı,
ℓ_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı,
$D(T)$	: T operatörünün tanım cümlesi,
$N(T)$	: T 'nin çekirdeği,
$\Re(T)$	: T operatörünün görüntü cümlesi,
$\overline{\Re(T)}$	: $\Re(T)$ 'nin kapanışı,
$r(T)$	: T operatörünün spektral yarıçapı,
$\rho(T)$	: T 'nin resolventi,
$\sigma(T)$	: T 'nin spektrumu,
σ_c	: Sürekli spektrum,
σ_p	: Nokta spektrum,
σ_r	: Artık spektrum,
T^*	: T operatörünün adjointi,
X^*	: X normlu uzayının sürekli duali,
ω	: Kompleks ya da reel terimli bütün dizilerin lineer uzayı,

1. GİRİŞ

Spektrum kavramı, Hilbert uzayında sürekli lineer dönüşümün spektrumu kavramının kompleks Banach cebirine genişlemesidir. Spektrum kavramı toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutar. Spektrum kavramının toplanabilme teorisindeki en önemli uygulaması, tamamen analitik yöntemlerle incelenmiş olan Mercerian Teoremleri'nin analitik yöntemlerle kısa ve anlaşılır biçimde elde edilmesine imkan sağlamasıdır.

Lineer operatörler için spektral teori, fonksiyonel analizin ve operatör teorisinin en önemli konularından biridir. Aslında, bir lineer operatörle ilgili pek çok bilgi spektrumda saklıdır ve bundan dolayı spektrumu bilmek operatörlerin özelliklerinin geniş bir bölümünü bilmek demektir. Lineer spektral teoremin uygulama alanları geniştir. Diferansiyel operatörlerin spektrum uygulamaları son derece önemli olmasının yanı sıra diyebiliriz ki, eliptik sınır değer problemlerinin modern teorisini için, spektral teori klasik kuantum mekaniğinin kalbidir.

Fiziğin, mekaniğin ve matematiksel fiziğin pek çok problemi operatörlerin spektral teorisine yakından ilişkilidir. Bu problemlerin çoğu değişkenlerine ayırma (Fourier) yöntemi kullanılarak operatörlerin spektral teorisinin incelenmesine dönüşmektedir. Uygulamalar açısından fark operatörlerin spektral teorisini incelemek önem taşımaktadır.

Normlu uzaylarda lineer operatörlerin spektral teorisini, modern fonksiyonel analizin ana dallarından birisi olup, ters operatörlerle bunların genel özelliklerine ve esas operatörle olan bağıntılarına ilişkindir. İleride de göreceğimiz gibi, operatörlerin spektral teorisini operatörlerin kendilerini anlayabilmemiz açısından çok önemlidir.

Genel olarak kompleks bir X lineer vektör uzayını kendisine dönüştüren bir T lineer operatörü verilmiş olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ bir skaler olmak üzere $T_\lambda = T - \lambda I$ operatörler demetini gözönüne alalım. Bu demeti inceleyerek T operatörünün yapısı hakkında geniş bilgi edinilebilir.

Bu konuda şimdiye kadar yapılan çalışmaları kısaca gözden geçirelim.

ℓ_p ($1 < p < \infty$) dizi uzayı üzerinde Cesaro operatörünün ince spektrumu Gonzalez (1985) tarafından çalışıldı. Ağırlıklı ortalama operatörünün ℓ_p ($1 < p < \infty$) üzerindeki spektrumu ise 1978 yılında J.M. Carltidge tarafından incelendi. bv_0 dizi uzayı üzerindeki spektrumu 1990 yılında J.I.Okutoyi tarafından incelendi. c_0 ve bv dizi uzayları üzerinde Cesaro operatörünün ince spektrumu sırasıyla Reade (1985), Okutoyi (1992) tarafından

araştırıldı. c_0 ve c dizi uzayları üzerinde Δ fark operatörünün ince spektrumu Altay ve Başar (2004) tarafından çalışıldı. Ayrıca c_0 dizi uzayı üzerinde Cesaro operatörünün ince spektrumu Akhmedov ve Başar (2004) tarafından incelendi. Son zamanlarda çeşitli dizi uzayları üzerinde $B(r,s)$ ve $B(r,s,t)$ operatörlerinin ince spektrumları Furkan, Bilgiç (2008), Furkan, Bilgiç ve Altay (2007) ve Furkan, Bilgiç ve Başar (2010) tarafından incelendi.

Bu alışmada Bilgiç ve Furkan tarafından 2008 yılında verilen $B(r,s)$ ve Furkan, Bilgiç ve Başar tarafından 2010 yılında verilen $B(r,s,t)$ operatörlerinin ℓ_p ve bv_p dizi uzayları üzerindeki ince spektrumu ayrıntılı olarak incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. B(r,s) ve B(r,s,t) Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar

2.1.1. Tanım (Metrik Uzay) : X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d 'ye X üzerinde bir metrik, (X, d) çiftine de bir metrik uzay denir. Her $x, y, z \in X$ için

$$M1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2) d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri özelliği)}$$

$$M2) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği).}$$

2.1.2. Tanım (Cauchy Dizisi) : (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir .

2.1.3. Tanım (Tamlık) : X ' deki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam uzay denir.

2.1.4. Tanım (İzometri ve İzometrik Uzaylar) : (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani

$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyorsa f 'ye izometri denir. f izometrisi üzerine ise f 'ye izometrik izomorfi denir. (X, d_1) ve (Y, d_2) uzayları arasında bir izometrik izomorfi varsa bu uzaylara izometrik uzaylar (eş yapılı uzaylar) denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

2.1.5. Tanım (İzomorfizm) : X ' den Y 'ye yapıyı koruyan birebir ve üzerine bir dönüşüme izomorfizm denir. Uzayların cinsine göre bu izomorfizmlere özel adlar verilir. Örneğin; X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay ise X ' den Y 'ye bir T izomorfizmi $x, y \in X$ için

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(ax) = \alpha Tx$$

şartlarını sağlayan birebir ve üzerine bir dönüşümdür. X ve Y uzayları arasında bir izomorfizm varsa bu uzaylara izomorfik uzaylar denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

2.1.6. Tanım (Lineer (Vektör) Uzay) : X boş olmayan bir küme, K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X 'e K üzerinde bir lineer uzay denir.

A) X , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur.

G1) $\forall x, y \in X$ için $x + y \in X$ 'dir. (Kapalılık özelliği)

G2) $\forall x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Birleşme özelliği)

G3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır. (Birim Eleman)

G4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır. (Ters Eleman)

G5) $\forall x, y \in X$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme özelliği)

B) $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha x \in X$ (Skalarla çarpmaya göre kapalılık)

L2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L4) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

L5) $1x = x$ ($1, K$ 'nin birim elemanıdır.)

2.1.7. Tanım (Lineer Operatör) : Bir T lineer operatörü, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir operatördür:

(i) T 'nin $D(T)$ tanım bölgesi bir vektör uzay olup, $R(T)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

dir.

2.1.8. Tanım (Lineer Fonksiyonel) : Tanım bölgesi bir X vektör uzayında, değer bölgesi ise, X 'in K skaler cismi içinde bulunan lineer bir f operatörüne bir lineer fonksiyonel

adı verilir; dolayısıyla, X reel ise, $K=\mathbb{R}$ ve X kompleks ise $K=\mathbb{C}$ olmak üzere,

$$f : D(f) \longrightarrow K$$

yazılır.

2.1.9. Tanım (Normlu Uzay): X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonunun x' deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim.

Aşağıdaki şartları sağlaması halinde bu fonksiyona X üzerinde bir norm denir.

$X, \|\cdot\|$ ikilisine de normlu uzay denir.

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in K)$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen Eşitsizliği})$$

Burada x, y birer vektör ve α bir skalerdir.

2.1.10. Tanım (Banach Uzayı) : Tam normlu uzaya bir Banach uzayı denir.

2.1.11. Tanım (Sınırlı Lineer Operatör) : X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer, $\forall x \in D(T)$ için,

$$\|T(x)\| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa, T operatörü sınırlıdır denir. X 'den Y 'ye tanımlı bütün sınırlı lineer dönüşümlerin sınıfı $B(X, Y)$ ile gösterilir. Eğer

$X = Y$ ise $B(X, X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazacağız. $B(X, Y)$ lineer uzayı

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_x\|}{\|x\|}$$

normuyla bir normlu lineer uzaydır. Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X, Y)$ de bir Banach uzayıdır .

2.1.12. Tanım (Sınırlı Lineer Fonksiyonel) : $D(f)$ tanım bölgesi, normlu bir X uzayında, değer bölgesi ise, bu normlu X uzayının skaler cismi içinde bulunan, sınırlı lineer

bir f operatörüne, sınırlı lineer fonksiyonel adı verilir. Buna göre, her $x \in D(f)$ için,

$$|f(x)| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde reel bir c sayısı vardır. Ayrıca, f 'in normu

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

ya da

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

dir.

2.1.13. Tanım (Süreklilik Dual) : X herhangi bir normlu uzay olmak üzere; X' den C (veya R)'ye tüm sınırlı lineer dönüşümlerin kümesine X' in sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir. Yani; $X^* = B(X, C)$ dir .

2.1.14. Teorem: Eğer X sonlu boyutlu bir normlu uzay ise $T: X \rightarrow X$ lineer operatörünün sınırlı ve T^{-1} 'in mevcut olması için gerek ve yeter şart T 'nin birebir olmasıdır.

2.1.15. Tanım (Adjoint Operatör): X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, $T: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. X' ve Y' , sırasıyla, X ve Y nin dual uzayları olmak üzere, T' nin $T^*: Y' \rightarrow X'$ adjoint operatörü

$$f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx) \quad (g \in Y')$$

ile tanımlıdır.

2.1.16. Tanım (Cebir) : X cümlesinin alt cümlelerinin bir A sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa A ya X üzerinde bir σ -cebir denir.

$$1. X \in A$$

$$2. A \in A \text{ için } A^t = X \setminus A \in A$$

$$3. \forall k \in N \text{ için } A_k \in A \text{ olmak üzere } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in A$$

2.1.17. Tanım (Banach Cebiri) : A normlu uzayı bir cebir olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

ve $\|e\| = 1$ ise A ya normlu cebir denir. A normlu cebiri, normlu lineer uzay olarak tam ise bu normlu cebire Banach cebiri adı verilir.

