

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BİHARMONİK EĞRİLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sema TARLA

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışman: Prof. Dr. Mihriban KÜLAHCI

TEMMUZ-2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİHARMONİK EĞRİLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sema TARLA

(151121118)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışman: Prof. Dr. Mihriban KÜLAHCI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Haziran 2017

TEMMUZ-2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİHARMONİK EĞRİLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sema TARLA

(151121118)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21 Haziran 2017

Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Temmuz 2017

Danışmanı : Prof. Dr. Mihriban KÜLAHCI (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Doç. Dr. Talat KÖRPINAR (M.Ş.Ü)

ÖNSÖZ

Bu tezimin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde benden yardımlarını esirgemeyen, engin bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, değerli zamanını ayırarak, çalışmamın her aşamasında yanımda olan sürekli yardımda bulunan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mihriban KÜLAHCI' ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca yanımda olan ve bana her zaman destek olan aileme ve tez süreci boyunca bana her konuda yardımcı olan, varlığı ile beni güçlendiren meslektaşım aynı zaman da ablam Sibel Tarla' ya teşekkür ederim.

Sema TARLA

ELAZIĞ - 2017

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. BÖLÜM.....	1
Giriş.....	1
2. BÖLÜM.....	3
2.1. Temel Kavramlar.....	3
3. BÖLÜM.....	9
3.1. Biharmonik Eğriler İçin Temel Tanım Teoremler.....	9
3.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında 1.Tip Eğriler Ve Biharmonik Eğriler İçin Karakterizasyonlar.....	12
4. BÖLÜM.....	18
4.1. 3-Boyutlu Galilean Uzayı İle İlgili Temel Tanımlar	18
4.2. 3-Boyutlu Galilean Uzayında 1. Tip Eğriler Ve Biharmonik Eğriler İçin Karakterizasyonlar	20
4.3. 3-Boyutlu Equiform Galilean Uzayı İle İlgili Temel Tanımlar	26
4.4. 3-Boyutlu Equiform Galilean Uzayında 1. Tip Eğriler Ve Biharmonik Eğriler İçin Karakterizasyonlar.....	28
5. BÖLÜM.....	30
Sonuç.....	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmıdır. Bu bölümde biharmonik eğriler ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verildi.

İkinci bölümde temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında 1.tip eğriler ve biharmonik eğriler ile ilgili temel tanımlar ve karakterizasyonlar verildi.

Dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmıdır. Bu bölümde 3-boyutlu Galilean uzayında ve Equiform Galilean uzayında biharmonik eğriler incelendi.

Beşinci bölüm çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Biharmonik Eğriler, Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

ABSTRACT

Some Characterizations of Biharmonic Curves

This study consists of four chapters.

The first chapter is the entrance of the study. In this chapter, information in the literature about studies done on biharmonic curves is given.

In the second chapter, basic definitions are given.

In the third chapter, basic definitions and characterizations related to 1-type curves and biharmonic curves in Euclidean 3-space are given.

In the fourth chapter, original part of the work. In this chapter biharmonic curves are examined in Galilean 3-space and equiform Galilean space.

In the fifth chapter, corollary part of the work.

Keywords: Biharmonic Curves, The Mean Curvature Vector Field

SEMBOLLER LİSTESİ

E^3 : 3-Boyutlu Öklid Uzayı

G^3 : 3-Boyutlu Galilean Uzayı

Δ : Laplace-Beltrami Operatörü

∇ : Levi Civita Konneksiyonu

V_1 : Birim Teğet Vektör

V_2 : Asli Normal Vektör

V_3 : Binormal Vektör

H : Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

κ : Eğrilik

τ : Torsiyon (Burulma)

1. BÖLÜM

Giriş

Eğriler diferensiyel geometrinin temel konularından biridir. Birçok özel eğri çeşidi vardır. Bunlardan biri de biharmonik eğrilerdir. Biharmonik eğriler ilk olarak G. B. Airy ve J. C. Maxwell tarafından çalışılmıştır. Airy ve Maxwell biharmonik denklemleri kullanarak düzlemde elastik problemleri ifade etmişlerdir. Elastik enerjinin Riemann genelleştirmesine elastik enerji, yani bioenerji denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$E_2(c) = \int \frac{1}{2} \kappa^2 ds.$$

Burada κ , c eğrisinin eğriliğidir. E_2 nin kritik noktalarına, biharmonik eğriler denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$\nabla_c^3 c = R(c, \nabla_c^c) c.$$

Biharmonik eğriler birçok matematikçi tarafından çalışıldı. Chen ve Ishikawa (Chen ve Ishikawa, 1991) Pseudo-Öklid uzayında biharmonik yüzeyleri çalıştılar. Inoguchi (Inoguchi, 2003) Minkowski 3-uzayında biharmonik eğrileri çalıştı.

Keleş ve diğerleri (Keleş vd., 2010) Lorentzian Para-Sasakian manifoldlarda biharmonik eğrileri çalıştılar. Kocayiğit ve Hacısalihoğlu (Kocayiğit ve Hacısalihoğlu, 2009) 1.tip ve biharmonik eğrileri Lorentz 3- uzayında çalıştılar. Kocayiğit ve Hacısalihoğlu (Kocayiğit ve Hacısalihoğlu 2011) 1.tip ve biharmonik eğrileri Öklid 3- uzayında çalıştılar. Yine Kocayiğit ve Hacısalihoğlu (Kocayiğit ve Hacısalihoğlu 2012) biharmonik eğrileri kontakt geometride çalıştılar. Körpınar ve Turhan, (Körpınar ve Turhan, 2009) timelike horizontal biharmonik eğrileri Heisenberg grupta çalıştılar. Biharmonik eğrileri Körpınar ve Turhan (Körpınar ve Turhan, 2011) $H^2 \times R$ de çalıştılar. Körpınar ve Turhan (Körpınar ve Turhan, 2012) timelike biharmonik eğriler etrafında tubular yüzeyleri Heisenberg grupta çalıştılar. Yine Körpınar ve Turhan (Körpınar ve Turhan, 2013) biharmonik eğrileri E^4 te çalıştılar.

Külahcı (Külahcı, 2016) isotropik uzayda biharmonik eğrileri çalıştı. Öztürk ve diğerleri (Öztürk vd., 2014) semi-Öklidyen E_1^4 uzayında zayıf biharmonik ve harmonik 1.tip eğrileri çalıştılar. Perктаş ve diğerleri (Perктаş vd., 2012) 3-boyutlu Heisenberg grubunda biharmonik eğrileri çalıştılar.

Bu çalışmada, 3-boyutlu klid uzayında biharmonik eğriler incelendi. Daha sonra Galilean uzayı ve Equiform Galilean uzayında Laplace Beltrami operatörü Δ ve ortalama eğrilik vektör alanı H kullanılarak biharmonik eğrilerin bazı karakterizasyonları verildi.



