

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



FOLNER DİZİLERİNİN
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Resul Ahmet TELÇEKEN

Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Temmuz - 2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOLNER DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Resul Ahmet TELÇEKEN
(131121107)

Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof.Dr. Mikail ET

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.06.2016

Temmuz - 2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOLNER DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Resul Ahmet TELÇEKEN
(131121107)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.06.2016

Tezin Savunulduğu Tarih: 11.07.2016

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Mikail ET (Fırat Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Hikmet KEMALOĞLU

Yrd.Doç.Dr. Muhammed ÇINAR

Temmuz - 2016

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde daima yanımda olan her konuda yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET' e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca karşılaştığımız problemlerde tartışmalarıyla desteğini bizden esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Yavuz ALTIN ve Doç Dr. Hıfı ALTINOK a a teşekkürlerimi sunarım.

Resul Ahmet TELÇEKEN

Elazığ-2016



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	5
2.1. Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık	5
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik	8
3. FOLNER DİZİLERİ	11
3.1. Folner Dizilerinde İstatistiksel Yakınsaklık	11
4.FOLNER DİZİLERİNİN ASİMPOTOTİK VE İSTATİSTİKSEL DENKLİĞİ	17
4.1 Asimptotik Denklik	17
4.2 İstatistiksel Denklik	17
5. α . DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	21
5.1 α . Dereceden yoğunluk	21
5.2 Temel Sonuçlar	23
6.FOLNER DİZİLERİNİN α . DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE α . DERECEDEDEN KUVVETLİ p -CESARO TOPLANABİLİRLİĞİ	27
6.1 Folner Dizilerinin α . Dereceden Yoğunluğu	27
6.2 Folner Dizilerinin α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı	28
6.3 Folner Dizilerinin α . Dereceden Kuvvetli p -Cesàro Toplanabilirliği ...	30
6.4 Folner Dizilerinin α . Dereceden Kuvvetli p -Cesàro Toplanabilirliği ve α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı Arasındaki İlişki	31
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ	35

ÖZET

FOLNER DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bazı içermeye teoremleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Folner dizilerinin kavramı, Folner dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Folner dizilerinin asimptotik ve istatistiksel denklik kavramları incelenmiştir.

Beşinci bölümde α . dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenmiştir.

Altıncı bölümde Folner dizilerinin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Folner dizisi.

SUMMARY

FOLNER SEQUENCES OF STATISTICAL CONVERGENCE

In the first chapter of this thesis that consists of four chapters, we give some fundamental definitions and theorems.

In the second chapter, we give the concepts of statistical convergence and some inclusion theorems.

In the third chapter, we give some kinds of convergence defined by Folner sequences and theorems.

In the four chapter, we give asymptotically and statistically equivalent functions defined.

In the five chapter, we give statistical convergence of order α defined and theorems.

In the six chapter, we give statistical convergence of order α of Folner sequences.

Keywords: Statistical convergence, Cesàro summability, Folner sequences.

SİMGELER LİSTESİ

- $\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi
 $\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi
 $\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi
 w : $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
 $\delta(E)$: E 'nın doğal yoğunluğu
 S : İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
 S^α : α . dereceden istatistiksel yakınsak diziler uzayı
 $h.h.k$: Hemen hemen her k için



1. GİRİŞ

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 1.1.1 X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

$$L1) x + y = y + x$$

$$L2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L3) \forall x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$L4) \text{ Herbir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } -x \in X \text{ vardır.}$$

$$L5) 1.x = x$$

$$L6) \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$L7) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$L8) \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \text{ dir [1].}$$

Tanım 1.1.2 X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow K$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay adı verilir.

$$N1) \|x\| \geq 0, (x \in X)$$

$$N2) \|x\| = 0 \iff x = \theta, (x \in X)$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, (\alpha \in K, x \in X)$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (x, y \in X) \text{ dir [1].}$$

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzaydan alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya, *Banach uzayı* adı verilir.

Kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz. w ; $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır dizilerinin uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k| \quad (1.1)$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Teorem 1.1.3 Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y ' nin X ' de kapalı olmasıdır [1].

Teorem 1.1.4 (X, d) bir metrik uzay, $M \subset X$ ve $\overline{M}$, M ' nin kapanışını gösterebilir. Bu durumda $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde M ' de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır [1].

Tanım 1.1.5 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik (X, d) ye de bir metrik uzay denir.

(M1) d , reel değerli, sonlu ve negatif olmayan,

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri),

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği) olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere, bir (X, d) çifti olarak tanımlanır.[1]

Tanım 1.1.6 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve r pozitif bir reel sayı olsun. x merkezli r yarıçaplı bir *açık yuvar*, X 'in x 'e uzaklıkları r 'den daha küçük olan bütün noktalarından meydana gelen

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır [1].

Tanım 1.1.7 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve r pozitif bir reel sayı olsun. x merkezli r yarıçaplı bir *kapalı yuvar*, X 'in x 'e uzaklıkları r 'den daha küçük ya da eşit olan bütün noktalarından meydana gelen

$$B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

[1].

Tanım 1.1.8 Bir X metrik uzayı ve bunun bir M altcümlesini gözönüne alalım. Eğer M cümlesi her bir noktasının etrafında bir yuvar içeriyorsa M cümlesine açıktır denir. A, X cümlesinin bir alt cümlesi olsun. Eğer, A cümlesinin X 'deki tümleyeni, yani

$$A^c = X - A$$

açık ise A cümlesine kapalıdır denir [1].

Tanım 1.1.9 X bir metrik uzay ve A, X 'in bir alt cümlesi olsun. X 'in A 'yı içeren kapalı cümlelerinin en küçüğüne A 'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.10 Bir X metrik uzayının bir M alt cümlesi verildiğinde $\overline{M} = X$ ise, M cümlesine X 'de yoğundur denir. Eğer M uzayı X 'de yoğun, sayılabilir bir alt cümleye sahipse ayrılabilir denir [1].

Tanım 1.1.11 Bir (X, d) metrik uzayında bir (x_n) dizisi göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir [1].

Tanım 1.1.12 Bir (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve S , X nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{B(x; \varepsilon) \setminus \{x\}\} \cap S \neq \emptyset$$

oluyorsa $x \in X$ noktasına S nin bir yığılma (accumulation, cluster) noktası denir [1].