2.1.18. Tanım (Regüler ve Singüler Elemanlar) : C birim elemanı e olan kompleks bir cebir ve $x \in C$ olsun. $yx = e$ ($xy = e$) olacak şekilde bir $y \in C$ varsa y 'ye x 'in sol (sağ) tersi denir. $yx = xy = e$ olacak şekilde bir $y \in C$ varsa y 'ye x 'in tersi diyeceğiz. C 'nin tersi bulunan elemanlarına regüler (düzenli) denir ve bunların kümesi IR ile gösterilir. C 'nin regüler olmayan elemanlarına ise singüler denir ve S ile gösterilir. O halde S, IR 'nin C 'ye göre tümleyeni yani $S = C / IR$ 'dir. θ, C 'nin toplamaya göre özdeş elemanı ise $\theta \in C$ 'dir. $x \in C$ ve x regüler ise x 'in tersi x^{-1} ile gösterilir. Bu taktirde;

$$IR = \{x \in C : x^{-1} \text{ mevcut} \}.$$

C 'nin birim elemanı e ise, $e \in IR$ 'dir.

2.1.19. Tanım (Matris Dönüşümleri) : X ve Y, w 'nin iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. $x = (x_k) \in X$ ve $n \in N$ için;

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $y = A_n.x$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $A_n.x$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X 'den Y 'ye bir matris dönüşümü tanımlar. X den Y ye tüm matris dönüşümleri sınıfını (X, Y) ile göstereceğiz ve A, X 'den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in X, Y$ yazacağız.

2.2. Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori

X sonlu boyutlu normlu bir uzay ve $T : X \longrightarrow X$ lineer bir operatör olsun. Sonlu boyutlu uzaylardaki T operatörlerin bir matris yardımıyla belirlenebilmesi nedeniyle sonlu boyutlu uzayların spektral teorisi, sonsuz boyutlu uzaylar üzerinde tanımlanan operatörlerin spektral teorisinden daha basittir. T operatörünün spektral teorisinin esas olarak matris eigen-değer teorisi olması nedeniyle, işe matrislerle başlayacağız.

Reel ya da kompleks terimli, n -sırlı karesel bir $A = (\alpha_{jk})$ matrisinin eigen-değer ve eigen-vektör kavramları,

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

denklemini cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır:

2.2.1. Tanım (Kreyszig [11]) : Karesel bir $A = (\alpha_{jk})$ matrisinin bir eigen-değeri, (1) denklemini, $x \neq 0$ gibi bir çözüme sahip olacak şekilde bir λ sayısıdır. Bu x 'e, A matrisinin, λ eigen-değerine karşılık gelen eigen-vektörü denir. Bu λ eigen-değerine karşılık gelen eigen-vektörlerle sıfır vektörü, X in bir altvektör uzayını oluştururlar. Bu vektör uzayına A nın, λ eigen-değerine karşılık gelen eigen-uzayı adı verilir. A nın bütün eigen-değerlerinin cümlesi olan $\sigma(A)$ 'ya A 'nın spektrumu denir. Spektrumun, kompleks düzlemdeki tümleyeni olan $\rho(A) = C - \sigma(A)$ cümlesine ise, A nın resolvent cümlesi denir.

Örneğin, basit bir hesaplamayla,

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

için

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin, sırasıyla, $\lambda_1 = 6$ ve $\lambda_2 = 1$ eigen-değerine karşılık gelen eigen-vektörler olduğu gösterilebilir. Burada, bu sonucu nasıl elde ettiğimiz ve genel olarak bir matrisin eigen-değerlerinin varlığı hakkında neler söyleyebileceğimiz sorusu ortaya çıkmaktadır.

Bu soruyu cevaplandırabilmek için önce, (1) denkleminin, I , n -sırlı birim matris olmak üzere,

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2)$$

şeklinde yazılabildiğini belirtmemiz gerekmektedir. Bu ise, x in bileşenleri olan, $\xi_1, \dots, \xi_n$ gibi n tane bilinmeyen içeren n tane lineer denklemden oluşan homojen bir sistemdir ve bilindiği gibi, bu sistemin $x \neq 0$ gibi bir çözüme sahip olabilmesi için katsayılar determinantı olan $\det(A - \lambda I)$ 'nın sıfır olması gerekmektedir. Bu ise, bize A 'nın karakteristik denklemini verir:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \quad (3)$$

$\det(A - \lambda I)$ 'ya da A 'nın karakteristik determinantı adı verilir. Bunu açarak elde edeceğimiz, λ 'ya göre n . dereceden polinoma da A 'nın karakteristik polinomu denir. (3) denklemi ise karakteristik denklemi adını alır.

2.2.2. Teorem (Kreyszig [11]) : n -satırlı karesel bir $A = (\alpha_{jk})$ matrisini eigen-değerleri, A 'nın karakteristik denklemi olan (3)'ün çözümleriyle verilir. Buna göre, A en az bir (ve sayısal olarak birbirinden farklı, en çok n tane) eigen- değere sahiptir.

Bu teoremin, n boyutlu normlu bir X uzayı üzerindeki $T : X \longrightarrow X$ gibi lineer bir operatöre nasıl uygulanabileceği sorunu ortaya çıkmaktadır. $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, X için herhangi bir baz ve $T_e = (\alpha_{jk})$, T yi baz cinsinden ifade eden matris olsun. T_e matrisinin eigen-değerlerine T operatörünün eigen-değerleri adı verilir. Benzer yolla, T operatörünün spektrum ve resolvent cümle tanımları yapılabilir. Bunlara ilişkin olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.2.3. Teorem (Kreyszig [11]) : Sonlu boyutlu normlu bir X uzayı üzerinde verilen bir $T : X \longrightarrow X$ operatörünü, X 'in çeşitli bazlara bağlı olarak, belirleyen bütün matrislerin eigen-değerleri aynıdır.

$n \times n$ tipinde T_1 ve T_2 gibi iki matris verildiğinde,

$$T_2 = C^{-1}T_1C$$

olacak şekilde singüler olmayan bir C matrisi varsa T_1 ve T_2 matrislerine benzer matrisler adı verilir. Bu tanımın ışığında;

(i) Sonlu boyutlu normlu bir X uzayı üzerinde aynı T lineer operatörünü, X ' in herhangi iki bazına bağılı olarak belirleyen iki matris benzerdir ve

(ii) Benzer matrisler aynı eigen-değerlere sahiptir diyebiliriz.

2.2.4. Teorem (Kreyszig [11]) : Sonlu boyutlu kompleks normlu bir $X \neq \{0\}$ uzayının üzerindeki lineer bir operatörün en az bir eigen-değeri vardır.

2.3. Sonsuz Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori

$X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay ve $T : D(T) \longrightarrow X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayı ve I , $D(T)$ üzerindeki özdeşlik operatörü olmak üzere T operatörü ile,

$$T_\lambda = T - \lambda I \quad (4)$$

operatörünü eşleyelim. T_λ 'nin tersi varsa, bunu $R_\lambda(T)$ yani,

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \quad (5)$$

ile gösterip, buna T 'nin resolvent operatörü ya da kısaca T 'nin resolventi diyeceğiz. T operatörünün belirli olması halinde, yazmada kolaylık sağlama nedeniyle $R_\lambda(T)$ mevcut olmak üzere $x = T_\lambda^{-1}y = R_\lambda(T)y$ yazabiliriz.

2.3.1. Tanım (Kreyszig [11]): $X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay ve $T : D(T) \longrightarrow X$ lineer bir operatör olsun. T 'nin bir λ regüler değeri

(R 1) $R_\lambda(T)$ mevcut,

(R 2) $R_\lambda(T)$ sınırlı,

(R 3) X de yoğun bir cümle üzerinde $R_\lambda(T)$ tanımlı olacak şekilde kompleks bir sayıdır.

T 'nin bütün regüler değerleri olan λ 'ların oluşturduğu $\rho(T)$ cümlesine ise T 'nin resolvent cümlesi adı verilir. $\rho(T)$ 'nin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki tümleyeni olan $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ cümlesine T 'nin spektrumu ve bir $\lambda \in \sigma(T)$ sayısına da T 'nin bir spektral değeri denir. Bundan başka, $\sigma(T)$ spektrumunu, aşağıdaki şekilde tanımlanan ayrık üç cümleye parçalamakta mümkündür.

$R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekilde cümleye nokta spektrum ya da diskret spektrum adı verilir ve $\sigma_p(T)$ ile gösterilir, bir $\lambda \in \sigma_p(T)$ sayısı ise T 'nin bir eigen-değeri adını alır.

$\sigma_c(T)$ sürekli spektrum ise $R_\lambda(T)$ mevcut olup (R 3)'ü sağlayacak ancak (R 2)'yi sağlamayacak, yani $R_\lambda(T)$ sınırsız olacak şekilde bir cümledir.

$\sigma_r(T)$ rezidü spektrumu da, $R_\lambda(T)$ mevcut olup (sınırlı ya da sınırsız) (R 3) 'ü gerçeklemeyecek şekilde bir cümledir.

İlk olarak, yukarıdaki dört cümleinin ayrı olduğunu ve bunların birleşiminin bütün kompleks düzlemi oluşturduğunu söylemeliyiz. Eğer $R_\lambda(T)$ resolventi mevcut ise lineerdir. Ayrıca $R_\lambda(T) = R(T_\lambda) \longrightarrow D(T_\lambda)$ nin mevcut olması için gerek ve yeter koşulun $T_\lambda x = 0$ in $x=0$ sonucunu yani T_λ nin sıfır uzayının $\{0\}$ olduğunu gerektirmesi olduğunu da gösterir. Burada $R(T_\lambda)$, T_λ nin değer bölgesidir.

Buna göre, bazı $x \neq 0$ değerleri için $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$ ise, tanım gereği $\lambda \in \sigma_p(T)$ dir, yani λ , T ' nin bir eigen-değeridir. x vektörüne bu durumda, T ' nin λ eigen değerine karşılık gelen eigen-vektörü adı verilir. $D(T)$ ' nin, T ' nin λ eigen değerine karşılık gelen bütün eigen-vektörleriyle 0 dan oluşan altuzayına T nin λ eigen değerine karşılık gelen eigen-uzayı denir.

Burada verdiğimiz eigen-değer tanımının daha önce verdiğimiz tanımla uyum içinde olduğu görülmektedir. Ayrıca sonlu boyutlu bir uzay üzerindeki lineer bir operatörün spektrumunun yalnızca nokta spektrum olduğunu görmekteyiz. Dolayısıyla her spektral değer bir eigen-değer olmaktadır.

