

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK GRUPLARDA
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halit KAYA

(121121111)

Anabilim Dalı : Matematik

Program : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Hıfı ALTINOK

Temmuz-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK GRUPLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halit KAYA

(121121111)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Haziran 2015

Tezin Savunulduğu Tarih : 3 Temmuz 2015

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Hıfı ALTINOK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Hikmet KEMALOĞLU

: Doç.Dr. Mahmut IŞIK

TEMMUZ-2015

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Doç.Dr. Hıfı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım. Ayrıca karşılaştığımız problemlerde tartışmalarıyla desteğini bizden esirgemeyen sayın Doç.Dr. Yavuz ALTIN'a teşekkürlerimi sunarım.

Halit KAYA
ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
3. BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ	6
3.1. İstatistiksel Yakınsaklık	6
3.2. Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık	9
3.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	12
4. TOPOLOJİK GRUPLARDA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKIN- SAKLIK	17
4.1. Giriş	17
4.2. Kapsama Teoremleri	18
5. TOPOLOJİK GRUPLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	24
5.1. Giriş	24
5.2. İstatistiksel Yakınsaklık Teoremleri	25
KAYNAKLAR	30

ÖZET

Topolojik Gruplarda İstatistiksel Yakınsaklık

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci ve ikinci bölümde sırasıyla, istatistiksel yakınsaklık konusunun tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiş ve bu çalışmada gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli Cesàro yakınsaklık ve lacunary yakınsaklık kavramları konuyu açıklayıcı örnekler ve temel teoremler verilerek incelenmiştir. Dördüncü bölümde χ , bir Abel topolojik Hausdorff grubunu göstermek üzere topolojik gruplarda lacunary yakınsaklığın özellikleri ve istatistiksel yakınsaklıkla aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde topolojik gruplardaki bazı istatistiksel yakınsaklık teoremleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary yakınsaklık, Topolojik grup.

SUMMARY

Statistical Convergence in Topological Groups

This study consists of the five chapters.

In Section 1 and 2, we give some informations about the historical development of statistical convergence and introduced some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study, respectively.

In Section 3, we give definitions of statistical convergence, strongly Cesàro convergence and lacunary statistical convergence, examine these concepts giving some examples and fundamental definitions and theorems.

In Section 4, we investigate the properties of lacunary statistical convergence in topological groups and relations between statistical convergence, where χ is an Abel topological Hausdorff group.

In Section 5, we give some theorems of statistical convergence in topological groups.

Keywords: Statistical convergence, lacunary convergence, topological group.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

- $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi
- $\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
- $\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi
- w : Tüm dizilerin uzayı
- l_{∞} : Sınırlı diziler uzayı
- S : İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
- S_0 : Sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
- $|\sigma_1|$: Kuvvetli Cesàro yakınsak dizilerin uzayı
- w_p : Kuvvetli p —Cesaro yakınsak dizilerin uzayı
- N_{θ} : Kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin uzayı
- χ : Abel topolojik Hausdorff grubu

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık fikri ilk olarak 1935 yılında Zygmund [1] tarafından ortaya atıldı. Tam bir tanımı ise Steinhaus [2] ve Fast [3] tarafından verildi ve daha sonra Schoenberg [4] tarafından tekrar tanımlandı. İstatistiksel yakınsaklık kavramı daha çok Ergodic teori, Fourier analiz teorisi, ölçüm teorisi, sayılar teorisi, trigonometrik seriler ve Banach uzaylarında kullanıldı. Sonraki yıllarda Fridy [5], Connor [6], Savaş [7], Mursaleen [8] ve daha pek çok araştırmacı tarafından çalışıldı.

Lacunary dizisi ilk olarak Freedman vd.[9] tarafından 1978 yılında tanımlanmış daha sonra Fridy ve Orhan [10] tarafından lacunary istatistiksel yakınsaklığın tanımı verilmiş ve istatistiksel yakınsaklıkla aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. χ bir topolojik Hausdorff grubunu göstermek üzere Çakallı ([11],[12],[13]) topolojik gruplar üzerinde istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlamış ve bazı topolojik özelliklerini incelemiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir [14]. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

- i) $x + y = y + x$
- ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- iv) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
- v) $1.x = x$
- vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

Tanım 2.2 V bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq U \subset V$ olsun. Eğer U 'nun kendisi bir vektör uzayı ise U 'ya V 'nin bir lineer alt uzayı denir [15].

Tanım 2.3. ω , kompleks terimli bütün $x = (x_k)$ dizilerinin kümesini gösterebilir. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında ω bir lineer uzaydır. ω nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [16].

Tanım 2.4 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (s_n) dizisine sınırlı dizi denir [17].

Tanım 2.5 Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir, benzer şekilde dizi alttan sınırlı ise alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir [17].

Tanım 2.6 $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her δ -komşuluğunda A kümesinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına A kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. [17]

Teorem 2.7 Bir kümenin supremumu veya infimumu kümeye ait değilse kümenin bir yığılma noktasıdır.[17]

Tanım 2.8 Bir A kümesinin en büyük yığılma noktasına üst limit veya limit süperiyor denir ve $\limsup A$ veya $\overline{\lim}A$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde, A kümesinin en küçük yığılma noktasına alt limit veya limit inferiyor denir ve $\liminf A$ veya $\underline{\lim}A$ şeklinde gösterilir. [17]

Tanım 2.9 Bir a reel sayısının büyük olmayan tam sayıların en büyüğüne a sayısının tam kısmı denir ve $[a]$ ile gösterilir.[17]

Tanım 2.10 X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [18].

$$\text{M1)} \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$\text{M2)} \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{M3)} \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{M4)} \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Tanım 2.11 (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$, X metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x elemanına yakınsaktır denir [18].

Tanım 2.12 (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$, X metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine Cauchy dizisi denir [18].

Tanım 2.13. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned}\|.\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow \|x\|\end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [18]. $\forall x, y \in X$ için

$$\text{N1)} \|x\| \geq 0$$

$$\text{N2)} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\text{N3)} \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ (\lambda \text{ skaler})$$

$$\text{N4)} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir. Eğer (N2) $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ şeklinde olursa X' e yarınorm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de yarınormlu uzay adı verilir.