Tanım 1.1.13 $\mathbb{Z}^n$ in boştan farklı alt kümelerinin bir dizisi $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ olsun. Her $v \in \mathbb{Z}^n$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_j \cap (F_j + v)|}{|F_j|} = 1$$

ise $\mathcal{F}$ dizisine Folner dizisi denir [11].

Tanım 1.1.14 (Sağ-Sol Kısaltma Özelliği) $(G, *)$ bir grup ise $\forall a, b, c \in G$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $a * b = a * c \Leftrightarrow a = c$ ve
- ii) $a * c = b * c \Leftrightarrow a = b$ dir [15].

Tanım 1.1.15 S boş olmayan bir küme ve $*$, S üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. $(S, *)$ yapısı S üzerinde $*$ işlemi birleşme özelliğine sahip ise buna yarı-grup denir [15].

Tanım 1.1.16 G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısına aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

- 1) $*$, G de bir ikili işlemdir.
- 2) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Birleşme Özelliği).
- 3) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır. (Birim Eleman).
- 4) $\forall a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ vardır. (Ters Eleman Özelliği) [15].

Tanım 1.1.17 Γ bir grup, her $s \in \Gamma$ ve $f \in l^{\infty}(\Gamma)$ için $\mu(s.f) = \mu(f)$ kuralı altındaki μ ye amenable denir [17].

2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık tanımı Fast [2] tarafından kısa bir not olarak verildi. Schoenberg [3] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini verdi. Her iki matematikçi de sınırlı, istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesàro toplanabilir olduğunu ifade ettiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Buck [4], Connor [5], Šalát [6], Fridy [7], Nuray ve Rhoades[12], Fridy[13] ve Orhan[14] tarafından çalışıldı.

2.1 Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bir $E \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $x \in \mathbb{N}$ cümlesine ait bir x sayısına eşit ya da x ' den daha küçük olan bütün pozitif tamsayıların sayısı $E(x)$ ile gösterilsin. Örneğin bir E cümlesi $2, 4, 6, \dots$ çift tamsayılarından oluşuyorsa $E(1) = 0$, $E(2) = 1$, $E(6) = 3$, $E(7) = 3$, $E(15/2) = 3, \dots$ dır. Gerçekten $x \geq 0$ ise $E(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ dir. Diğer taraftan $a_j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $E = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ cümlesi için $E(a_j) = j$ ' dir.

Tanım 2.1.1 Bir E cümlesinin asimptotik yoğunluğu

$$\delta_1(E) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n)}{n}$$

olarak tanımlanır. $(E(n)/n)$ dizisi bir limite sahip ise E cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\delta(E) = 0$ ise E cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir [7].

Teorem 2.1.2 Her bir n için $a_n \in \mathbb{N}$ ve $(a_n) \rightarrow +\infty$ olmak üzere, $E = (a_n)$ ise bu taktırde;

$$\delta_1(E) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$$

dır. Eğer $\delta(E)$ mevcut ise,

$$\delta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$$

dır [8].

İspat. $\left(\frac{k}{a_k}\right)$ dizisi $\left(\frac{E(n)}{n}\right)$ dizisinin bir alt dizisidir. Buradan

$$\liminf \frac{E(n)}{n} \leq \liminf \frac{k}{a_k}$$

elde edilir. Eğer $n, n \geq a_1$ olacak şekilde bir tamsayı ve a_k, E cümlesindeki n' den büyük en küçük tamsayı ise bu taktirde $a_{k-1} \leq n \leq a_k$ ve

$$\frac{k}{a_k} - \frac{E(n)}{n} = \frac{k}{a_k} - \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{k}{a_k} - \frac{E(n)}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ için})$$

olur.

Tanım 2.1.3 Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir cümle hariç diğer bütün k' lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k.” şeklinde gösterilir [7].

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenilerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.1.4 $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermek üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \quad (2.1)$$

yani h.h.k. için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $x = (x_k)$ dizisinin L ye istatistiksel yakınsak olması halinde $S - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır [7].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde S_0 , yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir. Buna göre

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \\ \text{her } \varepsilon > 0 \text{ ve enaz bir } L \text{ için} \end{array} \right\}$$

dir. Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Bunu göstermek için $x_k \rightarrow x$ alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $|x_k - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki ancak $k \leq k_0$ için $|x_k - x| \geq \varepsilon$ olur. Halbuki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$$

dır. Fakat bu iddianın tersi doğru değildir, yani istatistiksel yakınsak her dizi yakınsak değildir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ dir, ancak $x \notin l_\infty$ ve bu nedenle (x_k) dizisi yakınsak değildir. Sınırlı bir dizi de istatistiksel yakınsak olmayabilir. Gerçekten

$$x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

dizisi sınırlıdır ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1$, $S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 2.1.5 $x = (x_k), y = (y_k) \in S$, ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $S - \lim x = L_1$ ise $S - \lim(ax) = aL_1$

ii) $S - \lim x = L_1, S - \lim y = L_2$ ise $S - \lim(x + y) = L_1 + L_2$ dir [7].

(i) – (ii) den istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 2.1.6 $\varepsilon > 0$ olsun. *h.h.k.* için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [7].

Teorem 2.1.7 Bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda istatistiksel Cauchy dizisidir [7].

İspat. $S - \lim x_k = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, *h.h.k.* için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Eğer N , $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(*h.h.k.* için) elde edilir.

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik

Bu kısımda, kuvvetli Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 2.2.1 $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, x dizisi L ' ye Cesàro toplanabilirdir denir. Cesàro toplanabilir dizilerin cümlesi σ_1 ile gösterilecektir. Buna göre

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. Eğer x dizisi L ' ye Cesàro toplanabilir ise bu $\sigma_1 - \lim x = L$ yazılarak gösterilir [9].

Teorem 2.2.2 $x = (x_k)$ dizisi L ' ye yakınsak ise (x_k) dizisi L ' ye σ_1 yakınsaktır [9].