2.3.2. Tanım (İnce Spektrum): X bir Banach uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $R(T)$ ve T^{-1} için;

$$(I) R(T) = X$$

$$(II) R(T) \neq \overline{R(T)} = X ,$$

$$(III) \overline{R(T)} \neq X$$

ve

$$(1) T^{-1} \text{ mevcut ve sınırlı,}$$

$$(2) T^{-1} \text{ mevcut ancak sınırlı değil,}$$

$$(3) T^{-1} \text{ mevcut değil,}$$

durumları vardır. (Goldberg [13]). Yukarıdaki incelemeler birlikte gözönüne alınırsa; $I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3$ olmak üzere dokuz farklı durum söz konusudur. Bu sınıflandırmaya T operatörünün ince spektrumu denir. Örneğin operatör II_2 durumundaysa, bu durumda $R(T_\alpha) \neq \overline{R(T_\alpha)} = X$ ve T^{-1} vardır fakat sınırlı değildir.

Eğer λ , $T - \lambda I \in I_1, II_1$ olacak şekilde bir kompleks sayı ise $\lambda \in \rho(T)$, diğer

durumlarda ise $\lambda \in \sigma(T)$ dir. Burada $T-\lambda I$ 'nin bulunduğu sınıfı göz önüne alarak, $\sigma(T)$ yerine

$$\sigma_p(T) = \{ \lambda \in C : T - \lambda I \in I_3, II_3, III_3 \}$$

$$\sigma_c(T) = \{ \lambda \in C : T - \lambda I \in I_2, II_2 \}$$

$$\sigma_r(T) = \{ \lambda \in C : T - \lambda I \in III_1, III_2 \}$$

yazılır ve bu cümlelere sırasıyla T operatörünün nokta, sürekli ve artık spektrumu denir.

X' in sonsuz boyutlu olması halinde, aşağıdaki örnekte de göreceğimiz gibi, T , eigen-değer olmayan, spektral değerlere de sahip olabilmektedir:

2.3.3. Örnek (Kreyszig [11]): $X = \ell_2$ Hilbert dizi uzayı üzerinde $x = (\xi_j) \in \ell_2$

$$\text{olmak üzere, } (\xi_1, \xi_2, \dots) \longrightarrow (0, \xi_1, \xi_2, \dots) \quad (6)$$

ile verilen bir $T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ lineer operatörü tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan, T operatörüne sağ-değiştirme operatörü denir.

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 = \|x\|^2$$

olması nedeniyle, T sınırlıdır (ve $\|T\| = 1$ dir).

$$R_0(T) = T^{-1} : T(X) \longrightarrow X \text{ operatörü mevcut olup, aslında}$$

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) \longrightarrow (\xi_2, \xi_3, \dots)$$

ile verilen sol-değiştirme operatörüdür. (6), $T(X)$ ' in X' de yoğun olmadığını gösterdiğinden, " Bir H Hilbert uzayının herhangi bir $M \neq$ altcümlesi verildiğinde $\overline{M} = H \Leftrightarrow M^\perp = \{z \in H : z \perp M\} = \{0\}$ olmasıdır." önermesi gereğince $R_0(T)$, (R3) koşulunu gerçekleştirmez; gerçekten $T(X)$, $\mu_1 = 0$ olmak üzere, bütün $\mu = (\mu_j)$ lerden oluşan Y altuzayıdır. Buna göre, tanım gereği $\lambda = 0$, T nin bir spektral değeridir. Ayrıca $\lambda = 0$ bir eigen-değer değildir. Bunu $Tx = 0$ ın $x = 0$ ' ı gerektirmesi ve sıfır vektörünün bir eigen-vektör olmaması nedeniyle, (6)' a doğrudan doğruya gösterebiliriz.

2.3.4. Teorem (Kreyszig [11]) : $T : X \longrightarrow X$, sınırlı, lineer ve X tam ise en az bir λ için $R_\lambda(T)$ mevcut ve tüm X uzayı üzerinde tanımlı ise, bu λ için, resolvent sınırlıdır.

Verilen bir operatörün spektrumunun ne gibi genel özelliklere sahip olabileceği sorunu, operatörün üzerinde tanımlandığı uzayın cinsine ve incelenen operatörün cinsine bağlıdır.

2.3.5. Teorem (Kreyszig [11]) : X bir Banach uzayı olmak üzere $T \in B(X, X)$ olsun. $\|T\| < 1$ ise $(I - T)^{-1}$ mevcut olup X ' in tümü üzerinde sınırlı lineer bir operatör ve

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \dots \quad (7)$$

dır. (Burada sağ taraftaki seri $B(X, X)$ üzerindeki norma göre yakınsaktır).

İspat : $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ yazabiliriz. Ayrıca $\sum \|T\|^j$ geometrik serisinin de $\|T\| < 1$ için yakınsak olduğunu biliyoruz. Buna göre (7)' deki seri, $\|T\| < 1$ için yakınsaktır. X ' in tam olması halinde, $B(X, X)$ ' in de tam olduğunu biliyoruz. O halde, mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirecektir.

(7) deki serinin toplamını S ile gösterelim. Geriye $S = (I - T)^{-1}$ olduğunun gösterilmesi kalmaktadır. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} (I - T)(I + T + \dots + T^n) &= (I + T + \dots + T^n)(I - T) \\ &= I - T^{n+1} \end{aligned} \quad (8)$$

yazabiliriz. Şimdi, $n \longrightarrow \infty$ yapalım. $\|T\| < 1$ olduğundan $T^{n+1} \longrightarrow 0$ olur. Buna göre,

$$(I - T)S = S(I - T) = I \quad (9)$$

elde ederiz ki, bu $S = (I - T)^{-1}$ olduğunu gösterir.

2.3.6. Teorem (Kreyszig [11]) : Kompleks bir X Banach uzayının üzerindeki sınırlı lineer bir T operatörünün resolvent cümlesi açık ve dolayısıyla $\sigma(T)$ spektrumu kapalıdır.

İspat : $\rho(T) = \emptyset$ ise açıktır. $\rho(T) \neq \emptyset$ alalım. Sabit bir $\lambda_0 \in \rho(T)$ ve herhangi bir λ için,

$$\begin{aligned} T - \lambda I &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= (T - \lambda_0 I) \left[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1} \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz. [...] parantez içindeki operatörü V ile göstererek, bu eşitliği

$$T_{\lambda} = T_{\lambda_0} V \quad V = I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} \quad (10)$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\lambda_0 \in \rho(T)$ ve T 'nin sınırlı olması nedeniyle $R_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}^{-1} \in B(X, X)$ sonucunu gerektirir. Teorem 2.3.5 den V 'nin $B(X, X)$ de her λ için $\|(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\| < 1$, yani

$$|\lambda - \lambda_0| < 1 / \|R_{\lambda_0}\| \quad (11)$$

olacak şekilde bir,

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \quad (12)$$

inversine sahip olduğunu gösterir. $T_{\lambda_0}^{-1} = R_{\lambda_0} \in B(X, X)$ olduğundan, bundan ve (10)'a, (11)'i gerçekleyen her λ için T_{λ} operatörünün bir

$$R_{\lambda} = T_{\lambda}^{-1} = (T_{\lambda_0} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0} \quad (13)$$

inversine sahip olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla (11), λ_0 'ın T 'nin regüler λ değerlerinden oluşan bir komşuluğunu belirler. $\lambda_0 \in \rho(T)$ 'nin isteksel olması nedeniyle, $\rho(T)$ açık ve dolayısıyla bunun tümleyeni olan, $\sigma(T) = C - \rho(T)$ kapalıdır.

Bu ispatta dikkatimizi çeken önemli noktalardan birisi, resolventin λ' 'nin kuvvetlerine göre bir kuvvet serisi tarafından temel bir gösterimini de elde etmiş olmamızdır. Gerçekten, (11), (12) ve (13) den hemen aşağıdaki teoremi elde edebiliriz:

2.3.7. Teorem (Kreyszig [11]) : Teorem 2.3.6 da tanımlanan X ve T ile her $\lambda_0 \in \rho(T)$ için, $R_{\lambda}(T)$ resolventi,

$$R_{\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1} \quad (14)$$

gösterimine sahiptir. Buradaki seri, kompleks düzlemde

$$|\lambda - \lambda_0| < 1 / \|R_{\lambda_0}\|$$

ile verilen açık disk içindeki her λ için mutlak yakınsak olmaktadır ve bu disk $\rho(T)$ nin bir alt cümlesidir.

Teorem 2.3.5' in diğer bir sonucu olarak sınırlı lineer bir operatör için spektrumun kompleks düzlemde sınırlı bir cümle olduğuna ilişkin aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.3.8. Teorem (Kreyszig [11]) : Kompleks bir X Banach uzayının üzerindeki $T : X \longrightarrow X$ sınırlı lineer operatörünün $\sigma(T)$ spektrumu kompakt olup,

$$|\lambda| \leq \|T\| \quad (15)$$

ile verilen diskin içinde kalır. Buna göre, T 'nin $\rho(T)$ resolvent cümlesi boş değildir.

İspat: $\lambda \neq 0$ ve $K = 1/\lambda$ olsun. Teorem 2.3.5 den, adı geçen seriler, aynı teorem gereği,

$$\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1 \quad \text{yani} \quad |\lambda| > \|T\|$$

koşuluna uygun, bütün λ 'lar için yakınsak olmak üzere,

$$\begin{aligned} R_\lambda &= (T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} (I - KT)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (KT)^j \\ &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T \right)^j \end{aligned} \quad (16)$$

gösterimini elde ederiz. Aynı teorem, bu tip λ 'ların $\rho(T)$ içinde olduğunu da gösterir. Dolayısıyla $\sigma(T) = C - \rho(T)$ spektrumu (15) diskinin içinde kalmak zorundadır, bu nedenle $\sigma(T)$ sınırlıdır. Ayrıca teorem 2.3.6 gereği, $\sigma(T)$ kapalıdır. O halde $\sigma(T)$ kompakttır.

2.3.9. Tanım (Kreyszig [11]) : Kompleks bir X Banach uzayı üzerindeki bir $T \in B(X, X)$ operatörünün $\sigma_r(T)$ spektral yarıçapı, merkezi λ -düzleminin orijininde bulunan ve $\sigma(T)$ yi içeren en küçük kapalı diskin yarıçapı olan,

$$\sigma_r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

büyükliktir. (15)'den, kompleks bir Banach uzayı üzerindeki sınırlı lineer bir operatörün spektral yarıçapı için,

$$\sigma_r(T) \leq \|T\| \quad (17)$$

yazılabileceği açıkça görülmektedir. İspatını vermeksizin, burada ayrıca,

$$\sigma_r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \quad (18)$$

olduğunu da belirtmemiz yerinde olacaktır.

