

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**α . DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK VE α . DERECEDEN
I-YAKINSAKLIK**

DOKTORA TEZİ
Hacer ŞENGÜL
(101121205)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Funksiyonlar Teorisi
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

TEMMUZ- 2013

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

α . DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE
 α . DERECEDEN I -YAKINSAKLIK

DOKTORA TEZİ

Hacer ŞENGÜL

(101121205)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Temmuz 2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 4 Eylül 2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

Diğer Juri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)

: Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN (İ.Ü)

: Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

: Doç. Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü)

TEMMUZ-2013

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca, engin bilgi ve birikiminden yararlandığım, doktora eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hacer ŞENGÜL
ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KAVRAMLAR	2
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	2
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık.....	5
2.3. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	7
2.4. İdeal Yakınsaklık ve $\times$ –İstatistiksel Yakınsaklık.....	8
3. α . DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	11
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	15
4.1. α . Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	15
4.2. Orlicz Fonksiyonuyla İlgili Sonuçlar	31
4.3. Modulus Fonksiyonuyla İlgili Sonuçlar	34
5. α . DERECEDEN I -YAKINSAKLIK.....	37
5.1. α . Dereceden $(\times, I)$ -İstatistiksel Yakınsaklık.....	37
6. SONUÇ	53
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ	57

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, konunun tarihi geçmişi verilmiştir.

İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve onlarla ilgili kavramlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi kullanılarak α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_θ^α ve α . dereceden kuvvetli p -lacunary yakınsak dizilerin uzayı $N_\theta^\alpha(p)$ tanımlandıktan sonra bu uzaylar arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilmiştir. İkinci kısmında M Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli $N_\theta^\alpha(M, (p))$ –toplanabilir dizilerin uzayı tanımlanmış bu uzaya ait birkaç bağıntı verilmiştir. Son kısımda f modulus fonksiyonuna göre $w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ dizi uzayı tanımlanmış bu uzaya ait birkaç bağıntı verilmiştir.

Beşinci bölümde, α . dereceden I -yakınsak dizilerin uzayı $S^\alpha(I)$, α . dereceden (λ, I) –yakınsak dizilerin uzayı $S_\lambda^\alpha(I)$ tanımlanmış ve bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yakınsaklık, Lacunary Dizisi, Orlicz Fonksiyonu, Modulus Fonksiyonu, İdeal.

SUMMARY

Lacunary Statistical Convergence of Order α and I -Convergence of Order α

This study is prepared as five chapter.

In the first chapter, we give historical background of the subject.

In the second chapter, we give the fundamental definitions and theorems.

In the third chapter, we examine statistical convergence of order α and their associate concepts.

In the first section of fourth chapter, we define lacunary statistical convergence of order α of sequence space S_θ^α and strong p -lacunary convergence of order α of sequence space $N_\theta^\alpha(p)$ using lacunary sequence $\theta = (k_r)$ and give some inclusion relations between of these spaces. In the second section of this chapter, we define strongly $N_\theta^\alpha(M, (p))$ – summable of sequence space with respect to the Orlicz function M and give some relations that belong to these classes. In the last section, we define sequence space $w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ with respect to the modulus function f and give some relations that belong to these spaces.

In the fifth chapter, we define I -convergence of order α of sequence space $S^\alpha(I)$, (λ, I) –convergence of order α of sequence space $S_\lambda^\alpha(I)$ and examine some properties these spaces.

Key Words: Statistical Convergence, Lacunary Sequence, Orlicz Function, Modulus Function, Ideal.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
BK	: Banach Koordinatsal
$\xrightarrow{w}$	: Zayıf yakınsaklık
$\xrightarrow{s}$	: Kuvvetli yakınsaklık
X'	: X normlu uzayının sürekli dual uzayı
w	: Bütün reel dizilerin uzayı
w_p	: Kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı
w_p^α	: α . dereceden kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı
$w_{p,0}^\alpha$	: α . dereceden sıfıra kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_θ	: Lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_θ^α	: α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$S_{\theta,0}^\alpha$	: α . dereceden sıfıra lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
N_θ	: Kuvvetli lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
N_θ^α	: α . dereceden kuvvetli lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$N_{\theta,p}^\alpha$	: α . dereceden kuvvetli p-lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$N_{\theta,p,0}^\alpha$	: α . dereceden sıfıra kuvvetli p-lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$S(I)$	: I -istatistiksel yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık düşüncesi ilk kez 1935 yılında Zygmund'un [10] kendi monografisinin Varşova'da basılan ilk baskısında verildi. İstatistiksel yakınsaklığın tanımı Steinhaus [11] ve Fast [12] tarafından verildi ve sonra bağımsız olarak Schoenberg [13] tarafından yeniden tanımlandı. Yıllarca farklı isimler altında istatistiksel yakınsaklık Fourier Analiz teorisinde, ergodic teoride, sayılar teorisinde, ölçüm teorisinde, trigonometrik serilerde ve Banach uzaylarında kullanılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık daha sonraları Fridy [6], Connor [9], Savaş [14], Mursaleen [15], Fridy ve Orhan ([8],[24]), Moricz [16], Rath ve Tripathy [17], Salat [18], Bhardwaj [19], Çolak [20] ve daha bir çok kişi tarafından çalışıldı. Derece dahil edilerek, bir dizinin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev and Orhan [21] tarafından verildi. Daha sonra bir dizinin α . dereceden kuvvetli p-Cesaro toplanabilirliği Çolak [20] tarafından tanımlandı ve α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ile birlikte çalışıldı. Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş bir hali olan λ -istatistiksel yakınsaklık Çolak [28], α . dereceden λ -istatistiksel yakınsaklık Çolak ve Bektaş [29] tarafından çalışıldı.

İstatistiksel yakınsaklık, I -yakınsaklığın özel bir halidir ve özel bir ideal seçimi ile elde edilir. I -yakınsaklık, $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin I ideal kavramına dayanır. I -yakınsaklık çalışılırken istatistiksel yakınsaklığın bir çok özelliğinden yararlanılmıştır. Kostyrko, Mačaj ve Šalát [22] reel sayı dizileri için I -yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Daha sonra Kostyrko, Šalát ve Wilezyński [23] bu kavramı herhangi bir metrik uzayda tanımlayarak bazı özelliklerini vermişlerdir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

$$L1) x + y = y + x$$

$$L2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L3) \text{ Her } x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \text{ vardır.}$$

$$L4) \text{ Herbir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \text{ vardır.}$$

$$L5) 1 \cdot x = x$$

$$L6) \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$L7) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$L8) \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \text{ [1].}$$

Tanım 2.1.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in K$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir.

Burada $K = \mathbb{R}$ alınırsa $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine reel normlu uzay denir [2].

Tanım 2.1.3. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır. Bu yakınsaklık kuvvetli yakınsaklık olarak da tanımlanır ve $x_n \xrightarrow{s} x$ şeklinde de gösterilir [2].

Tanım 2.1.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 2.1.5. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [2].

Tanım 2.1.6. Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi *konvektir* denir [2].

Tanım 2.1.7. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir [2].

Tanım 2.1.8. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Her $f \in X'$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

ise (x_n) dizisi x e zayıf yakınsaktır denir. (x_n) dizisi x e zayıf yakınsak ise $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde yazılır [3].

Tanım 2.1.9. Reel terimli tüm dizilerin cümlesini w ile gösterelim. $x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere, w

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [5]. Ayrıca

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.10. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{R}, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir BK- uzayı denir [5].

Tanım 2.1.11. (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde $D = \max(1, 2^{H-1})$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D(|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k})$$

eşitsizliği sağlanır [1].

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.2.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin A alt cümlesinin doğal yoğunluğu, $|\{k \leq n : k \in A\}|$ ifadesi n den büyük olmayan $A \subseteq \mathbb{N}$ cümlesinin elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

ile tanımlanır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin herhangi bir sonlu alt cümlesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve $A^c = \mathbb{N} - A$ olmak üzere $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ dır [6].

Bir cümleinin doğal yoğunluğu daha kolay bir yolla şu şekilde bulunabilir. (a_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ alt cümlesinin doğal yoğunluğu mevcut ise

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$$

dir [7]. Örnek olarak $A = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$ cümlesini alırsak, doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

olarak elde edilir.

Burada özellikle doğal yoğunluğu sıfır olan cümlelerle ilgileneceğiz. Ayrıca, eğer $x = (x_k)$, doğal yoğunluğu sıfır olan bir cümle hariç her k için P özelliğini sağlayacak

şekilde olan bir dizi ise, x_k “*hemen hemen her k*” için P özelliğini sağlar deriz, ve bunu kısaca “*h.h.k*” şeklinde yazarız.

Tanım 2.2.2. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani *h.h.k* için

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durum da $S - \lim x_k = L$ yazılır. Eğer $L = 0$ ise yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel sıfır dizisidir* denir. Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S ile ve tüm istatistiksel sıfır dizilerin cümlesi S_0 ile gösterilir [6].

Bilinen anlamda yakınsak olan diziler istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak olan diziler yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.1. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} m = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir, yani $S - \lim x_k = 0$ dır. Ancak (x_k) dizisi yakınsak değildir.

Tanım 2.2.3. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani h.h.k için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir [6].

2.3. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.3.1.. $k_0 = 0, r \rightarrow \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ artan tamsayı dizisine *lacunary dizisi* denir. $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olarak alınacaktır.

$I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve θ bir lacunary dizisi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise x sayı dizisi L ye *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ olarak gösterilir.

$$S_\theta = \{x : \text{bazı } L \text{ için, } S_\theta - \lim x = L\}$$

olarak tanımlanır [8].

Tanım 2.3.2. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Her bir r için $k'(r) \in I_r$ olmak üzere x in $\{x_{k'(r)}\}$ alt dizisi vardır öyle ki $\lim_r x_{k'(r)} = L$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise x dizisine $S_\theta - \text{Cauchy dizisi}$ denir [8].