İspat. $x = (x_k)$ dizisi L ' ye yakınsak olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N_1$ olunca $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Şimdi;

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - L \right| &= \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - L \right| \\ &= \left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(x_1 - L) + \dots + (x_{N_1} - L)}{n} \right| \\ &\quad + \left| \frac{(x_{N_1+1} - L) + \dots + (x_n - L)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|x_1 - L| + \dots + |x_{N_1} - L|}{n} \\ &\quad + \frac{|x_{N_1+1} - L| + \dots + |x_n - L|}{n} \end{aligned}$$

yazılabilir. $K = \max \{|x_1 - L|, \dots, |x_{N_1} - L|\}$ alınırsa, $n > N_1$ için

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| \leq \frac{N_1 K}{n} + \frac{(n - N_1) \varepsilon}{2n}$$

elde edilir. $\forall n > N_2$ için $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2N_1 K}$ olacak şekilde N_2 bulabiliriz. Bu durumda $n > N_2$ için

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - N_1) \varepsilon}{2n}$$

olur. Ayrıca $\frac{n-N_1}{n} < 1$ olduğundan $N = \max \{N_1, N_2\}$ alınırsa her $n > N$ için

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - L \right| = \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - L \right| = \left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Bu teoremin tersi doğru değildir, yani σ_1 yakınsak bir dizi yakınsak olmayabilir. Gerçekten $(x_n) = (1 + (-1)^n)$ dizisi için $\sigma_1 - \lim x = 1$ dir [9]. Ancak bu dizi yakınsak değildir.

Tanım 2.2.3 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilir denir. Bu durumda $\omega_p - \lim x = L$ yazılır. Kuvvetli p -Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi ω_p ile gösterilecektir [10]. Yani

$$\omega_p = \left\{ x = (x_k) : \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir.

Teorem 2.2.4 $0 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde

i) Bir L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

ii) Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır [10].

İspat.

i) $x \in \omega_p$ ve $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$ olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \frac{1}{n} \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$ olması

$$\lim \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olmasını gerektirir, bir başka ifadeyle $\omega_p - \lim x = L$ olması $S - \lim x_k = L$ olduğu sonucunu verir.

ii) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $E = \|x\|_\infty + L$ diyelim. $\varepsilon \geq 0$ verilsin. N_ε sayısını her $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2E^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde her $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2E^p} E^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak olduğu sonucu çıkar.

3. FOLNER DİZİLERİ

3.1. Folner Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde Folner dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını vereceğiz.

Tanım 3.1.1 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Tüm $m > k_0$ ve $g \in G/S_m$ için $|f(g) - s| < \varepsilon$ olacak şekilde her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ var ise f fonksiyonu s ye yakınsaktır denir [11].

Tanım 3.1.2 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Tüm $m > k_0$ ve $g, h \in G/S_m$ için $|f(g) - f(h)| < \varepsilon$ olacak şekilde her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ var ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonuna tüm G ler için $\{S_n\}$ Folner dizisinin Cauchy dizisi denir [11].

Tanım 3.1.3 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s| = 0$$

ise f fonksiyonu s ye kuvvetli toplanabilirdir denir [11].

Tanım 3.1.4 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p = 0$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s ye kuvvetli p -toplanabilirdir denir [11]. Tüm kuvvetli p -toplanabilir f fonksiyonlarının kümesi $\omega_p(G)$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.5 $S \subset G$ nin üst ve alt Folner yoğunlukları, sırası ile

$$\bar{\delta}(S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : g \in S\}|$$

ve

$$\underline{\delta}(S) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : g \in S\}|$$

tanımlanır.

Eğer $\bar{\delta}(S) = \underline{\delta}(S)$ ise

$$\delta(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : g \in S\}|,$$

S nin Folner yoğunluğu olarak adlandırılır [11].

$G = \mathbb{N}$ alalım. $S_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve S ondalık açılımında tam kısmı 1 olan pozitif tamsayıların kümesi olsun. $\underline{\delta}(S) = \frac{1}{9}$ ve $\bar{\delta}(S) = \frac{5}{9}$ olduğundan S kümesinin $\{S_n\}$ Folner dizisine göre Folner yoğunluğu yoktur. Özel olarak biz Folner yoğunluğu sıfır olan kümelerle ilgileneceğiz. Bir f fonksiyonu ve $f(g)$ Folner yoğunluğu sıfır olan bir küme haricinde tüm g ler için sağlamıyorsa $f(g)$ hemen hemen her g için P özelliğini sağlıyor denir ve " $h.h.g$ " ile gösterilir.

Tanım 3.1.6 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s ye istatistiksel yakınsaktır denir [11]. Tüm istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $S(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.7 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $l \geq 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : |f(g) - f(m)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $m \in G \setminus S_l$ sayısı var ise yani yani $h.h.g$ için $|f(g) - f(m)| < \varepsilon$ ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonu istatistiksel Cauchy fonksiyonu denir [11].

Teorem 3.1.8 Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) $f \in \omega(G)$ istatistiksel yakınsak bir fonksiyondur,
- ii) $f \in \omega(G)$ istatistiksel Cauchy fonksiyonudur,
- iii) $f \in \omega(G)$ için $f(g) = y(g)$ olacak şekilde $h.h.g$ için yakınsak bir y fonksiyonu vardır [11].

İspat : i) yi kullanarak ii) yi ispatlayalım. Kabul edelim ki $st - \lim f(g) = s$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O halde $h.h.g$ için $|f(g) - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve eğer $|f(g_0) - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir s

vardır. Buradan

$$\begin{aligned} |f(g) - f(g_0)| &< |f(g) - s| + |f(g_0) - s| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla f istatistiksel Cauchy fonksiyonudur.

Kabul edelim ki *ii*) doğru olsun g_1 fonksiyonu $J = [f(g_1) - 1, f(g_1) + 1]$ aralığı " hemen hemen tüm g " leri için g fonksiyonunu içerecek şekilde seçilmiş olsun. Şimdi de g_2 fonksiyonunu $J' = [f(g_2) - \frac{1}{2}, f(g_2) + \frac{1}{2}]$ aralığı " hemen hemen tüm g " leri için g fonksiyonunu içerecek şekilde seçelim. $J_1 = J \cap J'$ aralığının " hemen hemen tüm g " için g fonksiyonunu içerdiğini iddia ediyoruz. Çünkü