2.3.10. Tanım: w dizi uzayının ℓ_p ve bv_p alt uzayları ($1 \leq p < \infty$) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}$$

$$bv_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty \right\}$$

3. ℓ_p VE bv_p DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE $B(r,s)$ OPERATÖRÜNÜN İNCE SPEKTRUMU

3.1 ℓ_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s)$ Operatörünün İnce Spektrumu

Bu bölümde, $1 < p < \infty$ olmak üzere ℓ_p dizi uzayı üzerinde $B(r,s)$ operatörünün spektrum, nokta spektrum, sürekli spektrum ve artık spektrumunu inceleyeceğiz. İlk olarak daha sonraki sonuçların ispatında kullanacağımız iki lemmayı ispatsız olarak verelim.

3.1.1. Lemma (Akhmedov ve Başar [14]) : d_1 ve d_q kümelerini

$$d_1 = \left\{ a = (a_k) : \|a\|_{d_1} = \sup_{k, n \in N} \left| \sum_{j=k}^n a_j \right| < \infty \right\}$$

ve

$$d_q = \left\{ a = (a_k) : \|a\|_{d_q} = \left(\sup_{n \in N} \sum_k \left| \sum_{j=k}^n a_j \right|^p \right)^{1/q} < \infty \right\}, \quad (1 < q < \infty)$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde $\{bv_1\}^*$ ve $\{bv_p\}^*$, d_1 ve d_q uzaylarına izometrik izomorfidir.

3.1.2. Lemma (Altay ve Başar [18]) : bv_p uzayının elemanlarından,

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} 0, & n < k \\ 1, & n \geq k \end{cases} \quad (k, n \in N)$$

eşitliğini sağlayan $b^{(k)} = \{b_n^{(k)}\}_{n \in N}$ dizilerini gözönüne alalım. $\{b_n^{(k)}\}_{n \in N}$ dizisi bv_p için bir baz oluşturur ve her $k \in N$ için $\lambda_k = x_k - x_{k-1}$ olmak üzere $x \in bv_p$ dizisi

$$x = \sum_k \lambda_k b^{(k)}$$

şeklinde bir tek gösterime sahiptir.

$B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünü $r, s \neq 0$ olmak üzere

$$B(r,s) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \dots \\ s & r & 0 & \dots \\ 0 & s & r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım.

3.1.3. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $B(r,s) ; \ell_p \rightarrow \ell_p$ operatörü ;

$$\left(|r|^p + |s|^p \right)^{1/p} \leq \|B(r,s)\|_{\ell_p} \leq |r| + |s|$$

eşitsizliğini sağlayan sınırlı lineer bir operatördür.

İspat : ℓ_p uzayında $e^{(0)} = (1,0,0,\dots) \in \ell_p$ ($p > 1$) dizisini alalım. Bu taktirde $B(r,s)e^{(0)} = (r,s,0,0,\dots)$. Buradan

$$\frac{\|B(r,s)e^{(0)}\|_{\ell_p}}{\|e^{(0)}\|_{\ell_p}} = \left(|r|^p + |s|^p \right)^{1/p}$$

yazabiliriz ve böylece

$$\left(|r|^p + |s|^p \right)^{1/p} \leq \|B(r,s)\|_{\ell_p} \quad (2.1)$$

elde edilir. Herhangi bir $x = (x_k) \in \ell_p$ dizisini ele alalım. $x_{-1} = 0$ alır ve Minkowsky eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} \|B(r,s)x\|_{\ell_p} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |sx_{k-1} + rx_k|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |sx_{k-1}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |rx_k|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(|s|^p \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k-1}|^p \right)^{1/p} + \left(|r|^p \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \\ &= |s| + |r| \|x\|_{\ell_p} \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\|B(r,s)\|_{\ell_p} \leq |s| + |r| \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2) den ispat elde edilir.

Aşağıdaki lemma, Teorem 3.1.5 in ispatında kullanılacaktır.

3.1.4. Lemma (Choudhary ve Nanda [16]) : $1 < p < \infty$ ve $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty) \cap (\ell_1, \ell_1)$ olsun. O halde, $A \in (\ell_p, \ell_p)$ dir.

3.1.5. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\sigma(B(r,s), \ell_p) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|\}$.

İspat: İlk olarak $\alpha \notin \alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|$ için $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ mevcut ve $B(\ell_p)$ de olduğunu göstereceğiz. $\alpha \notin \alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|$ olsun. $s \neq 0$ ve $\alpha \neq r$ olduğundan $B(r,s) - \alpha I$ üçgen matristir, dolayısıyla $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur.

$y = (y_k) \in \ell_p$ olsun. $y = (B(r,s) - \alpha I)x$ denklemini çözerek $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ matrisini elde ederiz.

$$b_{nk} = \begin{cases} \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}, & k \leq n \text{ ise;} \\ 0, & k > n \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $(B(r,s) - \alpha I)^{-1} = (b_{nk})$ olduğu görülür. Buradan

$$B(r,s) - \alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \dots \\ \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

matrisini yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \|(B(r,s) - \alpha I)^{-1}\|_{(\ell_1, \ell_1)} &= \sup_k \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^{n-k} \left| \frac{1}{r-\alpha} \right| \\ &= \left| \frac{1}{r-\alpha} \right| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^n < \infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

olur, çünkü $\left| \frac{s}{r-\alpha} \right| < 1 \Leftrightarrow |s| < |r-\alpha|$. O halde $(B(r,s) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_1, \ell_1)$ olur. Benzer olarak,

$$\|B(r,s) - \alpha I)^{-1}\|_{(\ell_\infty, \ell_\infty)} < \infty$$

olduğunu gösterebiliriz. Bu gösterir ki $(B(r,s) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_\infty, \ell_\infty) \cap (\ell_1, \ell_1)$ dir. Lemma 3.1.4 den, $(B(r,s) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_p, \ell_p)$ ve böylece $\sigma(B(r,s), \ell_p) \subseteq \alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|$ dir.

Şimdi $\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|$ olsun. $\alpha \neq r$ ise $B(r,s) - \alpha I$ üçgen matristir, dolayısıyla $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur, fakat $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ için $|s| \geq |a - r|$ olduğundan her $k \in N$ için $x_k = (-s)^k / (r - \alpha)^{k+1}$ olmak üzere $x \notin \ell_p$ dir. Yani $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ operatörü, $B(\ell_p)$ de değildir. $\alpha = r$ ise $B(r,s) - \alpha I = B(0,s)$ operatörü

$$B(0,s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ s & 0 & 0 & \dots \\ 0 & s & 0 & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

matrisiyle ifade edilir. $B(0,s)x = \theta$ olduğu için $x = \theta$ dir. $B(0,s) : \ell_p \rightarrow \ell_p$ içine fakat örten değildir. Dolayısıyla $B(0,s)$ nin tersi yoktur. Böylece $\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s| \subseteq (\sigma(B(r,s), \ell_p))$ dir.

3.1.6. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\sigma_p(B(r,s), \ell_p) =$ dir.

İspat : $x \neq \theta \in \ell_p$ için $B(r,s)x = \alpha x$ olsun. Bu sistem açıldığında

$$\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0 \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1 \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. $x_t, x = (x_k)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi ise $\alpha = r$ dir ve

$$sx_t + rx_{t+1} = \alpha x_{t+1}$$

denklemden $sx_t = 0$ elde edilir. $s \neq 0$ olduğu için $x_t = 0$ bulunur ki bu da $x_t \neq 0$ ile çelişir.

Yani; $B(r,s) = \alpha x$ eşitliğini sağlayan $x \neq 0$ dizisi mevcut değildir.

3.1.7. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\sigma_p(B(r,s)^*, \ell_p^*) = \alpha \in C : |\alpha - r| < |s|$ dir.

İspat : $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere $x \neq \theta \in \ell_p^* \cong \ell_q$ için $B(r,s)^* x = \alpha x$ olsun. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
rX_0 + sX_1 &= \alpha X_0 \Rightarrow x_1 = \left(\frac{\alpha - r}{s} \right) x_0 \\
rX_1 + sX_2 &= \alpha X_1 \Rightarrow x_2 = \left(\frac{\alpha - r}{s} \right)^2 x_0 \\
rX_2 + sX_3 &= \alpha X_2 \Rightarrow x_3 = \left(\frac{\alpha - r}{s} \right)^3 x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Buradan $x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s} \right)^n x_0$ yazılabilir. Bu ispatı tamamlar.

3.1.8. Lemma (Goldberg [17]) : T^* ile T nin adjoint operatörünü gösterelim. T nin yoğun bir görüntü kümesine sahip olması için gerek ve yeter şart T^* ın birebir olmasıdır.

3.1.9. Lemma (Goldberg [17]) : T nin örten olması için gerek ve yeter şart T nin sınırlı bir inverse sahip olmasıdır.

3.1.10. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\sigma_r(B(r, s), \ell_p) = \{ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s| \}$ dir.

İspat: $B(r, s) - \alpha I$ operatörünün bir inverse sahip olduğunu ve $|\alpha - r| < |s|$ eşitsizliğini sağlayan α için $\overline{R(B(r, s) - \alpha I)} \neq \ell_p$ olduğunu gösterelim.

$\alpha \neq r$ için $B(r, s) - \alpha I$ operatörü üçgen matris olduğundan tersi vardır. $\alpha = r$ için $B(r, s) - \alpha I$ operatörü birebirdir dolayısıyla bir tersi vardır. Fakat Teorem 3.1.7'den $B(r, s)^* - \alpha I$ birebir değildir. Lemma 3.1.8' den $B(r, s) - \alpha I$ operatörünün değer kümesi ℓ_p da yoğun değildir ve bu ispatı tamamlar.

3.1.11. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\alpha = r$ ise $\alpha \in III_1(B(r, s), \ell_p)$ dir.

İspat : $\alpha = r$ ise Teorem 3.1.9 ve Lemma 3.1.8 den $B(r, s) - rI \in III$ dür. Diğer taraftan Teorem 3.1.6 dan $\alpha = r$ ise $B(r, s) - rI$ operatörü $\sigma_p(B(r, s), \ell_p)$ de değildir. Dolayısıyla $B(r, s) - rI$ operatörünün tersi vardır. O halde, $B(r, s) - rI \in I \cup II$ dir.

$B(r,s) - rI \in I$ olduğunu göstermek için, $B(r,s)^* - rI = B(0,s)^*$ üzerine olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $y = (y_n) \in \ell_q$ için $B(0,s)^* x = y$ olacak şekilde $x = (x_n) \in \ell_q$ bulmalıyız. Doğrudan bir hesaplamayla

$$x_n = \frac{1}{s} y_{n-1}$$

elde edilir. O halde $B(0,s)^*$ üzerindedir.

3.1.12. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\alpha \neq r$ ve $\alpha \in \sigma_r(B(r,s), \ell_p)$ ise, $\alpha \in III_2(B(r,s), \ell_p)$ dir.