Tanım 2.3.3. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi, L ye kuvvetli p –Cesaro toplanabilir denir. Kuvvetli p –Cesaro toplanabilir dizilerin kümesi w_p ile gösterilir. O halde, $p > 0$ için

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

dır [9].

Tanım 2.3.4. her θ lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi, L ye kuvvetli p –lacunary yakınsaktır denir. Kuvvetli p –lacunary yakınsak dizilerin cümlesi $N_\theta(p)$ ile gösterelim. $p > 0$ için

$$N_\theta(p) = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \quad \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır [4]. $N_\theta(p)$ uzayı $\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k|^p \right)^{1/p}$ normu ile BK -uzayıdır. $\theta = (2^r)$ olması halinde $N_\theta(p) = w_p$ olur.

2.4. İdeal Yakınsaklık ve λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.4.1. $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir I ailesi için

- (i) $\emptyset \in I$
- (ii) Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$
- (iii) Her $A \in I$ ve her $B \subseteq A$ için $B \in I$

şartları sağlanıyor ise I ailesine ideal denir [23].

Tanım 2.4.2. $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir I ideali için $I \neq 2^{\mathbb{N}}$ oluyorsa I ya gerçek ideal denir [23].

Tanım 2.4.3. I ideali $\mathbb{N}$ de gerçek ideal olsun. Eğer I , $\mathbb{N}$ nin her sonlu alt kümesini kapsıyorsa I ya uygun ideal adı verilir [23].

Tanım 2.4.4. $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir F ailesi için

- (i) $\emptyset \notin F$
- (ii) Her $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$
- (iii) Her $A \in F$ ve her $B \supseteq A$ için $B \in F$

şartları sağlanıyor ise F ailesine süzgeç denir [23].

Teorem 2.4.1. $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal olmak üzere

$$F(I) = \{M \subseteq \mathbb{N} : M = \mathbb{N} \setminus A, A \in I\}$$

kümesi $\mathbb{N}$ de bir süzgeçtir [23].

Tanım 2.4.5. $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve I bir uygun ideal olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi I idealinin elemanı oluyorsa x dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına I -yakınsaktır denir ve $I - \lim x = L$ ile gösterilir [23]. I -yakınsak tüm dizilerin kümesi $S(I)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.6. $\lambda_{n+1} = \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ olacak şekilde $\lambda = \{\lambda_n\}$ dizisi pozitif sayıların ∞ a yakınsayan azalmayan bir dizisi olsun. Bu şekildeki tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerini Λ ile gösterelim.

$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye λ - istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ olarak gösterilir.

$$S_\lambda = \{x = (x_k) \in w : \exists L \in \mathbb{C}, S_\lambda - \lim x = L\}$$

olarak tanımlanır [27]. Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin Ortalaması,

$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır. Eğer $\lim_n t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$ dizisi L ye (V, λ) –toplanabilirdir denir.

Kuvvetli (V, λ) –toplanabilir dizilerin cümlesi $[V, \lambda]$ şeklinde gösterilir ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

3. α . DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde bir cümleinin α – yoğunluğu kavramı açıklanıp, bu kavram yardımı ile α . dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımlanacaktır.

Tanım 3.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. $|\{k \leq n : k \in E\}|$, E kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine E alt cümlesinin α –yoğunluğu denir. Bu yoğunluk $\delta_\alpha(E)$ ile gösterilir.

$x = (x_k)$ dizisi, α –yoğunluğu sıfır olan cümle hariç, her k için $P(k)$ özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise o zaman (x_k) dizisi, α ya göre hemen hemen her k için $P(k)$ özelliğini sağlar denir. Bunu biz kısaca *h. h. $k(\alpha)$* ile göstereceğiz [20].

Tanım 3.1.2. $x = (x_k) \in w$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olarak verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde kompleks bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye α . *dereceden istatistiksel yakınsaktır* denir. Bir başka ifadeyle her $\varepsilon > 0$ ve *h. h. $k(\alpha)$* için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise x dizisi L ye α . *dereceden istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu yakınsaklık $S^\alpha - \lim x_k = L$ şeklinde gösterilir. α . dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S^α ile gösterilir [20].

Tanım 3.1.3. $x = (x_k) \in w$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olarak verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α . *dereceden istatistiksel Cauchy dizisi* denir. Bir başka ifadeyle her $\varepsilon > 0$ ve *h. h. $k(\alpha)$* için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ ise x dizisine α . *dereceden istatistiksel Cauchy dizisi* denir.

Teorem 3.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) x, α . dereceden istatistiksel yakınsak bir dizidir;

ii) x, α . dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir;

iii) $x = (x_k)$ dizisi verilsin, $h. h. k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): $S^\alpha - \lim x_k = L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $h. h. k(\alpha)$ için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve seçilen bir N için

$$|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $h. h. k(\alpha)$ için

$$|x_k - x_N| < |x_k - L| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece x, α . dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): (ii) sağlansın, yani $x = (x_k), \alpha$. dereceden istatistiksel Cauchy dizisi olsun. N doğal sayısını $I = (x_N - 1, x_N + 1)$ aralığı $h. h. k(\alpha)$ için x_k yı içerecek şekilde seçelim.

Aynı şekilde M doğal sayısını öyle seçelim ki $I' = (x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2})$ aralığı $h. h. k(\alpha)$ için x_k yı içersin. İddia ediyoruz ki

$$I_1 = I \cap I'$$

$h. h. k(\alpha)$ için x_k yı içerir; çünkü,

$$\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\} = \{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \{k \leq n : x_k \notin I'\}$$

ve dolayısıyla $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \notin I\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \notin I'\}| = 0$$

dır.

Bu nedenle I_1 , uzunluğu küçük veya eşit 1 olan ve $h.h.k(\alpha)$ için x_k yı içeren kapalı bir aralıktır. Şimdi $I'' = \left(x_{N(2)} - \frac{1}{4}, x_{N(2)} + \frac{1}{4}\right)$ aralığı $h.h.k(\alpha)$ için x_k yı içerecek şekilde $N(2)$ yi seçelim. Yukarıdaki düşünceyle $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığının $h.h.k(\alpha)$ için x_k yı içerdiğini ve I_2 aralığının uzunluğunun $\frac{1}{2}$ den küçük veya eşit olduğunu verir. Bu yolla devam ederek her m için, $I_m \supseteq I_{m+1}$, nin uzunluğu 2^{1-m} den daha büyük olmayacak ve $h.h.k(\alpha)$ için $x_k \in I_m$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini elde ederiz. İç içe aralıklar teoremi gereğince $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\lambda\}$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır. $h.h.k(\alpha)$ için $x_k \in I_m$ gerçeğini kullanarak her $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \quad (3.1.1)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini seçebiliriz. Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin, $k > T_1$ ve

$$T_m < k \leq T_{m+1} \text{ ise } x_k \notin I_m$$

olacak şekildeki bütün x_k terimlerinden oluşan bir $z = (z_k)$ alt dizisini tanımlayalım.

Şimdi $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & \text{eğer } x_k, z = (z_k) \text{ nin bir terimi ise,} \\ x_k, & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\lim y_k = \lambda$ dır; çünkü, eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise ya $x_k, y_k = \lambda$ olacak şekilde z nin bir terimidir ya da $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda| \leq I_m$ nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ dir. Ayrıca $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $T_m < n < T_{m+1}$ olarak alırsak $\{k \leq n : y_k \neq x_k\} \subset \{k \leq n : x_k \notin I_m\}$ dolayısıyla (3.1.1) gereğince

$$\frac{1}{n^\alpha} \left| \{k \leq n : y_k \neq x_k\} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

dir. Böylece $n \rightarrow \infty$ için limit 0 dır ve $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ dır. Bu nedenle (ii), (iii) gerektirir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): (iii) ün sağlandığını, $h. h. k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ ve $\lim y_k = L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim y_k = L$ olduğundan

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| > \varepsilon\}$$

dır. Son cümle belli bir sabit sayıda doğal sayı içerir, bunu $l = l(\varepsilon)$ ile gösterelim.

$h. h. k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ olduğundan $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\lim_n \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| + \lim_n \frac{l}{n^\alpha} = 0$$

yazabiliriz. Böylece $h. h. k(\alpha)$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ elde edilir.

Sonuç 3.1.1. x dizisi için $S^\alpha - \lim x_k = L$ ise x dizisi, $\lim y_k = L$ olacak şekilde bir y alt dizisine sahiptir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

4.1. α . Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

$h = (h_r)$ dizisi 2.3 de tanımlandığı gibi olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ olarak alalım.

$I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve h_r^α , h_r nin α kuvveti yani $h^\alpha = (h_r^\alpha) = (h_1^\alpha, h_2^\alpha, h_3^\alpha, \dots, h_r^\alpha, \dots)$ olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde L kompleks sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α . *dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır* diyeceğiz. Bu yakınsaklığı $S_\theta^\alpha - \lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ ile göstereceğiz.

Bütün α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini S_θ^α ile, α . dereceden sıfıra lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini de $S_{\theta,0}^\alpha$ ile göstereceğiz. Her $0 < \alpha \leq 1$ için $S_{\theta,0}^\alpha \subset S_\theta^\alpha$ olduğu açıktır. $\alpha = 1$ için $S_\theta^\alpha = S_\theta$ dır.

N nin bir K alt cümlesinin α . *dereceden θ -yoğunluğu*

$$\delta_\theta^\alpha(K) = \lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 4.1.1. $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $\delta_\theta^\beta(K) \leq \delta_\theta^\alpha(K)$ dır.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. $h_r^\alpha \leq h_r^\beta$ olduğundan $\frac{1}{h_r^\beta} \leq \frac{1}{h_r^\alpha}$ olur. Buradan

$$\frac{1}{h_r^\beta} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}| \leq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}|$$

yazabiliriz. Böylece

$$\delta_\theta^\beta(K) \leq \delta_\theta^\alpha(K)$$

elde edilir.

