

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BELİRSİZLİK İÇEREN DİNAMİK SİSTEMLERİN
LYAPUNOV METODUYLA KONTROLÜ**

134769

İhsan BAYIR

Yüksek Lisans Tezi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Anabilim Dalı

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
TEZ YAKLAŞIM BÖLÜMÜ

Bu tez, 10/10/2003 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile
başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet UÇAR

Üye: Doç. Dr. Sedat SÜNER

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hasan ALLİ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15/10/2002.. tarih ve

39/3 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

134769

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda bana yol gösteren ve çalışmam boyunca benden hiçbir yardımını esirgemeyen, danışman hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Ahmet UÇAR'a (Fırat Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü) teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, yardımlarından ve gösterdikleri yakınlıktan dolayı, Prof.Dr. Mustafa POYRAZ, Doç.Dr. Yakup DEMİR, Yrd.Doç.Dr. Mehmet ÖZDEMİR ve Fırat Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde görevli diğer tüm hocalarıma, öğretim elemanlarına; ve Arş.Gör. Tülay AKBEY, Arş.Gör. Vedat ÇELİK, Arş.Gör. Abdülcelil KÜLEKÇİOĞLU, Arş.Gör. Mahmut Temel ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Lisans öğrenimimde büyük bir emeği olan, hocam Doç.Dr. Mehmet AKIN'a (Dicle Üniversitesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü) ve yardımlarından dolayı tüm mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Son olarak, öğrenimim boyunca maddi-manevi desteğini esirgemeyen aileme, dayıma, teyzeme ve ailelerine, yakınlarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
1.1. Denge Noktaları.....	1
1.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Denge Noktasına Göre Doğrusallaştırılması	4
1.2.1. Doğrusallaştırma.....	4
1.2.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Kararlılığı.....	5
2. LYAPUNOV FONKSİYONU VE KARARLILIĞI	8
2.1. Giriş	8
2.2. Matris Özellikleri.....	10
2.2.1. Pozitif Tanımlı Matris ve Geometrik Anlamı	11
2.2.2. Pozitif Tanımlı Matris Özellikleri	12
2.3. Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler İçin Lyapunov Kararlılık.....	13
2.4. Doğrusal olmayan Sistemlerin Lyapunov Kararlılık Metoduyla İncelenmesi İçin Kullanılan Metodlar	14
2.4.1. Quadratik Form.....	15
2.4.2. Krasovskii Metodu.....	15
2.4.3. Variable Gradient Metodu.....	18
2.4.4. Sistemlerin Fiziksel Özelliklerden Yararlanarak Lyapunov Fonksiyonlarının Elde Edilmesi	20
2.5. Lyapunov Metodu ile Sistem Performansının Analizi	22
2.5.1. Hedeflenen Yörüngeye Erişme Oranı	22
2.5.2. Doğrusal Sistemlerin Sürekli Duruma Erişme Oranının Hesaplanması	23
2.5.3. Doğrusal Olmayan Sistemler İçin Sürekli Duruma Erişme Oranının Lyapunov Metodu ile Hesaplanması.....	25
3. DOĞRUSAL SİSTEMLER İÇİN GERİBESLEMELİ KONTROL	28
3.1. Giriş	28
3.2. Kontrol edilebilirlik	28
3.2.1. Tüm Durum Kontrol edilebilirlik	29
3.2.2. Çıkış Durum Kontrol edilebilirlik	31
3.3. Tüm Durum Kontrol Matrislerinin Hesaplanması	31
3.3.1. Kutup Yerleştirme Metodu ile Kontrol Matrisinin Hesaplanması	33
3.3.2. Ackermann Metodu ile Kontrol Matrisinin Hesaplanması	35
3.3.3. Yerine Bırakma Metodu ile Kontrol Matrisinin Hesaplanması	38

3.4. Optimal Kontrol Matrisinin Hesaplanması	38
3.4.1. Performans İndeksi	39
3.4.2. Lyapunov Metoduyla Parametre Optimizasyonu	39
3.4.3. Lineer Quadratik Optimal Kontrol	40
4. BELİRSİZLİK İÇEREN DİNAMİK SİSTEMLERİN LYAPUNOV METODUYLA KONTROLÜ	46
4.1. Giriş	46
4.2. Gutman ve Hagander Kontrolörü	46
4.3. Gutman-Hagander Kontrol Tasarımı	49
4.4. Parametre Belirsizliği İçeren Sistemlerin Lyapunov Metoduyla Kontrolü	61
5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	74
KAYNAKLAR:	76
ÖZGEÇMİŞ	77



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1: Fiziksel bir sistemde denge noktaları	2
Şekil 1.2: İkinci dereceden doğrusal bir sistemin özdeğerleri ile $x_1 - x_2$ düzleminde çizdirilmiş sistem yörüngeleri.	3
Şekil 1.3: $f(x)$ fonksiyonun $x = a$ noktasındaki doğrusallaştırılması.....	4
Şekil 1.4: Kararlılık kavramları 1) kararlı sistem 2) kararsız sistem 3) asimptotik kararlı sistem.	6
Şekil 2.1: İkinci dereceden bir sistemin pozitif tanımlı fonksiyonu	8
Şekil 2.2: Pozitif tanımlı fonksiyonların düzey eğrileri ile gösterimi.....	9
Şekil 2.3: Bir M matrisinin pozitif tanımlılığının geometrik yorumu.....	11
Şekil 2.4: Bir robot kolu örneği	21
Şekil 2.5: $x_1(0)= 0.9, x_2(0) = 0.9$ ve $x_1(0)= 1.1, x_2(0) = 1.1$ başlangıç durumları için, (2.53) sisteminin yörüngesinin x_1-x_2 düzleminde gösterimi.....	27
Şekil 3.1: $\dot{x} = Ax + Bu$ açık çevrimli kontrol sistemi	32
Şekil 3.2: $\dot{x} = Ax + Bu$ açık çevrimli sisteminin $u = -Kx$ ile durum geribeslenmesi	32
Şekil 3.3: $\dot{x} = Ax + Bu$ ile ifade edilen, tek girişli, açık çevrimli kontrol sistemi.....	35
Şekil 3.4: $\dot{x} = Ax + Bu$ ile ifade edilen, tek girişli $u = -Kx$ durum geribeslemeli kontrol sistemi	36
Şekil 3.5: İkinci dereden, durum geribeslemeli bir sistem.....	43
Şekil 4.1: Denklem (4.13) de verilen D, Ω ve E kümelerinin ikinci dereceden bir sistem için gösterimi	48
Şekil 4.2: $\tilde{r}$ nin hesaplanması	52
Şekil 4.3: Örnek 4.1 için hesaplanan D, E ve Ω bölgelerinin ve $B^T P_0 x = 0$ düzleminin x_1-x_2 düzleminde gösterimi. Çözümde, a) $u = -[4,47 \ 94,6]10^{-3}x$; b) $u = -0,78[$ $4,47 \ 94,6] \cdot 10^{-3}x$; seçimlerine karşılık gelen D, E ve Ω bölgeleri.....	57
Şekil 4.4: Örnek 4.1 de, $\tilde{k} = 1.10^{-4}$ seçimine karşılık simulasyon sonuçları; a) x_1-x_2 düzleminde sistem yörüngesinin gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) $u(t)$ nin zamana göre değişimi	58

- Şekil 4.5:** Örnek 4.1 için $\tilde{k} = 1.10^{-3}$ seçimine karşılık simulasyon sonuçları a) x_1 - x_2 düzleminde sistem yörüngesinin gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) $u(t)$ nin zamana göre değişimi. 59
- Şekil 4.6:** Örnek 4.1 için $\tilde{k} = 0$ seçimine karşılık simulasyon sonuçları a) x_1 - x_2 düzleminde sistem yörüngesinin gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) $u(t)$ nin zamana göre değişimi. 60
- Şekil 4.7:** u_j değerinin hesaplanması 64
- Şekil 4.8:** Örnek 4.2 için a) D , Ω ve G bölgelerinin gösterimi, b) (4.74) de tanımlı D_1 , D_2 ve D_3 bölgelerinin, $B^T Px = 0$ doğrusu ve x_1 - x_2 eksenleri yardımıyla tespiti. 69
- Şekil 4.9:** Örnek 4.2 de, $\tilde{k} = 5.10^{-4}$ seçimi için simulasyon sonuçları; a) Sistem yörüngesinin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi, b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi, c) Kontrol işaretinin zamana göre değişimi, d) $t = 25$ saniye civarında kontrol işaretindeki titreşim, e) Simulasyonda kullanılan belirsiz $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ parametrelerinin zamana göre değişimi. 71
- Şekil 4.10:** Örnek 4.2 de. $\tilde{k} = 0,5$ seçimi için simulasyon sonuçları; a) Sistem yörüngesinin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi, b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi, c) Kontrol işaretinin zamana göre değişimi..... 72
- Şekil 4.11:** Örnek 4.2 de $\tilde{k} = 0$ seçimi için simulasyon sonuçları; a) Sistem yörüngesinin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi, b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi, c) Kontrol işaretinin zamana göre değişimi..... 73

SİMGELER LİSTESİ

x	Durum değişkeni vektörü.
$\dot{x}$	x durum değişkeninin zamana göre türevi.
x_{eq}	Denge durumu.
x_0	Başlangıç durumu.
t	Zaman değişkeni.
t_0	Başlangıç zamanı.
A	Sistem matrisi (Durum-uzay denklemi).
B	Kontrol matrisi (Durum-uzay denklemi).
C	Çıkış matrisi (Durum-uzay denklemi).
D	Giriş-çıkış matrisi (Durum-uzay denklemi).
u	Kontrol işareti.
M_x	Durum kontroledilebilirlik matrisi.
M_y	Çıkış kontroledilebilirlik matrisi.
α	Zaman sabiti.
γ	Sürekli duruma erişme oranı.
λ	Özdeğer.
τ	Zaman değişkeni.
M	Simetrik matris.
Λ	Diyagonal özdeğerler matrisi.
U	Özvektörler matrisi.
∇	Gradient.
$\ \cdot \ $	Norm.
B_R	$\ x\ < R$ ile tanımlı küresel bölge.
S_R	$\ x\ = R$ ile tanımlı kürenin kendisi.
V	Lyapunov fonksiyonu.
P	Quadratik Lyapunov fonksiyonu için kullanılan simetrik matris.
Q	Quadratik Lyapunov fonksiyonunun türevi için kullanılan simetrik matris.
J	Performans indeksi.
Q_L	Quadratik performans indeksinde durum değişkenlerinin ağırlığını belirleyen matris.
R_L	Quadratik performans indeksinde kontrol işaretinin ağırlığını belirleyen matris.
Ω	Ω bölgesi.
c	Ω bölgesini tanımlamak için kullanılan skalar sayı.

- D Başlangıç koşulları bölgesi.
- E E bölgesi.
- R Diyagonal kazanç matrisi.
- η Giriş kanalında bulunan belirsizlik vektörü.
- ρ Belirsizlik vektörünün mutlak değerinin Ω bölgesi içinde alabileceği en büyük değer.



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BELİRSİZLİK İÇEREN DİNAMİK SİSTEMLERİN LYAPUNOV METODUYLA KONTROLÜ

İhsan BAYIR

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

2003, Sayfa : 77

Bu çalışmada, giriş kanalında belirsizlik bulunan dinamik sistemlerin sınırlı kontrol işareti ile kontrolü için bir metod verilmiştir. Belirsizliğin sınırları ve kontrol işareti üzerindeki sınırlamalar önceden bilinmektedir. Kontrol işareti Lyapunov metodu ile elde edildiğinden kapalı çevrimli sistemin asimptotik kararlılığı sağlanmıştır.

Kontrol işareti üç kısımdan oluşur; kapalı çevrimli sistemi kararlı yapan düşük kazançlı bir doğrusal kontrol, belirsizliğin sistem üzerindeki etkisini karşılayan bir doğrusal olmayan kontrol, ve istenen zaman cevabı performansını sağlamak için bir doğrusal olmayan kontrol.

Kontrolör tasarımı için, tasarım adımlarının vurgulandığı bir prosedür verilmiştir. Kontrolörün etkinliği, verilen zamanla değişen belirsiz parametreler içeren bir sistemle gösterilmiştir. Böylece kapalı çevrimli sistemin belirsiz parametrelere rağmen kararlılığı gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal kontrol, doğrusal olmayan kontrol, sınırlandırılmış kontrol, Lyapunov kararlılık metodu ve kontrolü, belirsizlik içeren sistemler.

ABSTRACT

Master Thesis

CONTROL OF UNCERTAIN DYNAMICAL SYSTEMS VIA LYAPUNOV METHOD

İhsan BAYIR

Fırat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering

2003, Page : 77

In this study, a method is given to control dynamical systems with matched uncertainty by constrained control signal. In advance, the bounds of uncertainty and the limitation of control signal are known. Since the control signal law is obtained by employing Lyapunov method, asymptotic stability of closed loop is achieved.

Control signals contains three parts; a low gain linear controller for stabilizing the closed loop system, a nonlinear controller, on-off, meet the effects of uncertainty, and a linear controller to achieve desired time response performance.

In order to design controller a procedure is given to highlight the design steps. The effectiveness of the controller is shown by considering a system which the uncertainty varied with time. Thus, the robustness of the closed loop system is observed.

Keywords : Linear control, nonlinear control, saturated control, Lyapunov's method and controller, uncertain systems.

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

1. GİRİŞ

Doğadaki tüm sistemler doğrusal olmayan türdedir. Doğrusal olmayan sistemlerin davranışlarının anlaşılabilmesi için genellikle doğrusallaştırılmış modeller kullanılır.

Doğrusal olmayan sistemler için genelleştirilmiş bir tanım yoktur. Bu nedenle doğrusal sistem tanımı yapılır ve bu tanımın dışındaki sistemlere doğrusal olmayan sistem denilir.

Doğrusal sistem; Farklı girişler için süper pozisyon teoremini sağlayan sistemlere doğrusal sistem, sağlamayan sistemlere doğrusal olmayan sistemler denir [1].

Bununla beraber doğrusal sistemler doğrusal olmayan sistemlerin özel bir halidir.

Dinamik sistemler genellikle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (1.1)$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilirler. (1.1) de $x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum değişkeni, $f \in \mathbb{R}^n$ doğrusal olmayan vektördür. Denklem (1.1) deki doğrusal olmayan sistem

$$f(x(t), t) = 0 \quad (1.2)$$

da bulunan denge noktasına göre doğrusallaştırılırsa, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bu denge noktasındaki zamanla değişen sistem matrisi olmak üzere

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (1.3)$$

dir. Sisteme ait denklemin çözümünden elde edilen $x(t)$ çoğunlukla zaman değişkeni t sıfırdan sonsuza giderken durum uzayındaki değişim, *sistem yörüngesi* olarak adlandırılır.

Denklem (1.3) de verilen A sistem matrisi zamanla değişmiyorsa,

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad (1.4)$$

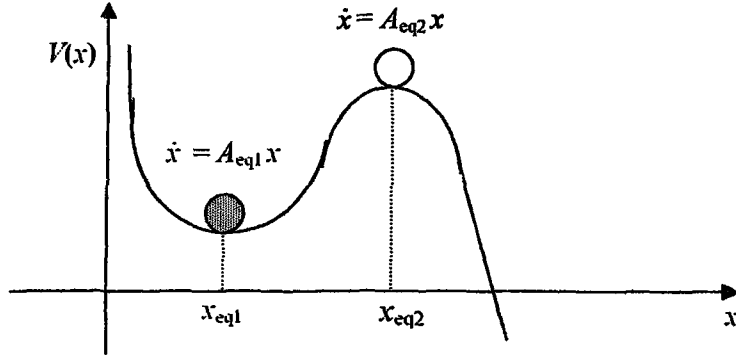
dir ve böyle sistemler *zamanla değişmeyen doğrusal sistem* olarak sınıflandırılırlar.

Zamanla değişen sisteme örnek; Uçuş sırasında yakıtı sürekli azalan uzay araçlarının kütlesi zamanla azalır. Böylece sistem dinamiği zamanla değişmektedir.

1.1. Denge Noktaları

Denklem (1.2) nin çözümü, denklem (1.1) in denge noktaları x_{eq} i verir. Denge noktası fiziksel olarak Şekil 1.1 ile gösterilebilir.

Eğer sistem $x(t)$ durum vektörünün bir konumunda bırakılırsa, sistemin durum vektörü bu noktada sürekli olarak kalıyorsa, söz konusu nokta sistemin denge noktasıdır. sistem x_{eq1} ve x_{eq2} de bırakılırsa $t \rightarrow \infty$ için, bu durumda sürekli kalır. Yukarıda bu tanıma göre x_{eq1} ve x_{eq2} söz konusu sistemin denge noktalarıdır. Doğrusal olmayan sistemler Şekil 1.1 de olduğu gibi sonlu,



Şekil 1.1: Fiziksel bir sistemde denge noktaları

veya sarkaç probleminde olduğu gibi sonsuz denge noktalarına sahip olabilir. Herbir denge noktasındaki sistem dinamiği denklem (1.4) deki eşdeğeri ile modellenir.

Denklem (1.4) de verilen doğrusallaştırılmış model ile sistemin dinamiği, söz konusu denge noktası x_{eq} orjine taşınarak yapılmıştır [2].

Doğrusal bir sistemin karakteristiği

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (1.5)$$

in özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki yeri ile belirlenir. Denklem (1.4) de verilen sistem ikinci dereceden olsun ve durum özdeğerleri;

a) reel ve negatif, b) reel pozitif, c) reel ve zıt işaretli, d) reel kısmı negatif kompleks eşlenik, e) reel kısmı pozitif ve kompleks eşlenik, f) reel kısmı sıfır kompleks eşlenik ise, ikinci dereceden bir sistemin yörüngesi, yukarıdaki durumlar için Şekil 1.2 de $x_1 - x_2$ durum değişkeni düzleminde çizilmiştir.

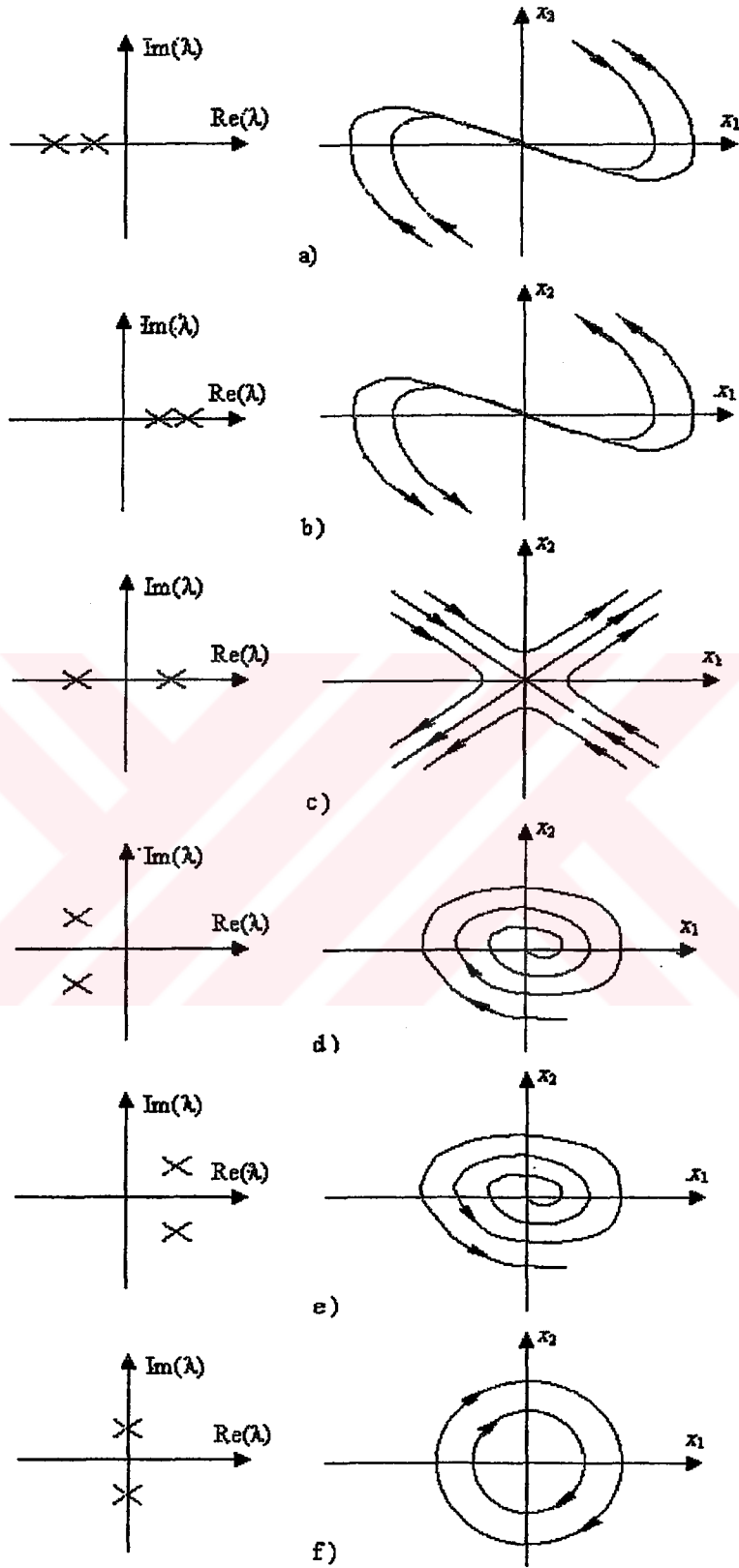
Fiziksel olarak denge noktasının kararlılığı, Şekil 1.1 deki potansiyel enerji fonksiyonu ile aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Kararlı denge noktası; Sistem denge noktasında küçük bir değişim ile başka bir konuma getirildiğinde $x \rightarrow \infty$ giderken tekrar denge noktasına geri geliyor ise, söz konusu denge noktası kararlıdır.

Kararsız denge noktası; Sistem denge noktasında küçük bir değişim ile başka bir konuma getirildiğinde $x \rightarrow \infty$ giderken denge noktasından uzaklaşıyor ise, söz konusu denge noktası kararsızdır.