İspat : $\alpha \neq r$ için, $B(r,s) - \alpha I$ operatörü üçgensel matristir, dolayısıyla bir tersi mevcuttur. (2.3) den, $B(r,s) - \alpha I$ operatörünün inversi sürekli değildir. Bundan dolayı, $B(r,s) - \alpha I \in II_2$ dir.

Teorem 3.1.7 den, $B(r,s)^* - \alpha I$ operatörü birebirdir. Lemma 3.1.8 den $B(r,s) - \alpha I$ yoğun bir görüntü kümesine sahip değildir. Bundan dolayı $B(r,s) - \alpha I \in III_2$ dür. Bu ispatı tamamlar.

3.1.13. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\sigma_c(B(r,s), \ell_p) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| = |s|\}$ dir.

İspat : $\sigma_p(B(r,s), \ell_p) = \emptyset$ ve $\sigma(B(r,s), \ell_p) = \sigma_p(B(r,s), \ell_p) \cup \sigma_r(B(r,s), \ell_p) \cup \sigma_c(B(r,s), \ell_p)$ bölümlerinin ayrık bileşimi olduğu için $\sigma(B(r,s), \ell_p) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| = |s|\}$ diyebiliriz.

3.1.14. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\alpha \in \sigma_c(B(r,s), \ell_p)$ ise $\alpha \in II_2$ dir.

İspat : $\alpha \in \sigma(B(r,s), \ell_p)$ olsun. $s \neq 0$ olduğuna göre $r \neq \alpha$ elde edebiliriz. $\alpha \in II_2$ olduğunu gösterebilmek için $B(r,s) - \alpha I$ 'nin üzerine olmadığını göstermeliyiz.

$$y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_p \text{ için } |s| = |\alpha - r| \text{ olduğundan } x_k = -s^k / (r - \alpha)^k \notin \ell_p \text{ dir.}$$

3.2. bv_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s)$ Operatörünün İnce Spektrumu

Bu bölümde, $1 < p < \infty$ olmak üzere bv_p uzayı üzerinde $B(r,s)$ operatörünün nokta, sürekli ve artık spektrumunu hesaplayacağız.

Teorem 3.2.1. (Bilgiç ve Furkan [8]) : $B(r,s) \in B(bv_p)$ dir.

İspat: $B(r,s)$ nin lineerliği açıktır. Herhangi bir $x = (x_k) \in bv_p$ ele alalım. $\forall k \in N$ için $x_{-k} = 0$ kabul edelim. Minkowsky eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|B(r,s)x\|_{bv_p} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |rx_k - sx_{k-1} - (rx_{k-1} - sx_{k-2})|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |r(x_k - x_{k-1}) - s(x_{k-1} - x_{k-2})|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(|r|^p \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p \right)^{1/p} + \left(|s|^p \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k-1} - x_{k-2}|^p \right)^{1/p} \\ &= |s| + |r| \|x\|_{bv_p} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\|B(r,s)\|_{(bv_p, bv_p)} \leq |s| + |r| \quad (3.1)$$

elde edilir.

3.2.2. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\sigma(B(r,s), bv_p) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|\}$ dir.

İspat: Önce $\alpha \notin \{\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|\}$ için $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ operatörünün var ve $B(bv_p)$ de olduğunu gösterelim. Daha sonra $(B(r,s) - \alpha I)$ operatörünün $\{\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|\}$ için tersinin olmadığını göstereceğiz.

$\alpha \notin \{\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|\}$ olsun. $s \neq 0$ olduğundan $\alpha \neq r$ olup $B(r,s) - \alpha I$ üçgen matristir, dolayısıyla $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur. $y = (y_k) \in bv_p$ olsun. Bu $(y_k - y_{k-1}) \in \ell_p$ demektir. $(B(r,s) - \alpha I)x = y$ denklemi çözülürse (2.3) ile verilen matris elde edilir. Buradan her $k \in N$ için

$$x_k - x_{k-1} = \sum_{j=0}^k \frac{(-s)^{k-j}}{(r-\alpha)^{k-j+1}} (y_j - y_{j-1}) \quad (3.2)$$

bulunur. Yani $(x_k - x_{k-1}) = (B(r,s) - \alpha I)^{-1} (y_k - y_{k-1})$ dir. Teorem 3.1.5 den $(B(r,s) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_p, \ell_p)$ olduğundan $(B(r,s) - \alpha I) \in bv_p$ dir. Buradan $(x_k) \in bv_p$ ve böylece $\sigma(B(r,s), bv_p) \subseteq \{\alpha \in C : |\alpha - r| \leq |s|\}$ dir. Şimdi de $\alpha \in \mathcal{A} \subseteq C : |\alpha - r| \leq |s|$ olsun. $\alpha \neq r$ ise $B(r,s) - \alpha I$ üçgensel matristir, dolayısıyla $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur. Fakat $y = (1, 0, 0, \dots) \in bv_p$ için $|s| \geq |r|$ olduğundan $x_k = -s^k / (r-\alpha)^{k+1} \notin \ell_p$ dir. Yani $(B(r,s) - \alpha I)^{-1} \notin (\ell_p, \ell_p)$ de değildir. $\alpha = r$ ise, Teorem 3.1.5' in ispatındaki yol takip edilerek $B(r,s) - \alpha I = B(0,s)$ operatörünün tersi mevcut değildir. Bu gösterir ki $\mathcal{A} \subseteq C : |\alpha - r| \leq |s| \subseteq \sigma(B(r,s), bv_p)$ dir. Bu ispatı tamamlar.

3.2.3. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : $\|B(r,s)\|_{(bv_p, bv_p)} = |r| + |s|$ dir.

İspat: Teorem 3.2.2' den $\sigma_r(B(r,s)) = |r| + |s|$ olduğundan

$$|r| + |s| \leq \|B(r,s)\|_{(bv_p, bv_p)}$$

dir. (3.1) ile son eşitsizliği birleştirerek sonucu elde ederiz.

$B(r,s)$ operatörünün bv_p üzerindeki spektrum ve nokta spektrumu ℓ_p uzayı ile benzer olduğundan bunlara ilişkin sonuçlar aşağıdaki teoremden ispatsız olarak verilmiştir.

3.2.4. Teorem (Bilgiç ve Furkan [8]) : (i) $\sigma_p(B(r,s), bv_p) =$

(ii) $\sigma_p(B(r,s)^*, bv_p^*) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| < |s|\}$,

iii) $\sigma_r(B(r,s), bv_p) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| < |s|\}$,

iv) $\alpha = r$ ise, $\alpha \in \text{III}_1 \sigma(B(r,s), bv_p)$,

v) $\alpha \neq r$ ve $\alpha \in \sigma_r(B(r,s), bv_p)$ ise, $\alpha \in \text{III}_2 \sigma(B(r,s), bv_p)$,

vi) $\sigma_c(B(r,s), bv_p) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| = |s|\}$,

vii) $\alpha \in \sigma_c(B(r,s), bv_p)$ ise $\alpha \in \text{II}_2$ dir.

4. ℓ_p VE bv_p DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE $B(r,s,t)$ OPERATÖRÜNÜN İNCE SPEKTRUMU

4.1. ℓ_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s,t)$ Operatörünün İnce Spektrumu

Bu bölümde, ℓ_p ($1 < p < \infty$) dizi uzayı üzerinde $B(r,s,t)$ operatörünün Goldberg [13]' in sınıflandırmasına göre ince spektrumunu vereceğiz. Aşağıdaki lemmaları ispatsız olarak vereceğiz.

4.1.1. Lemma: D_∞ ve D_q ($1 < q < \infty$) uzaylarını

$$D_\infty = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} x_j \right| < \infty \right\}$$

ve

$$D_q = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k \left| \sum_{j=k}^{\infty} x_j \right|^q < \infty \right\}$$

olarak tanımlayalım. D_∞ ve D_q uzayları sırasıyla

$$\|a\|_{D_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_j \right| \quad (4.1)$$

ve

$$\|a\|_{D_q} = \left(\sum_k \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_j \right|^q \right)^{1/q} \quad (4.2)$$

normları ile birer Banach uzayıdır. Ayrıca,

(i) (Imaninezhad ve Miri [20]) D_∞ uzayı bv_1^* uzayına izometriktir.

(ii) (Akhmedov ve Başar [14]) D_q uzayı bv_p^* uzayına izometriktir.

4.1.2. Lemma (Altay ve Başar [15]) : Her sabit $k \in \mathbb{N}$ için bv_p uzayının elemanlarının $b^{(k)} = \{b_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} 0, & (n < k), \\ 1, & (n \geq k), \end{cases} \quad n \in N,$$

bu taktirde $\{b_n^{(k)}\}_{n \in N}$ dizisi bv_p uzayı için bir bazdır ve her bir $x \in bv_p$, $x = \sum_k \lambda_k b^{(k)}$ şeklinde

bir tek gösterime sahiptir ve burada her $k \in N$ için $\lambda_k = x_k - x_{k-1}$ dir.

4.1.3. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : $B(r,s,t) : \ell_p \rightarrow \ell_p$ ye aşağıdaki eşitsizliği sağlayan sınırlı lineer bir operatördür.

$$\left(|r|^p + |s|^p + |t|^p \right)^{1/p} \leq \|B(r,s,t)\|_{\ell_p} \leq |r| + |s| + |t|$$

İspat: $B(r,s,t)$ nin lineer olduğunu göstermek kolaydır. ℓ_p de $e^{(0)} = (1,0,0,\dots)$ dizisini alalım. Bu taktirde $B(r,s,t) e^{(0)} = (r,s,t,0,0,\dots)$ dir. Buradan ($p > 1$)

$$\frac{\|B(r,s,t)e^{(0)}\|_{\ell_p}}{\|e^{(0)}\|_{\ell_p}} = \left(|r|^p + |s|^p + |t|^p \right)^{1/p}$$

olup

$$\left(|r|^p + |s|^p + |t|^p \right)^{1/p} \leq \|B(r,s,t)x\|_{\ell_p} \quad (4.3)$$

elde ederiz. $x \in \ell_p$ keyfi bir dizi olsun. Minkowski eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \|B(r,s,t)x\|_{\ell_p} &= \left(\sum_k |sx_{k-1} + rx_k + tx_{k+1}|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_k |sx_{k-1}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_k |rx_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_k |tx_{k+1}|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(|s|^p \sum_k |x_{k-1}|^p \right)^{1/p} + \left(|r|^p \sum_k |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(|t|^p \sum_k |x_{k+1}|^p \right)^{1/p} \\ &= |s| + |r| + |t| \|x\|_{\ell_p} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz ve buradan

$$\|B(r,s,t)x\|_{\ell_p} \leq |s| + |r| + |t| \|x\|_{\ell_p} \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 4.1.3 de tanımlanan $B(r,s,t)$ operatörü $r,s,t \neq 0$ olmak üzere ;

$$B(r,s,t) : \ell_p \rightarrow \ell_p$$

$$x \rightarrow y = B(r,s,t) x = (rx_0, sx_0 + rx_1, tx_0 + sx_1 + rx_2, \dots)$$

şeklinde tanımlanır ve $B(r,s,t)$ operatörünün matris temsili

$$B(r,s,t) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s & r & 0 & 0 & \dots \\ t & s & r & 0 & \dots \\ 0 & t & s & r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.1.4. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : $s, \sqrt{s^2} = -s$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun ve S kümesini de

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \left| \frac{2(r-\alpha)}{-s + \sqrt{s^2}(r-\alpha)} \right| \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\sigma(B(r,s,t), \ell_p) = S$ dir.