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere α . derece lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi lacunary istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten $\alpha \in (0,1]$ için $h_r^\alpha \leq h_r$ olduğundan

$$\frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Her iki tarafının r ye göre limiti alınırsa $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ olduğundan $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ elde edilir.

$0 < \alpha \leq 1$ için α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Fakat genel olarak $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunu aşağıdaki örnekten görebiliriz:

Örnek 4.1.1. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2r \text{ ise} \\ 0, & k \neq 2r \text{ ise} \end{cases}, r = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. $\alpha > 1$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2h_r^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^\alpha - \lim x_k = 1$ ve,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2h_r^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^\alpha - \lim x_k = 0$ dır. Bu durumda $x = (x_k)$ dizisi hem 1 e hem de 0 a α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak olur. Fakat bu mümkün değildir.

Teorem 4.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k), y = (y_k)$ kompleks sayıların dizileri olsun.

i) $S_\theta^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_\theta^\alpha - \lim (cx_k) = cx_0$,

ii) $S_\theta^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $S_\theta^\alpha - \lim y_k = y_0$ ise $S_\theta^\alpha - \lim (x_k + y_k) = x_0 + y_0$

dır.

İspat. $c = 0$ ise (i) aşıkardır. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

i) in ispatı aşağıdaki eşitsizlikten

$$\frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |cx_k - cx_0| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{h_r^\alpha} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|,$$

ii) nin ispatı aşığıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{h_r^\alpha} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{h_r^\alpha} \left| \left\{ k \in I_r : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|, \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu teorem S_θ^α nın bir lineer uzay olduğunu gösterir.

Tanım 4.1.1. $\alpha \in (0,1]$ ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her bir r için $k'(r) \in I_r$ olmak üzere $\lim_{r \rightarrow \infty} x_{k'(r)} = L$ olacak şekilde x in $(x_{k'(r)})$ alt dizisi varsa ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise x dizisine S_θ^α -Cauchy dizisidir denir.

Teorem 4.1.2. $0 < \alpha \leq 1$ olsun. x dizisi bir S_θ^α -Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart x dizisinin S_θ^α -yakınsak olmasıdır.

İspat. İspat için Fridy and Orhan [24] ün tekniğini kullanalım. $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ olsun. Her bir $j \in \mathbb{N}$ için $K^{(j)} = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \frac{1}{j}\}$ yazalım. Böylece her j için $K^{(j)} \supseteq K^{(j+1)}$ ve

$$\frac{|K^{(j)} \cap I_r|}{h_r^\alpha} \rightarrow 1, r \rightarrow \infty$$

dir. $r \geq m(1)$ olması $\frac{|K^{(1)} \cap I_r|}{h_r^\alpha} > 0$ olmasını gerektirecek şekilde $m(1)$ seçelim. Bu durumda $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$ dir. $m(2) > m(1)$ seçelim öyle ki $r \geq m(2)$ iken $K^{(2)} \cap I_r \neq \emptyset$ dir. O zaman her bir r için $m(1) \leq r < m(2)$ sağlanır. $k'(r) \in I_r \cap K^{(1)}$ olacak şekilde $k'(r) \in I_r$ seçelim. Yani $|x_{k'(r)} - L| < 1$ dir. Genellersek $r > m(p+1)$ olmak üzere $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçebiliriz. Bu durumda her r için $m(p) \leq r < m(p+1)$ sağlanır. $k'(r) \in I_r \cap K^{(p)}$ seçelim. Yani

$$|x_{k'(r)} - L| < \frac{1}{p}$$

olur. Böylece her r için $k'(r) \in I_r$ alabiliriz ve $|x_{k'(r)} - L| < \frac{1}{p}$ olmasından dolayı

$\lim_r x_{k'(r)} = L$ dir. Bununla birlikte $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \\ &+ \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_{k'(r)} - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned}$$

dir. $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ ve $\lim_r x_{k'(r)} = L$ olduğundan x dizisi bir S_θ^α -Cauchy dizisidir.

Tersine x bir S_θ^α -Cauchy dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \\ &+ \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_{k'(r)} - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned}$$

dir. Böylece $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ dır.

Tanım 4.1.2. θ bir lacunary dizisi olsun, $\alpha \in (0,1]$ verilsin. p pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi, L ye α . dereceden kuvvetli p -lacunary yakınsaktır denir. α . dereceden kuvvetli p -lacunary yakınsak dizilerin cümlesi $N_\theta^\alpha(p)$ ile gösterilecektir. Buna göre

$$N_\theta^\alpha(p) = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{R}, \quad \lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. α . dereceden sıfıra kuvvetli p –lacunary yakınsak dizilerin uzayını $N_{\theta,0}^\alpha(p)$ ile göstereceğiz. Eğer $\theta = (2^r)$ alınırsak α . dereceden kuvvetli p –Cesaro toplanabilir dizilerin kümesi

$$w_p^\alpha = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{R}, \quad \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

elde edilir. $L = 0$ olması durumun da bu uzayı $w_{p,0}^\alpha$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.3. θ bir lacunary dizisi, $\alpha_0 \in (0,1]$ ve p_0 pozitif reel sayı olsun. $N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ uzayı

$$\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}, \quad 1 \leq p_0 < \infty \quad (4.1.1)$$

normu ile bir Banach uzayı

$$\|x\|_{\theta_1} = \sup_r \frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k|^{p_0}, \quad 0 < p_0 < 1 \quad (4.1.2)$$

normu ile tam p -normlu uzaydır.

İspat. $N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ in (4.1.1) normuna göre normlu uzay olduğu kolayca görülebilir. $x^s = (x_k^s)_k = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ olmak üzere (x^s) , $N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \rightarrow 0$$

ve böylece her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \rightarrow 0$$

olur. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ için $|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$ olur. Bu ise her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_k^s)_k = (x_1^s, x_2^s, \dots)$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_s x_k^s = x_k$ olduğunu kabul edelim. (x^s) bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki her $s, t \geq n_0$ için

$$\|x^s - x^t\|_\theta < \varepsilon.$$

dır. Böylece her $r \in \mathbb{N}$ ve her $s, t \geq n_0$ için

$$\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^{p_0} < \varepsilon^{p_0}$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa son eşitsizlikten $s \geq n_0$ için

$$\lim_t \frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^{p_0} = \frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k|^{p_0} < \varepsilon^{p_0}$$

olur. Bu da

$$\|x^s - x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \rightarrow 0$$

demektir ve böylece $s \rightarrow \infty$ için $x^s \rightarrow x$ dir.

$$\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^{p_0} \leq 2^{p_0} \left\{ \frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^{n_0} - L|^{p_0} + \frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^{n_0} - x_k|^{p_0} \right\}$$

olduğundan $x \in N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ dır.

Benzer yolla $0 < p_0 < 1$ için $N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ uzayının (4.1.2) normuna göre bir tam p -normlu uzay olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.1.4. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için $x_k \rightarrow L(N_\theta^\alpha(p))$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ olup en az bir α için $N_\theta^\alpha(p) \subseteq S_\theta^\beta$ kapsaması kesindir.

İspat. i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L(N_{\theta,p}^\alpha)$ ise

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\geq \varepsilon^p |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p &\geq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\
&\geq \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p
\end{aligned}$$

yazılabilir. r ye göre limit alınırsa $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ elde edilir. Böylece $N_\theta^\alpha(p) \subseteq S_\theta^\beta$ dir.

$\alpha = \beta$ ve $p = 1$ için kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. θ lacunary dizisi verilsin.

$$x_k = \begin{cases} [\sqrt{h_r}], & k = 1, 2, 3, \dots, [\sqrt{h_r}] \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. $\forall \varepsilon > 0, \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, r \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r^\alpha} \rightarrow 0$$

elde edilir. Yani $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x_k \rightarrow 0(S_\theta^\alpha)$ dir. Diğer taraftan $0 < \alpha < 1$ ve $p = 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0|^p = \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k| = \frac{[\sqrt{h_r}][\sqrt{h_r}]}{h_r^\alpha} \rightarrow \infty$$

olup $\alpha = 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k| = \frac{[\sqrt{h_r}][\sqrt{h_r}]}{h_r^\alpha} \rightarrow 1$$

dir. $0 < \alpha \leq 1$ için $x_k \not\rightarrow 0(N_\theta^\alpha(p))$ dir. Yani $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x \in S_\theta^\alpha - N_\theta^\alpha(p)$ dir.

Teorem 4.1.5. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ için $\liminf_r q_r > 1$ ise $S^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$ dir.

İspat. $\liminf_r q_r > 1$ olduğunu kabul edelim. Yeterince büyük r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$q_r \geq 1 + \delta \Rightarrow \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1 + \delta \Rightarrow -\left(\frac{k_{r-1}}{k_r}\right) \geq -\left(\frac{1}{1 + \delta}\right) \Rightarrow 1 - \left(\frac{k_{r-1}}{k_r}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{1 + \delta}\right)$$

olup buradan da $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \Rightarrow \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^\alpha \geq \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{k_r^\alpha} \geq \frac{\delta^\alpha}{(1 + \delta)^\alpha} \frac{1}{h_r^\alpha}$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L(S^\alpha)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r^\alpha} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta^\alpha}{(1 + \delta)^\alpha} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ dir. Bu da $S^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.6. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ için $\limsup_r q_r < \infty$ ise $S_\theta^\alpha \subseteq S$ dir.

İspat. $\limsup_r q_r < \infty$ ise her r için $q_r < H$ olacak şekilde $H > 0$ vardır. $x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ ve $N_r = |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ olduğunu kabul edelim. $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_0$ için

$$\frac{N_r}{h_r^\alpha} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $h_r^\alpha \leq h_r$ olduğundan $\frac{N_r}{h_r} \leq \frac{N_r}{h_r^\alpha}$ olup $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ dur.