Tanım 2.14 X boş olmayan bir küme ve τ, X 'in alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir [19]

$$\text{T1)} X, \theta \in \tau$$

$$\text{T2)} G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau \text{ ise } \bigcap_{i=1}^n G_{k_i} \in \tau, \text{ yani } \tau \text{ sınıfı sonlu kesişime göre kapalıdır.}$$

$\text{T3)} \text{ Her } i \in I \text{ için } G_{k_i} \in \tau \text{ ise } \bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau, \text{ yani } \tau \text{ sınıfı sonlu birleşime göre kapalıdır.}$

Tanım 2.15 Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x + y| \leq |x| + |y|$ eşitsizliğine üçgen eşitsizliği denir [20].

Tanım 2.17. $A \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(A, *)$ ya bir grup denir. Bu şartlara ek olarak değişme özelliği varsa $(A, *)$ ya değişimli grup (Abel grubu) denir.

$$(i) a, b \in A \text{ ise } a * b \in A$$

$$(ii) \text{ Her } a, b, c \in A \text{ için } a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$(iii) \text{ Her } a \in A \text{ için } a * e = e * a = a \text{ olacak şekilde bir } e \in A \text{ vardır}$$

$$(iv) \text{ Her } a \in A \text{ için öyle bir } a' \in A \text{ vardır ki } a * a' = a' * a = e \text{ olur.}$$

Tanım 2.18. (G, τ) topolojik uzay ve $(G, .)$ bir grup olsun. Aşağıdaki özellikler mevcutsa $(G, \tau, .)$ üçlüsüne topolojik grup denir.

(i) $f : G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x.y$

(ii) $g : G \rightarrow G \quad x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyon

3. BAZI YAKINSAKLIK TÜRLEİ

3.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [21].

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 3.1.2. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k” biçiminde gösterilir [5].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.1.3. $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani h.h.k. için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır. Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir [5].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde S_0 , yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir. Bu uzaylar aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\} \\ S_0 &= \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Gerçekten $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ olması demektir. Diğer taraftan ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ 'dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ 'dur. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ 'dir.

Teorem 3.1.4. $S - \lim x = L_1$, $S - \lim x = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

- (i) $S - \lim x = L_1$ ise $S - \lim (\alpha x) = \alpha L_1$,
- (ii) $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim x = L_2$ ise $S - \lim (x + y) = L_1 + L_2$ 'dir.
- (i) ve (ii) 'den istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 3.1.5. $\varepsilon > 0$ olsun. h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ise yani

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [5].

Teorem 3.1.6. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

- (i) x bir istatistiksel yakınsak dizidir.
- (ii) x bir istatistiksel Cauchy dizisidir.
- (iii) x öyle bir dizidir ki h.h.k. için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): Burada "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir" teoreminin ispatına benzer bir yol takip edilecektir. $S - \lim x = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, h.h.k. için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer N , $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse, h.h.k. için

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| &= |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece x bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Kabul edelim ki (ii) doğru olsun. h.h.k. için $x_k \in I = [x_N - 1, x_N + 1]$ olacak şekilde N sayısı seçelim. Aynı şekilde h.h.k. için $x_k \in I' = [x_M - 1/2, x_M + 1/2]$ olacak şekilde M sayısı seçelim. Burada

$$x_k \in I_1 = I \cap I' \quad \text{h.h.k. için}$$

olduğunu belirtelim. Çünkü

$$\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\} = \{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \{k \leq n : x_k \notin I'\}$$

olup böylece

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I'\}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bu nedenle I_1 , h.h.k. için x_k 'yı ihtiva eden ve uzunluğu 1 'den küçük eşit olan kapalı bir aralıktır.

Benzer şekilde h.h.k. için $x_k \in I'' = [x_{N(2)} - 1/2, x_{N(2)} + 1/2]$ olacak şekilde $N(2)$ sayısını seçelim. Yukarıdaki düşünceye göre I_2 , h.h.k. için x_k 'yı ihtiva eder ve uzunluğu $\leq \frac{1}{2}$ olan kapalı bir aralıktır. Bu şekilde devam edilirse her bir m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturabiliriz. I_m 'nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ 'dir ve h.h.k. için $x_k \in I_m$ 'dir. İç içe aralıklar teoremi gereğince $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \lambda$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır. h.h.k. için $x_k \in I_m$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}, \quad n > T_m \text{ iken} \quad (3.1)$$

olacak şekilde pozitif artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ tamsayı dizisini seçebiliriz.

Şimdi $T_m < k \leq T_{m+1}$ iken $x_k \notin I_m$ ve x 'in $k > T_m$ olacak şekildeki tüm x_k terimlerinden oluşan bir z alt dizisini tanımlayalım. Daha sonra y dizisini

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & x_k \text{ } z \text{ 'nin bir terimi ise} \\ x_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\lim y_k = \lambda$ 'dir. Çünkü eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise x_k, z 'nin bir terimidir ki bu $y_k = \lambda$ anlamına gelir yada $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda| \leq I_m$ 'nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ 'dir. Burada h.h.k. için $x_k = y_k$ 'dir. Şimdi bunu gösterelim: Eğer $T_m < n < T_{m+1}$ ise bu takdirde

$$\{k \leq n : y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n : x_k \notin I_m\}$$

dir ve (3.1) 'den

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

yazılabilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken limit 0 'dır ve h.h.k.için $x_k = y_k$ 'dir. Bu nedenle (ii), (iii) 'ü gerektirir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Kabul edelim ki (iii) sağlansın. h.h.k. için $x_k = y_k$ ve $\lim y_k = L$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde, her bir n için, $\lim y_k = L$ olduğundan

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}$$

yazılabilir. Böylece h.h.k. için $x_k = y_k$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| \\ &\quad + \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle h.h.k. için $|x_k - L| < \varepsilon$ dir, bu yüzden (i) sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.7. Eğer $x, S - \lim x_k = L$ olacak şekilde bir dizi ise, bu takdirde $\lim y_k = L$ olacak şekilde x 'in bir y alt dizisi vardır.

3.2. Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık

Tanım 3.2.1. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Cesàro yakınsak dizilerin uzayı

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0 \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ alınırsa bu uzay $|\sigma_1^0|$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli p -Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [22].

Teorem 3.2.3. $x = (x_k)$ dizisi L ye yakınsak ise (x_k) dizisi L ye kuvvetli Cesaro yakınsaktır [23].