2. BÖLÜM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir. Yani

$$A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$A2) \forall P \in A \text{ için } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.3. 3-boyutlu standart reel vektör uzayı R^3 ile birleştirilmiş R^3 afin uzayını ele alalım. Bu R^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle, \rangle : R^3 \times R^3 \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i, \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece R^3 afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

$$\textbf{Tanım 2.1.4. } d : E^n \times E^n \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.5. $d : E^n \times E^n \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.6. $\forall x, y, z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü $\cos \theta = \frac{\langle xy, yz \rangle}{\|xy\| \|yz\|}$ den hesaplanan θ reel sayısıdır (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.7. E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ -lisine R^n de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n -lisi R^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.8. E^n deki $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.9. E^n de bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{E_0E_i}$ dir. Buradaki $x_i: E^n \rightarrow R, 1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n -lisine de E^n Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.10. X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır (Hacısalihoglu, 1998).

$$i1) X, \emptyset \in \tau$$

$$i2) \forall A_1, A_2 \in \tau \rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$$

$$i3) A_i \in \tau, i \in I, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$$

Tanım 2.1.11. Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (x, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.12. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n -manifold) dur denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

$M1)$ M bir hausdorff uzayıdır.

$M2)$ M nin her bir açık alt cümlesi $E^{n'}$ e veya $E^{n'}$ in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

$M3)$ M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.1.13. E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere $f: U \rightarrow R$ fonksiyonunun k' yncı mertebeden bütün türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından (k' yncı sınıftan) diferensiyellenebilir denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.14. M bir topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse, M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.15. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere

$$<, >: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada $<, >$ işlemine M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.16. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için

$$1) D_{fX+gY} Z = f D_X Z + g D_Y Z, \forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, R)$$

$$2) D_X f Y = f D_X Y + (Xf) Y, \forall X, Y, \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, R)$$

özellikleri sağlanıyorsa, D ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve D_X ' e de X ' e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.17. I, R nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \rightarrow R^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne R^n uzayı içinde bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.18. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $s \in I$ için $\|\dot{\alpha}(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.19. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.20. Eğri bir $\alpha: I \xrightarrow{C^\infty} E^n$ eğrisi üzerinde Y bir C^∞ vektör alanı ve α üzerinde $D_T Y = 0$ ise Y vektör alanına α eğrisi üzerinde bir paralel vektör alanıdır denir. Eğer bir α eğrisi üzerinde $D_T T = 0$ ise α eğrisine bir jeodezik (geodezik) eğri adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.21. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\varphi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\varphi\}$ olmak üzere φ 'den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ 'ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret- Frenet r -ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.22. $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.23. Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.24. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i: I \rightarrow R, \quad 1 \leq i \leq r,$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.25. R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için $\kappa: I \rightarrow R$, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.26. Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere $\tau: I \rightarrow R$, $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.27. E^3 de birim hızlı bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere $k_g = \|D_T T\| = \left\| \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right\|$ ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen E^3 deki geodezik eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.28. $b \in R, b \neq 0$ ve $r \in R^+$ olmak üzere $\alpha(t) = (rcost, rsint, bt)$ ile verilen $\alpha: R \rightarrow R^3$ eğrisine R^3 uzayında bir dairesel helis denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.29. N bir C^∞ sınıfından $(n-1)$ -manifold olsun. Eğer $f: N \rightarrow E^n$ fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = M$ manifolduna E^n nin bir hiperyüzeyi denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.30. Z, M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olmak üzere M' nin bir p noktasında

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} Z$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında Z birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.31. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M' nin bir p noktasındaki $p \in M$ şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$H: M \rightarrow R$$

$$p \rightarrow H(p) = izS(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M 'nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de ortalama eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.32. M ve N , E^3 uzayında yüzeyler olmak üzere $f: M \rightarrow N$ fonksiyonu birebir, örten ve düzgün bir fonksiyon olsun. M içinde her $\alpha: [c, d] \rightarrow M$ eğri parçası için $f \circ \alpha$ eğrisinin uzunluğu, α 'nın uzunluğuna eşit ise $f: M \rightarrow N$ fonksiyonuna, M den N ye bir izometri denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.33. M ve $\bar{M}$ birer C^∞ manifold ve

$$f: M \rightarrow \bar{M}$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f 'nin f_* Jakobian matrisi $\forall p \in M$ noktasında regüler ise f ye M den $\bar{M}$ içine bir immersiyon (=daldırma) denir. Bir başka ifade ile $rank f = boy M$ ise f bir immersiyondur (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.34. Bir Riemann 3-manifold (M^3, g) ve $\gamma: I \rightarrow M$ yay uzunluklu bir eğri olsun. M üzerinde birim hızlı bir γ eğrisi için eğer $g(\gamma'', \gamma'') \neq 0$ ise γ eğrisi Frenet eğrisidir (Hacısalıhoğlu ve Kocayığit, 2011).

Tanım 2.1.35. (M, g) ve (N, h) iki Riemann manifold olsun. $f: M \rightarrow N$ smooth embedding' i $g = f^* h$ olacak şekilde metriği koruyorsa, yani herhangi $u, v \in T_x M$ tanjant vektörü için $g(v, w) = h(df(v), df(w))$ ise izometrik immersiyon olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

3. BÖLÜM

3.1. Biharmonik Eğriler İçin Temel Tanım Ve Teoremler

Chen ve Ishikawa E_v^w yarı Öklid uzayında biharmonik eğrileri sınıflandırmıştır. Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik ve torsiyon açısından 1.tip eğriler ve biharmonik eğrilerin karakterizasyonları verildi. Ayrıca, E^3 de 1. tip eğrinin dairesel helis ve aynı uzayda biharmonik eğrinin bir geodezik olduğu gösterildi.

Bir Riemann 3-manifold (M^3, g) olsun. $\gamma: I \rightarrow M$, M üzerinde yay uzunluklu bir eğri olsun. Yani hız vektör alanı γ' için $g(\gamma', \gamma') = 1$ dir. Birim hızlı bir γ eğrisi, $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ ise geodeziktir, burada $\nabla, (M^3, g)$ ' de levi-civita konneksiyonudur. Özellikle yay uzunluklu bir γ eğrisi $\kappa = 0$ ise geodeziktir, burada κ, γ' nın eğriliğidir.

İlk olarak $g(\gamma'', \gamma'') \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Birim hızlı bir γ eğrisi için eğer $g(\gamma'', \gamma'') \neq 0$ ise γ eğrisi Frenet eğrisidir. Her γ Frenet eğrisi boyunca $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet çatı alanının ortonormal olduğu kabul edilir, öyle ki $V_1 = \gamma'(s)$ ve Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\gamma'} V_1 \\ \nabla_{\gamma'} V_2 \\ \nabla_{\gamma'} V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

$\kappa \geq 0$ ve τ fonksiyonları sırasıyla eğrilik ve torsiyon olarak adlandırılır. γ nın V_1, V_2, V_3 vektör alanları sırasıyla teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı olarak adlandırılır. Sabit eğrilik ve sıfır torsiyon ile bir Frenet eğrisi bir pseudo daire olarak adlandırılır. Dairesel helis olan bir Frenet eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sabittir. Pseudo daireler dejenere helisler olarak kabul edilmektedir. Helisler, çoğunlukla dairesel olmayan uygun helisler olarak adlandırılır. Daha genel olarak sabit eğrilikli ve sıfır torsiyonu ile bir eğri bir daire olarak adlandırılır. Riemann dairelerinin geodezikleri sıfır eğrilikli olarak kabul edilmektedir.