$M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ ve n de $k_{r-1} < n \leq k_r$ şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \cdots + N_r\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \cdots + h_r \frac{N_r}{h_r} \right\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \cdots + h_r\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon q_r \leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon H
\end{aligned}$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L(S)$ olup $S_\theta^\alpha \subseteq S$ dir.

Teorem 4.1.7. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r^\alpha}{k_r} > 0$$

ise $S \subseteq S_\theta^\alpha$ dir.

İspat. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq k_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{h_r^\alpha}{k_r} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. $r \rightarrow \infty$ için limit alınır ve $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r^\alpha}{k_r} > 0$ ifadesi kullanılırsa

$$x_k \rightarrow L(S) \Rightarrow x_k \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$$

olur.

Teorem 4.1.8. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için $\liminf_r q_r > 1$ ise $w_p^\alpha \subseteq N_\theta^\alpha(p)$ dir.

İspat. $\liminf_r q_r > 1$ ise her $r \geq 1$ için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $0 < \alpha \leq 1$ ve $x \in w_{p,0}^\alpha$ için

$$\begin{aligned} \tau_r^\alpha &= \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i|^p - \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i|^p \\ &= \frac{k_r^\alpha}{h_r^\alpha} \left(\frac{1}{k_r^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i|^p \right) - \frac{k_{r-1}^\alpha}{h_r^\alpha} \left(\frac{1}{k_{r-1}^\alpha} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i|^p \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğu için

$$\frac{k_r^\alpha}{h_r^\alpha} \leq \frac{(1 + \delta)^\alpha}{\delta^\alpha} \text{ ve } \frac{k_{r-1}^\alpha}{h_r^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha}$$

elde edilir. $\frac{1}{k_r^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i|^p$ ve $\frac{1}{k_{r-1}^\alpha} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i|^p$ terimlerinin her ikisi de 0 a yakınsar ve τ_r^α da 0 a yakınsar. $x \in N_{\theta,0}^\alpha(p)$ dır. Böylece $w_p^\alpha \subseteq N_\theta^\alpha(p)$ dir.

Teorem 4.1.9. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif reel sayısı için $N_\theta^\alpha(p) \subseteq N_\theta^\beta(p)$ dır ve bu kapsama en az bir $\alpha < \beta$ için kesindir.

İspat. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \leq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p$$

yazılabilir. Bu da $N_\theta^\alpha(p) \subseteq N_\theta^\beta(p)$ olduğunu verir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $x \in N_\theta^\beta(p)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin N_\theta^\alpha(p)$ dir.

Teorem 4.1.10. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $S_\theta^\alpha \subseteq S_\theta^\beta$ dır ve bu kapsama en az bir $\alpha < \beta$ için kesindir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz, buradan $S_\theta^\alpha \subseteq S_\theta^\beta$ elde edilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} [\sqrt{h_r}], & k = 1, 2, 3, \dots, [\sqrt{h_r}] \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in S_\theta^\beta$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin S_\theta^\alpha$ dır.

Teorem 4.1.11. $\limsup_r \frac{k_r}{k_{r-1}^\alpha} < \infty$ ise $\alpha \in (0, 1]$ için $N_\theta(p) \subseteq w_p^\alpha$ dır.

İspat. $\limsup_r \frac{k_r}{k_{r-1}^\alpha} < \infty$ ise her $r \geq 1$ için $\frac{k_r}{k_{r-1}^\alpha} < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $x \in N_{\theta,0}(p)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\sup_{i \geq R} \tau_i < \varepsilon$ ve $\tau_i < K$ olacak şekilde $R > 0$ ve $K > 0$ sayılarını bulabiliriz. $k_{r-1} < t \leq k_r$ ve $r > R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^t |x_i|^p &\leq \frac{1}{k_{r-1}^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i|^p = \frac{1}{k_{r-1}^\alpha} \left(\sum_{I_1} |x_i|^p + \sum_{I_2} |x_i|^p + \dots + \sum_{I_r} |x_i|^p \right) \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}^\alpha} \tau_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}^\alpha} \tau_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}^\alpha} \tau_R + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}^\alpha} \tau_{R+1} + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}^\alpha} \tau_r \\ &\leq (\sup_{i \geq 1} \tau_i) \frac{k_R}{k_{r-1}^\alpha} + (\sup_{i \geq R} \tau_i) \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}^\alpha} < K \frac{k_R}{k_{r-1}^\alpha} + \varepsilon M \end{aligned}$$

$k_{r-1} \rightarrow \infty$ iken $t \rightarrow \infty$ olduğundan $\frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^t |x_i| \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece $x \in w_{p,0}^\alpha$ dır.

Teorem 4.1.12. $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $x \in w^\alpha \cap N_\theta^\alpha$ ve $\limsup_r \frac{k_r}{k_{r-1}^\alpha} < \infty$ ise

$$L_{w_p^\alpha}(x) = L_{N_\theta^\alpha}(x) \text{ dir.}$$

İspat. $w_p^\alpha - \lim x_k = L$, $N_{\theta,p}^\alpha - \lim x_k = L'$ ve $L \neq L'$ olsun. $\limsup_r \frac{k_r}{k_{r-1}^\alpha} < \infty$ olduğundan Teorem 4.1.11 den $N_{\theta,0}(p) \subseteq w_{p,0}^\alpha$ olur.

$(x - L') \in N_{\theta,0}(p)$ olduğundan $(x - L') \in w_{p,0}^\alpha$ dır. Bu durumda $p = 1$ için

$$\frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^t |x_i - L'| \rightarrow 0$$

dır.

$$\frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^t |x_i - L'| + \frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^t |x_i - L| \geq \frac{1}{t^\alpha} |L - L'| > 0$$

sol taraftaki her iki terim sıfıra yakınsadığı için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $L = L'$ dür.

Teorem 4.1.13. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere,

$$(i) \lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{h_r^\alpha}{\ell_r^\beta} > 0 \quad (4.1.3)$$

ise $S_{\theta'}^\beta \subseteq S_\theta^\alpha$,

$$(ii) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ell_r}{h_r^\beta} = 1 \quad (4.1.4)$$

ise $S_\theta^\alpha \subseteq S_{\theta'}^\beta$ dır.

İspat. (i) Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve (4.1.3) sağlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in J_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

ve $I_r = (k_{r-1}, k_r]$, $J_r = (s_{r-1}, s_r]$, $h_r = k_r - k_{r-1}$, $\ell_r = s_r - s_{r-1}$ için

$$\frac{1}{\ell_r^\beta} |\{k \in J_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{h_r^\alpha}{\ell_r^\beta} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $r \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.1.3) kullanılırsa $S_{\theta'}^\beta \subseteq S_\theta^\alpha$ olur.

(ii) $x = (x_k) \in S_\theta^\alpha$ olsun ve (4.1.4) sağlansın. $I_r \subset J_r$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^\beta} |\{k \in J_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{\ell_r^\beta} |\{s_{r-1} < k \leq k_{r-1} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&+ \frac{1}{\ell_r^\beta} |\{k_r < k \leq s_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&+ \frac{1}{\ell_r^\beta} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{k_{r-1} - s_{r-1}}{\ell_r^\beta} + \frac{s_r - k_r}{\ell_r^\beta} + \frac{1}{\ell_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{\ell_r - h_r^\beta}{h_r^\beta} + \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\beta} - 1 \right) + \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ell_r}{h_r^\beta} = 1$ ve $x = (x_k) \in S_\theta^\alpha$ olduğundan $S_\theta^\alpha \subseteq S_{\theta'}^\beta$ elde edilir.

Teorem 4.1.13. den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi, $\alpha \in (0,1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun, ve (4.1.3) sağlansın. Bu takdirde

- (i) $S_{\theta'}^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$,
- (ii) $S_{\theta'}^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$,
- (iii) $S_{\theta'}^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$

dır.

Sonuç 4.1.2. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi, $\alpha \in (0,1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun, ve (4.1.4) sağlansın. Bu takdirde

- (i) $S_\theta^\alpha \subseteq S_{\theta'}^\alpha$,
- (ii) $S_\theta^\alpha \subseteq S_{\theta'}^\alpha$,
- (iii) $S_\theta^\alpha \subseteq S_{\theta'}^\alpha$

dır.

Teorem 4.1.14. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere,

(i) (4.1.3) sağlanırsa $N_{\theta'}^\beta(p) \subset N_\theta^\alpha(p)$,

(ii) (4.1.4) sağlansın ve $x \in \ell_\infty$ olsun. O zaman $N_\theta^\alpha(p) \subset N_{\theta'}^\beta(p)$ olur.

İspat. (i) Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.1.3) sağlansın.

$$\frac{1}{\ell_r^\beta} \sum_{k \in J_r} |x_k - L|^p > \frac{h_r^\alpha}{\ell_r^\beta h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p$$

olduğundan $N_{\theta'}^\beta(p) \subset N_\theta^\alpha(p)$ elde edilir.

(ii) $x = (x_k) \in \ell_\infty \cap N_\theta^\alpha(p)$ olsun ve (4.1.4) sağlansın. $x = (x_k) \in \ell_\infty$ olduğundan $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olduğundan $h_r \leq \ell_r$ dir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell_r^\beta} \sum_{k \in J_r} |x_k - L|^p &= \frac{1}{\ell_r^\beta} \sum_{k \in J_r - I_r} |x_k - L|^p + \frac{1}{\ell_r^\beta} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \\ &\leq \left(\frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^\beta} \right) M^p + \frac{1}{\ell_r^\beta} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \\ &\leq \left(\frac{\ell_r - h_r^\beta}{h_r^\beta} \right) M^p + \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \\ &\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\beta} - 1 \right) M^p + \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $\ell_\infty \cap N_\theta^\alpha(p) \subset N_{\theta'}^\beta(p)$.