İspat. $x = (x_k)$ dizisi L 'ye yakınsak olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N_1$ olunca $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Şimdi;

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - L \right| &= \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - L \right| \\ &= \left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(x_1 - L) + \dots + (x_{N_1} - L)}{n} \right| \\ &\quad + \left| \frac{(x_{N_1+1} - L) + \dots + (x_n - L)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|x_1 - L| + \dots + |x_{N_1} - L|}{n} \\ &\quad + \frac{|x_{N_1+1} - L| + \dots + |x_n - L|}{n} \end{aligned}$$

yazılabilir. $K = \max \{|x_1 - L|, \dots, |x_{N_1} - L|\}$ alınırsa, $n > N_1$ için

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| \leq \frac{N_1 K}{n} + \frac{(n - N_1) \varepsilon}{2n}$$

elde edilir. $\forall n > N_2$ için $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2N_1 K}$ olacak şekilde N_2 bulabiliriz. Bu durumda $n > N_2$ için

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - N_1) \varepsilon}{2n}$$

olur. Ayrıca $\frac{n - N_1}{n} < 1$ olduğundan $N = \max \{N_1, N_2\}$ alınırsa her $n > N$ için

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - L \right| = \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - L \right| = \left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Bu teoremin tersi doğru değildir, yani σ_1 yakınsak bir dizi yakınsak olmayabilir. Gerçekten $(x_n) = (1 + (-1)^n)$ dizisi için $\sigma_1 - \lim x = 1$ dir. Ancak bu dizi yakınsak değildir.

Teorem 3.2.4. $0 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde,

(i) Bir L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır [6].

İspat.

i) $x \in \omega_p$ ve $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$ olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \frac{1}{n} \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$ olması

$$\lim \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olmasını gerektirir, bir başka ifadeyle $\omega_p - \lim x = L$ olması $S - \lim x_k = L$ olduğu sonucunu verir.

ii) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $E = \|x\|_\infty + L$ diyelim. $\varepsilon \geq 0$ verilsin. N_ε sayısını her $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2E^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde her $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2E^p} E^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak olduğu sonucu çıkar.

3.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.3.1. Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_r)$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir [9]. $\theta = (k_r)$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ise gösterilecektir. Bu çalışmada

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve uygunluk için kısaca $\sum_{I_r} |x_i|$ ile gösterilecek ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilecektir.

Tanım 3.3.2. θ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (3.2)$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir dizi lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ile gösterilir [10].

Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 3.3.3. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin uzayı

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir [9]. $L = 0$ ise N_θ uzayı N_θ^0 ile gösterilir.

Teorem 3.3.4. $|\sigma_1| \subseteq N_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır [9].

İspat. *Yeterlilik.* $\liminf_r q_r > 1$ ise her $r \geq 1$ için $1 + \delta \leq q_r$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $x \in |\sigma_1^0|$ için

$$\begin{aligned} \tau_r &= \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i| - \frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i| \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i| \right) - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i| \right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan

$$\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1 + \delta}{\delta} \text{ ve } \frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$$

elde ederiz. Böylece $\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i|$ ve $\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i|$ terimlerinin her ikisi de sıfıra yakınsar ve $x \in N_\theta^0$ elde edilir. Buradan $|\sigma_1| \subseteq N_\theta$ bağıntısı elde edilir.

Gerekliklik. Kabul edelim ki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. θ lacunary olduğundan $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere $\frac{k_{r_j}}{k_{r_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{k_{r_{j-1}}}{k_{r_{j-2}}} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz. $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{r_j}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde herhangi bir L sayısı için

$$\frac{1}{h_{r_j}} \sum_{I_{r_j}} |x_i - L| = |1 - L|, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

ve

$$\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_i - L| = |L|, \quad r \neq r_j$$

olur. Bundan dolayı $x \notin N_\theta$ fakat x kuvvetli Cesàro yakınsaktır. Eğer t yeteri kadar büyük bir tamsayı ise $k_{r_{j-1}} < t \leq k_{r_{j+1}-1}$ olacak şekilde bir tek j bulabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i| \leq \frac{k_{r_{j-1}} + h_{r_j}}{k_{r_{j-1}}} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$$

yazabiliriz. $t \rightarrow \infty$ iken $j \rightarrow \infty$ olur. Böylece $x \in |\sigma_1^0|$ olur.

Teorem 3.3.5. $N_\theta \subseteq |\sigma_1|$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır [9].

Teorem 3.3.6. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda

- (i) $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta)$,
 - (ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(N_\theta)$,
 - (iii) $S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$,
- dir [10].

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Buradan (i) gerçekleşir.

(i) 'deki içerme kesindir. Gerçekten, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_k)$ dizisi I_r aralığında ilk $[\sqrt{h_r}]$ tamsayılarında $1, 2, 3, \dots, [\sqrt{h_r}]$, diğer durumlarda 0 olarak tanımlayalım. Bu dizi sınırlı değildir, ancak lacunary istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty)$$

dır. Yani (x_k) dizisi sıfıra lacunary istatistiksel yakınsaktır. Diğer yandan

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \frac{[\sqrt{h_r}] ([\sqrt{h_r}] + 1)}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0, \quad (r \rightarrow \infty)$$

olduğundan $x_k \not\rightarrow 0(N_\theta)$ 'dır.

(ii) Kabul edelim ki $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve $x \in \ell_\infty$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - L| \leq M$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Buradan $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ elde edilir.

(iii) (i) ve (ii) 'nin sonucudur.

Teorem 3.3.7. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için $S_\theta \subseteq S$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır [10].

İspat. *Yeterlilik.* Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < H$ olacak şekilde bir $H > 0$ sayısı vardır. $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve $N_r = |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ olsun. (3.2) göz önüne alınırsa her $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0$ için $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $M = \max \{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ diyelim ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde bir n seçelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots + N_r\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_r}{h_r} \right\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \varepsilon \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon q_r \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon H
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $S \subseteq S_\theta$ elde edilir.

Gerekliklik. Kabul edelim ki $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. Bu takdirde $q_{r_j} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz. ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & k_{r_j-1} < i \leq 2k_{r_j-1}, \quad (j = 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x \in N_\theta$ fakat $x \notin |\sigma_1|$ 'dir. Teorem (3.3.6 (i)) 'den $x \in S_\theta$ 'dır. Fakat Teorem (3.2.4) 'den $x \notin S$ 'dir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3.8. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için $S \subseteq S_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır [10].