$$\{g \in S_n : f(g) \notin J \cap J'\} = \{g \in S_n : f(g) \notin J\} \cup \{g \in S_n : f(g) \notin J'\} ,$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \{g \in S_n : f(g) \notin J \cap J'\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \{g \in S_n : f(g) \notin J\} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \{g \in S_n : f(g) \notin J'\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Bundan dolayı J_1 aralığı, uzunluğu 1 veya 1 den küçük olan ve $h.h.g$ için $f(g)$ yi kapsayan kapalı bir aralıktır. İşleme $J' = [f(g_3) - \frac{1}{4}, f(g_3) + \frac{1}{4}]$ aralığı $h.h.g$ için $f(g)$ yi kapsayacak şekilde devam edelim. Bu durumda $J_2 = J_1 \cap J'$ aralığı $h.h.g$ için $f(g)$ yi kapsayan ve boyu $\frac{1}{2}$ den küçük veya eşit olan kapalı aralıktır. Bu şekilde devam ederek her $m \in \mathbb{N}$ için kapalı aralıkların $J_{m+1} \subset J_m$ olacak şekilde bir (J_m) dizisi oluşturabiliriz. Bu durumda J_m nin boyu 2^{1-m} den daha büyük değildir ve $h.h.g$ için $\delta(g) \in J_m$ dir. İç içe aralıklar teoreminden dolayı en az bir $\eta = \bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$ sayısı vardır. $h.h.g$ için $f(g) \in J_m$ gerçeğini kullanarak G nin $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots$ olacak şekilde bir $\{T_m\}$ alt dizisini bulabiliriz.

Bu durumda $g \in S_n/T_m$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : f(g) \notin J_m\}| < 1/m \quad (3.1)$$

dir.

Şimdi de $g \in S_n/T_m$ olmak üzere $g \in T_{m+1}/T_m$ iken $f(g) \in J_m$ olmak üzere $f(g)$ nin terimlerinden oluşan bir $z(g)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Ayrıca $y(g)$ fonksiyonunu

$$y(g) = \begin{cases} \eta & , f(g) = z(g) \quad \text{ise} \\ f(g) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Bu taktirde $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $g \in S_n/T_m$ için $\lim y(g) = s$ dir. O zaman ya $f(g) = z(g)$ (bunu anlamı $y(g) = \eta$) veya $y(g) = f(g) \in J_m$ ve $|y(g) - \eta| \leq J_m$ nin boyu $\leq 2^{m-1}$ dir. Biz " hemen hemen tüm g " ler için $y(g) = f(g)$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu doğrulamak için $g \in T_{m+1}/T_m$ ise

$$\{g \in S_n : y(g) \neq f(g)\} \subseteq \{g \in S_n : f(g) \notin J_m\}$$

dir.

(3.1) den

$$\frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : y(g) \neq f(g)\}| = \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : f(g) \notin J_m\}| < \frac{1}{m}$$

yazabiliriz. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken limit sıfırdır ve $h.h.g$ için $y(g) = f(g)$ dir.

Son olarak (iii) sağlansın, $h.h.g$ için $y(g) = f(g)$ ve $\lim y(g) = s$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\} \subseteq \{g \in S_n : y(g) \neq f(g)\} \cup \{g \in S_n : |y(g) - s| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz.

$\lim y(g) = s$ olduğundan son küme sabit sayıda eleman içerir. Örneğin $l = l(c)$ dir. Bu yüzden $h.h.g$ için $y(g) = f(g)$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : y(g) \neq f(g)\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{|S_n|} = 0$$

dır. Böylece i) gerçekleşmiş olup ispat tamamlanır.

$f \in \omega(G)$ nin istatistiksel yakınsaklığı Folner dizisinin özel seçimine bağlıdır. Bunu bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 3.1.9 $G = \mathbb{Z}^2$ olsun , $\{S_n^1\}$ ve $\{S_n^2\}$ Folner dizislerini aşağıdaki gibi seçelim:

$$\{S_n^1\} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq n, |j| \leq n\}$$

ve

$$\{S_n^2\} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq n, |j| \leq n^2\}$$

ve

$$A = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i \leq j \leq n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, 3, \dots\}$$

olmak üzere f i aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$f = \begin{cases} 1 & \text{için } (i, j) \in A \\ 0 & \text{için } (i, j) \notin A \end{cases}$$

dir.

O halde $\{S_n^2\}$ Folner dizisi için $f(g)$ ye sıfıra istatistiksel olarak yakınsar fakat $\{S_n^1\}$ Folner serisi sıfıra istatistiksel yakınsak değildir. Gerçekten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n^2|} |\{g \in S_n^2 : |f(g) - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{(2n+1)(2n^2+1)} = 0.$$

dır. O halde $\{S_n^2\}$ Folner dizisi için $st - \lim f(g) = 0$ dir.

$\{S_n^1\}$ Folner dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n^1|} |\{g \in S_n^1 : |f(g) - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{(2n^2+1)} \neq 0.$$

dır.

Teorem 3.1.10 $f \in \omega(G)$ ve p pozitif bir sayı olsun. Bu takdirde

a) f fonksiyonu $\{S_n\}$ Folner dizisi için s ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise f fonksiyonu s ye istatistiksel yakınsaktır.

b) $\omega_p(G) = S(G) \cap m(G)$ dir.

İspat: a) $f \in \omega(G)$ olsun $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde

$$\sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

eşitsizliği yazılabilir ve buradan G deki herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için $f \in \omega(G)$, s ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir.

b) G deki $\{S_n\}$ Folner dizisi için $f \in m(G)$, s ye istatistiksel yakınsak olsun. $f \in m(G)$ sınırlı olduğundan $\|f\|_\infty + s = m$ diyebiliriz. $\varepsilon > 0$ verilsin ve her $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{|S_n|} \left| \left\{ g \in S_n : |f(g) - s| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

seçelim ve $L_n = \left\{ g \in S_n : |f(g) - s| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$ alalım. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in L_n} |f(g) - s|^p + \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n/L_n} |f(g) - s|^p \\ &< \frac{1}{|S_n|} \frac{|S_n| \varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{|S_n|} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu f nin s ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olması demektir [11].

4. FOLNER DİZİLERİNİN ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENKLİĞİ

Marouf [19] asimptotik denk dizileri ve asimptotik regüler matrisleri tanımladı. Paterson [20] bu kavramı istatistiksel yakınsaklığa genelleştirdi.

4.1 Asimptotik Denklik

Tanım 4.1.1 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Her $m > k_0$ ve $g \in G \setminus S_m$ için

$$\left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ var ise negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına $\{S_n\}$ Folner dizisi için asimptotik denktir denir $f \sim h$ şeklinde gösterilir [17].