Denge noktasında doğrusallaştırılmış sistemin kararlılığı ise denge noktası için elde edilmiş sistem matrisinin özdeğerleri tarafından belirlenir. İkinci dereceden bir sistemin özdeğerleri Şekil 1.2 de verilmiş ve kararlılıkları belirtilmiştir. Şekil 1.2 de görüldüğü gibi birçok kararlılık türü vardır.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON BİRLİĞİ



Şekil 1.2: İkinci dereceden doğrusal bir sistemin özdeğerleri ile $x_1 - x_2$ düzleminde çizdirilmiş sistem yörüngeleri.

Genel anlamda kararlılık; Bir sisteme sınırlı(sonlu) giriş uygulandığında sistemin çıkışı daima kararlı (sınırlı) kalıyorsa buna “Sınırlı Giriş-Sınırlı Çıkış Kararlılığı (*Bounded Input-Bounded Output Stability –BIBO*)” denilir.

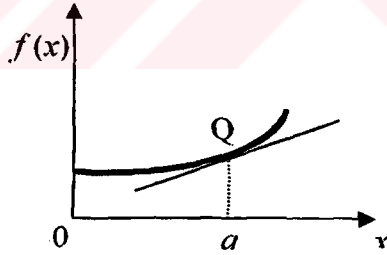
Sınırlı Giriş – Sınırlı Durum Kararlılığı; Sınırlı giriş uygulandığında sistemin durum değişkenleri daima sınırlı kaldığı kararlılık “Sınırlı Giriş – Sınırlı Durum Kararlılığı (*Bounded Input Bounded State Stability –BIBS Stability*)” olarak adlandırılır.

1.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Denge Noktasına Göre Doğrusallaştırılması

1.2.1. Doğrusallaştırma

Sürekli bir fonksiyonun belirli bir noktadaki değeri ve bu noktadaki eğimi biliniyorsa bilinen bu değerler ile fonksiyonun yaklaşık bir modeli çıkarılarak bu noktanın yakınındaki değerler bu model ile tahmin edilebilir. Taylor polinomları ve serileri, mühendislerin böyle tahminler yapmalarına imkan sağlar.

Doğrusallaştırmanın uygulama alanlarından biri de doğrusal olmayan sistemlerin doğrusal modellerinin çıkarılmasıdır. Mühendislikte sıklıkla temelde doğrusal olmayan bir sistemin matematiksel modelini elde etme gereksinimi vardır. Matematiksel ve hesaplama dayalı doğrusal modeller bunların doğrusal olmayan modellerine göre çok daha kolaydır.



Şekil 1.3: $f(x)$ fonksiyonun $x = a$ noktasındaki doğrusallaştırılması

Şekil 1.3 deki $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktası denge noktası olsun. $f(x)$ fonksiyonunun a daki değeri ve türevi, sırasıyla $f(a)$ ve $\dot{f}(a)$ ise; denge noktasında $f(x)$ fonksiyonunun n . dereceden bir Taylor açılımı polinom olarak

$$p_n(x) = f(a) + \dot{f}(a)(x-a) + \ddot{f}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \quad (1.6)$$

yazılabilir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

$f_{h.o.f}(x)$ denklem (1.6) da verilen polinomun birden yüksek dereceden terimi olmak üzere, denklem (1.6) da verilen polinom denklem (1.1) de yerine yazılırsa

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} x + f_{h.o.f}(x) \quad (1.7)$$

elde edilir. Burada yüksek mertebeden $f_{h.o.f}(x)$ ihmal edilerek a noktasındaki sistemin Jakobian matrisi,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = A \quad (1.8)$$

denilirse denklem (1.4) deki doğrusallaştırılmış model

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

elde edilir.

Benzer şekilde sisteme u girişi varsa doğrusal olmayan sistem

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

formuna gelir. Yukarıdaki denklem (1.6) daki benzer kabuller yapılırsa ve

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=0} = B$$

alınırsa

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.9)$$

elde edilir.

1.2.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Kararlılığı

Durum vektörü x in normu

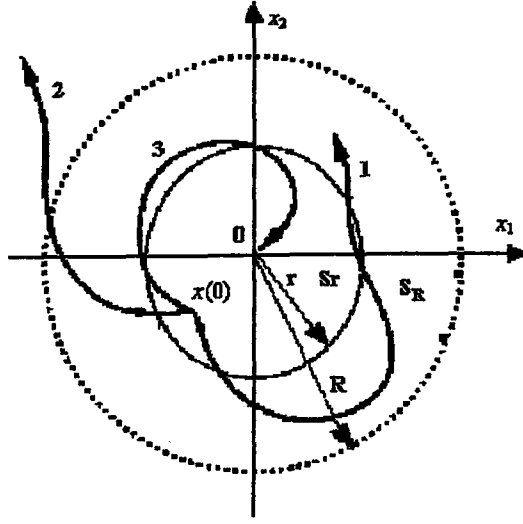
$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

ile hesaplanır. Bu kavram kullanılarak doğrusal olmayan sistemlerin ihtiyaç duyduğu daha özel kararlılık-kararsızlık tanımları yapılabilir.

Kararlılık-kararsızlık; $R > \|x(t)\|$ yarıçaplı bir daire, $x(0)$ durum değişkeni x in başlangıç değerleri olmak üzere $r > \|x(t)\|$ ve $R > r$ olsun.

$\|x(t)\|$ değeri, $R > r > 0$ bölgesi içindeki $r > 0$ bölgesi içinde, herhangi bir $\|x(0)\| < r$ başlangıç durumundan başlayıp ve sonra $t \rightarrow \infty$ için $\|x(t)\| < R$ bölgesi içinde kalıyorsa denge noktası kararlıdır (Şekil 1.4, 1 numarayla belirtilen yörünge).

Yukarıdaki şartın sağlanmayıp, $\|x(t)\|$ nin R bölgesinin dışına çıkması durumunda denge noktası kararsızdır (Şekil 1.4, 2 numarayla belirtilen yörünge).



Şekil 1.4: Kararlılık kavramları 1) kararlı sistem 2) kararsız sistem 3) asimptotik kararlı sistem.

Asimptotik kararlılık; Eğer sistem kararlı ve ilave olarak $\|x(0)\| < r$ ve $t \rightarrow \infty$ için $\|x(t)\| \rightarrow 0$ koşulunu da sağlıyor ise sistem asimptotik karardır (Şekil 1.4, 3 numarayla belirtilen yörünge).

Asimptotik kararlılık, denge noktasının kararlı ve ilave olarak başlangıç durumu $x = 0$ denge noktası civarından başlamak üzere, t sonsuza giderken x durumunun sıfıra yaklaşması anlamına gelir. r yarıçapıyla tanımlı S_r küresel bölgesi ise bu denge noktasına ait çekim alanı olarak adlandırılır. Bu bölgeye girildiğinde durum değişkenleri sıfıra doğru gider. Bir müdahale olmazsa yeterli bir süre sonunda durum değişkenleri mutlaka sıfır olur. Yani diğer ifade ile geçici rejim cevabı bir süre sonra sıfır olacaktır.

Yukarıdaki tanımlara göre eğer denge noktası kararlı fakat asimptotik kararlı değilse marginal karardır (kararlılık sınırındadır). Bu durumda durum değişkenleri R bölgesi ile sınırlı bölgede kalır.

Exponansiyel kararlılık; λ ve α tam pozitif sayılar olmak üzere $t > 0$ için sistem yörüngesi

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

olarak değişiyor ise sistem exponansiyel karardır. Burada λ sistemin denge noktasına exponansiyel ulaşma oranıdır ve sistemin zaman sabitiyle orantılıdır.

Exponansiyel olarak kararlılık asimptotik kararlılık koşulunu sağlar fakat asimptotik kararlılık koşulu exponansiyel olarak kararlılığı garanti etmez.

Exponansiyel fonksiyonun işaretinde herhangi bir değişme olmayacağı kesin olarak bilinmektedir.

Global asimptotik kararlılık; Eğer herhangi bir başlangıç durumu için asimptotik

exponansiyel kararlılık sağlanıyorsa, denge noktası global olarak asimptotik / exponansiyel kararlıdır.

Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler; ya asimptotik kararlı, ya exponansiyel kararlı, yada kararsızdır.

Bu tez çalışması daha önce hazırlanmış seminer çalışmasının devamı ve aynı zamanda genişletilmiş bir halidir [14]. Kullanılacak temel tanımların verildiği bu giriş bölümüyle birlikte tez dört bölümden oluşmuştur;

Bölüm 2 de, Lyapunov'un kararlılık tanımı, bu tanımın ihtiyaç duyduğu bazı kavramlarla birlikte verilmiştir.

Bölüm 3 de, doğrusal sistemler için durum geribeslemeli kontrol verilmiştir. Verilen dört kontrol tekniğinden kutup yerleştirme metodu, Ackermann metodu, yerine bırakma metodu verilmiştir. Bunlardan sonra bu tez çalışmasında kullanılacak olan optimal kontrol kazançlarının hesaplanması yöntemi verilmiştir.

Bölüm 4 de, giriş kanalında belirsizlik içeren sistemlerin Lyapunov metodu ile kontrolü verilmiştir. Literatürde çeşitli belirsizlik içeren sistemler ve bu sistemler için kontrol önerileri mevcuttur [6-13]. Bu tezde, öncelikle bir hazırlık olarak, Lyapunov kararlılık metodu kullanılarak doğrusal bir sistemin sınırlandırılmış (saturasyonlu) kontrol işareti ile kontrolü verilmiş, daha sonra benzer metod ile değişim sınırları bilinen belirsiz parametrelere sahip sistemin sınırlandırılmış kontrol işareti ile kontrolü verilmiştir.

2. LYAPUNOV FONKSİYONU VE KARARLILIĞI

2.1. Giriş

Lyapunov'un orijinali Rusça olan 'The General Problem of Motion Stability' adlı çalışması indirect metod (doğrusallaştırma metodu) ve direct metod olmak üzere iki metod içerir. Lyapunov'un indirekt metodu daha önce Bölüm 1.2.1 de verilen doğrusallaştırma metodu ile aynıdır. Lyapunov'un direkt metodu, Lyapunov fonksiyonuna dayandığından aşağıda Lyapunov fonksiyonu için geliştirilen tanımlar verilecektir.

$B_R, \|x\| < R$ ile tanımlı küresel bir bölgeyi ve $S_R, \|x\| = R$ ile tanımlı kürenin kendisini tanımlamak üzere;

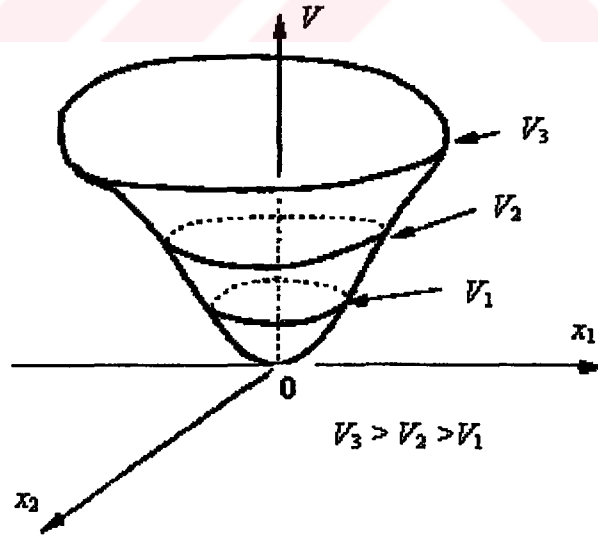
Pozitif tanımlı fonksiyon; Eğer skalar bir $V(x)$ fonksiyonu bir B_R küresi içindeki sınırlı bölgede

$$V(x) > 0, x \neq 0 \text{ ve } V(x) = 0, x = 0 \quad (2.1)$$

şartlarını sağlıyorsa $V(x)$ *pozitif tanımlı bir fonksiyondur*.

Eğer $V(0) = 0$ tüm durum uzayı için sağlanıyorsa $V(x)$ *global pozitif tanımlı fonksiyondur*.

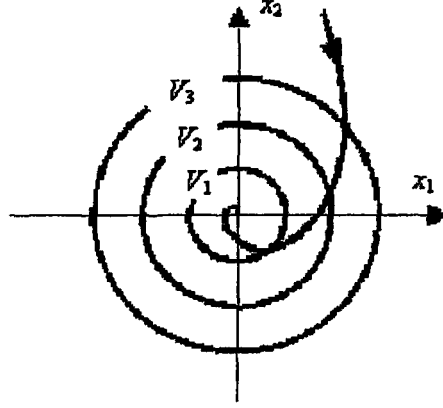
Lokal pozitif tanımlı bir Lyapunov fonksiyonun geometrik anlamı, şekille ifade edilebilir.



Şekil 2.1: İkinci dereceden bir sistemin pozitif tanımlı fonksiyonu

Burada durum değişkenleri x_1 - x_2 eksen, V ise z eksenine yerleştirilmiştir. Şekil 2.1 incelenirse, pozitif tanımlı V fonksiyonu orjinde sıfırdır ve durum değişkenleri arttıkça $V_1 < V_2 < V_3$ eşitsizliğinde olduğu gibi artar.

Pozitif tanımlı V fonksiyonu, Şekil 2.2 de olduğu gibi iki boyutlu olarak da tanımlanabilir. Şekilde her bir kapalı alan; $V(x) = V_1$, $V(x) = V_2$, $V(x) = V_3$ ile oluşur.



Şekil 2.2: Pozitif tanımlı fonksiyonların düzey eğrileri ile gösterimi

Burada sistem yörüngesi ok yönünde hareket etmekte ve orjine doğru gitmektedir. Durum değişkenleri azaldıkça V azalır ve $(0,0)$ noktasında sifıra eşit olur.

Negatif tanımlı fonksiyon; Skalar bir $V(x)$ fonksiyonu B_R küresi içinde değişsin. Eğer,

$$V(x) < 0, x \neq 0 \text{ ve } V(x) = 0, x = 0 \quad (2.2)$$

şartını sağlıyorsa $V(x)$ fonksiyonu negatif tanımlı bir fonksiyondur.

Pozitif yarı-tanımlı fonksiyon; Eğer $V(x)$ skalar fonksiyonu

$$V(x) \geq 0, x \neq 0 \text{ ve } V(x) = 0, x = 0$$

ise $V(x)$ pozitif yarı-tanımlı bir fonksiyondur.

Negatif yarı-tanımlı fonksiyon; Eğer $-V(x)$ fonksiyonu pozitif yarı-tanımlı ise $V(x)$ fonksiyonu negatif yarı-tanımlı bir fonksiyondur.

Bu tanımlarda pozitif/negatif yarı tanımlı fonksiyon tanımı $x \neq 0$ için $V(x) = 0$ olabileceğini gösterir.

Örnek 2.1:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1- $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ | pozitif tanımlı |
| 2- $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ | pozitif yarı tanımlı |
| 3- $V(x) = -x_1^2 - (2x_1 + x_2)^2$ | negatif tanımlı |
| 4- $V(x) = x_1x_2 + x_1^2$ | x_1x_2 çarpımı içerdiğinden, pozitif veya negatif tanımlı olarak tanımlanamaz |

Eğer, bir sistemin durum değişkenleri ile tanımlı skalar bir $V(x)$ fonksiyonu için

- $V(x)$ pozitif tanımlı
- $\dot{V}(x)$ negatif tanımlı

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
BİLİMLER, TEKNOLOJİ VE
MİLLÎ HİZMETLER BAKANLIĞI

- $\|x\| \rightarrow 0$ için $V(x) \rightarrow 0$

şartları sağlanıyorsa, $V(x)$ bu sistem için bir *Lyapunov fonksiyonudur*. Bu fonksiyon tüm durum değişkenlerini içerecek şekilde seçilmelidir. Detaylı bilgi [1] de bulunabilir.

Denklem (1.2) deki tek girişli-tek çıkışlı sistem ve çok girişli-çok çıkışlı sistemlerin sistem dinamikleri, sistem matrisi ile incelenir. Özellikle yüksek mertebeden sistemler için, sistem matrisi ile pozitif-negatif tanımlılığın tanımına gereksinim vardır. Bu nedenle, matrislerin bazı temel özellikleri aşağıda verilecektir.

2.2. Matris Özellikleri

Simetrik matris; Bir M kare matrisi için eğer $M^T = M$ ise (diğer bir ifade ile, eğer $\forall_{ij}, M_{ij} = M_{ji}$ ise) M matrisi simetriktir.

Skew-simetrik matris; Bir M kare matrisi için eğer $M^T = -M$ ise (diğer bir ifade ile, eğer $\forall_{ij}, M_{ij} = -M_{ji}$ ise) M matrisi skew-simetriktir.

Quadratik form; $n \times 1$ boyutunda x durum vektörü ile $n \times n$ boyutunda simetrik M matrisinden oluşan

$$x^T M x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j \quad m_{ij} = m_{ji} \quad (2.3)$$

formuna quadratik form denir. Bu formdaki fonksiyonun değeri skalarlardır.

Herhangi bir $n \times n$ boyutundaki M matrisi, bir simetrik ve bir skew-simetrik matrisin toplamı olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2} \quad (2.4)$$

Burada $\frac{M + M^T}{2}$ simetrik matris, $\frac{M - M^T}{2}$ ise skew-simetrik matristir.

Eğer M skew-simetrik matris ise ilgili quadratik fonksiyonun değeri daima sıfırdır. Yani her x için $x^T M x = 0$ dır.

Yukarıdaki örnekte verilen pozitif ve negatif tanımlı Lyapunov fonksiyonları, quadratik formdadırlar. Bu nedenle, bu tezde, doğrusal sistemler için en sade Lyapunov fonksiyonu şekli olan quadratik form kullanılacaktır.

Yukarıdaki sonuca göre M simetrik olsun yada olmasın, bu formdaki her quadratik fonksiyon, bir simetrik matristen oluşan quadratik fonksiyona eşittir. Bu nedenle, Lyapunov fonksiyonu adayı olarak $x^T M x$ quadratik fonksiyonun M matrisi, her zaman için simetrik hale dönüştürülebildiğinden, M matrisi genel olarak simetrik kabul edilebilir.

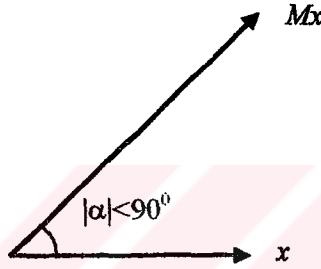
2.2.1. Pozitif Tanımlı Matris ve Geometrik Anlamı

Bir $n \times n$ boyundaki M kare matrisi için

$$x^T M x > 0, \quad x \neq 0 \quad (2.5)$$

ise M matrisi pozitif tanımlı bir matristir. Diğer bir deyişle eğer $x^T M x$ quadratik fonksiyonu bir pozitif tanımlı fonksiyon ise M matrisi pozitif tanımlı bir matristir. Bu tanım her pozitif tanımlı matrisin bir pozitif tanımlı fonksiyon ile ilişkili olduğunu açıklar. Bunun tersi ise doğru değildir.

Geometrik olarak pozitif tanımlılığın tanımı, basit bir deyişle; x vektörü ile onun görüntüsü Mx vektörü arasındaki açının daima 90° den küçük olması olarak yorumlanabilir. Bu tanım Şekil 2.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3: Bir M matrisinin pozitif tanımlılığının geometrik yorumu

Bir kare matris M in pozitif tanımlı olabilmesi için diyagonal elemanlarının pozitif tanımlı olması gerekir.

Sylvester teoremi gereğince M matrisinin pozitif tanımlı olması için;

$$m_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} > 0 \dots \dots |M| > 0 \quad (2.6)$$

şeklinde minor'lerinin hepsinin pozitif olması gerekir.

Sylvester teoremi gereğince M matrisinin negatif tanımlı olması için;

$$m_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} < 0 \dots \dots \begin{cases} |M| > 0. & n \text{ çift} \\ |M| < 0. & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde minor'lerinin hepsinin negatif olması gerekir.

Pozitif veya negatif tanımlı matrislerin daima tersi vardır. Çünkü yukarıdaki tanımlara göre pozitif veya negatif tanımlı matrislerin determinantı sıfır olamaz. Diğer iki koşul aşağıdaki gibidir:

M matrisinin pozitif yarı-tanımlı olması koşulu;

$$m_{11} \geq 0, \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \geq 0 \dots \dots |M| = 0$$

M matrisinin negatif yarı-tanımlı olması koşulu;

$$m_{11} \leq 0, \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \leq 0 \dots \dots |M| = 0$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

2.2.2. Pozitif Tanımlı Matris Özellikleri

M matrisi bir kare matris olsun. Λ matrisi, M matrisinin özdeğerlerini içeren bir diyagonal matris; ve U matrisi, M matrisinin özvektörler matrisi olsun. U matrisi

$$U^T U = I \quad (2.7)$$

denklemini sağlar. Pozitif tanımlı bir M matrisi her zaman için

$$M = U^T \Lambda U \quad (2.8)$$

şeklinde bileşenlerine ayrışabilir. Böylece

$$x^T M x = x^T U^T \Lambda U x$$

eşitliği yazılabilir. $Ux = z$ dönüşümü yapılırsa

$$x^T M x = (Ux)^T \Lambda (Ux) = z^T \Lambda z \quad (2.9)$$

sağlanır.

$$\begin{aligned} z^T z &= (Ux)^T (Ux) = x^T U^T U x = x^T (U^T U) x = x^T I x = x^T x = \|x\|^2 \\ z^T z &= \|x\|^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

x , $n \times 1$ vektör ve Λ , diyagonal ekseni özdeğerlerden oluşan $n \times n$ matris olduğundan

$$x^T \Lambda x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad (2.11)$$

dir.

$\lambda_{\min}(M)$, M matrisinin en küçük özdeğerini,

$\lambda_{\max}(M)$, M matrisinin en büyük özdeğerini, gösterebilir.

$$x^T [\lambda_{\min}(M) I] x \leq x^T \Lambda x \leq x^T [\lambda_{\max}(M) I] x \quad (2.12)$$

olur. Bu eşitsizlikte

$$x^T [\lambda_{\min}(M) I] x = \lambda_{\min}(M) \|x\|^2$$

$$x^T [\lambda_{\max}(M) I] x = \lambda_{\max}(M) \|x\|^2$$

olarak yazılırsa yukarıdaki özellikler ile pozitif tanımlı bir M matrisi için

$$\lambda_{\min}(M)\|x\|^2 \leq x^T M x \leq \lambda_{\max}(M)\|x\|^2 \quad (2.13)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

(2.13) eşitsizliği daha sonra doğrusal sistemlerin hedeflenen yörüngeye yönelme (yakınsama) oranının bulunmasında kullanılacak önemli bilgiler içermektedir.