İspat. *Yeterlilik.* Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Yeterince büyük r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ elde edilir. $x_k \rightarrow L(S)$ ise $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $S \subseteq S_\theta$ elde edilir.

Gerekliklik. $\liminf_r q_r = 1$ olsun. Teorem (3.3.4) 'deki yol takip edilirse $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere $\frac{k_{r_j}}{k_{r_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{k_{r_{j-1}}}{k_{r_{j-2}}} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) alt dizisini seçelim ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{r_j}, \quad (j = 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. x 'in sınırlı olduğu aşikardır. Teorem (3.3.4) 'den $x \in |\sigma_1|$, fakat $x \notin N_\theta$ 'dır. Teorem (3.3.6 (ii)) 'den $x \notin S_\theta$ ve Teorem (3.2.4) 'den $x \in S$ olduğu görülür. O halde $S \not\subseteq S_\theta$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.9. $x \in S \cap S_\theta$ ise $S_\theta - \lim x = S - \lim x$ 'dir. Böylece herhangi bir θ lacunary dizisi için x 'in $S_\theta -$ limiti tektir [10].

İspat. Kabul edelim ki $S - \lim x = L$, $S_\theta - \lim x = L'$ ve $L \neq L'$ olsun. Bu takdirde $\varepsilon < \frac{1}{2} |L - L'|$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}| = 1$$

elde ederiz. Bu durumda $\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}|$ istatistiksel limit ifadesinin k_m -inci terimini göz önüne alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} |\{k \in \cup_{r=1}^m I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{k_m} \sum_{r=1}^m |\{k \in I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}| \\ &= \left(\sum_{r=1}^m h_r \right)^{-1} \sum_{r=1}^m h_r t_r \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir. Burada

$$t_r = \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

dır. Çünkü $x_k \rightarrow L' (S_\theta)$ idi. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olduğundan (3.3) ifadesi t 'nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür ve $m \rightarrow \infty$ için sıfır olur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{k_m} |\{k \in \cup_{r=1}^m I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}|$$

dizisi

$$\left\{ \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}| \right\}_{n=1}^\infty$$

dizisinin bir alt dizisi olduğundan

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}| \nrightarrow 1$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Yani $L \neq L'$ 'dir.

4. TOPOLOJİK GRUPLARDA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

4.1. Giriş

Bir χ topolojik grubundaki bir x_k dizisine eğer 0 'ın her bir U komşuluğu için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{k \leq m : x_k - \ell \notin U\}| = 0$$

ise χ 'in bir ℓ elemanına istatistiksel yakınsak denir. Burada dikey çizgiler o kümenin eleman sayısını göstermektedir [11].

Bu çalışma boyunca, χ bir abel topolojik Hausdorff grubunu gösterecektir. Ayrıca χ , toplamsaldır ve sayılabilirliğin ilk aksiyomu sağlanır. $S(\chi)$, $S_0(\chi)$ sırasıyla χ 'de tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini ve sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterecektir.

Şimdi topolojik gruplarda lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımını aşağıdaki gibi vereceğiz: Eğer 0 'ın her bir U komşuluğu için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell \notin U\}| = 0$$

ise bir x_k dizisi ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda,

$$S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell \text{ veya } x_k \rightarrow \ell(S_\theta)$$

yazacağız ve

$$S_\theta(\chi) = \left\{ x_k : \exists \ell \text{ için } S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell \right\}$$

şeklinde ve özel olarak

$$S_\theta^0(\chi) = \left\{ x_k : S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\}$$

tanımlayacağız.

Burada şunu belirtelim ki, her lacunary yakınsak dizinin sadece bir tane limiti vardır, yani, eğer bir dizi ℓ_1 ve ℓ_2 sayılarına lacunary istatistiksel yakınsak ise bu takdirde $\ell_1 = \ell_2$ 'dir. Kabul edelim ki (x_k) dizisinin ℓ_1, ℓ_2 gibi birbirinden farklı iki tane lacunary istatistiksel limiti olsun. χ bir Hausdorff uzayı olduğundan dolayı $\ell_1 - \ell_2 \notin U$

olacak şekilde 0 'ın bir U komşuluğu vardır. Bu takdirde $W + W \subset U$ olacak şekilde 0 'ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k = \ell_1 - \ell_2$ yazalım. Bu nedenle her $r \in \mathbb{N}$ için,

$$\{k \in I_r : z_k \notin U\} \subset \{k \in I_r : \ell_1 - x_k \notin W\} \cup \{k \in I_r : x_k - \ell_2 \notin W\}$$

dir. Bu kapsamadan ise her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : z_k \notin U\}| \leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \ell_1 - x_k \notin W\}| + \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell_2 \notin W\}|$$

yazılabilir. $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_1$ ve $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_2$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : z_k \notin U\}| &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \ell_1 - x_k \notin W\}| \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell_2 \notin W\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $1 \leq 0 + 0 = 0$ olur. Bu çelişki ise $\ell_1 = \ell_2$ olduğunu gösterir.

4.2. Kapsama Teoremleri

Burada tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ile tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesinin arasındaki bazı kapsama özelliklerini vereceğiz.

Teorem 4.2.1. Herhangi bir θ lacunary dizisi için $S_\theta(\chi) \subset S(\chi)$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır [11].

İspat. *Yeterlilik.* Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu takdirde her r için $q_r < H$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. $x_k, S_\theta(\chi)$ 'in herhangi bir elemanı olsun, yani $S_\theta - \lim x_k = \ell$ diyelim. 0 'ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. ε herhangi bir pozitif sayı olsun. $N_r = |\{k \in I_r : x_k - \ell \notin U\}|$ yazalım. Lacunary istatistiksel yakınsaklığın tanımı gereğince her $r > r_0$ için

$$N_r(h_r)^{-1} < \varepsilon(2H)^{-1}$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Şimdi de $M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ olsun ve n sayısı $k_{r-1} < n \leq k_r$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir tamsayı olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin U\}| \leq \frac{Mr_0}{k_{r-1}} + \frac{\varepsilon q_r}{2H}$$

yazabiliriz. Böylece $r > r_1$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin U\}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Buradan $S - \lim x_k = \ell$ olduğu anlaşılır.