Tanım 4.1.2 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| = 0$$

ise negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına $\{S_n\}$ Folner dizisi için kuvvetli asimptotik denktirler denir $f \sim^\omega h$ şeklinde gösterilir [17].

4.2 İstatistiksel Denklik

Tanım 4.2.1 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına $\{S_n\}$ Folner dizisi için istatistiksel denktirler denir $f \sim^S h$ şeklinde gösterilir [17].

Tanım 4.2.2 G sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(mg)}{h(mg)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

m ye göre düzgün ise negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına $\{S_n\}$ Folner dizisi için hemen hemen istatistiksel denktirler denir $f \sim^{\hat{S}} h$ şeklinde gösterilir [17].

Tanım 4.2.3 G sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlayan bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(mg)}{h(mg)} - 1 \right| = 0$$

m ye göre düzgün ise negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına $\{S_n\}$ Folner dizisi için kuvvetli hemen hemen istatistiksel denktirler denir. $f \sim^{\hat{\omega}} h$ şeklinde gösterilir [17].

Teorem 4.2.5 $f(g)$ ve $h(g)$ nin hemen hemen kuvvetli asimptotik denklikleri Folner dizisinin özel seçimine bağlı değildir.

İspat $\{S_n\}$ Folner dizisine göre $f(g)$ ve $h(g)$ hemen hemen kuvvetli asimptotik olarak denk olsunlar. $\{T_n\}$ Folner dizisine göre de $f(g)$ ve $h(g)$ nin hemen hemen kuvvetli asimptotik olarak denk olduklarını göstermeliyiz. $\{S_n\}$ Folner dizisine göre $f(g)$ ve $h(g)$ hemen hemen kuvvetli asimptotik olarak denk olduğu zaman ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| = 0$$

m ye göre düzgün eşitliği yazılabilir. Bunun anlamı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| = 0$$

dır.

$\{T_n\}$ Folner dizisini göz önüne alalım. $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ ve $N \in \mathbb{N}$ olsun. Yeterince büyük n ler için $N < n_2 < \dots < n_k$ olacak şekilde $n_1, n_2, \dots, n_k$ tamsayıları vardır.

Böylece büyük n ler için $T_n \supseteq U_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n$ ve

$$|U_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n| \geq \max \left\{ (1 - \delta) |T_n|, (1 - \delta) \sum_{i=1}^k |C_i^n| |S_{n_i}| \right\}$$

yazılabilir. Bu ise

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|T_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| &\leq \frac{1}{|T_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in T_n \setminus \bigcup_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| \\
&\quad + \frac{1}{|T_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in \bigcup_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| \\
&\leq \frac{1}{|T_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in T_n \setminus \bigcup_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| \\
&\quad + \frac{1}{\left| \bigcup_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n \right|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in \bigcup_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| \\
&\leq \delta + \frac{1}{\left| \bigcup_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n \right|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in \bigcup_{i=1}^k S_{n_i} C_i^n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| \\
&\leq \delta + \sum_{i=1}^k \frac{|C_i^n| \sup_{m \in G} \sum_{g \in S_{n_i}} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right|}{(1 - \delta) \sum_{i=1}^k |C_i^n| |S_{n_i}|} \\
&\leq \delta + \frac{1}{1 - \delta} \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\sup_{m \in G} \sum_{g \in S_{n_i}} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right|}{|S_{n_i}|} \\
&\leq \delta + \frac{1}{1 - \delta} \sup_{l \geq N} \frac{\sup_{m \in G} \sum_{g \in S_{n_l}} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right|}{|S_l|}
\end{aligned}$$

anlamına gelir. Şimdi $\delta \rightarrow 0^+$ ve $N \rightarrow \infty$ olsun. buradan

$$\frac{1}{|T_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in T_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| \leq \frac{1}{|S_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right|$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sup_{m \in G} \sum_{g \in T_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{g \in T_n} \left| \frac{f(gm)}{h(gm)} - 1 \right| = 0$$

m ye göre düzgün eşitliği elde edilir. Benzer durum diğer limit için de geçerlidir [17].

Teorem 4.2.6 $f, h \in \omega(G)$ negatif olmayan iki fonksiyon olsun.

a) G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için f, h a kuvvetli asimptotik denk ise G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için f fonksiyonu h fonksiyonuna istatistiksel denktir.

b) $f, h \in m(G)$ ve G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için f, h a istatistiksel ise G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için f fonksiyonu h fonksiyonuna kuvvetli asimptotik denktir.

İspat a) G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için $f \sim^\omega h$ ve $\varepsilon > 0$ ise

$$\sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \varepsilon$$

yazılabilir. O halde G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için f fonksiyonu h fonksiyonuna istatistiksel denktir.

b) $f, h \in m(G)$ ve G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için f, h a istatistiksel denk olsun. $f, h \in m(G)$ olduğundan $\left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \leq K$ olacak şekilde sıfır sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ ve $L_n = \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \right\}$ verilmiş olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| &= \frac{1}{|S_n|} \left(\sum_{g \in L_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| + \sum_{g \in S_n \setminus L_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \right) \\ &\leq \frac{K}{|S_n|} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

dır. O halde G de $\{S_n\}$ Folner dizisi için f fonksiyonu h fonksiyonuna kuvvetli asimptotik denktir [17].

5. α . DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

α . dereceden doğal yoğunluk ve α . dereceden istatistiksel yakınsaklık Çolak [18] tarafından tanımlandı. Bu bölümde kısaca bu kavramlardan bahsedeceğiz.

5.1 α . Dereceden yoğunluk

Tanım 5.1.1 $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bir E kümesinin α yoğunluğu

$$\delta_\alpha(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

ile tanımlanır [18]. Burada $|\{k \leq n : k \in E\}|$, E 'nin n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $x = (x_k)$, α 'ya göre sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k 'lar için bir $P(k)$ özelliğini sağlıyorsa, o zaman bu dizi α 'ya göre hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve h.h.k (α) şeklinde gösterilir.

$\mathbb{N}$ 'nin sonlu her altkümesinin α -yoğunluğu sıfırdır ve $\delta_\alpha(E^c) = 1 - \delta_\alpha(E)$ eşitliği $0 < \alpha < 1$ için genelde doğru değildir. Bu eşitlik sadece $\alpha = 1$ için sağlanır [18].