2.3. Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler İçin Lyapunov Kararlılık

Aşağıdaki doğrusal sistem verilsin

$$\dot{x} = Ax \quad (2.14)$$

P matrisi pozitif tanımlı bir matris olmak üzere Lyapunov fonksiyonu

$$V(x) = x^T P x \quad (2.15)$$

olsun. Pozitif tanımlı $V(x)$ fonksiyonun sistem yörüngesi boyunca diferansiyeli alınır

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (2.16)$$

(2.14) denklemi, (2.16) da yerine yazılırsa

$$\dot{V}(x) = (Ax)^T P x + x^T P (Ax)$$

$$\dot{V}(x) = x^T A^T P x + x^T P A x$$

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x$$

olur ve doğrusal sistemler için kullanılmak üzere Lyapunov denklemi

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.17)$$

elde edilir. Denklem (2.14) deki sistemin kararlı olabilmesi için Q matrisinin pozitif tanımlı olması gerekir ve Lyapunov fonksiyonunun diferansiyeli

$$\dot{V} = -x^T Q x \quad (2.18)$$

dir.

Denklem (2.17) nin iki çözümü vardır;

a) Seçilen bir pozitif tanımlı P için Q nun bulunması, her zaman bir pozitif tanımlı Q matrisi vermeyebilir. Bu nedenle bu çözüm kullanılmaz.

b) Seçilen bir pozitif tanımlı Q için P nin bulunması, bu çözüm her zaman sonuç verir.

Örnek 2.2:

Sistem matrisi aşağıda verilen doğrusal sistemin kararlılığının Lyapunov metodu ile incelenmesi;

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$$

a) $P = I$ için denklem (2.17) nin çözümü

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
BOKÜMANTASYON MERKEZİ

$$-Q = A^T P + P A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -24 \end{bmatrix}$$

dir. Q matrisi pozitif tanımlı değildir ve bu P seçimi ile elde edilen quadratik $V = x^T P x$ fonksiyonu bir Lyapunov fonksiyonu değildir. Bu fonksiyon ile sistemin kararlı olup olmadığı konusunda hiçbir sonuç çıkarılamaz. Halbuki sistem kararlı ve

$$|\lambda I - A| = 0$$

denklemini sağlayan özdeğerleri $\lambda_1 = -4$ ve $\lambda_2 = -5$ dir.

b) $Q = I$ için denklem (2.17) ün çözümü

$$P = \begin{bmatrix} 5/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 \end{bmatrix}$$

Ayrıca Matlab programı ile çözüm aşağıdaki komutlar ile yapılabilir:

```
» A = [0 4; -8 -24];
» Q = [1 0; 0 1];
» P = lyap(A', A, Q)
P =
    0.4375    0.0625
    0.0625    0.0313
```

Elde edilen P matrisi pozitif tanımlı ve dolayısıyla sistem kararlıdır.

Sonuç,

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin kararlılığının Lyapunov metodu ile incelenebilmesi için gerek ve yeter şart, herhangi bir pozitif tanımlı simetrik Q matrisinin seçimi sonucunda elde edilen P matrisinin simetrik pozitif tanımlı olmasıdır.

2.4. Doğrusal olmayan Sistemlerin Lyapunov Kararlılık Metoduyla İncelenmesi İçin

Kullanılan Metodlar

Doğrusal olmayan sistemler için genel bir Lyapunov fonksiyonu önerme kuralı olmamakla beraber, aşağıdaki metodlar önerilen sisteme uygunsa kullanılabilir.

- Doğrusal sistemlerde olduğu gibi quadratik form
- Sistemin enerji fonksiyonlarından yararlanma
- Krasovskii metodu
- Gradient Metodu
- Sistemin fiziksel yapısı ve işleyişinden yararlanma

2.4.1. Quadratik Form

Doğrusal olmayan sistem uygun ise, $V(x) = x^T x$ quadratik formu sistem kararlılığı için Lyapunov fonksiyonu olarak kullanılabilir.

Örnek 2.3:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Verilen doğrusal olmayan sistemin Lyapunov metodu ile kararlılığının incelenmesi;

Lyapunov fonksiyonu pozitif tanımlı quadratik $V = \|x\|^2$ yada açık formda,

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

olsun. Bu fonksiyonun türevi alınırsa

$$\dot{V}(x) = 2 x_1 \dot{x}_1 + 2 x_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x) = 2 x_1(x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)) + 2 x_2(-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2))$$

$$\dot{V}(x) = 2 x_1 x_2 - 2 x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2 x_2 x_1 - 2 x_2^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{V}(x) = -2 (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{V}(x) = -2 (x_1^2 + x_2^2)^2$$

negatif tanımlı fonksiyonu elde edilir.

Örnekte görüldüğü gibi bu doğrusal olmayan bir sistem için Lyapunov fonksiyonu adayı olarak seçilen ve en basit formlardan olan quadratik form, aranan özellikleri sağlamıştır.

2.4.2. Krasovskii Metodu

Doğrusal olmayan bazı sistemler için genel Lyapunov fonksiyonu bulunması amacıyla Krasovskii bir metod geliştirmiştir. Krasovskii metodu otonom doğrusal olmayan sistemler için

$$V(x) = f^T(x) f(x) \quad (2.19)$$

biçiminde basit bir Lyapunov fonksiyonu varlığını esas alır.

Denge noktası orjinde olan $\dot{x} = f(x)$ otonom sistemi için bir $A(x)$ matrisi

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.20)$$

tanımlanır. Bu sistemin Jakobiye matrisini gösterebiliriz ve $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ orjin (x_{eq}) civarındaki türevleri

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON BİREMEK

göstermek üzere $n = 2$ için $A(x)$

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_{eq}}$$

dir. Eğer $F = A + A^T$ matrisi bir Ω bölgesi içinde negatif tanımlı ise orjindeki denge noktası (x_{eq}) asimptotik karardır ve (2.19) ile verilen

$$V(x) = f^T(x)f(x)$$

fonksiyonu bu sistem için bir Lyapunov fonksiyonudur.

Eğer Ω bölgesi tüm durum uzayı ise ve ilave olarak $\|x\| \rightarrow \infty$ için $V(x) \rightarrow \infty$ ise denge noktası global asimptotik karardır [1]

$\dot{x} = f(x)$ doğrusal olmayan bir sistem olmak üzere $V(x) = f^T(x)f(x)$ ve $\dot{f}(x) = A(x)f(x)$ için

$$V(x) = f^T(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)\dot{f}(x) + \dot{f}^T(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)A(x)f(x) + f^T(x)A^T(x)f(x) = f^T(x)[A^T + A]f(x)$$

$$F = A + A^T$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)Ff(x) \quad (2.21)$$

Denklem (2.21) in negatif tanımlı olması için F in negatif tanımlı olması gerekir.

Örnek 2.4:

Verilen sistemin Lyapunov karardlılığının Krasovskii metodu ile gösterilmesi

$$\dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3$$

Burada

$$f_1 = -6x_1 + 2x_2$$

$$f_2 = -2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3$$

doğrusal olmayan sistemi için bir Lyapunov fonksiyonu araştırılır.

$$A(x) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F = A + A^T = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

Sylvester teoremine göre, $F_{11} = -12 < 0$ ve $|F| = 128 + 144x_2^2 > 0$ olduğundan F matrisi

negatif tanımlıdır. Krasovskii teoremine göre Lyapunov fonksiyonu,

$$V(x) = f^T(x)f(x) = \begin{bmatrix} -6x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -6x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (-2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2$$

dir. Bu fonksiyon pozitif tanımlıdır ve verilen sistem için bir Lyapunov fonksiyonudur.

Genelleştirilmiş Krasovskii Teoremi

İlgilenilen denge noktası orjinde olan $\dot{x} = f(x)$ otonom sistemi alınsın. $A(x)$ matrisi sistemin Jakobiye matrisini gösterebilir. Orjinin asimptotik kararlı olması için yeterli şart orjinin yakın Ω komşuluğunda, P ve Q pozitif tanımlı simetrik iki matris ve $\forall x \neq 0$ olmak üzere

$$F(x) = A^T P + P A + Q$$

negatif yarı tanımlı matrisinin var olmasıdır. Böylece

$$V(x) = f^T(x)P f(x)$$

fonksiyonu bu sistemin bir Lyapunov fonksiyonudur.

Eğer Ω tüm durum uzayı ise ve ilave olarak $\|x\| \rightarrow \infty$ için $V(x) \rightarrow \infty$ ise sistem global asimptotik kararlıdır.

İspat : Bu teorem benzer biçimde ispatlanabilir. $V(x)$ fonksiyonun pozitif tanımlılığı önceki gibi türetilebilir. Ayrıca V nin türevi

$$V(x) = f^T(x)P f(x)$$

$$\dot{V}(x) = \dot{f}^T(x)P f(x) + f^T(x)P \dot{f}(x)$$

$\dot{f}^T(x) = A(x)f(x)$ olduğundan

$$\dot{V}(x) = f^T(x)A^T(x)P f(x) + f^T(x)P A(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x) [A^T(x)P + P A(x)]f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x) [A^T(x)P + P A(x) + Q]f(x) - f^T(x)Q f(x)$$

$A^T(x)P + P A(x) + Q = F(x)$ yazarsak son olarak

$$\dot{V}(x) = f^T(x)F(x)f(x) - f^T(x)Q f(x)$$

fonksiyonu elde edilir. $F(x)$ negatif yarı tanımlı ve Q pozitif tanımlı olduğundan $\dot{V}(x)$ negatif tanımlı ve orjindeki denge noktası asimptotik olarak kararlıdır.

Eğer $\|x\| \rightarrow \infty$ için $V(x) \rightarrow \infty$ ise Lyapunov direkt metodunun global uyarlaması, sistemin global asimptotik kararlı olduğunu gösterir.

2.4.3. Variable Gradient Metodu

Bu metod, bilinmeyen Lyapunov fonksiyonu gradiyentleri için kesin bir form içermeyen varsayımı ve varsayılan gradientin integrali ile Lyapunov fonksiyonunun kendisinin bulunmasıdır. Bu yaklaşım düşük dereceli sistemler için bir Lyapunov fonksiyonunun başarılı bir şekilde bulunmasını sağlar.

Bir $V(x)$ skalar fonksiyon ve onun gradienti $\nabla V(x) = \{\partial V/\partial x_1, \dots, \partial V/\partial x_n\}^T$ in integrali arasındaki ilişkiyi dikkate alalım.

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx \quad (2.22)$$

$\nabla V(x)$ gradientten, skalar $V(x)$ fonksiyonu elde etmek için, gradient fonksiyonunun

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.23)$$

koşullarını sağlaması gerekir. Burada ∇V nin i . bileşeni sadece $\partial V/\partial x_i$ türevinin doğrultusudur.

Örneğin, $n = 2$ olması halinde;

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \quad (2.24)$$

Variable gradient metodunun temel esası, Lyapunov fonksiyonu V nin varsayılan özel bir formu yerine, gradient ∇V için özel bir form varsaymaktır. Gradient fonksiyonu varsaymanın basit bir yolu, a_{ij} belirlenecek katsayılar olmak üzere

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (2.25)$$

formudur. Bu form, bir Lyapunov fonksiyonu aramak için aşağıdaki yöntemlerin izlenmesini sağlar.

- 1) (2.25) biçiminde bir ∇V varsay.
- 2) (2.23) denklemlerini sağlamak için a_{ij} katsayılarını hesapla.
- 3) $\dot{V}$ nin negatif yarı-tanımlı (en azından lokal) olması için (2.25) deki katsayıları sınırla.
- 4) ∇V nin integralinden V fonksiyonunu hesapla.
- 5) V nin pozitif tanımlı olup olmadığını kontrol et.

(2.23) koşullarının sağlanması, (2.22) integralinin integrasyon yolundan bağımsız olduğunu gösterir. Bu çoğunlukla V nin herbir eksene paralel olan yol boyunca integrali ile rahatlıkla sağlanır. Yani,

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_2, 0, \dots, 0) dx_2 + \dots \\ + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_n, 0, \dots, 0) dx_n \quad (2.26)$$

ile Lyapunov fonksiyonu V hesaplanabilir.

Örnek 2.5:

Verilen sistemin Lyapunov kararlılığının, Variable Gradient metodu ile belirlenmesi;

$$\dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1 x_2^2 \quad (2.27)$$

olsun. Bilinmeyen Lyapunov fonksiyonunun gradient'inin

$$\nabla V_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad (2.28)$$

formunda olduğunu varsayalım. (2.23) denklemi

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \quad (2.29)$$

$$a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} \quad (2.30)$$

Eğer katsayılar

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

olarak seçilecek olursa

$$\nabla V_1 = x_1 \quad \nabla V_2 = x_2$$

olur. Sonra $\dot{V}$

$$\dot{V} = \nabla V$$

$$\dot{x} = -2x_1^2 - 2x_2^2(1 - x_1x_2)$$

şeklinde hesaplanabilir. $\dot{V}$ fonksiyonu $(1 - x_1x_2) > 0$ bölgesi içinde lokal olarak negatif tanımlıdır. V fonksiyonu

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \quad (2.31)$$

Bu fonksiyon pozitif tanımlıdır ve asimptotik kararlılığı sağlar.

Denklem (2.31) ile verilen Lyapunov fonksiyonu, variable gradient metodu ile elde edilebilen tek Lyapunov fonksiyonu değildir. Variable gradient metodu ile farklı katsayı seçimleri için farklı Lyapunov fonksiyonları bulunabilir. Örneğin;

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 & a_{12} &= x_2^2 \\ a_{21} &= 3 x_2^2 & a_{22} &= 3 \end{aligned}$$

alınırsa

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_1x_2^3 \quad (2.32)$$

pozitif tanımlı fonksiyonu elde edilir. Bunun türevi ile

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 2x_2^2(x_1x_2 - 3x_1^2x_2^2) \quad (2.33)$$

fonksiyonu elde edilir. Denklem (2.33) ile verilen $\dot{V}$, lokal negatif tanımlı bir fonksiyondur (dikkat edilirse quadratik kısımlar orjinin civarında baskındır) ve bu sebeple (2.32) sistem için bir başka Lyapunov fonksiyonu sunar.

2.4.4. Sistemlerin Fiziksel Özelliklerden Yararlanarak Lyapunov Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

Yukarıdaki bölümlerde birçok örnekte Lyapunov fonksiyonları matematiksel bir formülasyon ile elde edildi, yani alınan diferansiyel denklemlerin özellikleri incelendi ve $\dot{V} < 0$ olan pozitif tanımlı V Lyapunov fonksiyonunun varlığı araştırıldı. Bazı kompleks sistemler için mühendislik varsayımları ve fiziksel özellikler kullanılarak bir Lyapunov fonksiyonu elde edilebilir.

Örnek 2.6:

Şekil 2.4 de verilen bir robot kolunun global asimptotik kararlılığının Lyapunov metodu ile incelenmesi;

q , robotun eklem pozisyonunu tanımlayan n yönlü bir vektör

τ , giriş momentlerinin vektörü

g , ağırlık momentlerinin vektörü

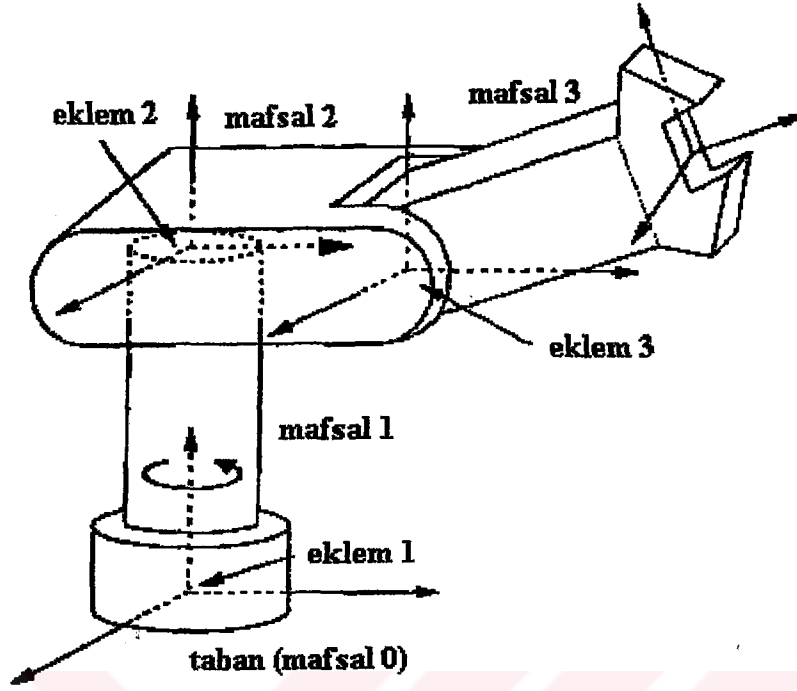
b , mafsalların hareket etmesini sağlayan merkezci kuvvetlerin vektörü

H , robot kolunun eylemsizlik (atalet) matrisi ($n \times n$)

olmak üzere n sayıda eklemi bulunan robot kolunun dinamiği n tane denklem ile tanımlanır ve robot koluna ait dinamik denklem;

$$H(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \quad (2.34)$$

dir.



Şekil 2.4: Bir robot kolu örneği

Robot kolunun hareket ettirilmesi için bir P.D. (Oransal-Türevsel) ve etkin yerçekimi dengeleme teriminden oluşan bir kontrolör varsayalım.

$$\tau = -K_D \dot{q} - K_P q + g(q) \quad (2.35)$$

K_D ve K_P sabit sayılardan oluşan $n \times n$ pozitif tanımlı matrislerdir. Deneme yanılma ile (2.34) ve (2.35) ile tanımlanan kapalı çevrim dinamiği için bir Lyapunov fonksiyonu araştırmak zordur. Çünkü (2.34) endüstride yaygın olarak bulunan 5 ve 6 eklemlili robot kolları için yüzlerce terim içerir. Bu yüzden $\dot{q} \rightarrow 0$ ve $q \rightarrow 0$ olduğunu göstermek oldukça zordur.

Fiziksel varsayımların yardımı ile böyle karmaşık robotik sistemler için bir Lyapunov fonksiyonu başarılı bir şekilde tanımlanabilir. İlk olarak, dikkat edilirse $H(q)$ eylemsizlik matrisi her q değeri için pozitif tanımlıdır. İkincisi, P.D. terimleri damper ve yay birleşiminin bir benzeri olarak yorumlanabilir. Böylece

$$V = \frac{1}{2} [\dot{q}^T H \dot{q} + q^T K_P q] \quad (2.36)$$

gibi bir Lyapunov fonksiyonunu önerilebilir. İlk terim robot kolunun kinetik enerjisini, ikinci terim (2.35) kontrolöründeki gerçek yay ile ilgili “yapay potansiyel enerji” yi gösterir.

Bu fonksiyonun türevinin hesaplanmasında mekanikteki enerji teoremi kullanılabilir. Bu teoriye göre mekanik sistemdeki kinetik enerjinin değişim oranını, dış kuvvetler tarafından sağlanan kuvvete eşittir. Bundan dolayı

$$\dot{V} = \dot{q}^T (\tau - g) + \dot{q}^T K_P q \quad (2.37)$$

Yukarıdaki denklemde τ kontrolörünün yerine konmasıyla

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{q}^T((-K_D \dot{q} - K_P q + g) - g) + \dot{q}^T K_P q \\ \dot{V} &= -\dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T K_P q + \dot{q}^T K_P q \\ \dot{V} &= -\dot{q}^T K_D \dot{q}\end{aligned}\tag{2.38}$$

denklemini elde edilir. K_D pozitif tanımlı bir matris olduğundan, $\dot{V}$ negatif tanımlı olma şartını sağlar. Robot kolu $q \neq 0$ olan herhangi bir pozisyonda kilitlenemediğinden (böyle durumlarda ivmenin sıfır olmadığı kolaylıkla gösterilebilir), invariant-set teoremine göre [1] robot kolu $\dot{q} = 0$ ve $q = 0$ konumlarına yerleşmelidir. Böylece, sistem gerçekten global asimptotik karardır.

Sonuç olarak, bu uygulamalı örnekte iki şey öğrenilebilir;

Birincisi, bir sistemin davranışı analiz edilirken, fiziksel özelliklerin mümkün olduğu kadar çok kullanılması gerekir.

İkincisi, enerji benzeri fiziksel kavramlar, etkili Lyapunov fonksiyonları seçeneği sunabilir. Fiziksel özellikler, çok girişli, doğrusal olmayan kontrolörlerin geliştirilmesinde önemli bir rol oynar.

2.5. Lyapunov Metodu ile Sistem Performansının Analizi

Lyapunov fonksiyonlarının kullanım alanları sadece sistemlerin kararlılık analizi ile sınırlı değildir. Aynı zamanda kararlı sistemlerin performansları konusunda da tahminler sağlayabilir. Özellikle doğrusal veya doğrusal olmayan asimptotik kararlı sistemlerin sürekli duruma erişme oranlarının tahmin edilmesinde kullanılır. Bu bölümde, ilk olarak, diferansiyel eşitsizliklerle ilgili temel bir önerme verilecek ve daha sonra Lyapunov analizinin doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin sürekli duruma erişme oranının belirlenmesinde nasıl kullanılabileceği incelenecektir.

2.5.1. Hedeflenen Yörüngeye Erişme Oranı

Önerme 2.1:

Eğer α reel bir sayı iken, bir reel $W(t)$ fonksiyonu

$$\dot{W}(t) + \alpha W(t) \leq 0\tag{2.39}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, buradan

$$W(t) \leq W(0) e^{-\alpha t}$$

yazılabilir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İspat:

$W(0)$ başlangıç şartı olmak üzere denklem (2.39) un Laplace dönüşümü yapılırsa

$$sW(s) - W(0) + \alpha W(s) \leq 0$$

$$W(s)(s + \alpha) \leq W(0)$$

$$W(t) \leq W(0) e^{-\alpha t}$$

olur.