Gereklilik. Kabul edelim ki $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. χ 'in 0 'dan farklı bir x elemanını alalım. $\theta = (k_r)$ 'nin $q_{r(j)} > j$ ve $k_{r(j)} > j+3$ olacak şekilde bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini seçelim. Şimdi de bazı $j = 1, 2, \dots$ ler için

$$x_k = \begin{cases} x, & k_{r(j)} < i \leq 2k_{r(j)-1} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bir dizi tanımlayalım. U , 0 'ın x 'i ihtiva etmeyen simetrik bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $j > 1$ için

$$\frac{1}{h_{r(j)}} |\{k \leq k_{r(j)} : x_k \notin U\}| < \frac{k_{r(j)-1}}{h_{r(j)}} = \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j)} - k_{r(j)-1}} < \frac{1}{j-1}$$

yazabiliriz. Böylece $x_k \in S_\theta(\chi)$ 'dir. Fakat $x_k \notin S(\chi)$ 'dir. Çünkü $x_k \in S_\theta(\chi)$ olmasından dolayı

$$\frac{1}{2k_{r(j)-1}} |\{k \leq 2k_{r(j)-1} : x_k \notin U\}| = \frac{1}{2k_{r(j)-1}} [k_{r(1)-1} + k_{r(2)-1} + \dots + k_{r(j)-1}] > \frac{1}{2}$$

olur ki bu da x_k 'nın istatistiksel yakınsak olamayacağını gerektirir.

Teorem 4.2.2. Herhangi bir θ lacunary dizisi için $S(\chi) \subset S_\theta(\chi)$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır [11].

İspat. *Yeterlilik.* Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun ve $\liminf_r q_r = \alpha$ diyelim. $\beta = (\alpha - 1)/2$ yazalım. Bu takdirde $r \geq n_0$ için $q_r \geq 1 + \beta$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı vardır. Böylece $r \geq n_0$ için

$$\frac{h_r}{k_r} = 1 - \frac{k_{r-1}}{k_r} = 1 - \frac{1}{q_r} \geq 1 - \frac{1}{1 + \beta} = \frac{\beta}{\beta + 1}$$

yazılabilir.

Herhangi bir $x_k \in S(\chi)$ alalım ve $S - \lim x_k = \ell$ olsun. $S_\theta - \lim x_k = \ell$ olacağını ispatlayacağız. 0 'ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. Bu takdirde $r \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : x_k - \ell \notin U\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell \notin U\}| \\
&= h_r \frac{1}{k_r} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell \notin U\}| \\
&\geq \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell \notin U\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $S_\theta - \lim x_k = \ell$ 'dir.

Gereklilik: Kabul edelim ki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. İstatistiksel yakınsak fakat lacunary istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi bulmaya çalışacağız. θ 'nın $r(j) \geq r(j-1) + 2$ olmak üzere

$$\frac{k_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} < 1 + \frac{1}{j} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j-1)}} > j$$

olacak şekilde bir $(k_{r(j)})$ altdizisini seçebiliriz. χ 'in 0 'dan farklı bir x elemanını alalım.

Şimdi $j = 1, 2, \dots$ için

$$x_k = \begin{cases} x, & k \in I_{r(j)} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bir dizi tanımlayalım. Bu takdirde $x_k \in S(\chi)$ 'dir (Gerçekte $x_k \in S_0(\chi)$).

Bunu görmek için 0 'ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. Bu takdirde $W \subset U$ ve $x \in W$ olacak şekilde 0 'ın herhangi bir W komşuluğunu seçebiliriz. Diğer yandan her bir m için $k_{r(j)-1} \leq n \leq k_{r(j+1)-1}$ olacak şekilde pozitif bir j_m sayısı bulabiliriz. Bu takdirde her bir m için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} |\{k \leq m : x_k \notin U\}| &\leq \frac{1}{k_{r(j_m)}} |\{k \leq m : x_k \notin W\}| \\
&\leq \frac{1}{k_{r(j_m)}} \{|\{k \leq k_{r(j_m)} : x_k \notin W\}| + |\{k_{r(j_m)} < k \leq m : x_k \notin W\}|\} \\
&\leq \frac{1}{k_{r(j_m)}} \{|\{k \leq k_{r(j_m)} : x_k \notin W\}|\} + \frac{1}{k_{r(j_m)}} (k_{r(j_m)+1} - k_{r(j_m)}) \\
&< \frac{1}{j_m + 1} + 1 + \frac{1}{j_m} - 1 \\
&< \frac{1}{j_m + 1} + \frac{1}{j_m}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $x_k \in S_0(\chi)$ 'dir. Şimdi de $x_k \notin S_\theta(\chi)$ olacağını gösterelim. χ bir Hausdorff uzay olduğundan $x \notin V$ olacak şekilde 0 'ın simetrik bir V komşuluğu

vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{r(j)}} |\{k_{r(j)-1} < k \leq k_{r(j)} : x_k \notin V\}| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{r(j)}} (k_{r(j)} - k_{r(j)-1}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{r(j)}} h_{r(j)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \neq r(j), j=1,2,\dots}} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : x_k - x \notin V\}| = 1 \neq 0$$

olur. Böylece ne x ne de 0, x_k dizisinin lacunary istatistiksel limiti olabilir. χ 'in diğer hiçbir noktası da dizinin lacunary istatistiksel limiti olamaz. Buna göre $x_k \notin S_\theta(\chi)$ 'dir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.3. θ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde $S(\chi) = S_\theta(\chi)$ olması için gerek ve yeter şart

$$1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır.

Şüphesiz ki S_θ -limiti bir tektir. Bununla birlikte farklı θ 'lar için farklı S_θ -limitlerin olması da mümkündür. $\chi = \mathbb{C}$ durumunda buna bir örnek Fridy ve Orhan [10] da gösterilmiştir. Teorem (4.2.4), $x \in S(\chi)$ iken bu durumun vuku bulmayacağını göstermektedir.

Teorem 4.2.4. Eğer $x_k \in S(\chi) \cap S_\theta(\chi)$ ise x_k dizinin istatistiksel limiti ile lacunary istatistiksel limitleri aynıdır [11].