Teorem 5.1.2 $E \subseteq \mathbb{N}$ herhangi bir küme olsun. Bu durumda eğer $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise $\delta_\beta(E) \leq \delta_\alpha(E)$ dir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $n^\alpha \leq n^\beta$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ olur. Buna göre

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : k \in E\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

olup bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\delta_\beta(E) \leq \delta_\alpha(E)$ elde edilir [18].

Buna göre $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için eğer E kümesinin α -yoğunluğu sıfır ise β -yoğunluğu da sıfırdır. Eğer $0 < \alpha \leq 1$ şartını sağlayan en az bir α için E kümesinin α -yoğunluğu sıfır ise, E 'nin doğal yoğunluğu da sıfır olur.

Tanım 5.1.3 $x = (x_k) \in \omega$ ve $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, o zaman (x_k) dizisi L 'ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz. (x_k) dizisinin L 'ye α . dereceden istatistiksel yakınsak

olması halinde bunu $S^\alpha - \lim x_k = L$ yazarak göstereceğiz. α . dereceden istatistiksel yakınsak bütün dizilerin kümesi S^α ile gösterilecektir [18].

S_0^α , α . dereceden sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterecektir.

Her $\alpha \in (0, 1]$ için $S_0^\alpha \subset S^\alpha$ olduğu açıktır. α . dereceden istatistiksel yakınsaklık $\alpha = 1$ için istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır. α . dereceden istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlı, ancak $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunu göstermek için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ -1, & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Buna göre $\alpha > 1$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0, \\ &\text{ve} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - (-1)| \geq \varepsilon\}| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0 \end{aligned}$$

sağlanacağından $x = (x_k)$ dizisi hem 1'e ve hem de -1'e α . dereceden istatistiksel yakınsak, yani $x = (x_k)$ dizisi hem 1'e ve hem de -1'e α . dereceden istatistiksel yakınsak olur ki bu mümkün değildir.

Teorem 5.1.4 $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ birer kompleks sayı dizileri olsunlar.

- i) Eğer $S^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise o zaman $S^\alpha - \lim cx_k = cx_0$ 'dır.
- ii) Eğer $S^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $S^\alpha - \lim y_k = y_0$ ise o zaman $S^\alpha - \lim (x_k + y_k) = x_0 + y_0$ 'dır.

İspat.

- i) $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |cx_k - cx_0| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|$$

eşitsizliğinden i) ve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden ii) yi elde ederiz [18].

Yakınsak her dizinin α . dereceden istatistiksel yakınsak olduğunu görmek kolaydır. Yani $0 < \alpha \leq 1$ için $c \in S^\alpha$ 'dır. Ancak tersi daima doğru değildir. Örneğin $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \quad (5.1)$$

olacak şekilde tanımlansın. O zaman

$$(x_k) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} (2\sqrt{n} + 1)$$

elde edilir. Bu da $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $S^\alpha - \lim x_k = 0$, ancak $x = (x_k)$ dizisi yakınsak değil, demektir. [18]

Tanım 5.1.5 $0 < \alpha \leq 1$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, o zaman $x = (x_k)$ dizisi α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik denir. α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik, $\alpha = 1$ için, kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı ω_p^α ile gösterilir, yani

$$\omega_p^\alpha = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. 0 'a α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı ise ω_{op}^α ile gösterilecektir [18].

5.2 Temel Sonuçlar

Teorem 5.2.1 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $S^\alpha \subseteq S^\beta$ ve $\alpha < \beta$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 'lar için bu kapsama kesindir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $x \in S^\alpha$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olur ve bu $S^\alpha \subseteq S^\beta$ olduğunu verir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3 \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini alalım. Bu durumda ve buradan,

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\beta} (2 \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + 1)$$

elde edilir. Bu durumda $\frac{1}{3} < \beta \leq 1$ için $S^\beta - \lim x_k = 0$ yani $x \in S^\beta$ ancak

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{n^\alpha} (2 \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor - 1)$$

olması nedeniyle $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ için $\frac{1}{n^\alpha} (2 \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor - 1) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olur ki, buradan $x \notin S^\alpha$ elde edilir. Bu da isteneni verir [18].

Eğer Teorem 5.2.1 'de $\beta = 1$ alırsak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.2.2 Eğer $0 < \alpha \leq 1$ için bir dizi L sayısına α . dereceden istatistiksel yakınsak ise, o zaman bu dizi L 'ye istatistiksel yakınsaktır, yani $S^\alpha \subseteq S$ 'dir. [18].

Teorem 5.2.1 'den aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Sonuç 5.2.3

- i) $S^\alpha = S^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.
- ii) $S^\alpha = S$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 1$ olmasıdır [18].

Aşağıdaki teoremin ispatı tanımdan açıktır. Bu yüzden teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 5.2.4 $0 < \alpha < 1$ ve $x = (x_k)$ dizisi L 'ye α . dereceden istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $\lim y_k = L$ olacak şekilde $x = (x_k)$ dizisinin bir $y = (y_k)$ alt dizisi vardır [18].

Teorem 5.2.5 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda $\omega_p^\alpha \subseteq \omega_p^\beta$ 'dir ve kapsama kesindir.

İspat. $x = (x_k) \in \omega_p^\alpha$ olsun ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ verilsin. $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p$$

yazabiliriz. Bu da $\omega_p^\alpha \subseteq \omega_p^\beta$ olduğunu verir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisi (5.2) 'deki gibi tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |x_k - 0|^p \leq \frac{2\sqrt[p]{n}}{n^\beta} = \frac{2}{n^{\beta-\frac{1}{3}}}$$

yazılabilir. $\frac{1}{3} < \beta \leq 1$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{3}}} \rightarrow 0$ olduğundan $\omega_p^\beta - \lim x_k = 0$, yani $x \in \omega_p^\beta$ olur, ancak $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ için

$$\frac{2\sqrt[p]{n} - 1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - 0|^p$$

ve $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{2\sqrt[p]{n}}{n^\alpha} \rightarrow \infty$ olduğundan $x \notin \omega_p^\alpha$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar [18].

Aşağıdaki sonuç Teorem 5.2.5 'in bir sonucudur.