Bu önerme, eğer $W \geq 0$ olan bir fonksiyon ise (2.39) un sağlanması ile W nin sıfıra exponansiyel olarak yakınsadığını garanti eder. Lyapunov direkt metodu analizini kullanımıyla bazen V fonksiyonu (2.39) formuna gelebilir.

2.5.2. Doğrusal Sistemlerin Sürekli Duruma Erişme Oranının Hesaplanması

Lyapunov analizine göre doğrusal kararlı bir sistemin yakınsama (sürekli duruma erişme) oranı hakkında bilgi edinilebilir. P matrisinin en büyük özdeğeri $\lambda_{\max}(P)$ ile, Q matrisinin en küçük özdeğeri $\lambda_{\min}(Q)$ ile, ve bunların oranı

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = \gamma \quad (2.40)$$

ile gösterilsin. P ve Q matrislerinin pozitif tanımlılığı; $\lambda_{\min}(Q)$, $\lambda_{\max}(P)$ ve dolayısıyla γ skalar sayılarının pozitif olduğunu gösterir. Matris teorisinden

$$P \leq \lambda_{\max}(P)I \quad \lambda_{\min}(Q)I \leq Q$$

dir ve buradan

$$x^T Q x \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} x^T [\lambda_{\max}(P)I] x \geq \gamma V \quad (2.41)$$

elde edilir. Denklem (2.41), denklem (2.18) ile birlikte

$$\dot{V} \leq \gamma V \quad (2.42)$$

olduğunu gösterir. Buradan yukarıdaki önermeye göre

$$x^T P x \leq V(0) e^{-\gamma t} \quad (2.43)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $x^T P x \geq \lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2$ ile birlikte, x durumunun en az $(\gamma/2)$ oranı ile orjine yakınsadığını açıklar.

Örnek 2.7:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$Q = I$ seçimi için, (2.44) sistemine göre denklem (2.17) nin çözümü

$$P = \begin{bmatrix} 7/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. $\lambda_{\max}(P) = 0,1937$ ve $\lambda_{\min}(Q) = 1$ dir. Bu değerleri (2.40) da yerine yazarsak

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = \frac{1}{0,1937} = 0,8377$$

olarak hesaplanır.

Görüldüğü gibi $V(t)$ fonksiyonun alabileceği en büyük değer, yakınsama oranının mutlak değerce en küçük değerinin bulunması ile (yani en küçük $\lambda_{\min}(Q)$ ve en büyük $\lambda_{\max}(P)$ seçimi ile) belirlenebilir. Buradan doğrusal sistem için yakınsama oranının Q matrisinin seçimi ile nasıl değiştiği ve bu seçimin sistemin dominant kutbu ile nasıl bir ilgisi olduğu sorusu düşünülebilir. Burada ilginç bir sonuç, yakınsama oranının en küçük değeri (yani sistem enerjisinin en büyük değeri) $Q = I$ seçimi ile belirlenebilir.

Şimdi bunu göstermek için Lyapunov denkleminden bir $Q = Q_1$ seçimine karşılık gelen çözümün P matrisi olduğu varsayalım.

$$A^T P + P A = -Q_1 \quad (2.45)$$

Yine Lyapunov denkleminden $Q = I$ seçimine karşılık gelen başka bir çözümün P_0 matrisi olduğunu varsayalım.

$$A^T P_0 + P_0 A = -I \quad (2.46)$$

olur.

Lyapunov denkleminde $\lambda_{\min}^{-1}(Q)$ skaleri ile yeniden ölçeklenen $\lambda_{\min}^{-1}(Q)Q$ matrisine karşılık gelen çözüm $\lambda_{\min}^{-1}(Q)P$ matrisi olacaktır. γ denkleminde pay ve paydadaki sadeleşmeden dolayı bu ölçeklendirmenin γ değeri üzerinde etkisi olmaz ve $\lambda_{\min}(\lambda_{\min}^{-1}(Q)Q) = 1$ olur. Bu nedenle genelliği bozmadan $\lambda_{\min}(Q_1) = 1$ varsayılabilir. Yukarıdaki iki farklı Q seçimi için yazılan Lyapunov denklemlerini taraf tarafa çıkarılırsa matrislerin farkı ile

$$A^T(P - P_0) + (P - P_0)A = -(Q_1 - I) \quad (2.47)$$

olur. $\lambda_{\min}(Q_1) = 1 = \lambda_{\max}(I)$ olduğundan $(Q - I)$ pozitif yarı-tanımlı ve böylece $(P - P_0)$ matrisi de pozitif yarı-tanımlıdır. Buradan

$$\lambda_{\max}(P) \geq \lambda_{\max}(P_0) \quad (2.48)$$

elde edilir. $\lambda_{\min}(Q_1) = 1 = \lambda_{\min}(I)$ olduğundan $Q = I$ seçimine karşılık gelen yakınsama oranı

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (2.49)$$

(2.45) de $Q = Q_1$ seçimine karşılık gelen yakınsama oranından daha büyük veya eşittir. Bunun anlamı γ değerinin optimal (en küçük) değerinin $Q = I$ seçimine karşılık geldiğidir.

Kararlı A matrisinin tüm özdeğerlerinin birbirinden farklı reel sayılar olduğu varsayalım. Böylece A matrisi kendisinin özdeğerlerinden oluşan diyagonal A_d matrisi haline dönüşebilir. Bu durumda, γ ile $\lambda_{\max}(A)$ arasındaki

$$\gamma/2 = -\lambda_{\max}(A) \quad (2.50)$$

ilişkisi bulunabilir [1]. Buradan $\gamma/2$ değerinin kararlı A matrisinin en büyük özdeğerine eşit olduğu bulunur ('-' işaretli olarak).

Görüldüğü gibi, Lyapunov metodu, doğrusal sistemlerde yakınsama oranının belirlenmesini sağlamıştır. Kararlı doğrusal sistemler için A matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı reel sayılardan meydana gelsin. Yakınsama oranı durum koordinatlarından bağımsız olarak sadece A sistem matrisinin dominant kutbu ile ilişkilidir. Eğer V sistemin enerji fonksiyonunu gösterirse bu fonksiyon

$$V \leq V(0) e^{2\lambda_{\max}(A)t} \quad (2.51)$$

eşitsizliği ile sınırlı alan içindedir ve $V(0)e^{2\lambda_{\max}(A)t}$ sistem enerjisinin alabileceği maximum değeri verir. $V(0)$ değerinin pozitif ve dominant kutbun negatif olmasından dolayı, V sistem enerjisinin belirlenmiş maximum $V(0)e^{2\lambda_{\max}(A)t}$ değerini aşmadan zamanla sifıra gitmesi garantilenmiştir.

2.5.3. Doğrusal Olmayan Sistemler İçin Sürekli Duruma Erişme Oranının Lyapunov Metodu ile Hesaplanması

Doğrusal olmayan sistemler için yakınsama oranının tahmini V nin kesin bir tahminini elde etmek için $\dot{V}$ nin ifadesi işlemlerini de içerir. Bu metodun doğrusal olmayan sistemler için farkı, V ve $\dot{V}$ fonksiyonlarının mutlaka durum değişkenlerinin quadratik fonksiyonu olmak zorunda olmamasıdır.

Örnek 2.8:

Aşağıda tanımlanan sistemi ele alalım.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) + 4x_1^2x_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Seçilen Lyapunov fonksiyonu yani pozitif tanımlı $V = \|x\|^2$, yani

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (2.53)$$

fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonun türevi

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2) \quad (2.54)$$

fonksiyonudur. (2.53) ve (2.54) arasında

$$\dot{V} = 2V(V - 2) \quad (2.55)$$

ilişkisi vardır. V pozitif tanımlı olduğundan $\dot{V}$ in negatif tanımlı olabilmesi için

$$0 > V > 2 \quad (2.56)$$

olmalıdır. (2.56) ile verilen sınırlar içinden başlayan sistem kararlıdır. Fakat, sistemin sürekli duruma erişme oranı da elde edilebilir. Denklem (2.55), birinci dereceden, doğrusal olmayan diferansiyel bir denklemdir [5]. Bu denklemin çözümü ile $V(x)$ fonksiyonu elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2V(V - 2) \\ \frac{dV}{V(2 - V)} &= -2dt \\ \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{2 - V} \right) dV &= \int -2dt \end{aligned}$$

Bu integralin sabiti $\ln(\alpha)$ olmak üzere çözüm yapılırsa.

$$\ln(V) - \ln(2 - V) - \ln(\alpha) = -4t$$

$$\ln \frac{V}{(2 - V)\alpha} = -4t$$

$$\frac{V}{(2 - V)\alpha} = e^{-4t}$$

$$2\alpha e^{-4t} - V\alpha e^{-4t} = V$$

$$V(1 + \alpha e^{-4t}) = 2\alpha e^{-4t}$$

$$V(x) = \frac{2\alpha e^{-4t}}{1 + \alpha e^{-4t}} \quad (2.57)$$

fonksiyonu elde edilir. α pozitif reel katsayısı $t = 0$ anındaki başlangıç koşullarından

$$\alpha = \frac{2V(0)}{2 - V(0)} \quad (2.58)$$

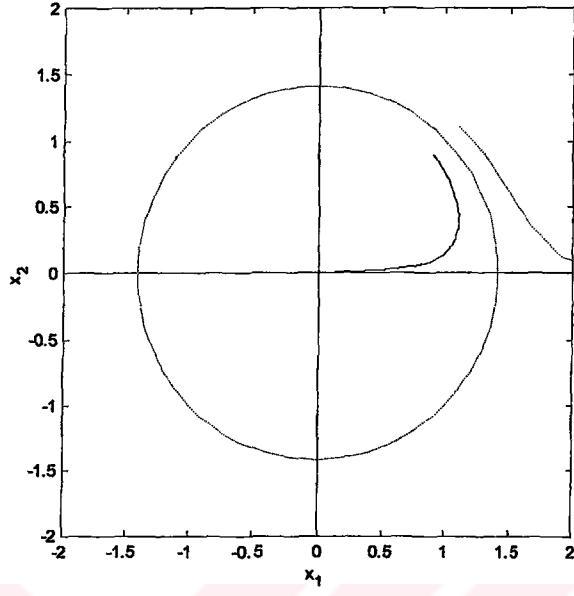
denklemini ile bulunabilir.

Eğer $\|x(0)\|^2 = V(0) < 2$ ise, yani, eğer sistem yörüngesi $\sqrt{2}$ birim yarıçaplı çemberin içinden başlarsa, (2.59) dan, $\alpha > 0$ ve böylece (2.58) den

$$V(t) < 2\alpha e^{-4t} \quad (2.59)$$

olur. (2.59) durum vektörünün normu $\|x(t)\|$ nin exponansiyel olarak sıfıra yaklaştığını gösterir.

Eğer yörünge $\sqrt{2}$ birim yarıçaplı çemberin dışından başlarsa, yani, eğer $V(0) > \sqrt{2}$ ise $V(t)$ (ve bu yüzden aynı zamanda $\|x(t)\|$ değeri de) sonlu bir zamanda sonsuza doğru gider. Bu durum sistem için kararsızlık anlamına geleceğinden sistem kontrolden çıkarak parçalanmaya veya bozulmaya doğru gidecektir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5: $x_1(0)= 0.9, x_2(0) = 0.9$ ve $x_1(0)= 1.1, x_2(0) = 1.1$ başlangıç durumları için, (2.53) sisteminin yörüngesinin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi.

3. DOĞRUSAL SİSTEMLER İÇİN GERİBESLEMELİ KONTROL

3.1. Giriş

Modern kompleks bir sistem çok girişli ve çok çıkışlı olabilir. Önceleri böyle çok girişli–çok çıkışlı sistemler, tek girişli–tek çıkışlı sistemlere dönüştürülerek analiz ve tasarımı yapıldı. Daha sonraları bilgisayarlar ucuzlaması ve birçok kontrol sisteminde kullanılması ile bu çok girişli–çok çıkışlı sistemlerin bilgisayarda analiz edilmesine imkan veren ve matrissel formda olan durum uzay modelleri geliştirilmiştir.

Doğrusal bir sistemin dinamik denklemi

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

ve çıkışı

$$y = Cx + Du \quad (3.2)$$

ile tanımlanır. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (1.4) de belirtildiği gibi sistem matrisi, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ giriş matrisi, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ çıkış matrisi, $D \in \mathbb{R}^{m \times r}$ giriş-çıkış geçiş matrisi, $x \in \mathbb{R}^n$ durum değişkeni, $u \in \mathbb{R}^r$ giriş, $y \in \mathbb{R}^m$ çıkıştır. Denklem (3.1)-(3.2) sisteminde verilen matris boyutlarında n , r , m sayıları fiziksel olarak sırasıyla; durum değişkeni sayısı, kontrol girişi (giriş kanalı) sayısı ve çıkış değişkeni sayısına karşılık gelmektedir.

Bir sistemde durum geribeslemeli kontrol metodu kullanılabilmesi için

- Sistemin tüm durum değişkenlerinin ölçülmesi
- Kontroledilebilirlik özelliğine sahip olması

gerekir. Bu çalışmada geribesleme için gereksinim duyulan durum değişkenlerinin tümünün kontroledilebilir olduğu kabul edilecektir.

3.2. Kontroledilebilirlik

Bir sistemin kontroledilebilirlik özelliği, sistemin durum değişkenlerini x_0 başlangıç şartından x_1 durumuna götürebilme yeteneğidir. Bir sistemde durum geribeslemeli kontrol metodu kullanılabilmesi için sistemin kontroledilebilir olup olmadığının araştırılması gerekmektedir. Bu bölümde, belirtilen amaçla kullanılacak olan kontroledilebilirlik matrisi ve hesabı verilecektir.

Kontroledilebilirlik matrislerinin hesaplanmasında kullanılacak olan vektörlerin doğrusal bağımsızlığı için gerekli koşul;

Vektörlerin doğrusal bağımsızlığı; $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabit katsayılar olmak üzere eğer

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$$

denklemini sadece

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

için sağlanıyor ise $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörleri doğrusal bağımsızdır.

3.2.1. Tüm Durum Kontrol edilebilirlik

Denklem (3.1) sistemi için tüm durum kontrol edilebilirlik koşulu aşağıdaki gibidir.

Tüm durum kontrol edilebilirlik; Eğer (3.1) sisteminin tüm $x(t)$ durumları u kontrol girişi yardımıyla, bir $x(t_0)$ başlangıç çıkışından bir $x(t_1)$ son değerine $t_0 < t < t_1$ aralığında sonlu bir t süresinde getirilebiliyorsa bu sistem tüm durum kontrol edilebilirdir.

Bir sistemin tüm durum kontrol edilebilir olup olmadığı, kontrol edilebilirlik matrisinin rank'ı ile tespit edilebilmektedir. Tüm durum kontrol edilebilirlik tanımından yararlanarak bu matris elde edilebilir.

Bu matrisin hesabı için önce kontrol girişi skalar ($u \in \mathbb{R}^1, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) olan (3.1) sistemi için çözüm yapılsın.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Durum değişkenlerinin son değeri durum uzayının orijini olsun ($x(t_1) = 0$) ve başlangıç zamanı $t_0 = 0$ olsun. Bu kabuller tüm durum kontrol edilebilirlik tanımına uygulanırsa,

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

veya

$$e^{At_1}x(0) = - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını e^{-At_1} sabit matrisi ile soldan çarpılırsa

$$e^{-At_1}e^{At_1}x(0) = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (3.3)$$

$\alpha(\tau)$ zamana bağlı skalar bir fonksiyon olmak üzere $e^{-A\tau}$ matrisi Sylvester interpolasyon metodu kullanılarak [3],

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (3.4)$$

biçiminde yazılabilir. (3.4) denklemini (3.3) de yerine konursa

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

integral işleminin sonucu

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$$

dönüşümü ile (3.5)

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \quad (3.6)$$

olur. Eğer sistem tüm durum kontroledilebilir ise alınan herhangi bir $x(0)$ başlangıç durumu için denklem (3.6) sağlanmalıdır. Bu da $R^{n \times n}$

$$M_x = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (3.7)$$

matrisinin rank'ının n olmasını gerektirir.

Bu analizden tüm durum kontrol edilebilirlik koşulu aşağıdaki gibi tanımlayabilir;

(3.1) sisteminin tüm durum kontroledilebilir olması için $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ vektörlerinin doğrusal bağımsız, ya da diğer bir ifade ile $R^{n \times n}$ (3.7) matrisinin rank'ının n olması gerekir.

Elde edilen sonuç u kontrol vektörünün $r \times 1$ boyutlu olduğu (3.1) sistemi için genişletilebilir. Bu durumda $R^{n \times nr}$ boyutundaki

$$M_x = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (3.8)$$

matrisinin rank'ı n olmalıdır.

(3.8) matrisine kontroledilebilirlik matrisi denir.

Örnek 3.1:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

sistemi verilsin. Sistemin tüm durum kontroledilebilir olması için

$$M_x = [B \quad | \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin rank'ı n olmalıdır.

$$\text{rank}(M_x) = 1 \neq 2$$

olduğundan sistem (3.9) tüm durum kontroledilebilir değildir.

Şimdi de aşağıdaki sistemi ele alalım;

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$M_x = [B \quad | \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(M_x) = 2$$

Sistem (3.10) tüm durum kontroledilebilirdir.

3.2.2. Çıkış Durum Kontroledilebilirlik

Pratikte kontrol sistemi tasarımında, bazı durumlarda sistemin durum değişkenlerini kontrol etmektense çıkışlarının kontrol edilmesi istenebilir. Bunun için (3.1)-(3.2) ile tanımlanan bir kontrol sistemi ele alınsın.

Eğer sistemin çıkışı bir $y(t_0)$ başlangıç çıkışından bir $y(t_1)$ son çıkışına $t_0 < t < t_1$ aralığında sonlu bir t süresinde getirilebiliyorsa bu sistem tüm çıkış kontroledilebilirdir.

Bu şartın sağlanması için gerekli koşul şöyledir:

Eğer $R^{m \times (n+1)r}$ boyutundaki

$$M_y = [CB \quad | \quad CAB \quad | \quad CA^2B \quad | \quad \dots \quad | \quad CA^{n-1}B \quad | \quad D] \quad (3.11)$$

matrisinin rank'ı m ise yukarıda durum denklemi ile ifade edilen sistem tüm çıkış kontroledilebilirdir. (3.11) matrisi çıkış kontroledilebilirlik matrisidir.

3.3. Tüm Durum Kontrol Matrislerinin Hesaplanması

Denklem (3.1) ile tanımlanmış bir sistemi ele alalım

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Sitemin durum kontroledilebilir olduğu ve durum değişkenlerinin hepsinin ölçüldüğü kabul edilirse, durum geribeslemeli kontrol işareti

$$u = -Kx \quad (3.12)$$

dir. Burada $K \in R^{nxr}$ kontrol matrisi olarak adlandırılır. (3.1) sisteminde (3.12) kontrol işareti

yazılırsa, kapalı çevrimli sistemin dinamiği

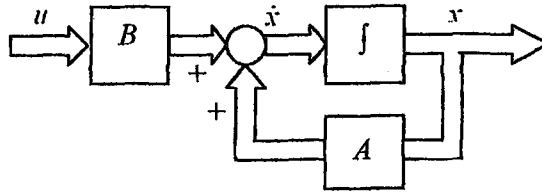
$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3.13)$$

olur. Kapalı çevrimli sistem matrisi

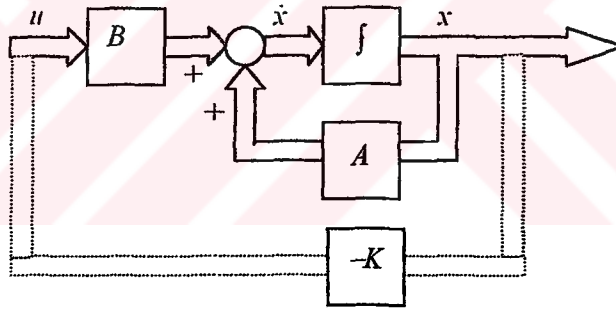
$$A_c = (A - BK) \quad (3.14)$$

ile tekrar yazılabilir. K matrisi hedeflenen kapalı çevrim performansını sağlayacak şekilde seçilir.

Durum geribeslemeye ilişkin açık-çevrim ve kapalı-çevrim sistem blok diyagramı aşağıda Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 ve gösterilmiştir.



Şekil 3.1: $\dot{x} = Ax + Bu$ açık çevrimli kontrol sistemi



Şekil 3.2: $\dot{x} = Ax + Bu$ açık çevrimli sisteminin $u = -Kx$ ile durum geribeslenmesi

Geleneksel kontrol teorisinde sistemin giriş-çıkış ilişkileri ile tanımlanması, sisteme ait başlangıç bilgilerinden yararlanma imkanını ortadan kaldırmaktadır. Buna karşın modern kontrol yöntemlerinde sistemin başlangıç bilgileri kullanılabilir.

Durum geribeslemeli tasarımı karakteristik denklemin kökleri doğrudan kontrol edilebildiğinden, sabit yapıli geleneksel kontrole göre çok daha esnek bir yapıdadır. Durum geribeslemeli kontrol sisteminde durum değişkenleri tüm durum kontrol edilebilir ise karakteristik denklemin kutupları istenildiği gibi yerleştirilebilir. Böylece istenen sistem davranışını sağlamak ve kararlı bir sistem oluşturmak için istediğimiz kökleri seçme şansına sahip oluruz.

PI, PID gibi geleneksel kontrol tekniklerinde sistem derecesi artmaktadır. Buna karşın durum geribeslemeli kontrol tekniğinde sistemin derecesi aynı kalmaktadır..

Durum geribeslemeli kontrol sisteminin dezavantajı ise tüm durumları elde edilip geribeslenmesi zorunluluğunun olmasıdır. Böyle bir işlem hem pahalıdır hem de her zaman için fiziksel olarak mümkün olmayabilir.

3.3.1. Kutup Yerleştirme Metodu ile Kontrol Matrisinin Hesaplanması

Bu bölümde kutup yerleştirme metodu olarak adlandırılan bir tasarım yöntemi sunulacaktır. Tüm durum değişkenlerinin ölçülebilir ve geribesleme için mevcut olduğunu varsayalım. Eğer ele alınan sistem tüm durum kontrol edilebilir ise, kapalı çevrimli sistemin kutupları, uygun geribesleme kazanç matrisi ile durum geribesleme yapılarak istenen kompleks düzlemde herhangi bir bölgeye yerleştirilebilir.