İspat. Herhangi bir $x_k \in S(\chi) \cap S_\theta(\chi)$ dizisi için $S - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_1$ ve $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_2$ diyelim. Kabul edelim ki $\ell_1 \neq \ell_2$ olsun. χ bir Hausdorff uzay olduğundan $\ell_1 - \ell_2 \notin U$ olacak şekilde 0 'ın bir simetrik W komşuluğunu seçebiliriz. Bu takdirde her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k = \ell_2 - \ell_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_m : z_k \notin U\}| &\leq \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : x_k - \ell_1 \notin W\}| \\ &+ \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - x_k \notin W\}| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten

$$1 \leq \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : x_k - \ell_1 \notin W\}| \\ + \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - x_k \notin W\}|$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim $m \rightarrow \infty$ iken 0 'a gider. Bunu görmek için $t_r = \frac{1}{h_r} |\{k \leq k_m : \ell_2 - x_k \notin W\}|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - x_k \notin W\}| &= \frac{1}{k_m} |\{k \in \cup_{r=1}^m I_r : \ell_2 - x_k \notin W\}| \\ &= \frac{1}{k_m} \sum_{r=1}^m |\{k \in I_r : \ell_2 - x_k \notin W\}| \\ &= \left(\sum_{r=1}^m h_r \right)^{-1} \sum_{r=1}^m h_r t_r \end{aligned}$$

yazalım. $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_2$ olduğundan $\lim t_r = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle (t_r) 'nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümü de sıfıra gider, yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - x_k \notin W\}| = 0 \quad (4.1)$$

olur. Diğer yandan, $S - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_1$ olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : x_k - \ell_1 \notin W\}| = 0 \quad (4.2)$$

yazabiliriz. (4.1) ve (4.2) 'den dolayı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : z_k \notin U\}| = 0$$

elde edilir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Tanım 4.2.5. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her bir r için $k'_r \in I_r$ ve 0 'ın her bir U komşuluğu için $\lim_{r \rightarrow \infty} x_{k'_r} = \ell$ ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - x_{k'_r} \notin U\}| = 0$$

olacak şekilde x_k 'nın bir $x_{k'_r}$ altdizisi varsa x_k dizisine bir S_θ -Cauchy dizisi denir.

Burada bir dizinin S_θ -yakınsak olması için gerek ve yeter şartın tamlik şartı olmaksızın bir S_θ -Cauchy dizisi olmasıdır [11].

Teorem 4.2.6. Bir x_k dizisinin S_θ -yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir S_θ -Cauchy dizisi olmasıdır [11].

İspat. *Yeterlilik.* Kabul edelim ki x_k bir S_θ -Cauchy dizisi olsun. $U, 0$ 'ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $W + W \subseteq U$ olacak şekilde 0 'ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell \notin U\}| &\leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - x_{k'_r} \notin W\}| \\ &+ \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_{k'_r} - \ell \notin W\}|. \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - x_{k'_r} \notin U\}| = 0$$

ve $\lim_{r \rightarrow \infty} x_{k'_r} = \ell$ olduğundan hipotez gereği son eşitsizlikten $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ elde edilir.

Gereklilik. $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ olacak şekilde herhangi bir x_k dizisini alalım. (U_n) , 0 'ın içiçe yığılmış komşulukları olsun. Her bir $j \in \mathbb{N}$ için $K^{(j)} = \{k \in \mathbb{N} : x_k - \ell \in U_j\}$ yazalım. Buna göre her bir j için $K^{(j+1)} \subseteq K^{(j)}$ ve $\lim |K^{(j)} \cap I_r| (h_r)^{-1} = 1$ 'dir. $r \geq m(1)$ olması $|K^{(j)} \cap I_r| > 0$, yani $K^{(j)} \cap I_r \neq \emptyset$ olmasını gerektirecek şekilde bir $m(1)$ seçelim. Bu takdirde $m(1) \leq r < m(2)$ eşitsizliğini sağlayan her bir r için $k'_r \in K^{(1)} \cap I_r$ yani $x_{k'_r} - \ell \in U_1$ olacak şekilde $k'_r \in I_r$ seçelim. Bunu genelleştirirsek, $r > m(p+1)$ olması $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$ olmasını gerektirecek şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçelim. Bu takdirde $m(p) \leq r < m(p+1)$ eşitsizliğini sağlayan her r için $k'_r \in K^{(p)} \cap I_r$, yani $x_{k'_r} - \ell \in U_p$ olacak şekilde $k'_r \in I_r$ seçelim. Böylece $\lim_{r \rightarrow \infty} x_{k'_r} = \ell$ olur. $U, 0$ 'ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $W + W \subseteq U$ olacak şekilde 0 'ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - x_{k'_r} \notin U\}| &\leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - \ell \notin W\}| \\ &+ \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \ell - x_{k'_r} \notin W\}|. \end{aligned}$$

elde edilir. $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ ve $\lim_{r \rightarrow \infty} x_{k'_r} = \ell$ olduğundan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - x_{k'_r} \notin U\}| = 0$$

bulunur. Bu ise gerekliliğin ispatını tamamlar, böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.7. Herhangi bir lacunary istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

5. TOPOLOJİK GRUPLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

5.1.Giriş

Bu bölümde topolojik gruplarda istatistiksel yakınsak dizilerin belirli karakterizasyonları verilip bir ayırıştırma teoreminin genişlemeleri, bir tamlık teoremi ve bir Tauberian teoremi elde edilecektir [12].

[11] 'de 0'ın her bir U komşuluğu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin U\}| = 0$$

ise X 'deki bir (x_k) noktalar dizisi X 'deki ℓ elemanına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ ile gösterilir. Benzer şekilde 0'ın her bir U komşuluğu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - x_{M(U)} \notin U\}| = 0$$

olacak şekilde bir pozitif $M(U)$ tam sayısı varsa X 'deki bir (x_k) noktalar dizisine X 'de bir Cauchy dizisi denir. Burada dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir. Bu iki tanım tam topolojik gruplarda birbirine denktir. Yani bir (x_k) dizisinin istatistiksel Cauchy olması için gerek ve yeter şart göz önüne alınan topolojik uzay tam olduğunda istatistiksel yakınsak olmasıdır. Tersine bir örnek için alt uzay topolojisi $\mathbb{R}$ alınılmış topoloji tarafından üretilen Q topolojik grubunu göz önüne alalım. (x_n) dizisi $\mathbb{R}$ 'de $\sqrt{2}$ sayısına yakınsayan rasyonel bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) , Q 'da istatistiksel Cauchy'dir fakat Q 'da istatistiksel yakınsak değildir. Örneğin, sıfırdan farklı herhangi bir

$$x_k = \begin{cases} x, & k = n^2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini ele alalım. Bu dizi 0'a istatistiksel yakınsaktır fakat yakınsak değildir. Ayrıca

$$x_k = \begin{cases} x, & k \text{ çift ise} \\ 0, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Aşağıdaki tanım [13] 'deki çalışmanın özel bir uygulamasıdır.