İspat: Önce $\alpha \notin S$ için $(B(r,s,t) - \alpha I)^{-1}$ operatörünün mevcut ve $(B(\ell_p))$ de olduğunu gösterelim. Sonra da $\alpha \in S$ için $(B(r,s,t) - \alpha I)$ 'nin tersinin olmadığını göstereceğiz. $\alpha \notin S$ olsun, $\alpha \neq r$ için $B(r,s,t) - \alpha I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır.

$$a_1 = \frac{1}{r-\alpha}$$

$$a_2 = -\frac{s}{(r-\alpha)^2}$$

$$a_3 = \frac{s^2 - (r-\alpha)t}{(r-\alpha)^3}$$

olmak üzere $(B(r,s,t) - \alpha I)^{-1}$ operatörünün matris formunu

$$B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \dots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ \dots & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. Gerçekten (a_n) dizisi $a_1 = \frac{1}{r-\alpha}, a_2 = \frac{-s}{(r-\alpha)^2}$

$$a_n = \frac{-(sa_{n-1} + ta_{n-2})}{r-\alpha}, \quad (n \geq 3)$$

(a_n) dizisini karakteristik denklem ile birleştirerek

$$(r-\alpha)u^2 + su + t = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri

$$u_1 = \frac{-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}}{2(r-\alpha)} \quad \text{ve} \quad u_2 = \frac{-s - \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}}{2(r-\alpha)}$$

dir. Basit bir hesaplama $n \geq 1$ için

$$a_n = \frac{(u_1^n - u_2^n)}{\sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \quad (4.5)$$

bulunur. Eğer $s^2 = 4t(r-\alpha)$ ise

$$a_n = \left(\frac{2n}{-s} \right) \left[\frac{-s}{2(r-\alpha)} \right]^n \quad (4.6)$$

ve böylece $(a_n) \in \ell_p$ olması için gerek ve yeter şart $\left| \frac{-s}{2(r-\alpha)} \right| < 1$ elde edilir. Bu $\alpha \notin S$

olması halinde $(a_n) \notin \ell_p$ olduğunu gösterir.

Şimdi biz $s^2 \neq 4t(r-\alpha)$ olduğunu kabul edelim. $\alpha \notin S$ olduğundan $|u_1| < 1$ dir. Şimdi

$|u_2| < 1$ olduğunu göstereceğiz. $|u_1| < 1$ olduğundan

$$\left| 1 + \sqrt{\frac{1-4t(r-\alpha)}{s^2}} \right| < \left| -\frac{2(r-\alpha)}{s} \right|$$

dir. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için $|1 - \sqrt{z}| \leq |1 + \sqrt{z}|$ olduğundan

$$\left| 1 - \sqrt{\frac{1-4t(r-\alpha)}{s^2}} \right| < \left| -\frac{2(r-\alpha)}{s} \right|$$

dır. Böylece $|u_2| < 1$ dır. Buradan $\alpha \notin S$ ise $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olduğunu söyleyebiliriz.

$|u_1| < 1$ ve $|u_2| < 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|B(r, s, t) - \alpha I\|_{(\ell_1, \ell_1)}^{-1} &= \sup_{n \in N} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{s^2 - 4t(r - \alpha)}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_1|^n + \sum_{k=1}^{\infty} |u_2|^n \right) < \infty \end{aligned}$$

dır. Bu $(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_1 : \ell_1)$ olduğunu gösterir.

$$\|(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1}\|_{(\ell_{\infty} : \ell_{\infty})} = \sup_{n \in N} \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

olduğundan $(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_{\infty} : \ell_{\infty})$ dur. Lemma 3.1.4 den $(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_p : \ell_p)$

dır. Böylece $\sigma(B(r, s, t), \ell_p) \subseteq S$ dır. $\alpha \in S$ olsun. $\alpha = r$ ise $(B(r, s, t) - \alpha I)$ nın matris gösterimi:

$$B(0, s, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s & 0 & 0 & 0 & \dots \\ t & s & 0 & 0 & \dots \\ 0 & t & s & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $B(r, s, t) - rI = B(0, s, t)$ yoğun görüntü kümesine sahip olmadığından tersi yoktur.

$s^2 = 4t(r - \alpha)$ ise (4.5) den $\left| \frac{-s}{2(r - \alpha)} \right| \geq 1$ olmak üzere $B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} \notin B(\ell_p)$ elde edilir.

Bundan dolayı $\alpha \neq r$ ve $s^2 \neq 4t(r - \alpha)$ olduğunu söyleyebiliriz. $\alpha \neq r$ olduğundan $B(r, s, t) - \alpha I$ üçgensel matristir, $s^2 \neq 4t(r - \alpha)$ olduğundan $|u_1| > |u_2|$ ve $\alpha \in S$ olduğundan $|u_1| \geq 1$ olup

$(n \rightarrow \infty)$ ve böylece $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^p$ ıraksaktır. $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ olduğundan

$x = (a_1, a_2, \dots) \notin \ell_p$ dır. Böylece $(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1}$ operatörü $B(\ell_p)$ de değildir. Bu $S \subseteq \sigma(B(r, s, t), \ell_p)$ olduğunu gösterir.

Uyarı: $\sqrt{s^2} = s$ ise $\sigma(B(r, s, t), \ell_p) = \{\alpha \in C : |2(r - \alpha)| \leq |s + \sqrt{s^2 + 4t(r - \alpha)}|\}$ dır.

4.1.5. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : $\sigma_p(B(r, s, t), \ell_p) =$ dır.

İspat: $x \in \ell_p$ ve $x \neq 0$ olsun, $B(r,s,t) x = \alpha x$ denklemini açarsak

$$rx_0 = \alpha x_0$$

$$sx_0 + rx_1 = \alpha x_1$$

$$tx_0 + sx_1 + rx_2 = \alpha x_2$$

$$tx_1 + sx_2 + rx_3 = \alpha x_3$$

$$tx_2 + sx_3 + rx_4 = \alpha x_4$$

denklem sistemini elde ederiz. $\alpha \neq r$ için $x_0 = 0$ olur. $x_0 = 0$ ise $x_1 = x_2 = \dots = 0$ olur ki bu da $x \neq 0$ ile çelişir. $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_{n_0} ise $tx_{n_0-2} + sx_{n_0-1} + rx_{n_0} = \alpha x_{n_0}$ denkleminde $\alpha = r$ ve bir sonraki eşitlikten $x_{n_0} = 0$ olur. Bu ise $x_{n_0} \neq 0$ ile çelişir. Yani; $B(r,s,t)x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan $x \neq 0$ dizisi mevcut değildir.

$T: \ell_p \longrightarrow \ell_p$ operatörü bir A matrisi ile temsil ediliyorsa $T^*: \ell_p^* \longrightarrow \ell_p^*$ operatörü de A matrisinin transpozu ile temsil edilebilir. ℓ_p dizi uzayının ℓ_p^* dual uzayı ℓ_q ya izomorfiktir. $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$

4.1.6. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) :

$S_1 = \alpha \in \mathbb{C} : |2(r-\alpha)| < \left| -s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)} \right|$ olsun. Bu taktirde $\sigma_p(B(r,s,t), \ell_p^*) = S_1$ dır.

İspat: İlk olarak $S_1 \subset \sigma_p(B(r,s,t), \ell_p^*)$ olduğunu göstereceğiz. $\theta \neq x \in \ell_p^* \cong \ell_q$ için $B(r,s,t)^*x = \alpha x$ denklemini alalım, bu denklem çözülürse

$$rx_0 + sx_1 + tx_2 = \alpha x_0$$

$$rx_1 + sx_2 + tx_3 = \alpha x_1$$

$$rx_2 + sx_3 + tx_4 = \alpha x_2$$

$$\vdots$$

denklem sistemini elde ederiz, $\alpha = r$ ise bu taktirde $x_0 \neq 0$ seçebiliriz ve böylece $\alpha = r$ ye karşılık gelen özvektör $x = x_0, 0, 0, \dots$ dır. Kabul edelim ki $\alpha \neq r$ olsun. x_n indirgeme formülleri yardımıyla x_0 ve x_1 cinsinden

$$tx_n + sx_{n-1} + (r-\alpha)x_{n-2} = 0$$

olarak bulunur. $a_n, (r-\alpha)a_n + sa_{n-1} + ta_{n-2} = 0$ indirgeme bağıntısını sağladığından $k \geq 1$ ve herhangi bir c_1, c_2 sabitleri için

$$x_n = \frac{a_{n-1} \cdot (r-\alpha)^k}{t^{k-1}} c_1 + \frac{a_n \cdot (r-\alpha)^k}{t^{k-1}} c_2$$

şeklinde yazılır. $c_1 = -x_0, c_2 = x_1$ ve $k = n$ alırsak $n \geq 2$ için,

$$x_n = -\frac{a_{n-1} \cdot (r-\alpha)^n}{t^{n-1}} x_0 + \frac{a_n \cdot (r-\alpha)^n}{t^{n-1}} x_1 \quad (4.7)$$

denklemini elde ederiz.