Sunulan tasarım yöntemi geçici rejim (hız, sönüm oranı...) ve/veya frekans cevabı (band genişliği...) gereksinimlerine göre istenen kapalı çevrim kutuplarının belirlenmesiyle başlar.

Sistemimiz (3.1) de verilen aşağıdaki

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

sistemi ve kontrol işareti (3.12)

$$u = -Kx$$

olsun. İstenen kapalı çevrim kutuplarının ise

$$s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_{n-1}, s = \mu_n \quad (3.15)$$

olduğu varsayalım. Kapalı çevrimli sistemin kutupları durum geribeslemeli kontrol sistemlerinde kontrol işaretindeki K matrisi ile seçilebilir. Eğer sistem tüm durum kontroledilebilir ise istenen kutup değerlerini elde etmek için kullanılacak K geribesleme kazanç matrisi hesaplanabilir. K matrisinin hesabında kullanılan kutup yerleştirme metodu, aşağıdaki işlem adımlarından oluşur.

a) Sistemin tüm durum kontroledilebilir olup olmadığını kontrol et.

b) A matrisi için

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

karakteristik polinom denkleminde $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ katsayılarını belirle.

c) Kontroledilebilir kanonik form için dönüşüm matrisi $T = M_x W$ yi hesapla

$$M_x = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) İstenen özdeğerleri (kapalı-çevrim kutupları) kullanarak istenen kapalı çevrim karakteristik denklemini yaz.

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - A_c| \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

e) İstenen özdeğerleri sağlamak için gerekli K geribesleme matrisini hesapla

$$K = [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \alpha_{n-2} - a_{n-2} \mid \dots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1}$$

Örnek 3.2:

Kutup yerleştirme metodu ile durum geribesleme tasarımı;

Bu programda durum geribeslemeli kararsız bir sistemin istenen davranışı göstererek kararlı hale getirilmesi için kullanılacak $u = -Kx$ durum geribeslemesi için gerekli K matrisi hesaplanmaktadır.

Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

```
» A = [0 1 0; 64.4 0 -16; 0 0 -100]; %nxn 3x3
» B = [0 0 100]'; %nxr 3x1
» C = [1 0 0]; %mxn 1x3
» D = [0]; %mxr 1x1
» sys = ss(A,B,C,D);
```

Bu sistemin özdeğerleri

```
» eigsys = eig(sys)
eigsys =
    8.0250
   -8.0250
  -100.0000
```

Sistem bir pozitif reel özdeğere sahip olduğundan kararsızdır. Bu sistemin istenen davranışı göstermesi için sahip olması istenen özdeğerler

```
» p = [-2.038 -0.22775 -0.68]
```

olarak tanımlansın. Sistemin kontroledilebilir olması için kontroledilebilirlik matrisi M_x in rank'ı 3 olmalı. Kontroledilebilirlik matrisini hesaplırsak

```
» Mx = ctrb(A,B)
Mx =
    0         0   -1600
    0   -1600  160000
   100  -10000 1000000
```

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Bu matrisin rank'ı

```
» RankMx = rank(Mx)
RankMx =
    3
```

olduğundan sistem tüm durum kontroledilebilirdir. Sistemin bu köklere sahip olması için gerekli K geribesleme kazanç matrisi

```
» K = place(A,B,p)
K =
   -0.1188   -0.0415   -0.9705
```

olarak hesaplarız.

Yeni geribeslemeli sistemin sistem matrisi:

```
» Ac = A-B*K
Ac =
     0     1.0000     0
   64.4000     0  -16.0000
   11.8764    4.1503  -2.9458
```

ve bu yeni sistemin özdeğerleri

```
» eigAc = eig(Ac)
eigAc =
   -0.2277
   -0.6800
   -2.0380
```

şeklindedir. Böylece sistemin istenen kutupları

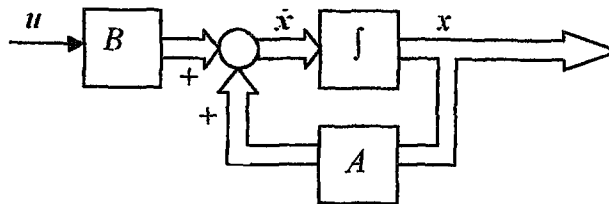
```
p = [-2.038 -0.22775 -0.68]
```

sağlanmış oldu.

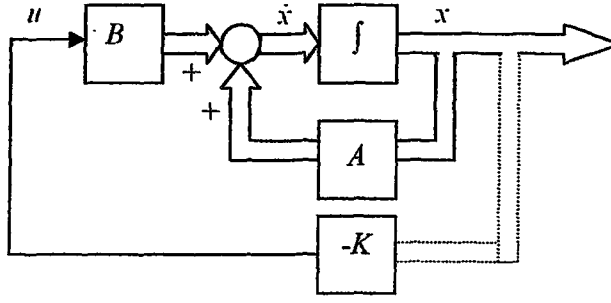
3.3.2. Ackermann Metodu ile Kontrol Matrisinin Hesaplanması

Bu metod tek girişli durum geribeslemeli açık çevrimli bir sistemde (eğer mümkünse) istenen özdeğerleri sağlamak kullanılan $u = -Kx$ durum geribesleme kontrolöründeki K kazanç matrisini hesaplamaya yarar.

(3.1) ile tanımlı tek girişli bir sistemin açık çevrimli blok diyagramı Şekil 3.3 ve kapalı çevrimli Şekil 3.4 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.3: $\dot{x} = Ax + Bu$ ile ifade edilen, tek girişli, açık çevrimli kontrol sistemi



Şekil 3.4: $\dot{x} = Ax + Bu$ ile ifade edilen, tek girişli $u = -Kx$ durum geribeslemeli kontrol sistemi

(3.1) ile tanımlı

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

bir sistem olsun. Bu sistem için istenen kapalı çevrim kutupları (3.15) ile verilen

$$s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_{n-1}, s = \mu_n$$

olsun. (3.12) ile tanımlı

$$u = -Kx$$

şeklinde bir K matrisi ile durum geribeslemesi yapılmış sistemin denklemi (3.13)

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

denkleminde dönüşür. Burada (3.14)

$$(A - BK) = A_c$$

dönüşümünü yapalım. Karakteristik denklem

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - A_c| \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

olarak yazılır. Cayley-Hamilton teoreminden[3]

$$\Phi(\tilde{A}) = A_c^n + \alpha_1 A_c^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A_c + \alpha_n I = 0 \quad (3.16)$$

yazılabilir. Bu denklem Ackermann formülünü elde etmek için kullanılacaktır.

İşlemleri kolaylaştırmak için $n = 3$ alalım.

$$I = I$$

$$A_c = A - BK$$

$$A_c^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BKA_c$$

$$A_c^3 = (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABKA_c - BK A_c^2$$

Yukarıda n . dereceye kadar yazılmış ifadeleri satır sırasına göre sırayla $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ (burada α_0

= 1) ile çarpılıp eşitliğin sol tarafını ve sağ tarafını ayrı ayrı toplanırsa

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A_c + \alpha_1 A_c^2 + A_c^3$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_3 I + \alpha_2 (A - BK) + \alpha_1 (A^2 - ABK - BKA_c) + A^3 - A^2 BK - ABKA_c - BKA_c^2 \\
&= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 ABK - \alpha_1 BKA_c - A^2 BK - ABKA_c - BKA_c^2
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

(3.16) Cayley-Hamilton denkleminin geribeslemeli sistem için

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A_c + \alpha_1 A_c^2 + A_c^3 = \Phi(A_c) = 0$$

ve geribeslemesiz sistem için

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 = \Phi(A), \Phi(A) \neq 0$$

yazılabilir. $\Phi(A_c)$ ve $\Phi(A)$ denklemlerini (3.17) denkleminde yerine konursa

$$\Phi(\tilde{A}) = \Phi(A) - \alpha_2 BK - BK A^2 - \alpha_1 ABK - \alpha_1 BKA_c - ABKA_c - A^2 BK$$

$\Phi(\tilde{A}) = 0$ olduğundan

$$\Phi(A) = B(\alpha_2 K + \alpha_1 KA_c + KA_c^2) + AB(\alpha_1 K + KA_c) + A^2 B(K)$$

olur. Bu ifadeyi matrisel olarak kontroledilebilirlik matrisi ile bir başka matrisin çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$\Phi(A) = [B \mid AB \mid A^2 B] \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 KA_c + KA_c^2 \\ \alpha_1 K + KA_c \\ K \end{bmatrix}$$

Sistemin tam durum kontroledilebilir olması için (3.8) de verilen

$$M_x = [B \mid AB \mid A^2 B]$$

matrisinin tersinin var olması gerekir. Bu matrisin tersi ile en son bulunan denklemin her iki tarafını soldan çarpılırsa

$$[B \mid AB \mid A^2 B]^{-1} \Phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 KA_c + KA_c^2 \\ \alpha_1 K + KA_c \\ K \end{bmatrix}$$

Yine bu denklemin her iki tarafı soldan $[0 \ 0 \ 1]$ ile çarpılırsa

$$[0 \ 0 \ 1] [B \mid AB \mid A^2 B]^{-1} \Phi(A) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 KA_c + KA_c^2 \\ \alpha_1 K + KA_c \\ K \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $n = 3$ olan sistem için K matrisi

$$K = [0 \ 0 \ 1] [B \mid AB \mid A^2 B]^{-1} \Phi(A)$$

olur. Yukarıda K matrisini veren denklem herhangi bir n değeri için

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B]^{-1} \Phi(A)$$

(3.18)

olarak genelleştirilebilir. Burada $\Phi(A)$

$$\Phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$$

dir. Durum geribeslemeli sistemde K geribesleme kazanç matrisinin belirlenmesinde kullanılan (3.18) denklemi Ackermann formülü olarak bilinir. Bu formülle tek girişli (3.1) sisteminde istenen özdeğerleri sağlamak için gerekli K kazanç matrisi hesaplanabilir. Sistemin tek girişli olmak zorunda olması bu yöntemin bir dezavantajıdır.

3.3.3. Yerine Bırakma Metodu ile Kontrol Matrisinin Hesaplanması

Eğer sistemin derecesi düşük ise ($n \leq 3$), bu durumda K matrisini istenen karakteristik polinomda yerine bırakmak daha basit olabilir. Örneğin, $n = 3$ için durum geribesleme kazanç matrisi K

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$$

K matrisinin istenen karakteristik polinom $|sI - A + BK|$ da yerine konup $(s - \mu_1)(s - \mu_1)(s - \mu_1)$ e eşitlenmesiyle

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_1)(s - \mu_1)$$

yazılabilir. Her iki taraf s in polinomu olduğundan aynı kuvvetlere sahip terimlerin katsayılarının eşitlenmesi ile k_1 , k_2 ve k_3 değerlerini bulmak mümkündür. Bu yol $n = 2$ veya 3 için uygundur. Fakat $n > 3$ için pek uygun değildir.

3.4. Optimal Kontrol Matrisinin Hesaplanması

Bölüm 3.1-3.3 de kontrol kazancı hesaplanırken önce kapalı çevrimli sistem için istenen özdeğerler belirlenmiş daha sonra bunu gerçekleştirmek için gerekli kontrol kazancı hesaplanmıştır. Bu tekniklerin bazı sakıncaları vardır:

1) İstenen sistem performansının optimal olması için, çeşitli kriterlere göre hazırlanmış optimal kapalı çevrimli transfer fonksiyonları tablolar halinde mevcuttur. Fakat bu tablolar tek girişli-tek çıkışlı ve düşük dereceden sistemler için kullanışlı olsa da çok girişli-çok çıkışlı ve yüksek dereceden sistemler için kullanışlı değildir.

2) Uygulamada kontrol sinyalinin genliği üzerinde fiziksel kısıtlamalar bulunabilir. Bu kısıtlama, kontrol sistemi besleyen güç kaynağından, kontrol elemanının çıkışından veya sistemin kontrol girişinden kaynaklanabilir. İstenen sistem performansının (veya bu çalışmada ele alınacak olan optimal sistem performansının) sağlandığı K kazancında kontrol sinyalinin değeri, izin verilen sınırları aşabilir. Böyle bir durumda istenen performansın elde edilmesi mümkün olmayacağı gibi sistemin kararlılığı dahi tehlikeye girebilir[4].

Sistemin fiziksel kısıtlamalarından dolayı kontrol sınırları üzerinde herhangi bir taviz verilemese de izin verilen kontrol sınırları içinde en uygun sistem performansının sağlanması istenir. İşte bu amaçla, bu bölümde, çok girişli-çok çıkışlı doğrusal sistemler için kontrol

sinyalinin genliğinin ayarlanarak sınırlandırılabilirdiği ve bu sınırlar içinde en uygun sistem performansının sağlandığı bir kontrol verilecektir.

3.4.1. Performans İndeksi

Kontrol sistemlerinin tasarımında, mevcut kontrol kararının belirlenmesi için bir kural bulunması amaçlanabilir. Böyle bir ölçü genellikle bir optimizasyon kriteri (performans indeksi) ile sağlanır. Performans indeksi, sistemin gerçek performansına ne kadar yakın olduğunu veren bir fonksiyondur. Çoğu uygulamada, performans indeksinin minimize edildiği böylesi bir yolla kontrol vektörünün seçimi ile, sistem davranışı optimize edilir.

Performans indeksi sonuçta elde edilecek kontrol sisteminin yapısını belirlediği için çok önemlidir. Yani, elde edilecek kontrol sistemi performans indeksinin biçimine göre doğrusal, doğrusal olmayan, zamanla değişen, zamanla değişmeyen olabilir. Kontrol mühendisi problemin gereksinimine göre performans indeksini formüle eder ve böylece elde edilecek sistemin yapısını etkiler. Bu gereksinim sadece performans gereksinimlerini değil kontrol biçiminin fiziksel gerçekleştirilebilirliğini sağlamak amacıyla bazı kısıtlamaları da içermektedir. Verilen bir sistem için en uygun performans indeksini belirlemek (özellikle kompleks sistemlerde) oldukça zordur[3].

3.4.2. Lyapunov Metoduyla Parametre Optimizasyonu

Bu kısımda, Lyapunov fonksiyonu ile quadratik performans indeksi arasındaki doğrudan ilişki ve bu ilişkiyi kullanarak parametre optimizasyon probleminin çözümü verilecektir.

A sistem matrisi kararlı olan

$$\dot{x} = Ax$$

sistemini ele alalım. A nın ayarlanabilir parametre veya parametrelere sahip olduğunu varsayalım. $Q \in R^{n \times n}$ pozitif tanımlı (veya pozitif yarı tanımlı) simetrik matris olmak üzere minimize edilmek istenen performans indeksi

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt$$

olsun. Bu durumda problem, performans indeksini minimize etmek için sistem parametrelerinin ayarlanması ile çözülür.

P matrisi pozitif tanımlı simetrik matris olmak üzere

$$\dot{x}^T Q x = -\frac{d}{dt}(x^T P x)$$

olduğunu varsayalım.

$$\dot{x}^T Q x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = -x^T A^T P x - x^T P A x = -x^T (A^T P + P A) x$$

olur. Lyapunov'un ikinci metoduna göre eğer A matrisi kararlı ise seçilen her bir Q matrisi için

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.19)$$

Lyapunov denklemini sağlayan P matrisi vardır. Bu yüzden P matrisinin elemanları bu denklemle belirlenebilir.

Performans indeksi J

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt = -x^T P x \Big|_0^{\infty} = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0)$$

ile hesaplanabilir. A matrisinin bütün özdeğerlerinin reel kısımları negatif olduğundan $x(\infty) \rightarrow 0$ olur. Buradan

$$J = x^T(0) P x(0) \quad (3.20)$$

elde edilir. Böylece performans indeksi J , başlangıç koşulları $x(0)$ ve denklem (3.19) deki gibi A ve Q matrisleri ile ilgili olan P matrisi ile elde edilebilir. Q verilmiş, $x(0)$ başlangıç koşullarından verilmiş olduğu için, P matrisi, A matrisinin elemanlarının bir fonksiyonudur. Böylece bu minimumlaştırma işleminin sonucu, ayarlanabilir parametrenin optimal değerini verecektir [3].

3.4.3. Lineer Quadratik Optimal Kontrol

Kontrol edilecek sistem (3.1) verilen

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.21)$$

sistemi, kontrol işareti ise (3.12) ile verilen

$$u = -Kx \quad (3.22)$$

olsun [3]. Optimal kontrol sistemlerinin tasarımında problem; seçilen performans indeksini, yani $L(x, u)$ x ve u nun quadratik fonksiyonu olmak üzere

$$J = \int_0^{\infty} L(x, u) dt$$

integralinin minimize edilmesi problemidir. Böylece, optimal kontrol ve optimal regülatör sistemlerinin quadratik performans indeksine göre tasarımı, (3.22) kontrol işaretindeki K matrisinin elemanlarının belirlenmesi problemine indirgenir.

Denklem (3.21) ile tanımlanan sistem için optimal kontrol vektörü $u(t)$ nin belirlenmesi problemini ele alalım. $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif (veya yarı-pozitif) tanımlı simetrik matris, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$

pozitif tanımlı simetrik matris ve u sınırlandırılmamış kontrol işareti olmak üzere, performans indeksi

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T R x) dt \quad (3.23)$$

alınabilir. Amaç bu performans indeksini minimize edecek K değerinin belirlenmesidir. Burada optimal K değeri Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak elde edilecektir. Dikkat edilirse denklem (3.23) un sağ tarafındaki ikinci terim kontrol sinyali harcadığı enerjiyi verir. Q ve R matrisleri sırasıyla, hata sinyalini ve kontrol sinyali enerjini sınırlayan ağırlıklardır. Ele alınan optimal kontrol probleminde kontrol vektörü $u(t)$ nin saturasyona girmediği varsayılacaktır.

Aşağıda gösterileceği gibi, (3.22) ile belirtilen doğrusal kontrol, optimaldir. Bu yüzden, eğer performans indeksini minimize etmek için K matrisinin bilinmeyen elemanları belirlenirse, (3.22) herhangi bir başlangıç koşulu için optimaldir.

Optimizasyon problemini çözmek için (3.22) deki kontrol işareti (3.21) sisteminde yerine konursa

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (3.24)$$

elde edilir. Aşağıdaki işlemler için $A - BK$ matrisinin kararlı olduğunu (veya reel kısımları negatif olan özdeğerlere sahip olduğunu) varsayalım. (3.22) denkleminin (3.23) denkleminde yerine konmasıyla

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt$$

elde edilir. Bu parametre-optimizasyon probleminin çözümü için

$$x^T (Q + K^T R K) x = - \frac{d}{dt} (x^T P x)$$

olarak alınsın. $\dot{x} = (A - BK)x$ olduğundan buradan,

$$\begin{aligned} x^T (Q + K^T R K) x &= - [(A - BK)x]^T P x - x^T P [(A - BK)x] \\ &= -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemin her iki tarafının karşılaştırılması ile denklemin herhangi bir x değeri için

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (3.25)$$

eşitliğini sağlaması gerektiği bulunur. Lyapunov'un ikinci metoduna göre, eğer $(A - BK)$ kararlı bir matris ise (3.25) denklemini sağlayan pozitif tanımlı bir P matrisi vardır. O halde $x(\infty) = 0$ olmak üzere (3.20) denkleminin elde edilmesinde kullanılan benzer yol ile

$$x^T Q x = -\frac{d}{dt} (x^T P x)$$

$$x^T Q x = -x^T (A^T P + P A) x$$

$$A^T P + P A = -Q$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt = -x^T P x \Big|_0^{\infty} = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0)$$

Burada A nın bütün özdeğerleri negatif reel kısımlara sahip olduğundan $x(\infty) \rightarrow 0$ olur. Böylece performans indeksi

$$J = x^T(0) P x(0) \quad (3.26)$$

olarak yazılabilir.

Quadratik optimal kontrol problemini çözmek için aşağıdaki yöntem izlenecektir:

R pozitif tanımlı veya reel simetrik matris, T bir determinantı sıfırdan farklı bir matris olmak üzere

$$R = T^T T$$

yazılabilir. Böylece (3.25) denklemi

$$(A^T - K^T B^T) P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0$$

$$A^T P - K^T B^T P + P A - P B K + Q + K^T T^T T K = 0 \quad (3.27)$$

olur. Bu denklemde

$$(T^T)(T^T)^{-1} = I$$

özdeşliği yardımı ile

$$K^T B^T P = K^T I B^T P = K^T (T^T)(T^T)^{-1} B^T P$$

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - P B K = K^T T^T T K - K^T (T^T)(T^T)^{-1} B^T P - P B (T^T)(T^T)^{-1} K$$

dönüşümü yapılır ve X, Y uygun boyutta matrisler olmak üzere

$$X = T K, Y = (T^T)^{-1} B^T P$$

alınarak

$$X^T X - X^T Y - Y^T X = (X - Y)^T (X - Y) - Y^T Y$$

benzeri dönüşümler yapılırsa

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - P B K = [T K - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P] - P B T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P$$

elde edilir. Buradan (3.27) denklemi

$$A^T P + P A + [T K - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P] - P B T^{-1} B^T P + Q = 0$$

şeklinde yazılabilir. J nin K ya göre minimizasyonu

$$x^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P] x$$

nin K ya göre minimizasyonunu gerektirir. Bu son ifade, değeri sıfır veya sıfırdan büyük pozitif sayı olan quadratik bir fonksiyondur. Bu nedenle ifadeyi sıfır yapan

$$TK = (T^T)^{-1}B^TP$$

değerinde minimum olur. Böylece

$$K = T^T(T^T)^{-1}B^TP = R^{-1}B^TP \quad (3.28)$$

elde edilir.

Denklem (3.28) optimal K matrisini verir. Böylece performans indeksi (3.23) gibi olan optimal kontrol problemi için verilen optimal kontrolör doğrusaldır ve

$$u(t) = -R^{-1}B^TPx(t) \quad (3.29)$$

ile ifade edilir. (3.28) deki P matrisi (3.25) denklemini veya aşağıdaki indirgenmiş Riccati matris denklemini sağlamak zorundadır:

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (3.30)$$

(3.30) indirgenmiş Riccati matris denklemi olarak adlandırılır.