γ nın Laplace-Beltrami operatörünü Δ ile gösterelim ve γ boyunca ortalama eğrilik vektör alanını H ile gösterelim.

H ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \nabla_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'} V_1 = \kappa V_2 \quad (3.1.2)$$

ile verilir. Burada κ, γ nın eğriliğidir.

γ nın Laplace operatörü

$$\Delta = -\nabla_{\gamma'}^2 = -\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \quad (3.1.3)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1.1. $M \subset E^{n+d}$ bir kompakt alt manifold ve $x: M \rightarrow E^{n+d}$ bir izometrik immersiyon olsun. $x = x_0 + \sum_{i=1}^k x_i$ durumunda M ye sonlu tiptendir denir, burada x_0 sabit vektör ve $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ dir, diğer durumda M ye sonsuz tiptendir denir ve $x_1, x_2, \dots, x_k$ sabit olmayan fonksiyonlardır (Chen, 1984).

Teorem 3.1.1. k -tipi $M \subset E^{n+d}$ alt manifold ancak ve ancak M nin ortalama vektör alanı H

$$\Delta^k H + c_1 \Delta^{k-1} H + \dots + c_{k-1} \Delta H + c_k H = 0 \quad (3.1.4)$$

dır. Burada

$$c_1 = -\sum_{t=q}^q \lambda_t$$

$$c_2 = \sum_{t < s} \lambda_t \lambda_s$$

.

.

.

$$c_{q-p+1} = (-1)^{q-p+1} \lambda_p \dots \lambda_q, \quad (k = q - p + 1)$$

burada, $\Delta x_i = \lambda_i x_i, (1 \leq i \leq k)$ (Hacısalıhoğlu ve Kocayigit, 2011).

Yukarıdaki teoreme göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1.2. M Riemann 3-manifoldu üzerinde birim hızlı bir eğri $\gamma: I \rightarrow M$ olsun. Bu eğri 1.tip ise

$$\Delta H = \lambda H \quad (3.1.5)$$

dir.

Tanım 3.1.3. M Riemann 3-manifoldu üzerinde birim hızlı 1.tip bir eğri $\gamma: I \rightarrow M$ olsun. Eğer

$$\Delta H = 0 \quad (3.1.6)$$

ise γ eğrisine biharmoniktir denir.

Teorem 3.1.2. M , 3-boyutlu Öklid uzayında $\Delta(\Delta\gamma) = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ' nin biharmonik olmasıdır (Chen, 1984).

Tanım 3.1.4. M Riemann 3-manifoldu üzerinde birim hızlı bir eğri $\gamma: I \rightarrow M$ olsun. Eğer $\frac{\kappa}{\tau}$ sabit ise genel bir helisdir denir. Burada κ ve τ sabit değildir.

Lemma 3.1.1. Ortalama eğrilik vektör alanı H' ın harmonik olması için

$$\Delta H = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} = 0 \quad (3.1.7)$$

olmasıdır (Chen, 1984).

Teorem 3.1.3. $\gamma: M \rightarrow E^m$ eğrisi boyunca H , $\Delta H = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ' nin biharmonik olmasıdır (Yani $\Delta(\Delta_\gamma) = 0$ çünkü $\Delta_\gamma = -H$) (Hacısalıhoğlu ve Kocayigit, 2011).

3.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında 1.Tip Eğriler Ve Biharmonik Eğriler İçin Karakterizasyonlar

Teorem 3.2.1. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay parametrelili bir Frenet eğrisi γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = \lambda H$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}\kappa\kappa' &= 0, \\ \kappa\tau^2 + \kappa^3 - \kappa'' &= \lambda\kappa, \\ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' &= 0\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

olmasıdır (Hacısalıhoğlu ve Kocayığit, 2011).

İspat. (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) den

$$\begin{aligned}\Delta H &= \Delta\kappa V_2 \\ &= -\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}\kappa V_2 \\ &= -(\nabla_{\gamma'}\gamma'[\kappa V_2]) \\ &= -\nabla_{\gamma'}(\gamma'(\kappa)V_2 + \kappa\gamma'(V_2)) \\ &= -(\nabla_{\gamma'}\gamma'(\kappa)V_2 + \nabla_{\gamma'}\kappa\gamma'(V_2)) \\ &= -(\gamma'[\gamma'(\kappa)V_2] + \gamma'[\kappa\gamma'(V_2)]) \\ &= -(\gamma'(\gamma'(\kappa))V_2 + \gamma'(V_2)\gamma'(\kappa) + \gamma'(V_2)\gamma'(\kappa) + \gamma'(\gamma'(V_2))\kappa) \\ &= -(\gamma'(\gamma'(\kappa))V_2 + (-2\kappa V_1 + 2\tau V_3)\kappa' + \gamma'(-\kappa V_1 + \tau V_3)\kappa) \\ &= -(\kappa''V_2 + (-2\kappa V_1 + 2\tau V_3)\kappa' - \kappa\gamma'(\kappa)V_1 - \kappa^2\gamma'(V_1) + \kappa\gamma'(\tau)V_3 + \gamma'(V_3)\kappa\tau) \\ \Delta H &= -\kappa''V_2 + \kappa^3V_2 + \tau^2\kappa V_2 + 2\kappa\kappa'V_1 + \kappa\kappa'V_1 - 2\tau\kappa'V_3 - \kappa\tau'V_3 \\ \Delta H &= (-\kappa'' + \kappa^3 + \tau^2\kappa)V_2 + 3\kappa\kappa'V_1 - (2\tau\kappa' + \kappa\tau')V_3\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

elde edilir.

(3.1.2) ve (3.1.5) den

$$3\kappa\kappa'V_1 - (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)V_2 - (2\kappa'\tau + \kappa\tau')V_3 = \lambda\kappa V_2\tag{3.2.3}$$

elde edilir.

(3.2.3) denkleminde (3.2.1) elde edilir.

Tersine (3.2.1) denklemleri (3.1.5) denklemini sağlamaktadır. ($\Delta H = \lambda H$)

Teorem 3.2.2. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay parametrelili bir Frenet eğrisi γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = \lambda H$ sağlanması için $\Leftrightarrow \gamma$ nın bir dairesel helis olmasıdır. Burada

$$\lambda = \kappa^2 + \tau^2 \quad (3.2.4)$$

dir (Hacısalihoglu ve Kocayigit, 2011).