Tanım 5.1.1. $F \subset X$ ve $\ell \in X$ olsun. Bu taktirde F 'de $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ olacak şekilde bir $x = (x_n)$ noktalar dizisi mevcutsa ℓ , F 'in istatistiksel kapanışının

bir elemanıdır. Bir F kümesinin istatistiksel-dizisel kapanışı $\overline{F}^{st}$ ile gösterilecektir. Eğer bir küme kendi istatistiksel-dizisel kapanışındaki noktaların hepsini ihtiva ediyorsa istatistiksel-dizisel kapalıdır denir [12].

Şimdi [13] 'de $G := st - \lim$ alınmasıyla elde edilen üç tanımı verelim.

Tanım 5.1.2. Eğer $F \setminus \{\ell\}$ kümesinde $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ olacak şekilde bir $x = (x_n)$ noktalar dizisi varsa ℓ noktasına F 'in istatistiksel-dizisel yığılma noktası denir.

Tanım 5.1.3. Eğer $F \subset X$ 'in her hangi bir sonsuz alt kümesi F 'de en az bir istatistiksel-dizisel yığılma noktasına sahipse F 'e istatistiksel-dizisel sayılabilir kompakttır denir.

Tanım 5.1.4. Eğer $x \in F$ dizisinin $st - \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n_k} = \ell \in F$ şeklinde $y = (y_{n_k})$ alt dizisi varsa $F \subset X$ alt kümesine istatistiksel-dizisel kompakttır denir.

5.2. İstatistiksel Yakınsaklık Teoremleri

Teorem 5.2.1. Bir (x_n) dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartın sağlanmasıdır.

(sC) 0'ın her bir U komşuluğu için (x_n) 'nin bir $(x_{k'(r)})$ alt dizisi mevcuttur ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin U \right\} \right| = 0$$

dır [12].

İspat. ℓ 'ye istatistiksel yakınsak her hangi bir (x_n) dizisini alalım. (U_n) , 0'ın komşuluklarının bir iç içe yığılmış baz dizisi olsun. Her hangi bir j pozitif tam sayısı için $K^{(j)} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ ve } x_k - \ell \in U_j\}$ yazalım. Buna göre herhangi bir j için $K^{(j+1)} \subset K^{(j)}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |K^{(j)}| = 1$ dir. $n > m(1)$ iken $\frac{1}{n} |K^{(1)}| > 0$ olacak şekilde $m(1)$ sayısını seçelim ($K^{(1)} \neq \emptyset$). Bu taktirde her bir pozitif r tam sayısı için $m(1) \leq r \leq m(2)$ olacak şekilde $k(r) \in K^{(p)}$ seçebiliriz, yani $x_{k'(r)} - \ell \in U_1$ 'dir. Genelleştirilirse $r > m(p+1)$ iken $K^{(p+1)} \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçebiliriz. Bu taktirde $m(p) \leq r < m(p+1)$ şartını sağlayan tüm r 'ler için $k'(r) \in K^p$ seçebiliriz, yani $x_{k'(r)} - \ell \in U_p$ 'dir. Ayrıca, 0'ın her bir U komşuluğu için $W + W \subset U$

olacak şekilde 0'ın simetrik W komşuluğu vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin U \right\} \right| &\leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin W\}| \\ &+ \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \ell - x_{k'(r)} \notin W \right\} \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin W\}| = 0$$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k'(r)} = \ell$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_{k'(r)} - \ell \notin W \right\} \right| = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin U \right\} \right| = 0$$

olur ve dolayısıyla (sC) şartını sağlar.

Şimdi de farzedelim ki (sC) şartı sağlansın. Bu taktirde 0'ın herhangi bir U komşuluğu için $W + W \subset U$ olacak şekilde 0'ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin U\}| &\leq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin W \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_{k'(r)} - \ell \notin W \right\} \right| \end{aligned}$$

olur. Buna göre (sC) şartının (x_n) dizisinin istatistiksel yakınsaklığından dolayı sağlandığı görülür.

Teorem 5.2.2. Eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ ve $st - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ ise $st - \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ dır [12].

İspat. U , 0'ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu taktirde $W + W \subset U$ olacak şekilde 0'ın bir simetrik W komşuluğunu seçebiliriz. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ olduğundan $k \geq k_0$ olacak şekilde bir k_0 tam sayısı mevcuttur ki bu $x_k - \ell \in W$ olmasını gerektirir. Böylece

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : (x_k - \ell) + y_k \notin U\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin W\}| + \frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k \notin W\}|$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : (x_k - \ell) + y_k \notin U\}| = 0$$

elde edilir. Buna göre $st - \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ olur.

Teorem 5.2.3. Eğer bir (x_k) dizisi ℓ 'ye istatistiksel yakınsak ise $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \ell$, $x = y + z$ olacak şekilde (y_k) ve (z_k) dizileri mevcuttur. Burada z bir istatistiksel sıfır dizisi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| = 0$ dır [12].

İspat. (U_j) , 0 'ın komşuluklarının bir yığılmış bazı olsun. $n_0 = 0$ alalım ve $n > n_j$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin U_j\}| < \frac{1}{j}$$

olacak şekilde pozitif tam sayıların bir (n_j) artan dizisini seçelim. $y = (y_k)$ ve $z = (z_k)$ dizilerini aşağıdaki yöntemle tanımlayalım:

Eğer $n_0 < k \leq n_1$ ise $z_k = 0$ ve $x_k = y_k$ yazalım ve $j \geq 1$ için $n_j < n_{j+1}$ kabul edelim. $x_k - \ell \in U_j$ iken $z_k = 0$ ve $x_k = y_k$, $x_k - \ell \notin U_j$ iken $y_k = \ell$ ve $z_k = x_k - \ell$ alalım. İlk olarak, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \ell$ olduğunu ispatyalım. U , 0 'ın herhangi bir komşuluğu olsun. $U_j \subset U$ olacak şekilde bir pozitif j tam sayısı seçebiliriz. Bu taktirde $k > n_j$ için $y_k - \ell = x_k - \ell \in U_j$ ve böylece $y_k - \ell \in U$ olur. Eğer $x_k - \ell \notin U_j$ ise bu taktirde $y_k - \ell = \ell - \ell = 0 \in U$ olur. Böylece $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \ell$ bulunur. Sonuç olarak $z = (z_k)$ dizisinin bir istatistiksel sıfır dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. 0 'ın herhangi bir U komşuluğu ve herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\{k \leq n : z_k \notin U\}| \leq |\{k \leq n : z_k \neq 0\}|$$

elde edilir. $U_j \subset U$ olacak şekilde $j \in \mathbb{N}$ için ve $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| < \varepsilon$ olduğunu göstereceğiz.