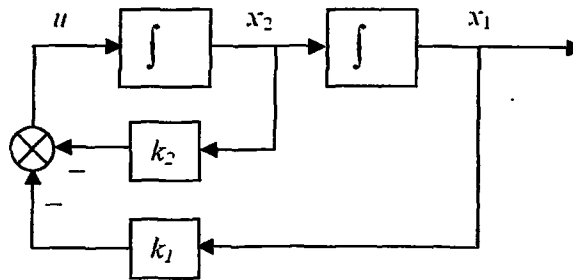
LQR kontrol için tasarım adımları özetle:

- 1) Riccati indirgenmiş matris denklemi olan denklem (3.30), P matrisi için çözülür.
- 2) Bulunan P matrisi (3.28) denkleminde yerine yazılır ve optimal K değeri bulunur.

Eğer, elde edilen K matrisine göre $(A - BK)$ kararlı ise sonuç doğru, değilse yanlıştır.

Denklem (3.30) daki indirgenmiş Riccati denklemini sağlayan K değeri, MATLAB programında $[K, P, E] = \text{lqr}(A, B, R, Q)$ komutu ile hesaplanır. Burada E değeri geribeslemeli sistemin özdeğerlerini verir.

Örnek 3.3:



Şekil 3.5: İkinci dereeden, durum geribeslemeli bir sistem

Şekil 3.5 deki gibi bir sistem olsun. Varsayılan kontrol sinyali

$$u(t) = -Kx(t)$$

nin

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mu \geq 0$$

olmak üzere performans indeksi

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt$$

yi minimize edecek optimal geribesleme kazanç matrisi K nın elemanlarını yukarıda verilen yöntemle bulalım. Verilen sistemin durum-uzay denklemi

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Verilenlere göre denklem (3.30) deki indirgenmiş Riccati matris denklemini çözersek

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Q ve R matrisleri simetrik olduğundan, P simetrik bir matristir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu denklem

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak basitleştirilebilir. Bu matris denkleminde aşağıdaki üç denklem elde edilir.

$$1 - p_{12}^2 = 0$$

$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$\mu + 2p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

Bu denklemlerin p_{11} , p_{12} ve p_{22} için çözümü ile elde edilen

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

matrisinden

Denklem (3.28) den optimal kazanç matrisi K

$$K = R^{-1}B^T P$$

$$= [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

Böylece optimal kontrol sinyali

$$u = -Kx = -x_1 - \sqrt{\mu+2} x_2$$

olarak bulunmuş olur. Kontrol sinyali herhangi bir başlangıç koşulu için verilen performans indeksini sağlar.



4. BELİRSİZLİK İÇEREN DİNAMİK SİSTEMLERİN LYAPUNOV METODUYLA KONTROLÜ

4.1. Giriş

Bir sistem dinamiğinde üzerinde önceden bilinmeyen belirsiz parametreler bulunması mümkündür. Kontrol sistemi tasarlanırken bu belirsizliklerin göz önüne alınarak sistem performansının garantilenmesi gerekmektedir. Literatürde çeşitli belirsizlik içeren sistem türleri ve bu sistemler için verilmiş kontrol önerileri mevcuttur [6-13]. Bu bölümde ise, bunlar içinde, sınırlı bir girişe sahip ve parametre değişiminden dolayı, sistem dinamiğinde parametre belirsizliği olan sistemlerin Lyapunov metodu ile kontrolü verilecektir.

Gutman kontrolörü, önce sabit parametrelili sisteme [7] ve daha sonra parametre belirsizliği içeren sisteme [8] uygulanacaktır. Verilen metodun kullanılabilmesi için belirsizlikle ilgili aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir:

- a) Belirsiz parametrenin değişim aralığı bilinmelidir,
- b) Belirsizlik sistemin kontrol kanalında olmalıdır. Eğer belirsizlik sistem dinamiğinde değil ise (sistem matrisi içinde olabilir), belirsizlik kontrol matrisinin sağında yani kontrol sinyali eklenebilecek bir fonksiyon olarak yazılabilmelidir.
- c) Parametrelerdeki değişim yüksek frekanslı olmamalıdır.

4.2. Gutman ve Hagander Kontrolörü

Gutman ve Hagander kontrol tekniğinde [7], sistem önce düşük kazançlı bir durum geribeslemeli kontrolör ile kararlı hale getirilir. Elde edilen yeni sistem için bir quadratik Lyapunov fonksiyonu bulunur ve buna göre başka bir durum geribeslemeli kontrol hesaplanır. Bu iki kontrolör toplanarak kontrol sınırlarına göre saturasyon sınırları belirlenir. Verilen yöntemler kontrol çıkışında saturasyon olmasına rağmen, saturasyon sınırlarında, belirlenen başlangıç değerlerini oluşturan küme içinden başlayan sistemin kararlılığı garantilenerek hedeflenen performans sağlanır.

Denklem (3.1) deki sistem için doğrusal, zamanla değişmeyen, sürekli zamanlı

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (4.1)$$

sistemini ele alalım. Burada

$$[A, B] \quad (4.2)$$

matris çiftinin stabilize edilebilir [7] olduğu varsayalım ve kontrol işareti

$$g_j \leq u_j \leq h_j \quad j = 1, \dots, m \quad (4.3)$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ile sınırlandırılmış olsun. Bu kontrolör ile sistemin belirlenen referansa hızla yönlenmesi; yönelişinin mümkün olduğu kadar hızlı, aynı zamanda, sınırlı kontrol işaretinin, durum değişkenlerinin ve sistem çıkışlarının ayarlanabilmesi hedeflenmiştir.

Kontrolör üzerindeki sınırlamalardan dolayı, başlangıç koşulları $x(0)$ tüm R^n değil, sınırlı bir alandır. Bundan dolayıdır ki, A matrisi kararsız ise, (4.3) aralığı ile sınırlandırılmış bir kontrol girişinin, durum değişkenlerini R^n in herhangi bir noktasından orjine getirmesi mümkün olmayabilir.

Tanım 4.1: D matrisi, durum uzayında durum değişkenleri orjine getirilmek sistemin başlangıç koşullarının kümesi olsun. Bu kümede seçilen başlangıç değerlerini orjine getirecek Bölüm 3 deki geribesleme kazancı K

$$L \triangleq [l_1 | l_2 | \dots | l_m] \quad (4.4)$$

ile gösterilsin.

$$A_c \triangleq A_c(L) \triangleq (A - BL^T) \quad (4.5)$$

matrisi kararlıdır. (4.2) varsayımından dolayı böyle bir L matrisi vardır. L matrisi

$$E \triangleq E(L) \triangleq \{x_0 | x_0 \in R^n, \quad g_j \leq -l_j^T x_0 \leq h_j, \quad j = 1, \dots, m\} \quad (4.6)$$

kümesidir. $E(L)$ kümesi, sistemi kararlı yapan $-L^T x$ doğrusal durum geribeslemesi ile başlangıçta (4.3) sınırlarını aşmayan başlangıç durumlarının kümesidir. Yani sistemin başlangıç durumu $E(L)$ kümesi içinde ise sistem kontrolöre ait (4.3) sınırlarını aşmaz. Bu tanıma göre başlangıç durumundan ayrıldıktan sonra sistemin izleyeceği yörünge esnasında sistem (4.3) sınırlarını aşabilir. $E(L)$ başlangıçtan sonraki yörüngeyi garanti etmez.

Bölüm 2.3 de verildiği gibi bu sistem için bir Lyapunov fonksiyonu tanımlansın. Denklem (4.5) de verilen A_c , kararlı bir matris olduğundan, Lyapunov denklemi

$$A_c^T P_c + P_c A_c = -Q_c \quad (4.7)$$

$n \times n$ boyutundaki her pozitif tanımlı simetrik $Q_c = Q_c^T > 0$ matrisi için, $n \times n$ boyutunda pozitif tanımlı simetrik

$$P_c(L, Q_c) \triangleq P_c = P_c^T > 0 \quad (4.8)$$

matrisini verir. O halde

$$V(x) = x^T P_c x \quad (4.9)$$

fonksiyonu

$$\dot{x} = A_c x \quad (4.10)$$

sistemi için bir Lyapunov fonksiyonudur. (4.10) için bir kararlılık bölgesi

$$\Omega \triangleq \Omega(L, P_c, c) \triangleq \{x | x^T P_c x \leq c\} \quad (4.11)$$

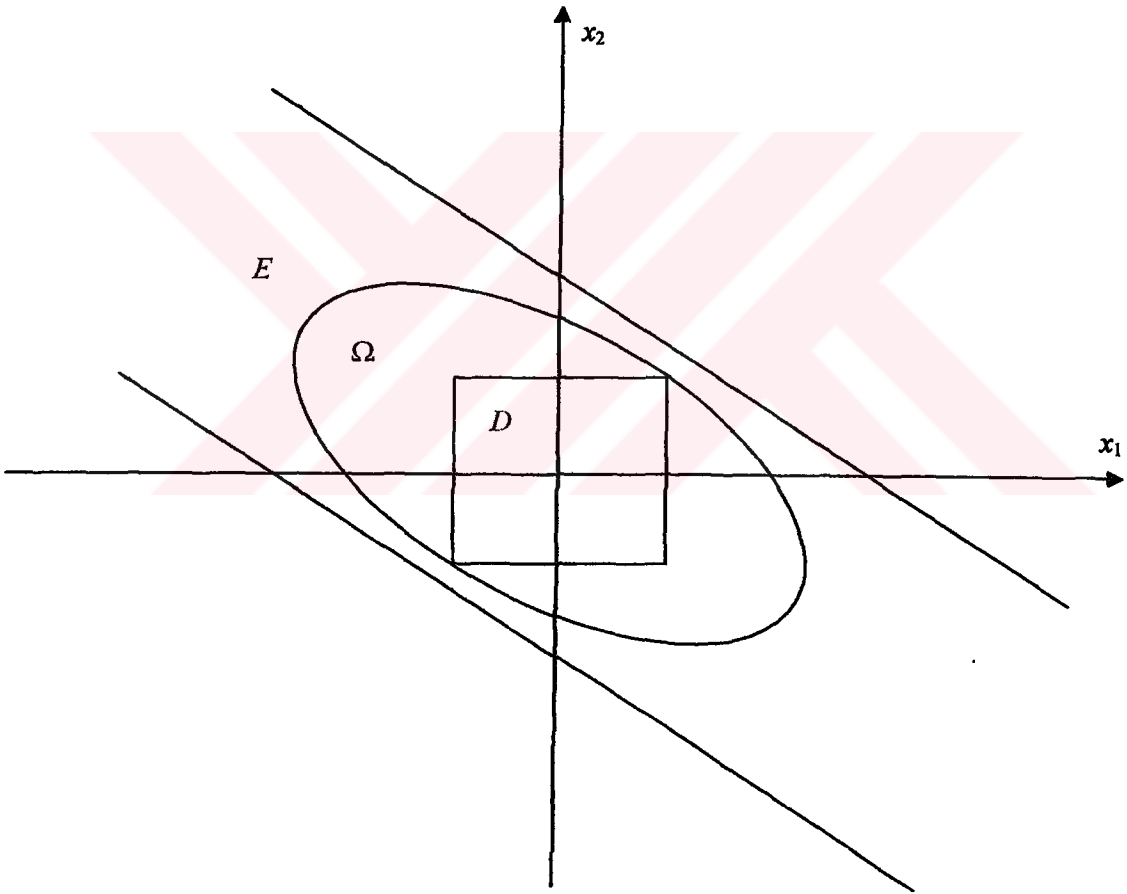
olarak tanımlanabilir. Lyapunov'un II. Teoremine göre $t \geq 0$ için

$$x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega \quad (4.12)$$

dir. Gutman ve Hagander [7] kontrol tekniğinde, tanımlanmış olan D , $E(L)$, $\Omega(L, P_c, c)$ kümelerinin

$$D \subseteq \Omega \subseteq E \quad (4.13)$$

şartını sağlaması gerekmektedir. (4.13) koşulunu sağlamak için tasarımda kullanılacak olan P_c , c ve L değerleri için yeterli koşul, daha sonra Bölüm 4.3 de sunulacaktır. Örnek olarak verilen Şekil 4.1 de, ikinci dereceden bir sistem için (4.13) ün sağlandığı görülmektedir.



Şekil 4.1: Denklem (4.13) de verilen D , Ω ve E kümelerinin ikinci dereceden bir sistem için gösterimi

Kontrol sinyalinin çıkışında bulunan ve denklem (4.3) de tanımlanan doğrusal olmayan eleman, saturasyon fonksiyonu $sat(\cdot)$

$$sat(f) \triangleq \begin{Bmatrix} sat_1(f_1) \\ sat_2(f_2) \\ \dots \\ sat_m(f_m) \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

ve j . giriş kanalına ait $sat_j(r)$

$$sat_j(r) = \begin{cases} g_j & r \leq g_j \\ r & g_j \leq r \leq h_j \\ h_j & h_j \leq r \end{cases} \quad (4.15)$$

ile tanımlanmış olsun.

4.3. Gutman-Hagander Kontrol Tasarımı

Daha önceki bölümde belirtildiği gibi sistemi kararlı yapacak düşük kazançlı L durum geribesleme matrisi hesaplanır. Hedeflenen performansı sağlamak için kapalı çevrimli sistem için bir Lyapunov fonksiyonu oluşturulur. Lyapunov fonksiyonuna göre, başka bir durum geribesleme hesaplanır. İki kontrol toplanır ve (4.3) ile sınırlandırılan saturasyon içine alınır. Aşağıdaki teorem sistemin kararlılığının sağlandığını ispatı ile birlikte vermektedir. Bu teorem temel alınarak kontrolörün tasarımı için tasarım adımları ise ispattan hemen sonra verilecektir.

Teorem 4.1: Kontrol edilecek sistem (4.1)-(4.3) ile tanımlanmış olsun. Tanım 2.1 deki D kümesinin,

- 1) (4.4) ve (4.5) şartını sağlayan $n \times n$ boyutunda L matrisinin olması,
- 2) (4.7) Lyapunov denklemini sağlayan $n \times n$ boyutunda $P_c = P_c^T > 0$ ve $Q_c = Q_c^T > 0$ matrislerinin olması,
- 3) (4.13) şartını, yani
$$D \subseteq \Omega(L, P_c, c) \subseteq E(L)$$
 şartını sağlayan bir c sabiti olması,

özelliklerine sahip bir küme olduğunu varsayalım.

$$\tilde{K} \triangleq \text{diag}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m), \quad \tilde{k}_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.16)$$

ile tanımlı $\tilde{K}$ matrisi olsun. Bu durumda

$$u = \text{sat}[(-L^T - \tilde{K} B^T P)x] \quad (4.17)$$

kontrolörü tüm $\tilde{K}$ değerleri ve tüm $x_0 \in D$ başlangıç değerleri için sistemi orjine götürür.

İspat: Önerilen (4.17) kontrol sinyali, sürekli bir fonksiyon verir.

Sınırlanmamış (4.1)-(4.2) sisteminin

$$u = -L^T x + v \quad (4.18)$$

kontrolü ile geribeslendiği varsayalım. Eğer $x_0 \in D \subset \Omega$ ise, $x(t) \in \Omega$ olacak şekilde bir v seçilebilir. Örneğin için $v = 0$ böyle bir seçim olabilir. $v = 0$ için, (4.18) ile geribeslenen sistem (4.10) sistemine dönüşür. (4.13) varsayımı $x(t) \in E(L)$ olduğunu açıklar.

İspatın geri kalan kısmında (4.3) sınırlarını aşmayan daha iyi bir v değerinin nasıl elde edileceğini gösterilecektir.

(4.18) kontrolörü ile geribeslenmiş olan (4.1) sistemi (4.5) de tanımlı A_c ile

$$\dot{x} = A_c x + Bv \quad (4.19)$$

olarak ifade edilir. (4.7) e göre hesaplanmış P_c matrisi ile

$$V = x^T P_c x \quad (4.20)$$

fonksiyonu bir Lyapunov fonksiyonu adayı olsun. $\dot{V}$ hesaplanırsa,

$$\dot{V} = \dot{x}^T P_c x + x^T P_c \dot{x}$$

$$\dot{V} = (A_c x + Bv)^T P_c x + x^T P_c (A_c x + Bv)$$

$$\dot{V} = x^T A_c^T P_c x + v^T B^T P_c x + x^T P_c A_c x + x^T P_c Bv$$

$$\dot{V} = x^T (A_c^T P_c + P_c A_c) x + v^T B^T P_c x + x^T P_c Bv$$

Bu denklemde sonuç skalar olduğundan, birbirinin transpozu olan $v^T B^T P_c x$ ve $x^T P_c Bv$ aynıdır.

$$v^T B^T P_c x \triangleq x^T P_c Bv$$

denkliğinden

$$\dot{V} = x^T (A_c^T P_c + P_c A_c) x + 2x^T P_c Bv \quad (4.21)$$

dir. V nin Lyapunov fonksiyonu olması için (4.21) in negatif tanımlı olması gerekir. (4.7) den dolayı (4.21) in $x^T (A_c^T P_c + P_c A_c) x$ terimi negatiftir. İkinci terimin negatif yarı tanımlı, yani

$$2x^T P_c Bv \leq 0 \quad (4.22)$$

olması gerekmektedir. Eğer bu şart sağlanırsa, Lyapunov'un direkt metoduna göre başlangıç koşulları (4.11) bölgesi içinde başlayan sistem asimptotik kararlıdır. Bu şartı sağlamak amacıyla v için $x^T P_c B$ vektörünün transpozu

$$v = -B^T P_c x \quad (4.23)$$

seçimi ile (4.22) negatif tanımlı quadratik

$$-2x^T P_c B B^T P_c x$$

fonksiyonu haline gelir ve (4.21) ün negatif tanımlılığı sağlanır.

(4.23) seçimini biraz daha genelleştirmek mümkündür.

$$\tilde{R} \triangleq \text{diag}(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_m) \quad \tilde{r}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.24)$$

ile tanımlı $\tilde{R}$ matrisi olsun. v için

$$v = -\tilde{R} B^T P_c x \quad (4.25)$$

seçimi (4.22) yi sağlar. (4.25) seçimi ile (4.22) negatif tanımlı quadratik bir fonksiyon haline gelecektir. Böylece

$$2x^T P_c B v = -2x^T P_c B \tilde{R} B^T P_c x \leq 0 \quad (4.26)$$

şartı sağlar.

O halde V , sınırlanmamış (4.18), (4.25)

$$u = -L^T x - \tilde{R} B^T P_c x$$

kontrolü ile geribeslenen sistem için bir Lyapunov fonksiyonudur. $\tilde{R}$ matrisi x in bir fonksiyonu da olabilir.

İspat için sonraki adım, $\tilde{R}$ matrisinin uygun bir seçimi ile $x \in E$ için sınırlanmamış (4.17) kontrolörünün (4.18), (4.25) biçiminde yazılabileceğini göstermektir. Yani herhangi bir diyagonal $\tilde{K} \geq 0$ matrisi ve $x \in E$ için

$$-L^T x - \tilde{R} B^T P_c x = \text{sat}(-L^T x - \tilde{K} B^T P_c x) \quad (4.27)$$

eşitliğinin çözülebileceğini ve uygun bir $\tilde{R}$ matrisinin bulunabileceğini göstermektir. $(B^T P)_j$ terimi $B^T P_c$ matrisinin j . satırını göstermek üzere (4.27) in j . satırını ele alalım

$$-l_j^T x - \tilde{r}_j (B^T P_c)_j x = \text{sat}(-l_j^T x - \tilde{k}_j (B^T P_c)_j x) \quad (4.28)$$

Durum değişkenlerinin E kümesi içinde olması ($x \in E$ sağlanması), kontrol işaretinin $-l_j^T x$ bileşeninin $[g_j, h_j]$ aralığında

$$g_j \leq -l_j^T x \leq h_j \quad (4.29)$$

olduğu anlamına gelir. Buna ilave olarak, eğer $-l_j^T x - \tilde{k}_j (B^T P_c)_j x$ aralığın içinde ise, bu durumda $\tilde{r}_j = \tilde{k}_j \geq 0$ olur. Diğer taraftan, eğer

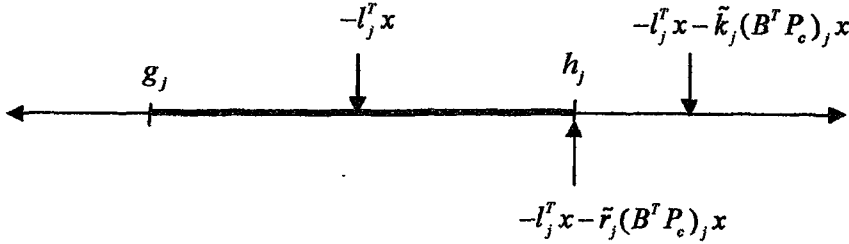
$$-l_j^T x - \tilde{k}_j (B^T P_c)_j x > h_j$$

ise daha küçük bir $\tilde{r}_j$, $-l_j^T x$ ile toplanacak terimi azaltacaktır. Yani,

$$-l_j^T x - \tilde{r}_j (B^T P_c)_j x = h_j$$

koşulunu sağlayan $0 < \tilde{r}_j < k_j$ aralığında bir $\tilde{r}_j$ değeri vardır. Üst limit h_j için anlatılan bu durum benzer şekilde alt sınır değeri g_j içinde incelenebilir.

Kontrol işaretinin j . kanalı için yapılan seçimler Şekil 4.2 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.2: $\tilde{r}_j$ nin hesaplanması

Şekil 4.2 de saturasyon içindeki $-l_j^T x - \tilde{k}_j(B^T P_c)_j x$ işareti, h_j üst sınırını aşmıştır. Buna karşın saturasyona uğrayan işaret $-l_j^T x - \tilde{r}_j(B^T P_c)_j x = h_j$ değerini alarak sistemin kontrol işareti elde edilmiştir.

Bu sonuç $\dot{V} \leq 0$ olduğunu gösterir, üstelik kontrol girişi sınırlanmış

$$\dot{x} = Ax + B \text{sat}(-L^T x - \tilde{K} B^T P_c x) \quad (4.30)$$

sistemi $x_0 \in \Omega$ şartını sağlar ve kararlılık sağlanır.