İspat. Teorem 3.2.1 den (3.2.1) sağlanır. (3.2.1), γ' nın bir dairesel helis olduğunu gösterir ve $\kappa = \text{sabittir}$. Dolayısıyla $\kappa'' = 0$ dır.

$$\kappa^3 + \kappa\tau^2 = \lambda\kappa \Rightarrow \kappa^2 + \tau^2 = \lambda$$

elde edilir (Hacısalihoglu ve Kocayigit, 2011).

Tersine γ bir dairesel helis ve $\lambda = \kappa^2 + \tau^2$ dir, κ ve τ sabitlerdir. Buradan $\Delta H = \lambda H$ sağlanır.

Teorem 3.2.3. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ nın bir geodezik olmasıdır (Hacısalihoglu ve Kocayigit, 2011).

İspat. I bir açık aralık ve $\gamma: I \rightarrow M$ yay uzunluklu bir eğri olsun, burada yay uzunluğu s dir. γ' nın Frenet çatı alanı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. (3.1.2) eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} H &= \nabla_{\gamma'} \kappa V_2 = \gamma'(\kappa) V_2 + \kappa \gamma'(V_2) \\ &= \gamma'(\kappa) V_2 - \kappa^2 V_1 + \kappa \tau V_3 \\ &= \kappa' V_2 - \kappa^2 V_1 + \kappa \tau V_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

H ın Laplasyanını hesaplırsak

$$-\Delta H = \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} H = -3\kappa\kappa' V_1 + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) V_2 + (2\kappa'\tau' + \kappa\tau') V_3$$

dir.

Böylece γ eğrisi boyunca $\Delta H = 0$ ' ın sağlanması için $\Leftrightarrow \kappa = 0$ olmasıdır. Bu nedenle γ bir geodeziktir.

Tersine her geodezik eğri için $\Delta H = 0$ dır.

Sonuç 3.2.1. E^3 Öklid uzayında γ bir eğri olsun. γ nın biharmonik olması için $\Leftrightarrow \gamma'$ nın bir doğru olmasıdır (Hacısalıhoğlu ve Kocayiğit, 2011).

Teorem 3.2.4. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay uzunluklu bir Frenet eğrisi γ olsun. γ aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar (Hacısalıhoğlu ve Kocayiğit, 2011).

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \lambda_1 \nabla_{\gamma'}^2 V_1 + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_3 V_1 = 0, \quad (3.2.5)$$

burada

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right) \\ \lambda_2 &= -\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 + \tau^2 \\ \lambda_3 &= \kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' \end{aligned}$$

İspat. (3.1.1) kullanılarak

$$\nabla_{\gamma'} V_1 = \kappa V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{\kappa} \nabla_{\gamma'} V_1 \quad (3.2.6)$$

elde edilir. (3.1.1) ve (3.2.6) kullanılarak

$$\nabla_{\gamma'} V_3 = -\frac{\tau}{\kappa} \nabla_{\gamma'} V_1 \quad (3.2.7)$$

elde edilir. $\nabla_{\gamma'} V_2 = -\kappa V_1 + \tau V_3$ den

$$V_3 = \frac{1}{\tau} \nabla_{\gamma'} V_2 + \frac{\kappa}{\tau} V_1 \quad (3.2.8)$$

dir.

Şimdi (3.2.6) ile (3.2.8) birlikte göz önüne alınırsa,

$$V_3 = \frac{1}{\tau} \nabla_{\gamma'} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla_{\gamma'} V_1 \right) + \frac{\kappa}{\tau} V_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tau} \left(\gamma' \left(\frac{1}{\kappa} \right) \nabla_{\gamma'} V_1 + \frac{1}{\kappa} \nabla^2_{\gamma'} V_1 \right) + \frac{\kappa}{\tau} V_1 \\
V_3 &= -\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \nabla_{\gamma'} V_1 + \frac{1}{\tau \kappa} \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \frac{\kappa}{\tau} V_1
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

olduğu görülür.

(3.2.9) de kovaryant türev alınır ve (3.2.7) dikkate alınır,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'} V_3 &= -\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \nabla_{\gamma'} \left(-\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right) \nabla_{\gamma'} V_1 + \frac{1}{\kappa \tau} \nabla^3_{\gamma'} V_1 + \nabla_{\gamma'} \left(\frac{1}{\tau \kappa} \right) \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \frac{\kappa}{\tau} \nabla_{\gamma'} V_1 \\
&\quad + \nabla_{\gamma'} \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) V_1
\end{aligned}$$

dir.

Her iki tarafı $\kappa \tau$ ' ya bölersek

$$\begin{aligned}
&\nabla^3_{\gamma'} V_1 + \left(\frac{-\kappa'}{\kappa} \right) \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \kappa^2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \tau \kappa \left(-\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right) \nabla_{\gamma'} V_1 + \tau \kappa \nabla_{\gamma'} \left(\frac{1}{\tau \kappa} \right) \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \tau \kappa \nabla_{\gamma'} \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) V_1 \\
&\quad = -\tau^2 \nabla_{\gamma'} V_1 \\
&\nabla^3_{\gamma'} V_1 + \left(\frac{-\kappa'}{\kappa} \right) \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \tau \kappa \left(\frac{-\tau' \kappa - \kappa' \tau}{(\tau \kappa)^2} \right) \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \tau \kappa \left(\frac{-\kappa'' \tau \kappa^2 + \tau' \kappa^2 \kappa' + 2 \kappa \kappa' \kappa'}{(\tau \kappa^2)^2} \right) \nabla_{\gamma'} V_1 \\
&\quad + \kappa^2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \tau \kappa \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' V_1 = -\tau^2 \nabla_{\gamma'} V_1 \\
&\nabla^3_{\gamma'} V_1 + (\kappa^2 + \tau^2) \nabla_{\gamma'} V_1 + \left(\frac{-\kappa'}{\kappa} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} \right) \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \left(\frac{-\kappa''}{\kappa} + \frac{\tau' \kappa'}{\tau \kappa} + 2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \right) \nabla_{\gamma'} V_1 \\
&\quad + \tau \kappa \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' V_1 = 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece (3.2.5) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.2.2. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay uzunluklu bir Frenet eğrisi γ olsun. Sonra γ' nın genel bir helis olması için $\Leftrightarrow$

$$\nabla^3_{\gamma'} V_1 + \lambda \nabla^2_{\gamma'} V_1 + \mu \nabla_{\gamma'} V_1 = 0 \tag{3.2.10}$$

dir. Burada

$$\lambda = -3 \frac{\kappa'}{\kappa}$$

$$\mu = -\frac{\kappa''}{\kappa} + 3 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + \kappa^2 + \tau^2$$

dir (Hacısalıhoğlu ve Kocayığit, 2011).

İspat. γ' nın bir genel helis olduğunu kabul edelim, yani $\frac{\kappa}{\tau}$ sabittir, diğer bir deyişle $\kappa'\tau = \kappa\tau'$ dır. (3.2.5) de $\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$ değerini değiştirirsek (3.2.10) elde edilir. $\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$ olduğundan $\tau\kappa\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' V_1 = 0$ dır.