Sonuç 4.1.3. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi, $\alpha \in (0,1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun. (4.1.3) sağlanırsa,

(i) $N_{\theta'}^\alpha(p) \subseteq N_\theta^\alpha(p)$,

(ii) $N_{\theta'}(p) \subseteq N_\theta^\alpha(p)$,

(iii) $N_{\theta'}(p) \subseteq N_\theta(p)$ dir.

Sonuç 4.1.4. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi, $\alpha \in (0,1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun. (4.1.4) sağlanırsa,

- (i) $\ell_\infty \cap N_\theta^\alpha(p) \subseteq N_{\theta'}^\alpha(p)$,
- (ii) $\ell_\infty \cap N_\theta^\alpha(p) \subseteq N_{\theta'}(p)$,
- (iii) $\ell_\infty \cap N_\theta(p) \subseteq N_{\theta'}(p)$

dir.

Teorem 4.1.15. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, $0 < p < \infty$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun.

(i) (4.1.3) ün sağlanması halinde, bir dizi L ye kuvvetli $N_{\theta'}^\beta(p)$ –toplanabilir ise L ye S_θ^α –istatistiksel yakınsaktır.

(ii) (4.1.4) sağlansın ve $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olsun. Bir dizi L ye S_θ^α –istatistiksel yakınsak ise L ye kuvvetli $N_{\theta'}^\beta(p)$ –toplanabilirdir.

İspat. (i) Her $x = (x_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J_r} |x_k - L|^p &= \sum_{\substack{k \in J_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \in J_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \end{aligned}$$

$$\sum_{k \in J_r} |x_k - L|^p \geq |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_r^\beta} \sum_{k \in J_r} |x_k - L|^p &\geq \frac{1}{\rho_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\ &\geq \frac{h_r^\alpha}{\rho_r^\beta} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \end{aligned}$$

(4.1.3) sağlandığı için $x = (x_k)$ dizisi L ye kuvvetli $N_{\theta'}^{\beta}(p)$ –toplanabilir ise L ye S_{θ}^{α} –istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $S_{\theta}^{\alpha} - \lim x_k = L$ ve $x = (x_k) \in \ell_{\infty}$ olsun. $x \in \ell_{\infty}$ ise $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^{\beta}} \sum_{k \in J_r} |x_k - L|^p &= \frac{1}{\ell_r^{\beta}} \sum_{k \in J_r - I_r} |x_k - L|^p + \frac{1}{\ell_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^{\beta}} \right) M^p + \frac{1}{\ell_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r - h_r^{\beta}}{\ell_r^{\beta}} \right) M^p + \frac{1}{\ell_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\beta}} - 1 \right) M^p + \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\beta}} - 1 \right) M^p + \frac{M^p}{h_r^{\beta}} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \frac{h_r}{h_r^{\beta}} \varepsilon^p \\
&\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\beta}} - 1 \right) M^p + \frac{M^p}{h_r^{\alpha}} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \frac{\ell_r}{h_r^{\beta}} \varepsilon^p
\end{aligned}$$

yazabiliriz. (4.1.4) sağlandığı için $x = (x_k)$ dizisi L ye S_{θ}^{α} –istatistiksel yakınsak ise L ye kuvvetli $N_{\theta'}^{\beta}(p)$ –toplanabilirdir.

Sonuç 4.1.5. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi, $\alpha \in (0,1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun. (4.1.3) sağlanırsa,

$$(i) N_{\theta'}^{\alpha}(p) \subseteq S_{\theta}^{\alpha},$$

$$(ii) N_{\theta'}(p) \subseteq S_{\theta}^{\alpha},$$

$$(iii) N_{\theta'}(p) \subseteq S_{\theta}$$

dır.

Sonuç 4.1.6. $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ iki lacunary dizisi, $\alpha \in (0,1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun. (4.1.4) sağlanırsa,

- (i) $\ell_\infty \cap S_\theta^\alpha \subseteq N_{\theta'}^\alpha(p)$,
- (ii) $\ell_\infty \cap S_\theta^\alpha \subseteq N_{\theta'}(p)$,
- (iii) $\ell_\infty \cap S_\theta \subseteq N_{\theta'}(p)$

dir.

4.2. Orlicz Fonksiyonuyla İlgili Sonuçlar

Bu bölümde bir Orlicz fonksiyonu M ye göre kuvvetli $N_\theta^\alpha(M, (p))$ -toplanabilir dizileri ile S_θ^α -istatistiksel yakınsak dizilerin cümleleri arasındaki kapsama ilişkisini vereceğiz.

Bir $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ Orlicz fonksiyonu sürekli, azalmayan ve $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \rightarrow \infty$ için $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan konveks bir fonksiyondur. Bir Orlicz fonksiyonu M nin

$$M(x) = \int_0^x q(t)dt$$

şeklinde integral formu mevcuttur ve burada q , M nin çekirdeği olup $q(0) = 0$, $t > 0$ için $q(t) > 0$, $t \rightarrow \infty$ için $q(t) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan azalmayan bir fonksiyondur.

Lidenstrauss ve Tzafriri [25], bir M Orlicz fonksiyonunu kullanarak

$$\ell_M = \left\{ x \in w: \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını inşa etmiş ve bu uzayın

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0: \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normuyla bir Banach uzayı olduğunu göstermiştir. Bu uzay Orlicz dizi uzayı adını alır.

$M(x) = |x|^p$, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_M uzayı ℓ_p dizi uzayı ile aynıdır.

Lidenstrauss ve Tzafriri [25], her ℓ_M Orlicz dizi uzayı, $\ell_p (1 \leq p < \infty)$ ye izomorfik bir alt uzay içerdiğini ispatlamışlardır.

M konveks bir fonksiyon ve $M(0) = 0$ ise $\lambda \in (0,1)$ için $M(\lambda x) \leq \lambda M(x)$ dir.

Tanım 4.2.1. M Orlicz fonksiyonu, $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi, $\alpha \in (0,1]$ ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Şimdi

$$N_\theta^\alpha(M, (p)) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ en az bir } L \text{ ve } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

uzayını tanımlayalım. $x \in N_\theta^\alpha(M, (p))$ ise x , Orlicz fonksiyonu M ye göre kuvvetli $N_\theta^\alpha(M, (p))$ –toplanabilirdir denir. $p_k = p (k \in \mathbb{N})$ ve $M(x) = x$ için $N_\theta^\alpha(M, (p))$ yerine $N_\theta^\alpha(p)$ ve $M(x) = x$ özel durumunda $N_\theta^\alpha(M, (p))$ yerine $N_\theta^\alpha((p))$ yazacağız.

Aşağıdaki teoremlerde $p = (p_k)$ sınırlı ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ şartının sağladığı kabul edilecektir.

Teorem 4.2.1. $\alpha, \beta \in (0,1]$ ve $\alpha \leq \beta$ olsun. M bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda $N_\theta^\alpha(M, (p)) \subset S_\theta^\beta$ dır.

İspat. $x \in N_\theta^\alpha(M, (p))$, $\varepsilon > 0$, Σ_1 ve Σ_2 toplamları sırasıyla $k \in I_r$, $|x_k - L| \geq \varepsilon$ ve $k \in I_r$, $|x_k - L| < \varepsilon$ üzerindeki toplamlar olsun. Her bir r için $h_r^\alpha \leq h_r^\beta$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{h_r^\alpha} \left[\sum_1 \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \sum_2 \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right] \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} \left[\sum_1 \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \sum_2 \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right] \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} \sum_1 [M(\varepsilon)]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} \sum_1 \min([M(\varepsilon)]^h, [M(\varepsilon)]^H), \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\rho} \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \min([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H) \end{aligned}$$

elde edilir. $x \in N_\theta^\alpha(M, (p))$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı $r \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar. Böylece sağ tarafı da $r \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsak olup $x \in S_\theta^\beta$ dır.

Sonuç 4.2.1. $\alpha \in (0,1]$, M bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda $N_\theta^\alpha(M, (p)) \subset S_\theta^\alpha$ olur.

Teorem 4.2.2. M bir Orlicz fonksiyonu, $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{h_r^\alpha} = 1$ ise $S_\theta^\alpha \subset N_\theta^\alpha(M, (p))$ dir.

İspat. $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi ve $S_\theta^\alpha - \lim x_k = L$ olsun. $x \in \ell_\infty$ olduğundan $|x_k - L| \leq T$ olacak şekilde bir T sabiti vardır. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_1 \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_2 \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_1 \max \left\{ \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^h, \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^H \right\} + \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_2 \left[M \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \max \{ [M(K)]^h, [M(K)]^H \} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \frac{h_r}{h_r^\alpha} \max \{ [M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \}, \frac{T}{\rho} = K, \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Böylece $x \in N_\theta^\alpha(M, (p))$ elde edilir.

Teorem 4.2.3. $\lim p_k > 0$ ve $x = (x_k)$ dizisi M Orlicz fonksiyonuna göre L ye kuvvetli $N_\theta^\alpha(M, (p))$ -toplantabilir ise $N_\theta^\alpha(M, (p)) - \lim x_k = L$ limiti bir tektir.

İspat. $\lim p_k = s > 0$, $N_\theta^\alpha(M, (p)) - \lim x_k = L$ ve $N_\theta^\alpha(M, (p)) - \lim x_k = L_1$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} = 0, \rho_1 > 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|x_k - L_1|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} = 0, \rho_2 > 0$$

elde edilir. $\rho = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ olsun. M azalmayan ve konveks olduğundan $\sup_k p_k = H$ ve $D = (1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|L - L_1|}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{D}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left(\left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + \left[M \left(\frac{|x_k - L_1|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \right) \\ &\leq \frac{D}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|x_k - L|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + \frac{D}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|x_k - L_1|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|L - L_1|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olup $\lim p_k = s$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|L - L_1|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \left[M \left(\frac{|L - L_1|}{\rho} \right) \right]^s$$

elde edilir. Böylece $L = L_1$ olup limit tektir.