Teoremin temel koşulu

$$D \subseteq \Omega(L, P_c, c) \subseteq E(L) \quad (4.31)$$

koşuludur. L üzerindeki bu iki koşul sistemi kararlı yapar ve sınırlanmış kontrol için daha ağır koşullara izin verir.

(4.17) kontrolörünün tasarımı; D kümesinin formülasyonunu; L , P_c (veya Q_c) matrislerinin seçimini; c sayısının seçimini; Teorem 4.1 in koşullarını sağlayan ve kapalı çevrimli sistem davranışı istenen şekilde olan $\tilde{K}$ matrisinin seçimini içerir.

Gutman-Hagander kontrolörünün tasarım adımları:

Adım 1 : Sistemin başlangıç durumlarının kümesi olan D kümesini belirle.

D kümesi ilk önceleri mümkün olduğu kadar küçük seçilmelidir. D başlangıç durumlarının kümesidir. Sistem yörüngesinin D kümesinin dışına çıkması bir sorun oluşturmaz.

Adım 2 : Doğrusal durum geribesleme matrisi L yi bul.

Doğrusal durum geribesleme kazanç matrisini bulmak için değişik yöntemler kullanılabilir. 3. Bölümde, bu yöntemlerden; Ackermann yöntemi, kutup yerleştirme yöntemi, yerine koyma yöntemi ve optimal doğrusal kontrol (Linear Quadratic Regulator-LQR) tasarımı verilmiştir.

Bu çalışmada, verilen yöntemlerden LQR tasarımı kullanılacaktır. LQR tasarımı (3.23) performans indeksinde uygun Q ve R matrislerinin seçimi ile gerçekleştirilebilir. Önce tasarımın durum değişkenleri üzerindeki hedefini yansıtan bir Q matrisi seçilir. Daha sonra başlangıçta x in D içinde kalması için $-L^T x$ kontrolörü (4.3) sınırlarını sağlayana kadar R matrisinin Q matrisine göre ağırlığı artırılır veya azaltılır. Bunu yapmak için R matrisinin tüm elemanları farklı bir skalar sayı ile çarpılarak tekrar ölçeklenebilir. Sınırlar doğrusal olduğundan (4.3) nin sağlanması kolaylıkla kontrol edilebilir.

$$g_j \leq \max_{x \in D} (-l_j^T x) \leq h_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.32)$$

Eğer D , herhangi bir L için (4.32) sağlanamayacak biçimde ise, bu tasarım uygun değildir.

(4.30) u sağlayan, sistemi kararlı yapacak L matrislerinin elde edilmesinde, doğrusal kontrol tasarımı için diğer kriterler (örneğin, kutup yerleştirme) kullanılabilir.

(4.32) ile $E \supseteq D$ sağlanmaktadır. *Adım 3* de (4.31) i sağlayacak P ve c bulunmaya çalışılacaktır.

Adım 3: P_c ve c yi bul.

(4.7) Lyapunov denklemini sağlayan $P_c = P_c^T > 0$ matrisi araştırılır. Bunun için eğer LQR tekniği kullanılacaksa, (3.30) Riccati matris denklemi P_c matrisini bulmak için kullanılabilir. Diğer yöntem, verilen Q_c seçimi için (yani, V nin uygun bir azalma oranı için), (4.7) Lyapunov fonksiyonunu çözmektir.

Eğer bu yöntem başarısız olursa başka bir P_c matrisi seçilir. Böyle bir P_c seçilemezse; E bölgesini genişletmek için, daha düşük bir L kazancı seçilir. Bu da olmazsa son olarak başlangıç koşulları kümesi D nin küçültülmesi düşünülmelidir.

Adım 4: (4.17) ye göre u kontrolörünü hazırla ve $\tilde{k}_j$ parametrelerini simulasyon ile ayarla.

Yukarıda tekrarlanan işlemlerin temel özellikleri:

1. (4.7) i sağlamaya çalışırken, kritik bir durum oluşmayacak kadar D ve E bölgeleri arasında yeteri kadar boşluk bırakmak (Şekil 4.1).
2. D ve E arasında bir Ω bölgesi oluşturmak.

(1) ya Adım 1 de D nin azaltılmasıyla, yada Adım 2 de E nin büyütülmesi ile gerçekleştirilir.

(2) Adım 3 de ya P_c nin değiştirilip $A_c^T P_c + P_c A_c < 0$ şartının kontrol edilmesiyle, yada Q_c nin değiştirilip P_c nin (4.7) den elde edilmesiyle gerçekleştirilir.

Ω bölgesinin bulunması bir deneme yanılma işlemi ile gerçekleştirilir. Bunun için sistematik bir yol bulunmamaktadır.

Örnek 4.1:

İki adet integratörden oluşan tek girişli bir sistem verilsin. Sistem

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad -1 \leq u \leq 1 \quad (4.33)$$

ile tanımlanmış olsun. Sisteme ait başlangıç koşulları kümesi

$$D = \{x \in R^2 \mid -10 \leq x_i \leq 10, \quad i=1,2\}$$

olsun. L matrisini bulmak için Bölüm 3.4 de verilen LQR kullanılacaktır. Performans indeksi (3.23) deki gibi

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_L x + u^T R_L u) dt \quad (4.34)$$

dir. Performans indeksinde Q_L matrisi için

$$Q_L = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

seçimi x_1 durumunun, orjine gitmesinin x_2 durumuna göre önemini yansıtır. (4.31) yi sağlamak için R_L matrisi,

$$R_L = 500000 \quad (4.36)$$

değerine kadar arttırılır. $u = -L^T x$ doğrusal kontrol

$$u = -[4,47 \quad 94,6] \cdot 10^{-3} x \quad (4.37)$$

olarak hesaplanır. Bu doğrusal kontrol doğrudan kullanılamayacak olsa da daha sonra bir referans olarak kullanılacaktır.

P_c matrisini bulmak için (4.7) Lyapunov denklemi

$$A_c = (A - BL^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [4,47 \quad 94,6] \cdot 10^{-3} \quad (4.38)$$

$$Q_c = \text{diag}(1, 1)$$

değerleri için çözüldüğünde

$$P_c = \begin{bmatrix} 15,9 & 111,8 \\ 111,8 & 1187,3 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

matrisi elde edilir ve

$$\sup_{x \in D} x^T P_c x \leq c \leq \min_{x \in \partial E} x^T P_c x$$

nin yani (4.31) in sağlanmadığı (Şekil 4.3.a) bulunur.

$$c = \sup_{x \in D} x^T P_c x = 142682$$

Yeni bir L matrisi bulmanın bir yolu, daha önce bulunan L matrisini 1 den küçük bir katsayı ile çarpmaktır. Bu metod kullanılarak daha önce bulunan L matrisi 0.78 katsayısı ile çarpıldığında (4.31) i sağlayan (Şekil 4.3.b) doğrusal kontrol için

$$L = 0.78 \cdot [4,47 \ 94,6] \cdot 10^{-3} \quad (4.40)$$

matrisi elde edilir. Bu tekniğin yanında performans indeksi (4.34) de kontrolörün ağırlığının yani R_L nin yeterince arttırılması ile de (4.7) sağlanabilir (örneğin $R_L = 1,5 \cdot 10^6$ olabilir). Elde edilen A_c asimptotik kararlıdır. (4.40) doğrusal kontrol ile sistem matrisi

$$A_c = (A - BL^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [4,47 \ 94,6] \cdot 0,78 \cdot 10^{-3} \quad (4.41)$$

olur. (4.7) e göre yeni bir P_c matrisi elde edilir.

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_c = \begin{bmatrix} 17,3 & 143,3 \\ 143,3 & 1943,5 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

ve

$$c = \sup_{x \in D} x^T P_c x = 225370$$

ile (4.7) e göre yeni bir Ω hesaplanır. Şimdi (2.15) sağlanır.

Simulasyon sonuçları;

Verilen sistem için yapılan seçimlere göre D , E ve Ω bölgeleri Şekil 4.3.a ve Şekil 4.3.b de ayrı ayrı gösterilmiştir. Verilen ikinci dereceden sistemin yörüngesi $-L^T x - \tilde{K}B^T P_c x = 0$ doğrusuna yönelir ve orjine gider. Tek girişli sistem için $\tilde{K}$ skaldır bu sayının değeri ne kadar arttırılırsa sistem yörüngesi $B^T P_c x = 0$ doğrusunu o kadar yakın takip edecektir. Kesikli çizgi $B^T P_c x = 0$ düzlemini göstermektedir.

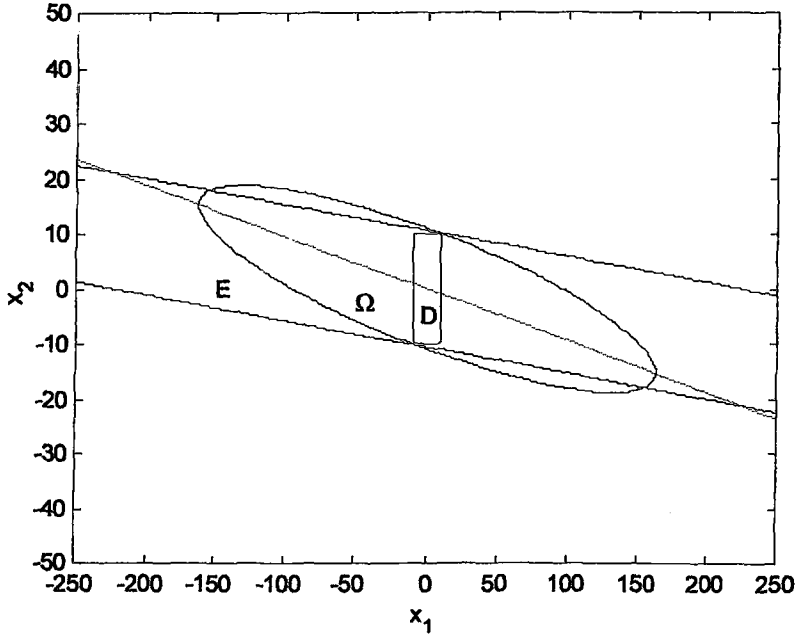
Şekil 4.4, Örnek 4.1 de, $\tilde{k} = 1.10^{-4}$ seçimine karşılık simulasyon sonuçlarını göstermektedir. Şekil 4.4.a, sistem yörüngesinin $B^T P_c x = 0$ doğrusu üzerinden orjine gittiği görülmektedir. Şekil 4.4.b, durum değişkenlerinin, Şekil 4.4.c ise kontrol sinyalinin zamana göre değişimini göstermektedir. Başlangıçta kontrol sinyali üzerinde bir saturasyon

bulunmaktadır.

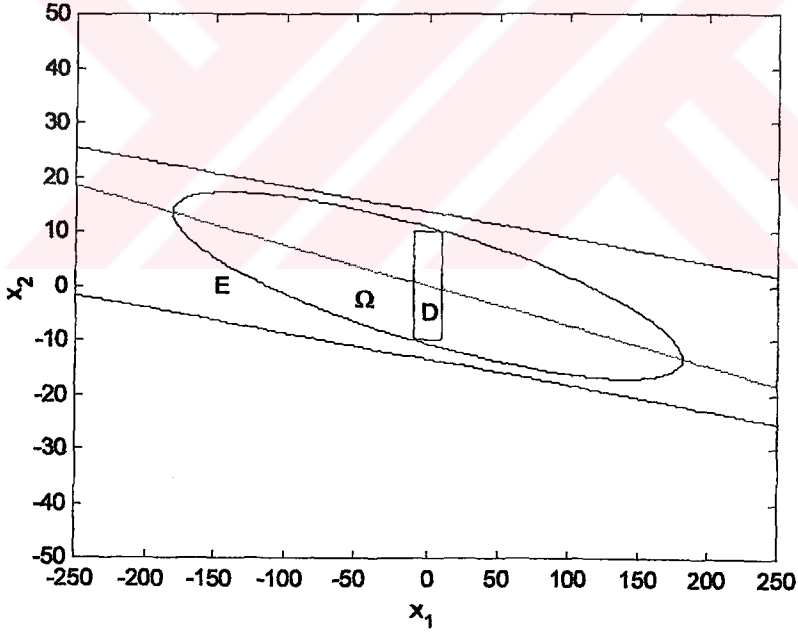
Şekil 4.5, Örnek 4.1 de $\tilde{k}$ seçiminin $\tilde{k} = 1.10^{-3}$ olarak arttırıldığı kontrol sinyali için simulasyon sonuçlarını göstermektedir. Sistem yörüngesinin $B^T P_c x = 0$ doğrusuna daha yakın bir biçimde ve daha hızlı bir şekilde orjine gittiği görülmektedir.

Şekil 4.6, Örnek 4.1 için $\tilde{k} = 0$ seçimine karşılık simulasyon sonuçlarını göstermektedir. Kontrol sinyali $u(t) = -L^T x$ haline gelir ve kapalı çevrimli seçimle sistem (4.10) a dönüşür. Bu seçim ile kontrol sinyali üzerinde saturasyon oluşması mümkün değildir ve oluşmadığı görülmektedir. Kontrol kazancı Bölüm 4.4 de verilen optimal kontrol metodu ile hesaplandığından kontrol sistemi optimaldır.



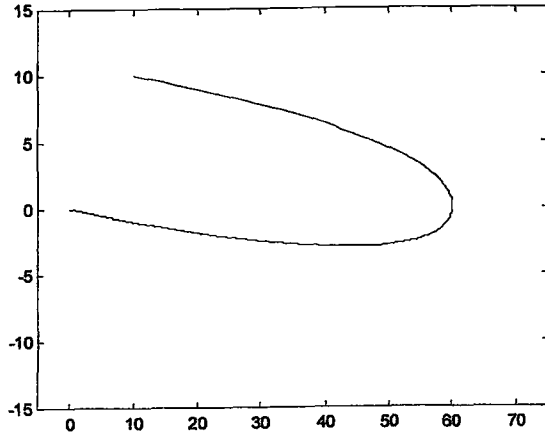


a)

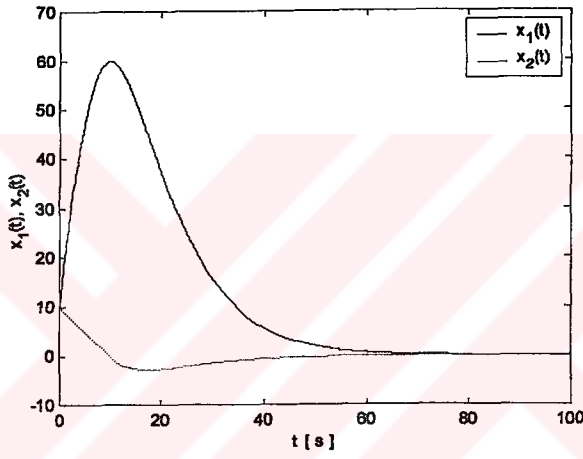


b)

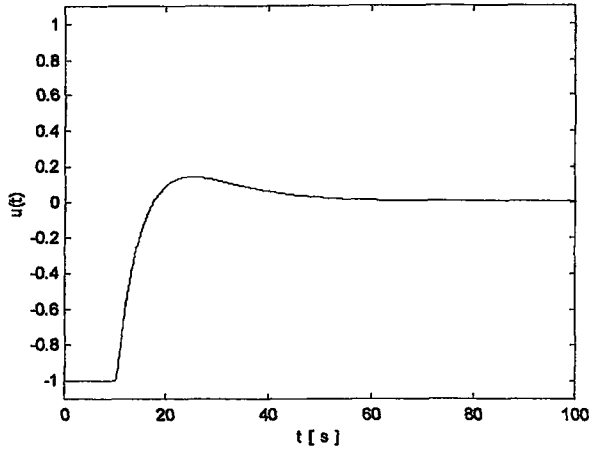
Şekil 4.3: Örnek 4.1 için hesaplanan D , E ve Ω bölgelerinin ve $B^T P_\infty x = 0$ düzleminin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi. Çözümde, a) $u = - [4,47 \quad 94,6] 10^{-3} x$; b) $u = -0,78 [4,47 \quad 94,6] \cdot 10^{-3} x$; seçimlerine karşılık gelen D , E ve Ω bölgeleri



a)

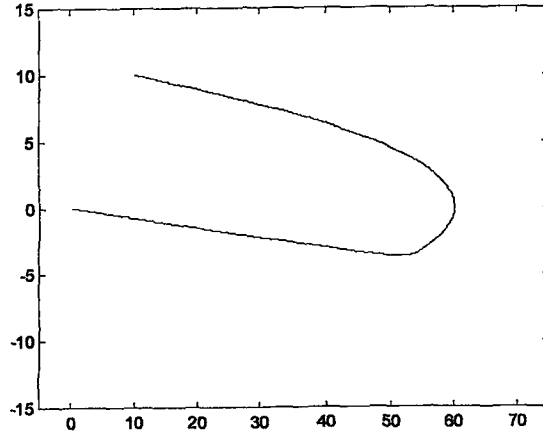


b)

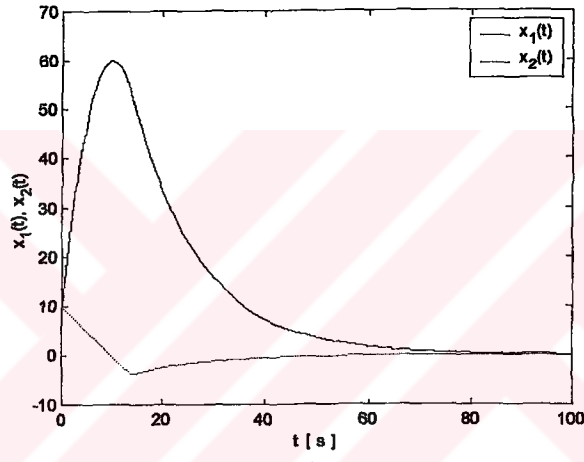


c)

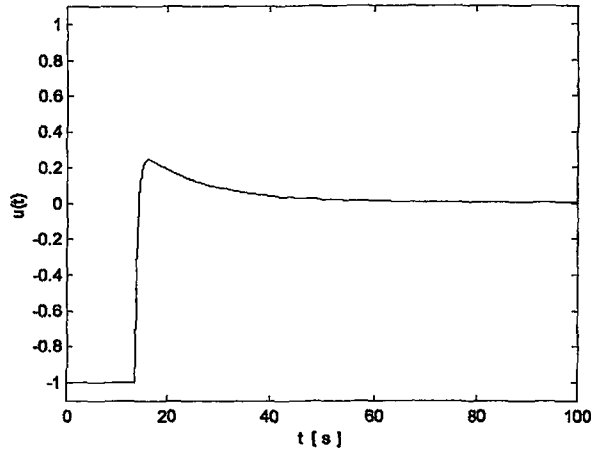
Şekil 4.4: Örnek 4.1 de, $\tilde{k} = 1.10^{-4}$ seçimine karşılık simulasyon sonuçları; a) x_1 - x_2 düzleminde sistem yörüngesinin gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) $u(t)$ nin zamana göre değişimi



a)

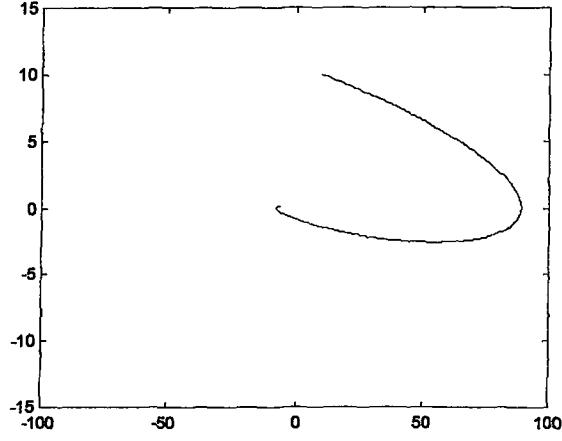


b)

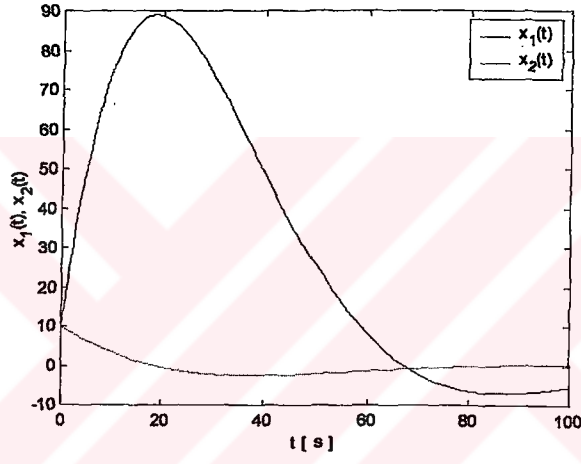


c)

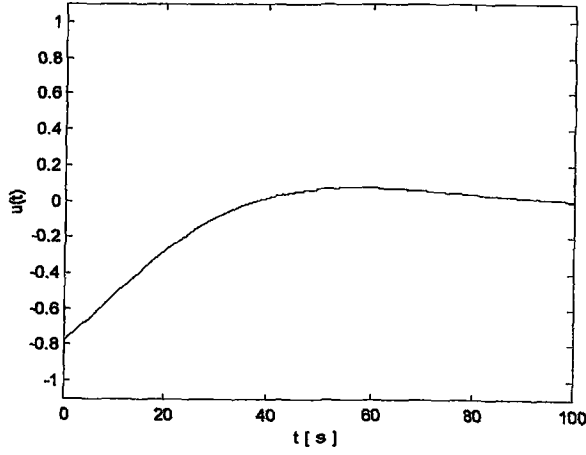
Şekil 4.5: Örnek 4.1 için $\tilde{k} = 1.10^{-3}$ seçimine karşılık simulasyon sonuçları a) x_1 - x_2 düzleminde sistem yörüngesinin gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) $u(t)$ nin zamana göre değişimi.



a)



b)



c)

Şekil 4.6: Örnek 4.1 için $\tilde{k} = 0$ seçimine karşılık simulasyon sonuçları a) x_1 - x_2 düzleminde sistem yörüngesinin gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) $u(t)$ nin zamana göre değişimi.