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \left(-3 \frac{\kappa'}{\kappa}\right) \nabla_{\gamma'}^2 V_1 + \left(-\frac{\kappa''}{\kappa} + 3 \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 + \tau^2\right) \nabla_{\gamma'} V_1 = 0$$

elde edilir.

Tersine varsayalım ki (3.2.10) sağlansın. Bu γ eğrisinin genel helis olduğunu göstermektedir. (3.2.5) den (3.2.10)' u elde etmek için $\frac{\kappa}{\tau}$ sabit olmalıdır. Böylece γ genel helisdir.

Sonuç 3.2.3. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay parametrelili bir Frenet eğrisi γ olsun. Daha sonra γ bir genel helisdir $\Leftrightarrow \gamma$ eğrisi boyunca

$$\Delta H + \lambda \nabla_{\gamma'} H + \mu H = 0. \quad (3.2.11)$$

Burada

$$\lambda = 3 \frac{\kappa'}{\kappa}$$

$$\mu = \frac{\kappa''}{\kappa} - 3 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 - \kappa^2 - \tau^2$$

dır (Hacısalıhoğlu ve Kocayığit, 2011).

İspat. (3.2.10), (3.1.2) ve (3.1.3) e göre

$$-\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \mu \kappa V_2 = 0$$

$$-\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \kappa V_2 + \lambda \nabla_{\gamma'} H + \mu H = 0$$

$$\Delta H + \lambda \nabla_{\gamma'} H + \mu H = 0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) açıktır.

Sonuç 3.2.4. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay parametrelili bir Frenet eğrisi γ olsun. Daha sonra γ bir dairesel helisdir $\Leftrightarrow$

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + (\kappa^2 + \tau^2) \nabla_{\gamma'} V_1 = 0. \quad (3.2.12)$$

(3.2.5) kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.

Dairesel helis olduğundan κ ve τ sabittir. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = \kappa^2 + \tau^2$ olur. (3.2.5) den

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + (\kappa^2 + \tau^2) \nabla_{\gamma'} V_1 = 0$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu ve Kocayığıt, 2011).

Sonuç 3.2.5. (M^3, g) Riemann 3-manifoldu üzerinde yay parametrelili bir Frenet eğrisi γ olsun. Daha sonra γ bir dairesel helisdir $\Leftrightarrow$

$$\Delta H + \lambda H = 0. \quad (3.2.13)$$

burada $\lambda = -(\kappa^2 + \tau^2)$ dir. (3.2.5), (3.1.2) ve (3.1.3) kullanılırsa,

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \lambda_1 \nabla_{\gamma'}^2 V_1 + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_3 V_1 = 0$$

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_1 \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_3 V_1 = 0$$

$$-\Delta H + (\kappa^2 + \tau^2) H = 0$$

$$\Delta H + (-(\kappa^2 + \tau^2)) H = 0 \Rightarrow \Delta H + \lambda H = 0$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu ve Kocayığıt, 2011).

4. BÖLÜM

4.1. 3-Boyutlu Galilean Uzayı İle İlgili Temel Tanımlar

Tanım 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ reel afın uzayı $\vec{X} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{Y} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin. Bu uzay üzerinde Galilean skaler çarpımı

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 \neq 0 \text{ veya } x_2 \neq 0 \text{ ise} \\ y_1 y_2 + z_1 z_2, & x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ ikilisine 3-boyutlu Galilean uzayı denir ve G_3 ile gösterilir (Tatlıpınar, 2011).

Tanım 4.1.2. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}), i = 1, 2$ noktaları arasındaki uzaklık

$$g(P_1, P_2) = \begin{cases} |p_{21} - p_{11}|, & p_{21} \neq p_{11} \\ \sqrt{(p_{22} - p_{12})^2 + (p_{23} - p_{13})^2}, & p_{21} = p_{11} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Tatlıpınar, 2011).

Tanım 4.1.3. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. $\gamma(I) \subset G_3$ noktalar kümesine G_3 3-boyutlu Galilean uzayında bir eğri denir (Erjavec vd., 2011).

3-boyutlu G_3 Galilean uzayında x yay parametrelili bir eğri

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3, \gamma(x) = (x, y(x), z(x))$$

olsun. $\kappa(x)$ eğriliği ve $\tau(x)$ torsiyonu,

$$\kappa(x) = \sqrt{(y''(x))^2 + (z''(x))^2}$$

$$\tau(x) = \frac{\det(\gamma'(x), \gamma''(x), \gamma'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklinde tanımlanır ve γ boyunca Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olmak üzere

$$V_1(x) = \gamma'(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

$$V_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, y''(x), z''(x))$$

$$V_3(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x))$$

şeklinde tanımlanır. Bu vektör alanları için aşağıdaki Frenet formülleri verilsin.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\gamma'} V_1 \\ \nabla_{\gamma'} V_2 \\ \nabla_{\gamma'} V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

Tanım 4.1.4. γ , 3-boyutlu Galilean uzayında birim hızlı bir eğri olsun. γ nın Laplace-Beltrami operatörünü Δ ile gösterelim ve γ boyunca ortalama eğrilik vektör alanını H ile gösterelim.

H ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \nabla_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'} V_1 = \kappa V_2 \quad (4.1.2)$$

şeklinde verilir. Burada κ , γ nın eğriliğidir.

γ' nın Laplace operatörü

$$\Delta = -\nabla_{\gamma'}^2 = -\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \quad (4.1.3)$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.1.5. γ , 3-boyutlu Galilean uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri 1.tip ise

$$\Delta H = \lambda H \quad (4.1.4)$$

dir.

Tanım 4.1.6. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında γ bir eğri ve $\{V_1, V_2, V_3\}$, γ boyunca Frenet çatısı olsun.

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit} \quad (4.1.5)$$

ise γ eğrisine bir genel helis denir (Tatlıpınar, 2010).

Tanım 4.1.7. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında γ bir eğri ve $\{V_1, V_2, V_3\}$, γ boyunca pozitif Frenet çatısı olsun. Eğer κ ve τ , γ boyunca pozitif sabitlerse, γ' ya Frenet çatısına göre bir dairesel helis denir (Tatlıpınar, 2010).