$$x_0 = 1 \text{ ve } x_1 = \frac{2(r-\alpha)}{-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}}$$

seçelim. Şimdi $\forall n \geq 2$ için $x_n = (x_1)^n$ olduğunu gösterelim. u_1 ve $u_2, (r-\alpha)u^2 + su + t = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$$u_1 u_2 = \frac{t}{r-\alpha} \text{ ve } u_1 - u_2 = \frac{\sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}}{(r-\alpha)}$$

yazabiliriz. $x_2 = 1 \setminus u_1$ alalım ve (4.7) i kullanarak

$$\begin{aligned} x_n &= -\frac{a_{n-1} \cdot (r-\alpha)^n}{t^{n-1}} + \frac{a_n \cdot (r-\alpha)^n}{t^{n-1}} \times \frac{1}{u_1} \\ &= \frac{u_2^{n-1} - u_1^{n-1}}{\sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \times \frac{(r-\alpha)^n}{t^{n-1}} + \frac{u_1^n - u_2^n}{\sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \times \frac{(r-\alpha)^n}{t^{n-1}} \times \frac{1}{u_1} \\ &= \frac{r-\alpha}{\sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \times \left(\frac{r-\alpha}{t} \right)^{n-1} \left(u_2^{n-1} - u_1^{n-1} + \frac{u_1^n - u_2^n}{u_1} \right) \\ &= \frac{1}{u_1 - u_2} \times \frac{1}{u_1^{n-1} - u_2^{n-1}} \times \frac{1}{u_1} (u_1 u_2^{n-1} - u_2^n) \\ &= \frac{u_2^{n-1} (u_1 - u_2)}{(u_1 - u_2) u_1^n u_2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{u_1^n} \\ &= (x_1)^n \end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı sonuç $u_1 = u_2$ olması durumunda, yani $s^2 = 4t(r-\alpha)$ olması halinde elde edilir. $|x_1| < 1$ olduğundan $x = (x_k) \in \ell_p^*$ dır. Böylece

$$S_1 \subseteq \sigma_p(B(r, s, t)^*, \ell_p^*)$$

dır. Şimdi α sayısını

$$\left| \frac{2(r-\alpha)}{-s\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}} \right| \geq 1$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçelim. Bu durumda $|u_1| \leq 1$ dir. $\alpha \notin \sigma_p(B(r,s,t)^*, \ell_q)$ olduğunu göstermeliyiz. Bundan dolayı tüm pozitif n sayıları için (4.7) den

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{r-\alpha}{t} \right) \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \begin{bmatrix} -x_0 + \frac{a_{n+1}}{a_n} x_1 \\ -x_0 + \frac{a_n}{a_{n-1}} x_1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Burada $(r-\alpha) \setminus t = 1 \setminus (u_1 u_2)$ dir. Şimdi aşağıdaki üç durumu inceleyelim:

Durum (i) : $|u_2| < |u_1| \leq 1$ olsun. Bu durumda $s^2 \neq 4t(r-\alpha)$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1^{n+1} - u_2^{n+1}}{u_1^n - u_2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1^{n+1} \left[1 - \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^{n+1} \right]}{u_1^n \left[1 - \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^n \right]} = u_1$$

dir. $-x_0 + u_1 x_1 = 0$ ise $|u_1| \leq 1$ olduğundan $x_n = \frac{1}{u_1^n} x_0, \ell_q$ de değildir. Aksi taktirde

$$\lim_n \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{1}{|u_1| |u_2|} |u_1| = \frac{1}{|u_2|} > 1$$

dir.

Durum (ii) : $|u_2| = |u_1| < 1$ olsun. Bu durumda $s^2 = 4t(r-\alpha)$ ve

$$a_n = \left(\frac{2n}{-s} \right) \left[\frac{-s}{2(r-\alpha)} \right]^n$$

formülünü kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-s}{2(r-\alpha)} = u_2 = u_1$$

elde ederiz ve bundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{1}{|u_1| |u_2|} |u_1| = \frac{1}{|u_2|} > 1$$

dir.

Durum (iii) : $|u_2| = |u_1| = 1$ olsun. Bu durumda $s^2 = 4t(r - \alpha)$ ve bundan dolayı $|-s \setminus 2t| = 1$ elde ederiz. Kabul edelim ki $\alpha \in \sigma_p(B(r,s,t)^*, \ell_q)$ olsun. $x \in \ell_q$ ve $x \neq \theta$ olduğu aşıkardır. (4.7)'den

$$x_n = \left(\frac{-s}{2t}\right)^{n-1} \left[(1-n) \left(\frac{-s}{2t}\right) x_0 + x_1 \right]$$

dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ olduğundan $x_0 = x_1 = 0$ veya $x_1 = (-s) \setminus (2t)x_0$ dir. Durum (i) deki gibi $(-s) \setminus (2t) = 1 \setminus u_1$ olduğundan bir çelişki elde ederiz. Bundan dolayı $x_0 = x_1 = 0$ olmalıdır. Bu $x \neq \theta$ demektir. Dolayısıyla $\alpha \notin \sigma_p(B(r,s,t)^*, \ell_q)$ dir.

Durum (i), Durum (ii) ve D' Alembert testinden $x \notin \ell_q$ dir. Durum (iii) ise $\alpha \in \sigma_p(B(r,s,t)^*, \ell_q)$ bir çelişki oluşturur.

4.1.7. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : S_1 Teorem 4.1.6' da olduğu gibi tanımlansın ve

$$S_2 = \left\{ \alpha \in C : \left| \frac{2(r-\alpha)}{-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \right| = 1 \right\}$$

olsun. Bu taktirde

$$(i) \sigma_r(B(r,s,t), \ell_p) = S_1$$

$$(ii) \sigma_c(B(r,s,t), \ell_p) = S_2$$

dir.

İspat: i) $\sigma_p(B(r,s,t)^*, \ell_p^*) = S_1$ olduğundan $\forall \alpha \in S_1$ için $B(r,s,t)^* - \alpha I$ birebir değildir. Dolayısıyla Lemma 3.1.10'dan $\forall \alpha \in S_1$ için $(B(r,s,t) - \alpha I)$ yoğun bir görüntü kümesine sahip değildir.

ii) $\sigma(B(r,s,t), \ell_p)$; $\sigma_p(B(r,s,t), \ell_p)$, $\sigma_r(B(r,s,t), \ell_p)$ ve $\sigma_c(B(r,s,t), \ell_p)$ ayrık kümelerinin birleşimi olduğundan $\sigma_c(B(r,s,t), \ell_p) = S_2$ elde edilir.

4.1.8. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : $|t| < |s|$ ise $r \in III_1\sigma(B(r,s,t), \ell_p)$ dir. $|t| \geq |s|$ ise $r \in III_2\sigma(B(r,s,t), \ell_p)$ dir.

İspat : $\alpha = r$ ise Teorem 4.1.7 (i) den $B(r,s,t) - \alpha I$, III_1 veya III_2 dedir. $B(0,s,t)$ nin bir sol tersi

$$(B(0,s,t))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{-t}{s^2} & \frac{1}{s} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{(-t)^2}{s^3} & \frac{-t}{s^2} & \frac{1}{s} & \dots \\ \dots & . & .. & . & \dots \end{pmatrix}$$

dir, başka bir ifadeyle

$$b_{nk} = \begin{cases} \frac{-(t)^{n+1-k}}{s^{n+2-k}}, & (1 \leq k \leq n+2), \\ 0, & (k=0 \text{ veya } k \geq n+2) \end{cases}$$

olmak üzere $(B(0,s,t))^{-1} = (b_{nk})$ dir. Bu durumda $|t| < |s|$ için $(B(0,s,t))^{-1} \in (\ell_1 : \ell_1) \cap (\ell_\infty : \ell_\infty)$ dir. Lemma 3.1.4 den $B(0,s,t)$, $|t| < |s|$ için sürekli terse sahiptir. $|t| \geq |s|$ için $e^{(1)} = (0,1,0,\dots) \in \ell_p$ elde ederiz. Her $n \in N$ için

$$B(0,s,t)e^{(1)}_n = \frac{(-t)^n}{s^{n+1}}$$

eşitliği ℓ_p de değildir. Bu gösterir ki $B(0,s,t)$, $|t| \geq |s|$ için sürekli bir terse sahip değildir.

Bundan dolayı $|t| < |s|$ için $r \in III_1\sigma(B(r,s,t), \ell_p)$ ve $|t| \geq |s|$ için $r \in III_2\sigma(B(r,s,t), \ell_p)$ dir.

4.1.9. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : $\alpha \neq r$ ve $\alpha \in \sigma_r(B(r,s,t), \ell_p)$ ise $\alpha \in III_2\sigma(B(r,s,t), \ell_p)$ dir.

İspat : $\alpha \neq r$ için $B(r,s,t) - \alpha I$ operatörü bir üçgensel matristir, dolayısıyla bir tersi vardır. Şimdi $B(r,s,t) - \alpha I$ operatörünün tersinin sınırsız olduğunu gösterelim. $\alpha \in \sigma_r(B(r,s,t), \ell_p)$ için $|u_1| > 1$ dir. $s^2 \neq 4t(r - \alpha)$ ise (4.6) yı kullanarak $|s| > |2(r - \alpha)|$ olduğu için $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ elde ederiz. $s^2 \neq 4t(r - \alpha)$ ise (4.5) i kullanarak $|u_1| > 1$ ve $|u_1| > |u_2|$ olduğu için $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ elde ederiz. Bundan dolayı $B(r,s,t) - \alpha I$ bir sınırsız

terse sahiptir, yani $B(r, s, t) - \alpha I \in 2$ dir. Lemma 3.1.4 den, $B(r, s, t) - \alpha I$ yoğun bir görüntü kümesine sahip değildir, yani $B(r, s, t) - \alpha I \in III$ dir.

Teorem 4.1.10. (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : $\alpha \in \sigma_c(B(r, s, t), \ell_p)$ ise $\alpha \in \Pi_2$ dir.

İspat : $\alpha \in \sigma_c(B(r, s, t), \ell_p)$ olsun, yani $|u_1| = 1$ ele alalım. $\alpha \in \Pi_2$ olduğunu göstermek için $B(r, s, t) - \alpha I$ nın örten olmadığını kanıtlamalıyız. $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ için $x = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ dir. $s^2 = 4t(r - \alpha)$ ise

$$|a_n| = \frac{2n}{|s|}$$

denklemini x in ℓ_p de olmadığını gösterir. Aksi halde $|u_2| < |u_1| = 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ elde ederiz, bu $x \notin \ell_p$ demektir.

4.2. bv_p Dizi Uzayı Üzerinde $B(r,s,t)$ Operatörünün İnce Spekturumu

Bu bölümde, bv_p ($1 < p < \infty$) dizi uzayı üzerinde $B(r,s,t)$ operatörünün Goldberg [13]' in sınıflandırılmasına göre ince spektrumu tanımladık.

Teorem 4.2.1. (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) : $B(r,s,t) \in B(bv_p)$.

İspat: $B(r,s,t)$ ' nin lineerliliği açıktır. $x = x_k \in \ell_p$ alalım. Minkowski eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \|B(r,s,t)x\|_{bv_p} &= \left[\sum_k |r(x_k - x_{k-1}) + s(x_{k-1} - x_{k-2}) + t(x_{k-2} - x_{k-3})|^p \right]^{1/p} \\ &\leq |r|^p \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p^{1/p} + \left(|s|^p \sum_k |x_{k-1} - x_{k-2}|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(|t|^p \sum_k |x_{k-2} - x_{k-3}|^p \right)^{1/p} \\ &= |s| + |r| + |t| \|x\|_{bv_p} \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\|B(r,s,t)\|_{(bv_p, bv_p)} \leq |s| + |r| + |t| \text{ dir.}$$

4.2.2. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]): $s, \sqrt{s^2} = -s$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun ve S kümesini de

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \left| \frac{2(r-\alpha)}{-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \right| \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\sigma(B(r,s,t), bv_p) = S$.