Sonuç 5.2.6 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

- i) $\omega_p^\alpha = \omega_p^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.
- ii) Her $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ için $\omega_p^\alpha \subseteq \omega_p$ 'dir [18].

Teorem 5.2.7 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $\omega_q^\alpha \subseteq \omega_p^\alpha$ olur [18].

Teorem 5.2.8 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi L sayısına α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise bu durumda L 'ye β . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \geq |\{k \leq n : |x_k - L|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &\geq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - L|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer Teorem 5.2.8 de $\beta = \alpha$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz [18].

Sonuç 5.2.9 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bir dizi L 'ye α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise bu durumda L 'ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Bu sonuçta $\alpha = 1$ alınırsa bilinen “ L 'ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olan bir dizi L 'ye istatistiksel yakınsaktır” sonucu elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki L 'ye istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L 'ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir [18].



6.FOLNER DİZİLERİNİN α . DERECE DEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE α . DERECE DEN KUVVETLİ p -CESARO TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu bölümde Folner dizilerinin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p -Cesàro yakınsaklığı kavramları tanımlanacak, Nuray ve Rhoades [11] tarafından verilen sonuçlar genelleştirilecektir.

6.1 Folner Dizilerinin α . Dereceden Yoğunluğu

Bu kısımda Folner dizilerinin α . dereceden Folner yoğunluğunu tanımlayıp bununla ilgili bağıntıları vereceğiz.

Tanım 6.1.1 $\alpha \in (0, 1]$ ve $S \subset G$ olsun. S nin α . dereceden üst ve alt Folner yoğunlukları sırası ile

$$\bar{\delta}_\alpha(S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : g \in S\}|$$

ve

$$\underline{\delta}_\alpha(S) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : g \in S\}|$$

olarak tanımlanır. Eğer $\bar{\delta}_\alpha(S) = \underline{\delta}_\alpha(S)$ ise S , α . dereceden Folner yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\delta_\alpha(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : g \in S\}|,$$

şeklinde ifade edilir. $\alpha = 1$ ise S nin α . dereceden Folner yoğunluğu Nuray ve Rhoades [11] tarafından verilen S nin Folner yoğunluğuna indirgenir.

Her Folner dizisi α . dereceden Folner yoğunluğa sahip olmayabilir. Örneğin $\alpha = 1, G = \mathbb{N}$ seçelim $S_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve S ondalık açılımda tam kısmı 1 olan pozitif tamsayıların kümesi olsun. $\underline{\delta}_\alpha(S) = \frac{1}{9}$ ve $\bar{\delta}_\alpha(S) = \frac{5}{9}$ olduğunda S kümesinin $\{S_n\}$ Folner dizisine göre α . dereceden Folner yoğunluğu yoktur. Özel olarak α . dereceden Folner yoğunluğu sıfır olan kümelerle ilgileneceğiz.

Eğer $f, f(g)$ fonksiyonu α . dereceden Folner yoğunluğu sıfır olan bir küme dışında tüm g ler için bir P özelliğini sağlıyorsa bu dizi α 'ya göre hemen hemen her g için P özelliğini sağlıyor denir ve " $h.h.g(\alpha)$ " şeklinde gösterilir.

Teorem 6.1.2 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere α ve β pozitif real sayılar ve $S \subset G$ olsun. Bu takdirde $\delta_\alpha(S) \leq \delta_\beta(S)$ dir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $|S_n|^\alpha \leq |S_n|^\beta$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{|S_n|^\beta} \leq \frac{1}{|S_n|^\alpha}$ olur. Buna göre

$$\frac{1}{|S_n|^\beta} |\{g \in S_n : g \in S\}| \leq \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : g \in S\}|$$

olup bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\delta_\alpha(S) \leq \delta_\beta(S)$ elde edilir.

Yukarıdaki teoremden $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1.3 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α pozitif bir sayı ve $S \subset G$ olsun. Bu takdirde $\delta_\alpha(S) \leq \delta(S)$ dir.

Bu sonuçta $\alpha = 1$ alınırsa Nuray ve Rhoades [11] tarafından verilen S nin Folner yoğunluğu elde edilir.

6.2 Folner Dizilerinin α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda Folner dizilerinin α . dereceden Folner istatistiksel yakınsaklığını tanımlayacak ilişkin bağıntıları vereceğiz.

Tanım 6.2.1 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise yani $h.h.g_{(\alpha)}$ için $|f(g) - s| < \varepsilon$ ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonuna G deki $\{S_n\}$ Folner dizisi için s ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. G deki $\{S_n\}$ Folner dizisi için yakınsak olan tüm fonksiyonların kümesi $S^\alpha(G)$ ile gösterilir. $S_0^\alpha(G)$, α . dereceden sıfıra istatistiksel yakınsak Folner dizilerin kümesini gösterecektir. Her $\alpha \in (0, 1]$ için $S_0^\alpha(G) \subset S^\alpha(G)$ olduğu açıktır. α . dereceden istatistiksel yakınsaklık $\alpha = 1$ için istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır.

Teorem 6.2.2 $0 < \alpha \leq 1$ ve $S \subset G$ olsun. $f \in \omega(G)$ nin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı Folner dizisinin seçimine bağlıdır.

İspat. İspatı bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 6.2.3 $G = \mathbb{Z}^2$ ve $\alpha = 1$ olsun ve $\{S_n^1\}$ ve $\{S_n^2\}$ Folner dizilerini aşağıdaki gibi seçelim:

$$\{S_n^1\} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq n, |j| \leq n\}$$

$$\{S_n^2\} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq n, |j| \leq n^2\}$$

ve $f(g) \in \omega(G)$ fonksiyonunu

$$A = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i \leq j \leq n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, 3, \dots\}$$

olmak üzere

$$f = \begin{cases} 1 & \text{için } (i, j) \in A \\ 0 & \text{için } (i, j) \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu takdirde $f(g)$ fonksiyonu $\{S_n^2\}$ Folner dizisine göre sıfıra α . dereceden istatistiksel yakınsak fakat $\{S_n^1\}$ Folner dizisine göre sıfıra α . dereceden istatistiksel yakınsak değildir. Gerçekten;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n^2|} |\{g \in S_n^2 : |f(g) - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{(2n+1)(2n^2+1)} = 0$$

olup $\{S_n^2\}$ Folner dizisi için $st - \lim f(g) = 0$, fakat $\{S_n^1\}$ Folner dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n^1|} |\{g \in S_n^1 : |f(g) - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{(2n^2+1)} \neq 0.$$

dır.