4.2. 3-Boyutlu Galilean Uzayında 1.Tip Eğriler Ve Biharmonik Eğriler İçin

Karakterizasyonlar

Teorem 4.2.1. 3-boyutlu Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = \lambda H$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}\kappa\tau^2 - \kappa'' &= \lambda\kappa, \\ -2\kappa'\tau - \kappa\tau' &= 0.\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

İspat. (4.1.1), (4.1.2) ve (4.1.3) den

$$\begin{aligned}\Delta H &= \Delta\kappa V_2 \\ &= -\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}\kappa V_2 \\ &= -(\nabla_{\gamma'}\gamma'[\kappa V_2]) \\ &= -\nabla_{\gamma'}(\gamma'(\kappa)V_2 + \kappa\gamma'(V_2)) \\ &= -(\nabla_{\gamma'}\gamma'(\kappa)V_2 + \nabla_{\gamma'}\kappa\gamma'(V_2)) \\ &= -(\gamma'[\gamma'(\kappa)V_2] + \gamma'[\kappa\gamma'(V_2)]) \\ &= -(\gamma'(\gamma'(\kappa))V_2 + \gamma'(V_2)\gamma'(\kappa) + \gamma'(V_2)\gamma'(\kappa) + \gamma'(\gamma'(V_2))\kappa) \\ &= -(\gamma'(\gamma'(\kappa))V_2 + (\tau V_3 + \tau V_3)\kappa' + \kappa\gamma'(\tau V_3)) \\ &= -(\kappa''V_2 + (\tau V_3 + \tau V_3)\kappa' + \kappa(\gamma'(\tau)V_3 + \tau\gamma'(V_3))) \\ \Delta H &= -(\kappa''V_2 + 2\tau\kappa'V_3 + \kappa\tau'V_3 - \tau^2\kappa V_2) \\ \Delta H &= (-\kappa'' + \tau^2\kappa)V_2 + (-2\tau\kappa' - \kappa\tau')V_3\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

elde edilir.

(4.1.2) ve (4.1.4) den

$$(-\kappa'' + \kappa\tau^2)V_2 + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau')V_3 = \lambda\kappa V_2\tag{4.2.3}$$

elde edilir. (4.2.3) denkleminde (4.2.1) ifadesi elde edilir.

Tersine (4.2.1) denklemleri $\Delta H = \lambda H$ denklemini sağlamaktadır. ($\Delta H = \lambda H$)

Teorem 4.2.2. 3-boyutlu Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = \lambda H$ sağlanması için $\Leftrightarrow \gamma$ nın bir dairesel helis olmasıdır. Burada

$$\lambda = \tau^2 \quad (4.2.4)$$

dir.

İspat. Teorem 4.2.1 den (4.2.1) sağlanır.

$$-2\kappa'\tau - \kappa\tau' = 0 \Rightarrow 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$$

$$2\kappa\kappa'\tau + \kappa^2\tau' = 0$$

$$(\kappa^2\tau)' = 0$$

$$\kappa^2\tau = \text{sabit}$$

elde edilir.

(4.2.1), γ' nın bir dairesel helis olduğunu gösterir ve $\kappa = \tau = \text{sabit}$ tir. Dolayısıyla $\kappa'' = 0$ dır.

$$\kappa\tau^2 = \lambda\kappa \Rightarrow \tau^2 = \lambda$$

elde edilir.

Tersine γ bir dairesel helis ve $\lambda = \tau^2$ dir, κ ve τ sabitlerdir, $\kappa''=0$, $\kappa'=0$, $\tau'=0$ olur. Buradan $\Delta H = \lambda H$ sağlanır.

Teorem 4.2.3. 3-boyutlu Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ' nın bir geodezik olmasıdır.

İspat. I bir açık aralık ve $\gamma: I \rightarrow G_3$ yay uzunluklu bir eğri olsun, burada yay uzunluğu s dir. γ nın Frenet çatı alanı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. (4.1.2) eşitliği kullanarak,

$$\nabla_{\gamma'} H = \nabla_{\gamma'} \kappa V_2 = \gamma'(\kappa) V_2 + \kappa \gamma'(V_2)$$

$$= \gamma'(\kappa) V_2 + \kappa \tau V_3$$

$$= \kappa' V_2 + \kappa \tau V_3$$

elde edilir.

H' ın Laplasyanını hesaplırsak

$$-\Delta H = \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} H = (\kappa'' - \kappa \tau^2) V_2 + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') V_3$$

dir. Böylece γ eğrisi boyunca $\Delta H = 0$ ın sağlanması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır. Bu nedenle γ bir geodeziktir.

Tersine her geodezik eğri için $\kappa=0$ dır. Buradan $\Delta H = 0$ dır.

Sonuç 4.2.1. G^3 galilean uzayında γ bir eğri olsun. γ' nın biharmonik olması için $\Leftrightarrow \gamma'$ nin bir doğru olmasıdır.

Teorem 4.2.4. 3-boyutlu Galilean uzayında yay uzunluklu bir eğri γ olsun. γ aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar.

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \lambda_1 \nabla_{\gamma'}^2 V_1 + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_3 V_1 = 0 \quad (4.2.5)$$

Burada

$$\lambda_1 = -\left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa' \tau'}{\kappa \tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \tau^2$$

$$\lambda_3 = 0$$

İspat. (4.1.1) kullanılarak

$$\nabla_{\gamma'} V_1 = \kappa V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{\kappa} \nabla_{\gamma'} V_1 \quad (4.2.6)$$

elde edilir. (4.1.1) ve (4.2.6) kullanılarak

$$\nabla_{\gamma'} V_3 = -\frac{\tau}{\kappa} \nabla_{\gamma'} V_1 \quad (4.2.7)$$

elde edilir. $\nabla_{\gamma'} V_2 = \tau V_3$ den

$$V_3 = \frac{1}{\tau} \nabla_{\gamma'} V_2 \quad (4.2.8)$$

dir.

Şimdi (4.2.6) ile (4.2.8) birlikte göz önüne alınırsa,

$$V_3 = \frac{1}{\tau} \nabla_{\gamma'} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla_{\gamma'} V_1 \right)$$

$$V_3 = \frac{1}{\tau} \left(\gamma' \left(\frac{1}{\kappa} \right) \nabla_{\gamma'} V_1 + \frac{1}{\kappa} \nabla_{\gamma'}^2 V_1 \right)$$

$$V_3 = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\nabla_{\gamma'}V_1 + \frac{1}{\tau\kappa}\nabla_{\gamma'}^2V_1 \quad (4.2.9)$$

olduğu görülür.

(4.2.9) de kovaryant türev alınır ve (4.2.7) dikkate alınır,

$$\nabla_{\gamma'}V_3 = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\nabla_{\gamma'}^2V_1 + \nabla_{\gamma'}\left(-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\nabla_{\gamma'}V_1 + \frac{1}{\kappa\tau}\nabla_{\gamma'}^3V_1 + \nabla_{\gamma'}\left(\frac{1}{\tau\kappa}\right)\nabla_{\gamma'}^2V_1$$

dir.