Eğer $n_p < n \leq n_{p+1}$ ise $\{k \leq n : z_k \neq 0\} \subset \{k \leq n : x_k - \ell \notin U_p\}$ olur. Eğer $p > j$ ve $n_p < n \leq n_{p+1}$ ise

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k - \ell \notin U_p\}| < \frac{1}{p} < \frac{1}{j} < \varepsilon$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

Sonuç 5.2.4. Herhangi bir istatistiksel yakınsak dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır [12].

İspat. Önceki teoremden çıkar.

Teorem 5.2.5. Eğer X istatistiksel dizisel kompakt ise tamdır [12].

İspat. X 'de herhangi bir $x = (x_k)$ Cauchy dizisini alalım. X istatistiksel kompakt ise x 'in bir $\ell \in X$ elemanına yakınsak $y = (y_{n_k})$ alt dizisi mevcuttur. Teorem 5.2.1, y dizisinin ℓ 'ye yakınsak bir $z = (z_{n_k})$ alt dizisinin varlığını garantiler. Böylece x yakınsaktır.

Tanım 5.2.6. X 'de bir (x_n) dizisi verilsin. 0'ın her bir U komşuluğu için $n_0 \leq n \leq k \leq (1 + \delta)n$ iken $(x_k - x_n) \in U$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tam sayısı ve $\delta > 0$ varsa (x_n) dizisine yavaş salınımlıdır denir.

İki yavaş salınımlı dizinin toplamı yine yavaş salınımlıdır. Bir istatistiksel Cauchy dizisi yavaş salınımlı olmayabilir. Tersi de doğru değildir. Örneğin, herhangi bir sıfırdan farklı $x \in X$ elemanı için

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}x, & k = n^2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisi yavaş salınımlı değildir fakat istatistiksel Cauchy'dir. $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x$ dizisi yavaş salınımlıdır fakat istatistiksel Cauchy değildir [12]. Şimdi Tauberian teoremi verelim:

Teorem 5.2.7. Eğer (x_n) istatistiksel yakınsak ve yavaş salınımlı ise yakınsaktır [12].

İspat. $st - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ olsun. Sonuç 5.2.4 'den $y_k = x_k$ eşitliğini sağlayan k indislerinin $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m < \dots$ olacak şekilde (j_m) alt dizisini elde ederiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| = 0$$

olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{j_m} |\{k \leq j_m : x_k = y_k\}| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{j_m} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{j_{m+1}}{j_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{j_{m+1}}{m+1} \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{m}{j_m} = 1 \quad (5.1)$$

elde edilir. (j_m) 'nin tanımından

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{j_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{j_m} = \ell \quad (5.2)$$

bulunur.

(5.1) ve (5.2)'den 0'ın her bir kapalı U komşuluğu için $m > n_0$ iken $j_m < k < j_{m+1}$ olduğundan $(x_k - x_{j_m}) \in U$ olacak şekilde bir n_0 sayısının mevcut olacağı sonucuna varılır. U keyfi olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_k - x_{j_m}) = 0$ elde edilir. (5.2)'den (x_m) 'nin ℓ 'ye yakınsak olduğu çıkar. Böylece ispat tamamlanır

KAYNAKLAR

- [1] Zygmund, A. 1979, Trigonometric series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2] Steinhaus, H. 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73-74.
- [3] Fast, H. 1951, Sur la convergence statistique, *Colloquium Math.* 2, 241-244.
- [4] Schoenberg, I.J., 1959, "The integrability of certain functions and related summability methods", Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
- [5] Fridy, J.A., 1985, "On the statistical convergence", Analysis, 5, 301-313.
- [6] Connor, J. S., 1988, "The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences", Analysis, 8, 47-63.
- [7] Savaş, E., 2000, Strong almost convergence and almost λ -statistically convergence, Hokkaido Math. Jour. 29, 531-536.
- [8] Mursaleen, M., 2000, λ -statistical convergence, Math. Slovaca, 50 (1), 111-115.
- [9] Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978, Some Cesàro- type summability spaces, Proc. Lond. Math. Soc., 37 (3), 508-520.
- [10] Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993, Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160 (1), 43-51.
- [11] Çakallı, H., 1995, "Lacunary statistical convergence in topological groups", Indian J. Pure Appl. Math., 26 (2), 113-119.
- [12] Çakallı, H. 2009, *A study on statistical convergence*, Functional Analysis, Approximation and Computation, 1(2), 19-24.
- [13] Çakallı, H. 2008, *Sequential definitions of compactness*, Appl. Math. Lett. 21 (6), 594-598.

- [14] Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition, London and New York.
- [15] Soykan, Y., 2008, Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayınları, Ankara.
- [16] Goes, G. and Goes, S., 1970, Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, Math. Z., 118, 93-102.
- [17] Balcı, M. 2010, Matematik Analiz, Balcı yay., Ankara
- [18] Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [19] Mucuk, O., 2009. Topoloji, Nobel Yayınları.
- [20] Dernek, A., 2009, Analiz I, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [21] Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
- [22] Maddox, I. J., 1978, "A new type of convergence", Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 83, 61-64.
- [23] Powell, R.E. and Shah, S.M., 1972. Summability Theory and its Applications, Van Nostrand-Reinhod Company, London

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlkokula Diyarbakır'ın Çüngüş ilçesinde başladım ve Bursa'nın Kestel ilçesinde bitirdim. Ortaokul ve liseyi Mersin'in Tarsus ilçesinde bitirdim. 1998 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandım. 2002 yılında Elazığ'ın Arıcak ilçesine matematik öğretmeni olarak atandım. 2002-2007 yılları arasında burada çalıştıktan sonra, 2007 tarihinde Elazığ'ın Kovancılar ilçesindeki Anadolu lisesine atandım. Halen bu kurumda çalışmaktayım. 2012 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.