İspat: Önce $\alpha \notin S$ için $(B(r,s,t) - \alpha I)^{-1}$ in $B(bv_p)$ de olduğunu göstereceğiz, sonra $\alpha \in S$ için $B(r,s,t) - \alpha I$ ' nin tersinin olmadığını göstereceğiz.

$\alpha \notin S$ olsun, $\alpha \neq r$ için $B(r,s,t) - \alpha I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır. $y = y_k \in bv_p$ olsun. Bu $(y_k - y_{k-1}) \in \ell_p$ olduğunu gösterir. $(B(r,s,t) - \alpha I)x = y$ denklemini çözersek

$$a_1 = \frac{1}{r - \alpha}$$

$$a_2 = \frac{-s}{(r - \alpha)^2}$$

$$a_3 = \frac{s^2 - (r - \alpha)t}{(r - \alpha)^3}$$

olmak üzere

$$(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \dots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$x_k - x_{k-1} = \sum_{j=0}^k a_{k-j+1} (y_j - y_{j-1}); \quad (k \in \mathbb{N})$$

yani, $(x_k - x_{k-1}) = (B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} (y_k - y_{k-1})$ elde ederiz. Teorem 4.1.4' den $(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1} \in (\ell_1, \ell_1)$ olduğu için, $(x_k - x_{k-1}) \in \ell_p$ dir. Bu $x = (x_k) \in bv_p$ demektir. Bu gösterir ki $\sigma(B(r, s, t), bv_p) \subseteq S$.

Şimdi $\alpha \in S$ olsun. $\alpha \neq r$ ise, o halde $B(r, s, t) - \alpha I$ bir üçgensel matristir, dolayısıyla $(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur. $y = (1, 1, 1, \dots) \in bv_p$ ise

$$x_k = \sum_{j=0}^k a_{j+1}$$

olmak üzere $x = (x_k)$ nın var olmasını gerektirir. Böylece

$$\sum_k |x_k - x_{k-1}|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p$$

ıraksaktır. $s^2 = 4t(r - \alpha)$ için de aynı ifadeleri kullanabiliriz. Dolayısıyla $(B(r, s, t) - \alpha I)^{-1}$, $B(bv_p)$ de değildir.

$\alpha = r$ ise, Teorem 4.1.4' ün ispatındaki yol izlenerek $B(r, s, t) - \alpha I = B(0, s, t)$ operatörünün tersinin olmadığı gösterilebilir. Bu gösterir ki $S \subseteq \sigma(B(r, s, t), bv_p)$. Bu ispatı tamamlar.

4.2.3. Teorem (Furkan, Bilgiç ve Başar [10]) :

$$S_1 = \left\{ \alpha \in C : \left| \frac{2(r-\alpha)}{-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \right| < 1 \right\} \text{ olsun. O zaman } \sigma_p(B(r,s,t)^*, bv_p^*) = S_1 .$$

İspat: $x \neq \theta$ ve $x \in bv_p^* \cong D_q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ olsun. $B(r,s,t)^* x = \alpha x$ eşitliğini

açtığımızda

$$rx_0 + sx_1 + tx_2 = \alpha x_0$$

$$rx_1 + sx_2 + tx_3 = \alpha x_1$$

$$rx_2 + sx_3 + tx_4 = \alpha x_2$$

denklem sistemini elde ederiz. $\alpha = r$ için $x_0 \neq 0$ seçebiliriz. Bu durumda $x = (x_0, 0, 0, \dots)$,

$\alpha = r$ ye karşılık gelen özvektördür. $\alpha \neq r$ ise Teorem 4.1.6'nın ispatındaki yol takip edilerek (4.7) denklemi elde edilir. Şimdi

$$\left| \frac{2(r-\alpha)}{-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \right| < 1$$

olmak üzere $\alpha \in S_1$ olsun. Bu durumda $x_0 = 1$, $x_1 = 2(r-\alpha) / \left[-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)} \right]$ seçebiliriz. Teorem 4.1.6'nın ispatındaki yolu takip ederek, her $n \geq 2$ için $x_n = (x_1)^n$ elde ederiz. $|x_1| < 1$ olduğundan

$$\sum_{j=k}^{\infty} x_j = \sum_{j=k}^{\infty} x_1^j = \frac{x_1^k}{1-x_1}$$

olur. Dolayısıyla, $|x_1| < 1$ için

$$\sum_k \left| \sum_{j=k}^{\infty} x_j \right|^q = \frac{1}{|1-x_1|^q} \sum_k |x_1|^{kq} < \infty$$

bulunur. Bundan dolayı $x \in D_q$ dur. Bu gösterir ki $S_1 \subseteq \sigma_p(B(r,s,t)^*, bv_p^*)$ dır. Şimdi α

$$\left| \frac{2(r-\alpha)}{-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}} \right| \geq 1$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir sayı olsun. Bu durumda $|u_1| \leq 1$ dır.

$\alpha \notin \sigma_p(B(r,s,t)^*, bv_p^*)$ olduğunu göstereceğiz. $\alpha \in \sigma_p(B(r,s,t)/bv_p^*)$ olsun. O halde

$\theta \neq x \in D_q$ ve bundan dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ dır. Bu durumda iki durum söz konusudur.

(i) $s^2 = 4t(r - \alpha)$ olsun. Bu durumda $|(-s)/(2t)| = 1$ elde edilir. Teorem 4.1.6 (iii) deki yol takip edilerek bir çelişki elde edilir.

(ii) $s^2 \neq 4t(r - \alpha)$ olsun. Bu durumda, $u_1 \neq u_2$ dir. O halde bütün pozitif n sayıları için (4.7)' den

$$x_n = \left(\frac{1}{u_1 u_2} \right)^{n-1} \frac{(u_1^n - u_2^n)x_1 - (u_1^{n-1} - u_2^{n-1})x_0}{u_1 - u_2}$$

elde ederiz. Bundan dolayı, $x_0 = x_1 = 0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1^n - u_2^n}{u_1^{n-1} - u_2^{n-1}} = \frac{x_0}{x_1} \quad (4.8)$$

elde ederiz. Teorem 4.1.6' nin ispatındaki durum (i) de olduğu gisi, (4.8) in sol tarafındaki limit, u_1 'e eşittir. Böylece $x_0 = x_1 = 0$ dır.

(i) ve (ii) den α nın $\sigma_p(B(r,s,t)^*, D_q)$ nun elemanı olması bir çelişkidir.

KAYNAKLAR

- [1]. **Gonzalez, M.**, 1985, The fine spectrum of the Cesaro operator in ℓ_p ($1 < p < \infty$), Arch. Math. 44, 355-358.
- [2]. **Cartlidge, J. M.**, 1978, Weighted mean matrices as operators on ℓ_p , Ph. D. Thesis. Indiana University.
- [3]. **Okutayi, J. I.**, 1990, On the fine spectrum of C_1 as an operator on bv_0 , Aust. Math. Soc. Ser. A 48, 79-86.
- [4]. **Reade, J. B.**, 1985, On the spectrum of the cesaro operator, Bull. London Math. soc. 17, 263-267.
- [5]. **Okutayi, J. I.**, 1992, On the fine spectrum of C_1 as an operator on bv , Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A₁ 41, 197-207.
- [6]. **Altay, B., Başar, F.**, 2004, , On the fine spectrum of the difference operator on c_0 and c , Inform. Sci., 168, 217-224.
- [7]. **Akhmedov, A. M. ve Başar, F.**, 2004, On the fine spectrum of the cesaro operator in c_0 , Math. J. Ibaraki Univ. 36, 25-32.
- [8]. **Bilgiç, H., Furkan, H.**, 2008, On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_p ve bv_p ($1 < p < \infty$), Nonliear Anal. 68 (3) 499-506
- [9]. **Furkan, H. ve Bilgiç, H. ve Altay, B.**, 2007, On the fine spectrum of the operator $B(r,s,t)$ over c_0 and c , Computers and Mathematics with Applications, (in press).
- [10]. **Furkan, H., Bilgiç, H., Başar, F.**, 2010, On the fine spectrum of the operator $B(r,s,t)$ over the sequence spaces ℓ_p ve bv_p ($1 < p < \infty$), Comput. Math. Appl. 60, 2141-2152 .
- [11]. **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto.
- [12]. **Kocağ, A.**, 2007. On the fine spectrum of the triple band operator $B(r,s,t)$ over the sequence spaces c_0 and c , Yüksek lisans tezi, K.Maraş Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahraman Maraş.
- [13]. **Goldberg, S.**, 1966, Unbounded lineer operators, Mc Graw-Hill Book Comp., 59-61.

- [14]. Akhmedov, A.M., Başar, F., 2007, On the fine spectrum of the difference operator Δ over the sequence spaces bv_p , $1 \leq p < \infty$, Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.), 23, 10, pp. 1757-1768.
- [15]. Altay, B., Başar, F., 2003, On the space of sequences of p -bounded variation and related matrix mapping, Ukrainian Math. J. 55 (1) 136-167.
- [16]. Choudhary, B., Nanda, S., 1989, Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- [17]. Goldberg, S., 1985, Unbounded Linear Operators, Dover Publications, Inc., New York.
- [18]. Altay, B., Başar, F., 2005, On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c , Int. J. Math. Math. Sci. 18, 3005-3013.
- [19]. Akhmedov, A.M., Başar, F., 2006, On the spectra of the difference operator Δ over the sequence spaces ℓ_p , Demonstratio Math. 39 (3) 585-595.
- [20]. Imaninezhad, M., Miri, M.R., 2010, The dual space of the sequence space bv_p , $1 \leq p < \infty$, Acta. Math. Univ. Comenian., 79 (1), 143-149.

ÖZGEÇMİŞ

01-10-1987 doğumlu olup, ADANA\Ceyhan Nüfus Müdürlüğüne kayıtlıyım. İlköğretim öğrenimimi Ceyhan Hamdilli İlköğretim okulunda tamamladım. Ceyhan Halil Çiftçi Anadolu Lisesi (Y.Dil Ağ.Lise)' ni 2005 yılında tamamladıktan sonra yine 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 2009 yılında lisans öğrenimimi tamamladığım bölümde Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans yapmaya hak kazandım. Halen eğitimimi devam ettirmekteyim.

Burcu ÖZALTIN