Her iki tarafı $\kappa\tau$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}^3V_1 + \left(\frac{-\kappa'}{\kappa}\right)\nabla_{\gamma'}^2V_1 + \tau\kappa\gamma'\left(-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\nabla_{\gamma'}V_1 + \tau\kappa\nabla_{\gamma'}\left(\frac{1}{\tau\kappa}\right)\nabla_{\gamma'}^2V_1 \\ = -\tau^2\nabla_{\gamma'}V_1 \\ \nabla_{\gamma'}^3V_1 + \left(\frac{-\kappa'}{\kappa}\right)\nabla_{\gamma'}^2V_1 + \tau\kappa\left(\frac{-\tau'\kappa - \kappa'\tau}{(\tau\kappa)^2}\right)\nabla_{\gamma'}^2V_1 \\ + \tau\kappa\left(\frac{-\kappa''\tau\kappa^2 + \tau'\kappa^2\kappa' + 2\tau\kappa\kappa'\kappa'}{(\tau\kappa^2)^2}\right)\nabla_{\gamma'}V_1 = -\tau^2\nabla_{\gamma'}V_1 \\ \nabla_{\gamma'}^3V_1 + \tau^2\nabla_{\gamma'}V_1 + \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau}\right)\nabla_{\gamma'}^2V_1 + \left(\frac{-\kappa''}{\kappa} + \frac{\tau'\kappa'}{\tau\kappa} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2\right)\nabla_{\gamma'}V_1 = 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece (4.2.5) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.2.2. 3-boyutlu Galilean uzayında yay uzunluklu bir eğri γ olsun. Sonra γ' nin genel bir helis olması için $\Leftrightarrow$

$$\nabla_{\gamma'}^3V_1 + \lambda\nabla_{\gamma'}^2V_1 + \mu\nabla_{\gamma'}V_1 = 0 \quad (4.2.10)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \lambda &= -3\frac{\kappa'}{\kappa} \\ \mu &= -\frac{\kappa''}{\kappa} + 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \tau^2 \end{aligned}$$

dir.

İspat. Varsayalım ki γ genel helisdir, yani $\frac{\kappa}{\tau}$ sabittir, diğer bir deyişle $\kappa'\tau = \kappa\tau'$ dur. (4.2.5) de $\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$ değerini değiştirirsek (4.2.10) elde edilir.

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \left(-3 \frac{\kappa'}{\kappa}\right) \nabla_{\gamma'}^2 V_1 + \left(-\frac{\kappa''}{\kappa} + 3 \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \tau^2\right) \nabla_{\gamma'} V_1 = 0$$

elde edilir.

Tersine varsayalım ki (4.2.10) sağlansın. Bu γ eğrisinin genel helis olduğunu göstermektedir. (4.2.5) den (4.2.10)' u elde etmek için $\frac{\kappa}{\tau}$ sabit olmalıdır. Böylece γ genel helisdir.

Sonuç 4.2.3. 3-boyutlu Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ bir genel helisdir $\Leftrightarrow \gamma$ eğrisi boyunca

$$\Delta H + \lambda \nabla_{\gamma'} H + \mu H = 0. \quad (4.2.11)$$

Burada

$$\lambda = 3 \frac{\kappa'}{\kappa}$$

$$\mu = \frac{\kappa''}{\kappa} - 3 \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2$$

dır.

İspat. (4.2.10), (4.1.2) ve (4.1.3) e göre

$$-\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \mu \kappa V_2 = 0$$

$$-\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \kappa V_2 + \lambda \nabla_{\gamma'} H + \mu H = 0$$

$$\Delta H + \lambda \nabla_{\gamma'} H + \mu H = 0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) açıktır.

Sonuç 4.2.4. 3-boyutlu Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ bir dairesel helisdir $\Leftrightarrow$

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \tau^2 \nabla_{\gamma'} V_1 = 0. \quad (4.2.12)$$

(4.2.5) kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.

γ bir dairesel helis olduğundan κ ve τ sabittir. Buna göre $\kappa'=\tau'=0$ dır. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = \tau^2$ olur. (4.2.5) den

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \tau^2 \nabla_{\gamma'} V_1 = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.5. 3-boyutlu Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ bir dairesel helisdir $\Leftrightarrow$

$$\Delta H + \lambda H = 0. \quad (4.2.13)$$

burada $\lambda = -\tau^2$ dir.

(4.2.5), (4.1.2) ve (4.1.3) kullanılırsa,

$$\nabla_{\gamma'}^3 V_1 + \lambda_1 \nabla_{\gamma'}^2 V_1 + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_3 V_1 = 0$$

(γ bir dairesel helis olduğundan $\kappa = \tau = \text{sabit}$)

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_1 \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} V_1 + \lambda_3 V_1 = 0$$

$$-\Delta H + (\tau^2)H = 0$$

$$\Delta H + (-\tau^2)H = 0 \Rightarrow \Delta H + \lambda H = 0$$

elde edilir.

4.3. 3-Boyutlu Equiform Galilean Uzayı İle İlgili Tanımlar

Tanım 4.3.1. 3-boyutlu Equiform Galilean uzayında birim hızlı bir γ eğrisi için Frenet-Serret formülleri

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\sigma} &= \kappa T + N \\ \frac{dN}{d\sigma} &= \kappa N + \tau B \\ \frac{dB}{d\sigma} &= -\tau N + \kappa B\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

şeklindedir. Burada σ equiformunun değişmez parametresi $\sigma = \int \frac{ds}{\sigma}$ şeklinde tanımlanır (Erjavec vd., 2011).

Tanım 4.3.2. γ , 3-boyutlu Equiform Galilean uzayında birim hızlı bir eğrinin equiform eğriliği ve equiform torsiyonu

$$\kappa = \dot{\rho}, \quad \tau = \rho\tau = \frac{\tau}{\kappa}$$

burada ρ , eğrinin eğrilik yarıçapıdır (Erjavec vd., 2011).

Tanım 4.3.3. γ , 3-boyutlu Equiform Galilean uzayında birim hızlı bir eğri olsun. γ nın Laplace-Beltrami operatörünü Δ ile gösterelim ve γ boyunca ortalama eğrilik vektör alanını H ile gösterelim.

H ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \nabla_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'} V_1 = \kappa V_2\tag{4.3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada κ , γ nın eğriliğidir.

γ' nın Laplace operatörü

$$\Delta = -\nabla_{\gamma'}^2 = -\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'}\tag{4.3.3}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.3.4. γ , 3-boyutlu Equiform Galilean uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri 1.tip ise

$$\Delta H = \lambda H\tag{4.3.4}$$

şeklindedir.



4.4. 3-Boyutlu Equiform Galilean Uzayında 1.Tip Eğriler Ve Biharmonik Eğriler İçin Karakterizasyonlar

Teorem 4.4.1. 3-boyutlu Equiform Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = \lambda H$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} -\kappa'' - 3\kappa'\kappa - \kappa^3 + \kappa\tau^2 &= \lambda\kappa, \\ -2\kappa'\tau - 2\kappa^2\tau - \kappa' &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

olmasıdır.