Teorem 6.2.4 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere α ve β pozitif reel sayılar ve $S \subset G$ olsun. Bu takdirde $S^\alpha(G) \leq S^\beta(G)$ dir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $|S_n|^\alpha \leq |S_n|^\beta$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{|S_n|^\beta} \leq \frac{1}{|S_n|^\alpha}$ olur. Buna göre

$$\frac{1}{|S_n|^\beta} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}|$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|^\beta} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Buradan $f \in \omega(G)$ fonksiyonu G deki $\{S_n\}$ Folner dizisi için s ye β . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Yukarıdaki teoremden $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.2.5 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α pozitif bir sayı ve $S \subset G$ olsun. Bu takdirde $S^\alpha(G) \leq S(G)$ dir.

Sonuç 6.2.6 $S^\alpha(G) = S^\beta(G)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.

6.3 Folner Dizilerinin α . Dereceden Kuvvetli p -Cesàro Toplanabilirliği

Bu kısımda Folner dizilerinin α . dereceden kuvvetli p -toplanabilirliğini tanımlayacak ilişkin bağıntıları vereceğiz.

Tanım 6.3.1 G , sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup, $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ olsun,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|^\alpha} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p = 0$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonuna G deki $\{S_n\}$ Folner dizisi için s ye α . dereceden kuvvetli p -toplanabilir denir. Tüm kuvvetli p -Cesàro toplanabilir f fonksiyonlarının kümesi $\omega_p^\alpha(G)$ ile gösterilecektir.

Teorem 6.3.2 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere α ve β pozitif real sayılar, p bir pozitif reel sayı ve $S \subset G$ olsun. Bu takdirde $\omega_p^\alpha(G) \leq \omega_p^\beta(G)$ dir.

İspat. $f \in \omega_p^\alpha(G)$ olsun ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ verilsin, $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\frac{1}{|S_n|^\beta} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \leq \frac{1}{|S_n|^\alpha} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p$$

yazabiliriz. Bu da $\omega_p^\alpha(G) \leq \omega_p^\beta(G)$ olduğunu verir.

Yukarıdaki teoremden $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.3.3 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α pozitif bir sayı ve $S \subset G$ olsun. Bu takdirde $\omega_p^\alpha(G) \leq \omega_p(G)$ dir.

Teorem 6.3.4 $0 < \alpha \leq 1, 0 < p < q < \infty$ ve $S \subset G$ olsun. Bu durumda $\omega_q^\alpha(G) \leq \omega_p^\alpha(G)$ dir.

6.4 Folner Dizilerinin α . Dereceden Kuvvetli p -Cesàro Toplanabilirliği ve α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı Arasındaki İlişki

Bu bölümde Folner dizilerinin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p -Cesàro yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 6.4.1 $f \in \omega(G)$, p pozitif bir sayı olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\{S_n\}$ Folner dizisi için s ye α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise f fonksiyonu s ye β . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Herhangi bir $f \in \omega(G)$ için $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde

$$\sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

yazılabilir, böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_n|^\alpha} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p &\geq \frac{1}{|S_n|^\alpha} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{|S_n|^\beta} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir, buradan G deki herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için $f \in \omega(G)$, s ye α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise f , s ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Yukarıdaki teoremden $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.4.2 $f \in \omega(G)$, p pozitif bir sayı olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\{S_n\}$ Folner dizisi için s ye α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise f fonksiyonu s ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Bu sonuçta $\alpha = 1$ alınırsa Nuray ve Rhoades [11] tarafından verilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.4.3 $f \in \omega(G)$ ve p pozitif bir sayı olsun olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\{S_n\}$ Folner dizisi için s ye kuvvetli p –Cesàro toplanabilir ise f fonksiyonu s ye istatistiksel yakınsaktır.



KAYNAKLAR

1. **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley & Sons, New York.
2. **Fast, H.**, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
3. **Schoenberg, I.J.**, 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
4. **Buck, R. C.**, 1953. Generalized asymptotic density. Amer. J. Math., 75, 335-346.
5. **Connor, J.S.**, 1988. The statistical and strong p - Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.
6. **Šalát, T.**, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.
7. **Fridy, J.A.**, 1985. On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.
8. **Niven, I. and Zuckerman, H.S.**, 1980. An Introduction to The Theory of Numbers, Fourth Ed., New York , John Wiley and Sons.
9. **Powell, R.E. and Shah, S.M.**, 1972. Summability Theory and its Applications, Van Nostrand-Reinhold Company, London.
10. **Maddox, I. J.**, 1967. Spaces of strongly summable sequences Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 18, 345-355.
11. **Nuray, Fatih; Rhoades, B. E**, 2011. Some kinds of convergence defined by Folner Sequences Analysis 31 , 4 ,381-390
12. **Nuray, Fatih; Rhoades, B. E**, 2012. Statistical convergence of sequences of sets. Fasc. Math. No. 49 , 87-99.
13. **Fridy, J.A**, 1993. Stactical limit points, Proc. Amer. Math. Soc. 118(1993)1187-1192

14. **Fridy, J.A, and Orhan, C**,1997. Statistical limit superior and limit inferior, Proce. Amer. Math. Soc. 125(1997)3625-3631.
15. **Gallian Joseph A**, 1992. Contemporary Astract Algebra.
16. **Chou Ching**, 1980 Elementary Amenable Groups. Ill.J.Math.,24:396-407.
17. **Nuray, Fatih; Rhoades, B. E**, 2013 Asymptotically and Statictically Equivalent Functions Defined on Amenable Semigroups 11(2) (2013) 03-311.
18. **Çolak, R**, 2010 Statictical Convergence of Order α 23119 (2010) 121-129.
19. **Marouf, M. S**. Asymptotic equivalence and summability, Internat. J. Math. Math. Sci 16(4) (1993), 755-762.
20. **Patterson, R. F**. On asymptotically statistical equivalent sequences, Demonstratio Math. 36(1) (2003) 149-153

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümüne girdim ve 2013 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aile ve Sosyal Politikalar Bakanlığı'na bağlı Elazığ Sosyal Hizmet Merkezi'nde öğretmen olarak görev yapmaktayım. 2013 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.