4.3. Modulus Fonksiyonuyla İlgili Sonuçlar

Bu kısımda S_θ^α –istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi ile f modulus fonksiyonuna göre kuvvetli $w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ –toplanabilir dizilerin cümlesi arasındaki ilişki verilecektir.

Modulus fonksiyonu Nakano [26] tarafından tanımlandı. Bir modulus fonksiyonu $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur:

- (i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $x, y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- (iii) f artandır,
- (iv) f sıfır noktasında sağdan süreklidir.

Orlicz fonksiyonunun konvekslik şartı ile modulus fonksiyonunun alt toplamsallığı yer değiştirirse 4.2 deki ve bu bölümdeki sonuçlar denk olur.

Tanım 4.3.1. f bir modulus fonksiyonu, $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ dizi uzayını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$w_{(p)}^\alpha[\theta, f] = \left\{ x = (x_k): \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}.$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ve $f(x) = x$ özel durumunda $w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ yerine $N_\theta^\alpha(p)$ yazacağız.

Aşağıdaki teoremlerde $p = (p_k)$ sınırlı ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olarak kabul edeceğiz.

Teorem 4.3.1. $\alpha, \beta \in (0,1]$ ve $\alpha \leq \beta$ olsun. f bir modulus fonksiyonu ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda $w_{(p)}^\alpha[\theta, f] \subset S_\theta^\beta$ dir.

İspat. $x \in w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$, $\varepsilon > 0$, $\sum_1$ ve $\sum_2$ toplamaları sırasıyla $k \in I_r, |x_k - L| \geq \varepsilon$ ve $k \in I_r, |x_k - L| < \varepsilon$ üzerindeki toplamalar olsun. Her bir r için $h_r^\alpha \leq h_r^\beta$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} &= \frac{1}{h_r^\alpha} [\sum_1 [f(|x_k - L|)]^{p_k} + \sum_2 [f(|x_k - L|)]^{p_k}] \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} [\sum_1 [f(|x_k - L|)]^{p_k} + \sum_2 [f(|x_k - L|)]^{p_k}] \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} \sum_1 [f(\varepsilon)]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} \sum_1 \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \end{aligned}$$

elde edilir. $x \in w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı $r \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar. Böylece sağ tarafı da $r \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsak olup $x \in S_\theta^\beta$ dir.

Teorem 4.3.2. f modulus fonksiyonu sınırlı ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{h_r^\alpha} = 1$ ise $S_\theta^\alpha \subset w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ dir.

İspat. f sınırlı, $x \in S_\theta^\alpha$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. f sınırlı olduğundan $f(x) \leq K$ olacak şekilde bir K tamsayısı vardır. Her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} &= \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_1 [f(|x_k - L|)]^{p_k} + \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_2 [f(|x_k - L|)]^{p_k} \\ &\leq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_1 \max(K^h, K^H) + \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_2 [f(\varepsilon)]^{p_k} \\ &\leq \max(K^h, K^H) \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : f(|x_k - L|) \geq \varepsilon\}| + \frac{h_r}{h_r^\alpha} \max(f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H). \end{aligned}$$

Böylece $x \in w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ elde edilir.

Teorem 4.3.3. $\lim p_k > 0$ ve $x = (x_k)$ dizisi f modulus fonksiyonuna göre L ye kuvvetli $w_{(p)}^\alpha[\theta, f]$ -toplanabilir ise $w_{(p)}^\alpha[\theta, f] - \lim x_k = L$ limiti bir tektir.

İspat. $\lim p_k = s > 0$, $w_{(p)}^\alpha[\theta, f] - \lim x_k = L$ ve $w_{(p)}^\alpha[\theta, f] - \lim x_k = L_1$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_1|)]^{p_k} = 0$$

elde edilir. f artan ve $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ olduğundan $\sup_k p_k = H$ ve $D = (1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|L - L_1|)]^{p_k} &\leq \frac{D}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} ([f(|x_k - L|)]^{p_k} + [f(|x_k - L_1|)]^{p_k}) \\ &\leq \frac{D}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} + \frac{D}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_1|)]^{p_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} [f(|L - L_1|)]^{p_k} = 0$$

olup $\lim p_k = s$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(|L - L_1|)]^{p_k} = [f(|L - L_1|)]^s$$

elde edilir. Böylece $L = L_1$ olup limit tektir.

5. α . DERECEDEDEN I -YAKINSAKLIK

Bu bölümde α . dereceden $(\succ, I)$ - istatistiksel yakınsaklık tanımlanacak ve α . dereceden $(V, \succ, I)$ - istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişki incelenecektir. I -yakınsaklık Kostyrko ve diğerleri [22, 23], Savaş ve diğerleri [30-32], Salat ve diğerleri [33] ve Gümüş [34] tarafından çalışıldı.

5.1. α . Dereceden $(\succ, I)$ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.1.1. $x \in w$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $\varepsilon, \delta > 0$ verilsin.

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye α . dereceden I -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $S^\alpha(I) - \lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S^\alpha(I))$ şeklinde gösterilir. α . dereceden tüm I -istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi $S^\alpha(I)$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.2. $\succ \in \Lambda$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $I_n = [n - \succ_n + 1, n]$ ve $\succ_n^\alpha, \succ_n$ nin α kuvveti yani $\succ^\alpha = (\succ_n^\alpha) = (\succ_1^\alpha, \succ_2^\alpha, \succ_3^\alpha, \dots, \succ_n^\alpha, \dots)$ olmak üzere

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\succ_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye α . dereceden $(\succ, I)$ - istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklığı $S_\succ^\alpha(I) - \lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\succ^\alpha(I))$ ile göstereceğiz. α . dereceden tüm $(\succ, I)$ - istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini $S_\succ^\alpha(I)$ ile gösterelim. $(\succ_n) = (n)$ alınırsa $S_\succ^\alpha(I)$ yerine $S^\alpha(I)$ yazacağız. Bu tanımda $(\succ_n) = (n)$ ve $\alpha = 1$ alınırsa Savaş ve Das [30] tarafından verilen I -istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

α . dereceden $(\succ, I)$ - istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlıdır, fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir.

$x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 2, & k = 3n \\ 0, & k \neq 3n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. $\varepsilon > 0$ ve $\alpha > 1$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - 2| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{[\lambda_n] + 1}{3 \lambda_n^\alpha}$$

olduğundan

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - 2| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \subset \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{[\lambda_n] + 1}{3 \lambda_n^\alpha} \geq \delta\right\} \in I$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{2([\lambda_n] + 1)}{3 \lambda_n^\alpha}$$

olduğundan

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \subset \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{2([\lambda_n] + 1)}{3 \lambda_n^\alpha} \geq \delta\right\} \in I$$

elde edilir. Böylece $x = (x_k)$ dizisi hem 2 ye hem de 0 a α . dereceden (λ, I) - istatistiksel yakınsaktır. Yani $S_\lambda^\alpha(I) - \lim x_k = 2$ ve $S_\lambda^\alpha(I) - \lim x_k = 0$ olup bu mümkün değildir.

Teorem 5.1.1. $S_\lambda^\alpha(I)$ -yakınsak herhangi bir dizinin $S_\lambda^\alpha(I)$ -limiti tektir.

İspat. Kabul edelim ki x dizisinin L_1 ve L_2 gibi iki tane $S_\lambda^\alpha(I)$ -limiti var ve $L_1 \neq L_2$ olsun. $F(I)$, I tarafından üretilen süzgeç olmak üzere

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L_1| \geq \varepsilon\}| < \frac{\delta}{2} \right\} \in F(I)$$

ve

$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L_2| \geq \varepsilon\}| < \frac{\delta}{2} \right\} \in F(I)$$

yazılabilir.

Bu durumda $A_1 \cap A_2 \in F(I)$ olup $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ dır.

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - L_2 + x_k - x_k| \leq |x_k - L_1| + |x_k - L_2|$$

olduğundan $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |L_1 - L_2| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L_1| \geq \varepsilon\}| + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L_2| \geq \varepsilon\}| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

olur ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $L_1 = L_2$ olmalıdır.

Teorem 5.1.2. $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $S_\lambda^\alpha(I) \cap \ell_\infty$ cümlesi ℓ_∞ un kapalı alt cümlesidir.

İspat. İspatı Savaş ve Das [30] tarafından Teorem 2.4 de verilen teoremin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 5.1.3. $\alpha \in (0,1]$, $0 < p < \infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise x dizisi L ye α . dereceden kuvvetli (V, λ, I) -yakınsaktır denir. x dizisi L ye α . dereceden kuvvetli (V, λ, I) -yakınsak ise $x_k \rightarrow L \left(w_{\lambda, p}^\alpha(I) \right)$ yazarız. L ye α . dereceden kuvvetli (V, λ, I) -yakınsak dizilerin cümlesini $w_{\lambda, p}^\alpha(I)$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.1.3. $\alpha \in (0,1]$ olsun. $w_{\lambda, p}^\alpha(I) \subseteq S_\lambda^\alpha(I)$ olup bu kapsama kesindir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L \left(w_\lambda^\alpha(I) \right)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \geq \sum_{k \in I_n, |x_k - L| \geq \varepsilon} |x_k - L|^p \geq \varepsilon^p |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

ve böylece

$$\frac{1}{\varepsilon^p \lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \geq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olur. Her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \geq \varepsilon^p \delta \right\} \in I$$

dir.

$w_{\lambda, p}^\alpha(I) \subseteq S_\lambda^\alpha(I)$ kapsamasının kesin olduğunu $\lambda = (n)$ olarak gösterelim.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

olduğundan $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} \geq \delta\right\}$$

olur. Sağ taraf sonlu cümle olduğundan I ya aittir. $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x_k \rightarrow 0(S_\lambda^\alpha(I))$ dir.