İspat. (4.3.1), (4.3.2) ve (4.3.3) den

$$\begin{aligned} \Delta H &= \Delta\kappa V_2 \\ &= -\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} \kappa V_2 \\ &= -(\nabla_{\gamma'} \gamma' [\kappa V_2]) \\ &= -\nabla_{\gamma'} (\gamma'(\kappa) V_2 + \kappa \gamma'(V_2)) \\ &= -(\nabla_{\gamma'} \gamma'(\kappa) V_2 + \nabla_{\gamma'} \kappa \gamma'(V_2)) \\ &= -(\gamma'[\gamma'(\kappa) V_2] + \gamma'[\kappa \gamma'(V_2)]) \\ &= -(\gamma'(\gamma'(\kappa)) V_2 + \gamma'(V_2) \gamma'(\kappa) + \gamma'(V_2) \gamma'(\kappa) + \gamma'(\gamma'(V_2)) \kappa) \\ &= -(\gamma'(\gamma'(\kappa)) V_2 + (\kappa V_2 + \tau V_3) \kappa' + (\kappa V_2 + \tau V_3) \kappa' + \kappa \gamma'(\tau V_3)) \\ &= -(\kappa'' V_2 + (\tau V_3 + \tau V_3) \kappa' + \kappa(\gamma'(\tau) V_3 + \tau \gamma'(V_3))) \\ \Delta H &= -(\kappa'' V_2 + 2\tau \kappa' V_3 + \kappa \tau' V_3 - \tau^2 \kappa V_2) \\ \Delta H &= (-\kappa'' + \tau^2 \kappa) V_2 + (-2\tau \kappa' - \kappa \tau') V_3 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

elde edilir.

(4.3.2) ve (4.3.4) den

$$(-\kappa'' + \kappa\tau^2) V_2 + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau') V_3 = \lambda\kappa V_2 \quad (4.4.3)$$

elde edilir.

(4.4.3) denkleminde (4.4.1) elde edilir.

Tersine (4.4.1) denklemleri $\Delta H = \lambda H$ sağlamaktadır. ($\Delta H = \lambda H$)

Teorem 4.4.2. 3-boyutlu Equiform Galilean uzayında yay parametrelili bir eğri γ olsun. Daha sonra γ eğrisi boyunca $\Delta H = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ' 'nin bir geodezik olmasıdır.

İspat. I bir açık aralık ve $\gamma: I \rightarrow M$ yay uzunluklu bir eğri olsun, burada yay uzunluğu s dir. γ 'nin Frenet çatı alanı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. (4.3.2) eşitliği kullanarak,

$$\nabla_{\gamma'} H = \nabla_{\gamma'} \kappa V_2 = \gamma'(\kappa) V_2 + \kappa \gamma'(V_2) = \kappa' V_2 + \kappa^2 V_2 + \kappa \tau V_3$$

elde edilir.

H' 'in Laplasyanını hesaplırsak

$$-\Delta H = \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} H = (\kappa'' - \kappa \tau^2) V_2 + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') V_3$$

dir.

Böylece γ eğrisi boyunca $\Delta H = 0$ 'ın sağlanması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır. Bu nedenle γ bir geodeziktir.

Tersine her geodezik eğri için $\kappa=0$ dır. Buradan $\Delta H = 0$ dır.

5. BÖLÜM

Sonuç

- 1) Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında 1.tip eğriler ve biharmonik eğriler incelendi. E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında 1.tip eğrinin dairesel helis ve aynı uzayda biharmonik eğrinin bir geodezik olduğu gösterildi.
- 2) 3-boyutlu Galilean uzayında 1.tip eğriler ve biharmonik eğriler incelendi ve yine 1.tip eğrinin dairesel helis ve biharmonik eğrinin bir geodezik olduğu ispatlandı.
- 3) 3-boyutlu Equiform Galilean uzayında 1.tip eğri olması için gerek ve yeter şartlar incelendi. Yine bu uzayda biharmonik eğrinin bir geodezik olduğu sonucuna varıldı.



KAYNAKLAR

Chen, B. Y., 1984, Total Mean Curvature and Submanifolds Of Finite Type, World Scientific.

Chen, B. Y., and Ishikawa, S., 1991, Biharmonic Surfaces in Pseudo-Euclidean Spaces, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A, 45(2), 309-328.

Erjavec, Z., Divjak, B., and Horvat, D., 2011, The General Solutions Of Frenets System in The Equiform Geometry Of The Galilean, Pseudo-Galilean, Simple Isotropic And Double Isotropic Space, International Math. Forum, 6(17), 837-856.

Hacısalıhoğlu, Hilmi H., Diferensiyel Geometri, I.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 1998.

Hacısalıhoğlu, Hilmi H., Diferensiyel Geometri, II.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 1994.

Jun-Ichi, Inoguchi, 2003, Biharmonic Curves in Minkowski 3-Space, IJMMS, 21, 1365–1368.

Keleş, S., Perktas Yüksel, S., Kılıç E., 2010, Biharmonic Curves in Lorentzian Para-Sasakian Manifolds, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., (2) 33(2), 325–344.

Kocayigit, H. and Hacısalıhoğlu, Hilmi H., 2009, 1-Type And Biharmonic Frenet Curves In Lorentzian 3-Space, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, 33(A2), 160-168.

Kocayigit, H. and Hacısalıhoğlu, Hilmi H., 2011, 1-Type Curves and Biharmonic Curves In Euclidean 3-Space, International Electronic Journal Of Geometry, 4(1), 97-101.

Kocayigit, H. and Hacısalıhoğlu, Hilmi H., 2012, Biharmonic Curves in Contact Geometry, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 61(2), 35-43.

Körpınar, T. and Turhan, E., 2009, On Characterization of Time-Like Horizontal Biharmonic Curves in the Lorentzian Heisenberg Group $Heis^3$, Z. Naturforsch 65a, 641-648.

Körpınar, T. and Turhan, E., 2011, Biharmonic Curves in $H^2 \times R$, Gen. Math. Notes, 4(1), 59-66.

Körpınar, T. and Turhan, E., 2012, Tubular Surfaces Around Timelike Biharmonic Curves in Lorentzian Heisenberg Group $Heis^3$, 20(1), 431-446.

Körpınar, T. and Turhan, E., 2013, Biharmonic Curves according to Parallel Transport Frame in E^4 , Bol. Soc. Paran. Mat., 31(2), 213–217.

Külahcı, M., 2016, Biharmonic Curves in Isotropic Space I_1^3 , Prespacetime Journal, 7(10), 1411-1415.

Öztürk, G., Bayram, B.K., Arslan K., 2014, Weak Biharmonic And Harmonic 1-Type Curves in Semi-Euclidean Space E_1^4 , Acta Universitatis Apulensis, 40, 97-101.

Perktaş, Yüksel S., Kılıç, E., 2012, On Biharmonic Curves in 3-dimensional Heisenberg Group, Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi 2 (2), 58-74.

Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2014.

Tatlıpınar, S., 2010, 3-Boyutlu Galilean Uzayında Eğriler Ve Karakterizasyonları, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Yano, K., and Kon, M., 1984, Structures On Manifolds, Series In Pure Mathematics, 3, World Scientific Publishing.

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2011 yılında Elazığ Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne girdim ve 2015 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. 2015 yılında başladığım Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa halen devam etmekteyim.