Diğer taraftan $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için

$$\frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k|^p = \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - 0|^p$$

dir.

$$\{m, m+1, m+2, \dots\} = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha} \geq 1\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k|^p \geq 1\right\}$$

bazı $m \in \mathbb{N}$ için I gerçekte ideal olduğundan $F(I)$ ya aittir. Böylece $x_k \rightarrow 0 \left(w_{\lambda, p}^\alpha(I) \right)$ olur.

Teorem 5.1.4. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $S_\lambda^\alpha(I) \subseteq S_\lambda^\beta(I)$ olup ve bu kapsama en az bir $\alpha < \beta$ için kesindir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\beta} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Böylece

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\beta} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

olup $S_\lambda^\alpha(I) \subseteq S_\lambda^\beta(I)$ elde edilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases} , n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in S_\lambda^\beta(I)$, fakat $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin S_\lambda^\alpha(I)$ dır.

Sonuç 5.1.1. Bir dizi L ye $S_\lambda^\alpha(I)$ -yakınsak ise L ye $S_\lambda(I)$ -yakınsaktır.

Teorem 5.1.5. $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k), y = (y_k)$ kompleks sayıların dizileri olsun.

- i) $S_\lambda^\alpha(I) - \lim x_k = x_0$ ve $S_\lambda^\alpha(I) - \lim y_k = y_0$ ise $S_\lambda^\alpha(I) - \lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$,
- ii) $S_\lambda^\alpha(I) - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_\lambda^\alpha(I) - \lim(cx_k) = cx_0$,

İspat. i) $S_\lambda^\alpha(I) - \lim x_k = x_0$ ve $S_\lambda^\alpha(I) - \lim y_k = y_0$ olsun.

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| < \frac{\delta}{2} \right\} \in F(I)$$

$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| < \frac{\delta}{2} \right\} \in F(I)$$

olup $A_1, A_2 \in F(I) \Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. $\forall n \in A_1 \cap A_2$ için

$$|(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| = |(x_k - x_0) - (y_k - y_0)| \leq |x_k - x_0| + |y_k - y_0|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

olup $\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| < \delta \right\} \in F(I)$ olur. Böylece

$S_\infty^\alpha(I) - \lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$ elde edilir.

ii) $S_\infty^\alpha(I) - \lim x_k = x_0$ ve $c \in$ olsun. $\forall n \in A_1$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |cx_k - cx_0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right| < \frac{\delta}{2}$$

olduğundan $S_\infty^\alpha(I) - \lim(cx_k) = cx_0$ elde edilir.

Önerme 5.1.1. $S_\infty^\alpha(I) - \lim x_k = x_0$, $S_\infty^\alpha(I) - \lim y_k = y_0$ ve $x \in \ell_\infty$ ise $S_\infty^\alpha(I) - \lim(x_k y_k) = x_0 y_0$ dır.

İspat. $S_\infty^\alpha(I) - \lim x_k = x_0$, $S_\infty^\alpha(I) - \lim y_k = y_0$ ve $x \in \ell_\infty$ olsun. $x \in \ell_\infty$ olduğundan $|x_k| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $\forall n \in A_1 \cap A_2$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k y_k - x_0 y_0| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k y_k - x_0 y_0 + x_k y_0 - x_k y_0| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k(y_k - y_0) + y_0(x_k - x_0)| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k(y_k - y_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |y_0(x_k - x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2|x_k|} > \frac{\varepsilon}{2M} \right\} \right| + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2|y_0|} \right\} \right| \\
&< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta
\end{aligned}$$

dır. Bu ispatı tamamlar.

Önerme 5.1.2. $K \in F(I)$ olmak üzere $x_k \leq y_k \leq z_k$ olacak şekilde $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve $z = (z_k)$ reel sayı dizileri mevcut olsun. Bu durumda $x_k \rightarrow L(S_\infty^\alpha(I))$ ve $z_k \rightarrow L(S_\infty^\alpha(I))$ ise $y_k \rightarrow L(S_\infty^\alpha(I))$ olur.

İspat. $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $K \in F(I)$ ve her $n \in K$ için

$$B_x = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| < \delta \right\},$$

$$B_y = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| < \delta \right\},$$

$$B_z = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |z_k - L| \geq \varepsilon\}| < \delta \right\}$$

tanımlayalım. O zaman $B_x \cap B_z \cap K \subseteq B_y$, ve böylece $B_y \in F(I)$ olur. Buradan da $y_k \rightarrow L(S_\infty^\alpha(I))$ elde edilir.

Teorem 5.1.6. $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $S(I) \subseteq S_\infty^\alpha(I)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n^\alpha}{n} > 0 \tag{5.1.1}$$

olmasıdır.

İspat. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n^\alpha}{n} > 0$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{\lambda_n^\alpha}{n} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \frac{\lambda_n^\alpha}{n}\right\}$$

olup $S(I) \subseteq S_\infty^\alpha(I)$ olur.

Tersine $S(I) \subseteq S_\infty^\alpha(I)$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n^\alpha}{n} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$\frac{\lambda_{n(j)}^\alpha}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir $(n(j))_{j=1}^\infty$ alt dizisi bulabiliriz. $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}, j = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. $x \in S(I)$ fakat $x \notin S_\infty(I)$ dir. Sonuç 5.1.1 den $S_\infty^\alpha(I) \subseteq S_\infty(I)$ olduğundan $x \notin S_\infty^\alpha(I)$ elde edilir. Böylece 5.1.1 sağlanır.

Teorem 5.1.7. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif reel sayısı için $w_{\lambda,p}^\alpha(I) \subseteq w_{\lambda,p}^\beta(I)$ dir ve bu kapsama en az bir $\alpha < \beta$ için kesindir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p$$

yazılabilir. Bu da $w_{\lambda,p}^\alpha(I) \subseteq w_{\lambda,p}^\beta(I)$ olduğunu verir. Kapsamanın bazı α ve β lar için kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1 & , k = n^2 \\ 0 & , \text{diğer durumda} \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in w_{\lambda,p}^\beta(I)$, fakat $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin w_{\lambda,p}^\alpha(I)$ dir.

Teorem 5.1.8. $\lambda, \mu \in \Lambda$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olsun. α ve β sayıları, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Bu takdirde

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} > 0 \quad (5.1.2)$$

ise $S_\mu^\beta(I) \subseteq S_\times^\alpha(I)$,

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} = 1 \quad (5.1.3)$$

ise $S_\times^\alpha(I) \subseteq S_\mu^\beta(I)$

dır.

İspat. (i) Her $n \in \mathbb{N}$ için (5.1.2) sağlansın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan $I_n = [n - \lambda_n + 1, n] \subset J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olup, $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olup

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} \right\} \in I$$

elde edilir. (5.1.2) kullanılırsa $S_\mu^\beta(I) \subseteq S_\times^\alpha(I)$ olur.

(ii) $x = (x_k) \in S_\times^\alpha(I)$ olsun ve (5.1.3) sağlansın. Bu durumda

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

dır.

$I_n \subset J_n$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{n - \mu_n + 1 < k \leq n - \lambda_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^\beta} + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - \frac{\lambda_n^\beta}{\lambda_n^\beta} \right) + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1 \right) + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

olup

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} = 1$ ve $x = (x_k) \in S_\times^\alpha(I)$ olduğundan $S_\times^\alpha(I) \subseteq S_\mu^\beta(I)$ dır.

Teorem 5.1.8. den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.2. $\lambda, \mu \in \Lambda, \alpha \in (0,1]$ olsun ve (5.1.2) sağlansın. Bu takdirde

- (i) $S_\mu^\alpha(I) \subseteq S_\times^\alpha(I)$,
- (ii) $S_\mu(I) \subseteq S_\times(I)$,
- (iii) $S_\mu(I) \subseteq S_\lambda(I)$.

Sonuç 5.1.3. $\lambda, \mu \in \Lambda, \alpha \in (0,1]$ olsun ve (5.1.3) sağlansın. Bu takdirde

- (i) $S_\times^\alpha(I) \subseteq S_\mu^\alpha(I)$,
- (ii) $S_\times(I) \subseteq S_\mu(I)$,
- (iii) $S_\lambda(I) \subseteq S_\mu(I)$.

Teorem 5.1.9. $\lambda, \mu \in \Lambda$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olsun. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Bu takdirde

(i) (5.1.2) sağlanırsa $w_{\mu,p}^\beta(I) \subset w_{\lambda,p}^\alpha(I)$,

(ii) (5.1.3) sağlansın ve $x \in \ell_\infty$ olsun. Bu durum da $w_{\lambda,p}^\alpha(I) \subset w_{\mu,p}^\beta(I)$

dır.

İspat. (i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \subset J_n$ olsun ve (5.1.2) sağlansın.

$$\frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p > \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta \lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p$$

olduğundan

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p \geq \delta \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} \right\} \in I$$

olup $w_{\mu,p}^\beta(I) \subset w_{\lambda,p}^\alpha(I)$ elde edilir.

(ii) $x = (x_k) \in \ell_\infty \cap w_{\lambda,p}^\alpha(I)$ olsun ve (5.1.3) sağlansın. $x = (x_k) \in \ell_\infty$ olduğundan $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $x = (x_k) \in w_{\lambda,p}^\alpha(I)$ olduğundan $\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \geq \delta \right\} \in I$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p &= \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n - I_n} |x_k - L|^p + \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \\ &\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^\beta} \right) M^p + \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \\ &\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n^\beta}{\lambda_n^\beta} \right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \\ &\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1 \right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \geq \delta \right\} \in I$$

elde edilir. Böylece $\ell_\infty \cap w_{\lambda,p}^\alpha(I) \subset w_{\mu,p}^\beta(I)$.

Sonuç 5.1.4. $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, $\wedge$ de $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\alpha \in (0,1]$ için (5.1.2) sağlanırsa,

- (i) $w_{\mu,p}^\alpha(I) \subset w_{\lambda,p}^\alpha(I)$,
- (ii) $w_{\mu,p}(I) \subset w_{\lambda,p}^\alpha(I)$,
- (iii) $w_{\mu,p}(I) \subset w_{\lambda,p}(I)$.

Sonuç 5.1.5. $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, $\wedge$ de $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\alpha \in (0,1]$ için (5.1.3) sağlanırsa,

- (i) $\ell_\infty \cap w_{\lambda,p}^\alpha(I) \subseteq w_{\mu,p}^\alpha(I)$,
- (ii) $\ell_\infty \cap w_{\lambda,p}^\alpha(I) \subseteq w_{\mu,p}(I)$,
- (iii) $\ell_\infty \cap w_{\lambda,p}(I) \subseteq w_{\mu,p}(I)$.

Teorem 5.1.10. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, $0 < p < \infty$ ve $\lambda, \mu \in \wedge$ olsun.

- (i) (5.1.2) sağlansın. Bir dizi L ye kuvvetli $w_{\mu,p}^\beta(I)$ –toplanabilir ise L ye $S_\lambda^\alpha(I)$ –istatistiksel yakınsaktır.
- (ii) (5.1.3) sağlansın ve $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olsun. Bir dizi L ye $S_\lambda^\alpha(I)$ –istatistiksel yakınsak ise L ye kuvvetli $w_{\mu,p}^\beta(I)$ –toplanabildir.

İspat. (i) $x \in w_{\mu,p}^\beta(I)$ olsun, $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p \geq \delta \right\} \in I$$

olup

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p &= \sum_{\substack{k \in J_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \in J_n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\geq |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p &\geq \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\
&\geq \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p \geq \delta \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} \varepsilon^p \right\} \in I$$

elde edilir. (5.1.2) sağlandığı için $x = (x_k)$ dizi L ye kuvvetli $w_{\mu,p}^\beta(I)$ –toplanabilir ise L ye $S_\lambda^\alpha(I)$ –istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $S_\lambda^\alpha(I)$ – $\lim x_k = L$ ve $x = (x_k) \in \ell_\infty$ olsun. Bu takdirde $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır ve

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

dır.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p &= \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n - I_n} |x_k - L|^p + \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^\beta} \right) M^p + \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n^\beta}{\mu_n^\beta} \right) M^p + \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1 \right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1 \right) M^p + \frac{M^p}{\lambda_n^\beta} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \frac{\lambda_n}{\lambda_n^\beta} \varepsilon^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1 \right) M^p + \frac{M^p}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} \varepsilon^p
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} |x_k - L|^p \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\delta}{M^p} \right\} \in I$$

yazabiliriz. (5.1.3) sağlandığı için $x = (x_k)$ dizisi L ye $S_\lambda^\alpha(I)$ –istatistiksel yakınsak ise L ye kuvvetli $w_{\mu,p}^\beta(I)$ –toplanabiliridir.

Sonuç 5.1.6. $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, $\wedge$ de $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\alpha \in (0,1]$ için (5.1.2) sağlanırsa,

- (i) $w_{\mu,p}^\alpha(I) \subseteq S_\lambda^\alpha(I)$,
- (ii) $w_{\mu,p}(I) \subseteq S_\lambda^\alpha(I)$,
- (iii) $w_{\mu,p}(I) \subseteq S_\lambda(I)$.

Sonuç 5.1.7. $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, $\wedge$ de $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\alpha \in (0,1]$ için (5.1.3) sağlanırsa,

$$(i) \ell_\infty \cap S_\lambda^\alpha(I) \subseteq w_{\mu,p}^\alpha(I),$$

$$(ii) \ell_\infty \cap S_\lambda^\alpha(I) \subseteq w_{\mu,p}(I),$$

$$(iii) \ell_\infty \cap S_\lambda(I) \subseteq w_{\mu,p}(I).$$

6. SONUÇ

Bu tezde, Steinhaus [11] ve Fast [12] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı, $0 < \alpha \leq 1$ ve $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi kullanılarak S_θ^α (α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı) uzayına genelleştirildi. Ayrıca p bir pozitif reel sayı olmak üzere kuvvetli p -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı, $N_\theta^\alpha(p)$ uzayına genelleştirilerek $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ gibi iki lacunary dizisi alınması durumunda bu uzaylar arasındaki kapsama ilişkileri verildi. İdeal yakınsaklık kullanılarak, $0 < \alpha \leq 1$ ve $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi için λ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S_\lambda^\alpha(I)$ uzayına ve (V, λ) -toplanabilir dizilerin uzayı $w_\lambda^\alpha(I)$ uzayına genelleştirildi. $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ dizileri göz önüne alınarak çeşitli şartlar altında bu uzaylar arasındaki kapsama ilişkileri elde edildi.

KAYNAKLAR

- [1] **Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [2] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [3] **Curtain, R. F. and Pritchard, A. J.**, 1977. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press, London.
- [4] **Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M.**, 1978. Some Cesaro-type Summability Spaces, Proc. Lond. Math. Soc., (3) 37, 508-520.
- [5] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, *Math. Z.*, 118, 93-102.
- [6] **Fridy, J.**, 1985. On Statistical Convergence, *Analysis* 5, 301-313.
- [7] **Niven, I., Zucherman, H. S. and Montgomery, H. L.**, 1991. An Introduction to The Theory of Numbers. *Fifth Ed.*, John Wiley, New York.
- [8] **Fridy, J. A. and Orhan, C.**, 1993. Lacunary Statistical Convergence, *Pacific J. Math.* **160** (1) 43-51.
- [9] **Connor, J. S.**, 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences, *Analysis* **8**, 47-63.
- [10] **Zygmund, A.**, 1979. Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [11] **Steinhaus, H.**, 1951. Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, **2**, 73-74.
- [12] **Fast, H.**, 1951. Sur La Convergence Statistique, *Colloq. Math.*, **2**, 241-244.

- [13] **Schoenberg, I. J.**, 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, *Amer. Math. Monthly*, **66**, 361-375.
- [14] **Savaş, E.**, 2000. Strong Almost Convergence and Almost $\times$ -Statistically Convergence, *Hokkaido Math. Jour.* **29**, 531-536.
- [15] **Mursaleen, M.**, 2000. $\times$ –Statistical Convergence, *Math. Slovaca*, **50**, No. 1, 111-115.
- [16] **Moricz, F.**, 2003. Statistical Convergence of Multiple Sequences, *Arch. Math.*, **81**, 82-89.
- [17] **Rath, D. And Tripathy, B. C.**, 1994. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, **25(4)**, 381-386.
- [18] **Šalát, T.**, 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, *Math. Slovaca*, **30**, 139-150.
- [19] **Bhardwaj, V. K., Bala, I.**, 2007. On Weak Statistically Convergence, *Int. J. Math. and Math. Sci.* Vol. Article ID 38530.
- [20] **Çolak, R.**, 2010. Statistical Convergence of Order α , *Modern Methods in Analysis and its Applications*, Anamaya Publ. New Delhi, India, 121-129.
- [21] **Gadjiev, A. D. and Orhan, C.**, 2002. Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence, *Rocky Mountain J. Math.*, **32(1)**, 129-138.
- [22] **Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T.**, 2000. Statistical Convergence and I -Convergence, *The international mathematical scientific conference, 16th Summer School on Real Functions Theory*.
- [23] **Kostyrko, P., Šalát, T., Wilezyński, W.**, 2000. I -Convergence, *Real Analysis Exchange*, Vol. **26(2)**, 669-680.
- [24] **Fridy, J. A. and Orhan, C.**, 1993. Lacunary Statistical Summability, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (2) 497-504.

- [25] **Lidenstrauss, J., Tzafriri, T.**, 1971. On Orlicz Sequence Spaces, *Israel J. Math.* **10**, 379-390.
- [26] **Nakano, H.**, 1951. Modular Sequence Spaces, *Proc. Japan Acad.* **27**, 508-512.
- [27] **Mursaleen, M.**, 2000. λ -Statistical Convergence. *Math. Slovaca*, **50**(1): 111-115.
- [28] **Çolak, R.**, 2011. On λ –Statistical Convergence, *Conference on Summability and Applications*, Commerce University, May 12-13, Istanbul, Turkey.
- [29] **Çolak, R. and Bektaş, Ç. A.**, 2011. On λ –Statistical Convergence of Order α , *Acta Math. Sci.*, **31**(3), 953-959.
- [30] **Savaş, E. and Das, P.**, 2011. A Generalized Statistical Convergence Via Ideals, *Appl. Math. Lett.* **24**(6), 826-830.
- [31] **Das, P., Savaş, E. and Ghosal, S. Kr.**, 2011. On Generalizations of Certain Summability Methods Using Ideals, *Appl. Math. Lett.* **24**(9), 1509-1514.
- [32] **Savaş, E., Das, P. and Dutta, S.**, 2012. A Note on Strong Matrix Summability Via Ideals, *Appl. Math. Lett.* **25**(4), 733-738.
- [33] **Šalát, T., Tripathy, B. C. and Ziman, M.**, 2004. On Some Properties of I-Convergence, *Tatra Mt. Math. Publ.* **28**(2), 279-286.
- [34] **Gümüş, H.**, 2011. Fark Dizilerinin I-Yakınsaklığı ve Asimptotik I-Denkliği, *Afyon Kocatepe Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü*.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Hacer ŞENGÜL
Doğum Yeri ve Yılı : MALATYA / 1986
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (2004-2008)
Mezuniyet Derecesi : Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Birinciliği
Yüksek Lisans : Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi (2008-2010)
Pedagojik Formasyon : İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi (2010-2011)
Doktora : Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi (2010-2013)