4.4. Parametre Belirsizliği İçeren Sistemlerin Lyapunov Metoduyla Kontrolü

Gutman, doğrusal sistemler için geliştirilen ve Bölüm 4.2 de verilen kontrolörü geliştirerek parametre belirsizliği içeren sistemlere uygulamıştır [8].

η sistemdeki belirsizliği belirtmek üzere denklem (4.1) deki sistem

$$\dot{x} = Ax + B(u + \eta), \quad x(0) = x_0 \quad (4.43)$$

olur. Vektörel formdaki belirsizlik vektörü η

$$\nu = \{\eta \in R^m \mid |\eta_j| \leq r_j(x) \leq \rho_j\} \quad (4.44)$$

biçiminde sınırlı olsun. Kontrol vektörü u

$$g_j \leq u_j \leq h_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.45)$$

ile sınırlanmış ve elemanları bütün j değerleri için sıfırdan farklı olan

$$[g_j + \rho_j, h_j - \rho_j], \quad j = 1, \dots, m \quad (4.46)$$

vektörü ile belirtilen aralık için mevcut olsun.

$$[A, B] \quad (4.47)$$

matris çifti stabilize edilebilir olsun. Sistemi (4.46) sınırları içinde kararlı hale getirebilecek (4.4) ile tanımlı L durum geribesleme kazanç matrisinin var olduğu, ve (4.4) ile geribeslenen sistem için (4.5) matrisinin kararlı olduğu varsayılın.

(4.4) kontrolör kazançlarının (4.46) sınırları içinde sistemi kararlı hale getirdiği başlangıç koşulları kümesi bu durumda;

$$G(L) \triangleq \{z \mid z \in R^n, \quad g_j + \rho_j \leq -l_j^T z \leq h_j - \rho_j, \quad j = 1, \dots, m\} \quad (4.48)$$

kümesidir.

(4.7)-(4.12) koşullarının (4.43), (4.44) sistemi için de sağlandığı varsayılın. Önerilecek kontrolörün, D başlangıç koşulları kümesi içinden başlayan sistemi orjine getirebilmesi için D , $\Omega(L, P_c, c)$, ve $G(L)$ bölgeleri için

$$D \subseteq \Omega(L, P_c, c) \subseteq G(L) \quad (4.49)$$

koşulunu sağlanması gerekir. (4.49) koşulunu sağlamak için L , P_c ve c değerleri için uygun bir seçim yapılmalıdır. Bunun için gerekli yöntemler verilecektir.

(4.45)

$$\text{sat}(r) = \begin{cases} g_j & r \leq g_j \\ r & g_j \leq r \leq h_j \\ h_j & h_j \leq r \end{cases}$$

olur.

Teorem 4.2: Sistemimiz (4.43) ile tanımlanmış sistem olsun. $\rho_j > 0, j = 1, \dots, m$ ve (4.45)

koşulları sağlansın. (4.46) ün tüm elemanları mevcut olsun. Tanım 2.1 deki D kümesinin, bu küme içinde (4.4) ve (4.5) şartını sağlayan L matrisinin olması, (4.7) şartını sağlayan $P_c = P_c^T > 0$ ve $Q_c = Q_c^T > 0$ şartını sağlayan $R^{n \times n}$ matrislerin olması, ve (4.49) şartını sağlayan bir c sabitinin mevcut olması özelliklerine sahip bir küme olduğu varsayılın. Son olarak Ω içinde (4.44) nin sağlandığı varsayılın.

Tanım 4.3:

$$\tilde{K} \triangleq \text{diag}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m) \quad \tilde{k}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.50)$$

ise

$$u_j = \text{sat} [-l_j^T x - r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j P_c x) - \tilde{k}_j b_j^T P_c x], \quad j = 1, \dots, m \quad (4.51)$$

kontrolörü tüm K değerleri ve tüm $x_0 \in D$ değerleri için sistemi orjine götürür.

İspat: Denklem (4.51) in ispatı, [6; Teo. 4] ve bir önceki Teorem 4.1 de verilen [7; Teo. 3.1] ispatların birleşimidir. Önerilen bir kontrol sinyali ile geribeslenen ve $x_0 \in D$ bölgesi içinden başlayan sistem için (4.20) bir Lyapunov fonksiyonu ise (4.12), (4.49) sağlanır ve sistem asimptotik karardır. O halde (4.20) yi sağlayan bir kontrol elde edilmelidir.

Belirsizliğin sistem kararlılığı üzerindeki etkisinin ortadan kaldırılması;

(4.43)-(4.47) sisteminin (4.18) deki gibi

$$u = \text{sat}(-L^T x + v) \quad (4.52)$$

kontrol işareti ile geribeslendiği varsayılın. Eğer $x_0 \in D \subset \Omega$ ise, $x(t) \in \Omega$

Eğer (4.52) kontrolörü (4.45) ile tanımlı kontrol (saturasyon) sınırlarını aşmazsa (4.52) için

$$u = -L^T x + v \quad (4.53)$$

yazılabilir. Verilen sistemde (4.48) dan dolayı

$$|v_j| \leq \rho_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.54)$$

seçimi için (4.52) kontrolörü (4.45) ile tanımlı kontrol (saturasyon) sınırlarını aşmaz. O halde kapalı çevrimli sistem

$$\dot{x} = (A - BL^T)x + B(v + \eta) \quad (4.55)$$

dir. Lyapunov fonksiyonu (4.20) deki

$$V = x^T P_c x$$

olsun. Bu fonksiyonun türevi

$$\dot{V} = x^T (A_c^T P_c + P_c A_c) x + 2x^T P_c B(v + \eta), \quad A_c = (A - BL^T) \quad (4.56)$$

dir. Sistemin Lyapunov metoduna göre kararlı olabilmesi için (4.56) in negatif tanımlı olması

gerekir. Denklem (4.7) den dolayı, (4.56) da

$$x^T (A_c^T P_c + P_c A_c) x < 0$$

sağlanır. $\dot{V} < 0$ koşulunun sağlanması için skalar

$$x^T P_c B(v + \eta) \quad (4.57)$$

fonksiyonun negatif veya sıfır olması gerekmektedir. $x^T P_c B$ terimi $(1 \times n)$ boyutunda, $(v + \eta)$ terimi ise $(n \times 1)$ boyutunda vektörlerdir. Denklem (4.57)

$$x^T P_c B(v + \eta) = \sum_{j=1}^n (b_j^T P_c x)(v_j + \eta_j), \quad j = 1, \dots, m \quad (4.58)$$

olarak tekrar yazılabilir.

Denklem (4.44) den, η belirsizlik vektörünün değişim aralığı bilinmektedir. Problem, bu belirsizliğin, sistemin kararlılığı üzerindeki etkisini ortadan kaldırarak sistemi kararlı yapacak v kontrolünün belirlenmesidir. (4.44) den yararlanarak bu seçim için genlik ve işaret yönünden iki kriter belirlenecektir.

a) Genlik koşulu;

$$\rho_j \geq |v_j| \geq |\eta_j| \quad (4.59)$$

seçimi yapılırsa, $(v + \eta)$ toplamı için

$$\begin{cases} \text{sgn}(v_j + \eta_j) = 0, & v_j = -\eta_j \\ \text{sgn}(v_j + \eta_j) = \text{sgn}(v_j), & v_j \neq -\eta_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, m \quad (4.60)$$

elde edilir. Böylece, η belirsizlik vektörünün (4.58) in negatif yarı-tanımlı olması koşulu üzerindeki etkisi ortadan kalkar ve saturasyon sınırları da aşılmamış olur.

b) İşaret koşulu;

$$v_j = -r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x), \quad \rho_j \geq r_j(x) \geq |\eta_j(x)| \quad (4.61)$$

seçimi ile (4.57) ifadesinin negatif yarı tanımlılığı sağlanmış olur.

Denklem (4.48) den dolayı $-L^T x$ terimi (4.46) ile verilen sınırlar içindedir. (4.61) in genliği ise (4.44) ile verilen sınırlar içinde seçilirse (4.52) için saturasyon gerçekleşmez. Böylece (4.52) kontrol işareti (4.53) olarak da yazılabilir. (4.52) de (4.61) ye göre seçilen v bileşeni ile belirsizliğin değişim aralığından yararlanılarak, belirsizliğin sistemin kararlılığı üzerindeki etkisini ortadan kaldıracak bir kontrolör tasarlanmıştır.

$\tilde{K}$ ile zaman cevabının kazancının ayarlanması;

Belirsizliğin kararlılık üzerindeki etkisi ortadan kaldırıldıktan sonra (4.43)-(4.47) sistemi için (4.52) kontrolü yerine (4.50) ile tanımlı $\tilde{K}$ ile

$$u = \text{sat}(-L^T x + v - \tilde{K} B^T P_c x) \quad (4.62)$$

seçilirse denklem (4.20) de verilen Lyapunov fonksiyonun türevi

$$\dot{V} = x^T (A_c^T P_c + P_c A_c^T) x + 2x^T P_c B(v + \eta) - x^T P_c \tilde{K} B^T P_c x \quad (4.63)$$

olur. (4.52) üzerinde bir saturasyon oluşmaktaydı. Bu nedenle daha önce sağlanmış olan

$$x^T (A_c^T P_c + P_c A_c^T) x + 2x^T P_c B(v + \eta) < 0$$

geçerlidir. (4.63) de (4.52) ye ilave edilen $-\tilde{K} B^T P_c x$ ile ilgili terim

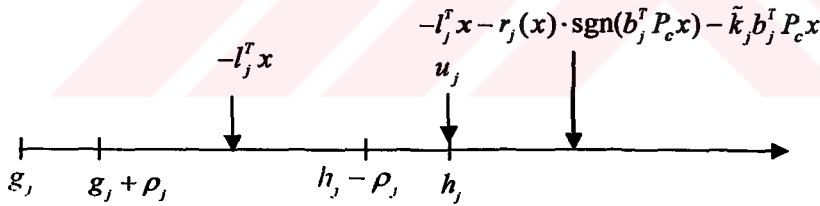
$$-x^T P_c \tilde{K} B^T P_c x = -\sum_{j=1}^m (b_j^T P_c x)^2 \tilde{k}_j \quad j = 1, \dots, m \quad (4.64)$$

dir ve negatif yarı tanımlı quadratik bir fonksiyondur. Teorem 4.1 deki gibi (4.50) ye göre seçilen tüm $\tilde{K}$ değerleri için (4.64) negatif yarı tanımlı dolayısıyla (4.63) negatif tanımlıdır. (4.52) ye $-\tilde{K} B^T P_c x$ in ilave edilmesinden meydana gelen (4.62) de bir saturasyon olsa bile (4.43)-(4.47) sistemi her zaman kararlıdır.

$V = x^T P_c x$ bir Lyapunov fonksiyonudur. Bundan dolayı, tüm t değerleri için

$$x_0 \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega$$

sağlanır. Böyle bir seçim için sistem asimptotik kararlıdır. Denklem (4.51) in hesaplanması Şekil 4.7 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.7: u_j değerinin hesaplanması

Kontrol tasarım işlemleri temelde Bölüm 4.2 ile aynıdır. Tasarımda $\tilde{k}_j$ seçimi için aşağıdaki durumlar meydana gelecektir.

$$\tilde{k}_j = 0 \text{ alınırsa;}$$

Ω bölgesi içinde

$$u_j = \text{sat} [-l_j^T x - r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x)] = -l_j^T x - r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x) \quad (4.65)$$

olur. Denklem (4.65), sistemi stabilize eden bir doğrusal kontrol ile belirsizliğin sistemin kararlılığı üzerindeki etkisini ortadan kaldıracak bir doğrusal olmayan kontrolün toplamını verir. Bu toplam kontrol sınırlarını ihlal etmemektedir.

$\tilde{k}_j \rightarrow \infty$ alınırsa;

$$u_j = \begin{cases} h_j, & -\text{sgn}(b_j^T P_c x) > 0 \\ -l_j^T x, & b_j^T P_c x = 0 \\ g_j, & -\text{sgn}(b_j^T P_c x) < 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

olur. (4.66) bir röleli kontroldür. Görüldüğü gibi (4.50) e göre seçilen $\tilde{k}_j$ nin değeri kararlılığı etkilememektedir. Bölüm 4.1 denklem (4.24) deki gibi, kontrol edilen sistemin zamana göre cevabının nasıl olması isteniyorsa, $\tilde{k}_j, j = 1, \dots, m$ değeri ona göre seçilmelidir.

Kontrolörün çalışması;

Şekil 4.7 de verilen (4.51) kontrolöründe kontrol bileşenleri;

a) $-l_j^T x$ terimi, sistemi kararlı yapan düşük kazançlı bir doğrusal kontroldür.

b) $-r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x)$ terimi, sistemin giriş kanalındaki belirsizliğin, sistemin kararlılığı üzerindeki etkisini ortadan kaldırma görevini gören doğrusal olmayan kontroldür. Genliği, belirsizliğin oluşturduğu genlikten büyük veya eşittir. Genlik ve işareti $\dot{V} \leq 0$ koşulunu her zaman için sağlar.

c) $-\tilde{k}_j b_j^T P_c x$ terimi, sistem performansını ayarlamaya yarayan bir doğrusal kontroldür. $\tilde{k}_j$ nin ayarlanması ile sistemin zaman cevabı ayarlanabilir. Bu terimin genliği yavaş yavaş artırıldığında saturasyon oluşmaya başlar. Arttırılmaya devam edilirse, kontrol işaretinde $B^T P_c x = 0$ durum uzay düzlemi civarında yüksek frekanslı titreşimler meydana gelir.

Kontrol sinyali yukarıdaki üç terimin toplamı saturasyona sokulması ile elde edilmiştir. Bu nedenle, saturasyon içindeki bileşenlerin toplamının saturasyon üst sınırı h_j yi aşması durumunda, kontrol işareti h_j ye eşit olur. Benzer şekilde saturasyon içindeki bileşenlerin toplamının, saturasyon alt sınırı g_j nin altına inmesi durumunda, kontrol işareti g_j ye eşit olur. Herhangi bir sınır aşılmamış ise kontrol işareti, bu üç terimin toplamına eşittir.

Örnek 4.2:

a_1 ve a_2 sistemdeki parametre belirsizlikleri olmak üzere

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.67)$$

sistemi verilsin. Sistemdeki parametrelerin değişim aralığı,

$$|a_i| \leq 0,01, \quad i = 1, 2 \quad (4.68)$$

kontrol işareti üzerindeki sınırlama,

$$|u| \leq 4 \quad (4.69)$$

ve durum değişkenlerinin başlangıç şartlarının belirlediği küme,

$$D = \{x \mid -10 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2\} \quad (4.70)$$

olsun. Sistemdeki belirsiz a_1 , a_2 parametreleri kontrol girişindeki bir belirsizlik gibi alınarak sistem tekrar yazılsın.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + \eta) \quad (4.71)$$

$$\eta = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

(4.8) Lyapunov denklemi için Örnek 4.1, (4.42) de bulunan P_c matrisi kullanılabilir.

$$P_c = \begin{bmatrix} 17,3 & 143,3 \\ 143,3 & 1943,5 \end{bmatrix}$$

(4.40) deki gibi

$$L^T = (0.00349 \quad 0.00738),$$

$$c = 225370$$

alınırsa

$$|\eta| \leq 0,01 (|x_1| + |x_2|) \leq 1,94 \quad (\Omega \text{ bölgesi içinde})$$

bulunur.

Ω bölgesi içinde $|-L^T x| \leq 0.86$ olarak bulunduğuundan tek girişli (4.67)-(4.70) sisteminde (4.46) koşulu

$$-4 + 1,94 \leq 0,86 \leq 4 - 1,94$$

$$-2,06 \leq 0,86 \leq 2,06$$

ile sağlanır. Dolayısıyla (4.49) sağlanır.

$$b^T P_c = (143,3 \quad 1943,5)$$

(4.51) de yerine yazılırsa,

$$u = \text{sat} [-(0.0037 + k \cdot 143,3) x_1 - (0.0738 + k \cdot 1943,5) x_2 - r] \quad (4.72)$$

olur. Burada doğrusal olmayan r ifadesi

$$r = 0.01 \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x) \cdot (|x_1| + |x_2|) \quad (4.73)$$

ile veya aşağıdaki tablo ile hesaplanabilir (Şekil 4.8.b).

$$r = \begin{cases} [-0.01x_1 + 0.01x_2] & D_1 \text{ içinde} \\ [0.01x_1 + 0.01x_2] & D_2 \text{ içinde} \\ [0.01x_1 - 0.01x_2] & D_3 \text{ içinde} \end{cases} \quad (4.74)$$

Simulasyon sonuçları;

Şekil 4.8.a, Örnek 4.2 de elde edilen D , Ω ve G bölgelerini, Şekil 4.8.b, (4.74) de tanımlı D_1 , D_2 ve D_3 bölgelerinin, $B^T P_c x = 0$ doğrusu ve x_1 - x_2 eksenleri yardımıyla tespitini göstermektedir.

Şekil 4.9 da, $\tilde{k} = 5 \cdot 10^{-4}$ seçimi için simulasyon sonuçları verilmiştir. Şekil 4.9.a, x_1 - x_2 düzleminde sistem yörüngesini göstermektedir. Sistem, $B^T P_c x = 0$ düzlemi üzerinden orjine gitmektedir ve asimptotik kararlıdır. Şekil 4.9.b, durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin, Şekil 4.9.c kontrol sinyalinin zamana göre değişimini göstermektedir. Kontrol üzerinde başlangıçta -4 alt sınırında bir saturasyon ve $t = 25$ saniyeden itibaren bir titreşim bulunmaktadır. Şekil 4.9.d, $t = 25$ saniye civarında kontrol işaretindeki titreşimi büyük ölçekli olarak göstermektedir. Şekil 4.9.e, simulasyon için kullanılan belirsiz parametreler $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ nin değişimini göstermektedir. Bunun için, $[-0.01, 0.01]$ aralığında 5 saniye ara ile karesel olarak rasgele değişen sinyal kaynakları kullanılmıştır.

Şekil 4.10, Örnek 4.2 de $\tilde{k} = 0,5$ seçimi için simulasyon sonuçlarını gösterir. $\tilde{k}$ değeri arttığından durum değişkenlerinin daha hızlı sifıra gittiği görülmektedir.

Şekil 4.11, Örnek 4.2 de $\tilde{k} = 0$ seçimi için simulasyon sonuçlarını gösterir. Bu seçim ile kontrol sinyali (4.65) haline dönüşür. Daha önce ifade edildiği gibi, kontrol sinyali üzerinde saturasyon oluşmamıştır. Durum değişkenlerinin daha uzun sürede orjine gittiği görülmektedir.

Simulasyon sonuçlarında görüldüğü gibi, $B^T P_c x = 0$ düzlemi boyunca bir titreşim bulunmaktadır. Titreşimi azaltmak için çıkışa birinci dereceden bir filtre

$$\dot{u} = -u_c + u \quad (4.75)$$

eklenerek titreşim azaltılabilir. Denklem (4.75) de, u kontrol işareti, u_c bir sabit ve $\dot{u}$ kontrol işaretinin birinci dereceden türevidir.

Örnek olarak alınan sistemde, kararlılık ve de sınırlı kontrol başarıyla gerçekleştirilmiştir. Ancak, titreşim bir sorun olarak durmaktadır. Kapalı çevrimli sistemin cevabı durum uzay denklemi $B^T P_c x = 0$ a yakın olmasından dolayı yavaştır.

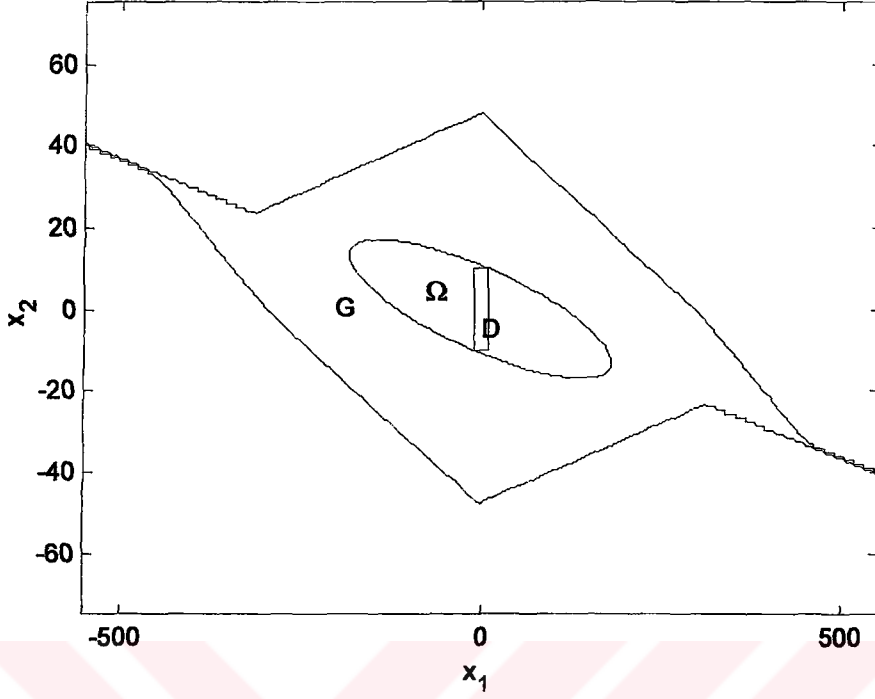
Bu bölümde verilen yöntem ile kontrol işareti sınırlı olan belirsizlik içeren dinamik sistemler için bir sistemi orjine götürecek kontrolör sunuldu. Tasarımda izlenen adımlar açıkça şu şekildedir.

- 1) Mümkün olan başlangıç koşulları kümesini kararlaştır (D);
- 2) Sistemi kararlı yapan düşük kazançlı bir doğrusal kontrol bul ($L^T x$);
- 3) Bir Lyapunov denklemi hesapla (4.8);
- 4) Tasarım için çok önemli olan, $D \subseteq \Omega \subseteq G$ koşulunu, belirsiz parametrelerin mümkün olan en büyük ve en küçük değerleri için sağlanıp sağlanmadığını kontrol et;
- 5) Belirsizliğin sistemin kararlılığı üzerindeki etkisini ortadan kaldıracak bir kontrol hesapla ($-r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j P_c x)$);
- 6) Diyagonal bir kazanç matrisi hesapla ($\tilde{K}$);

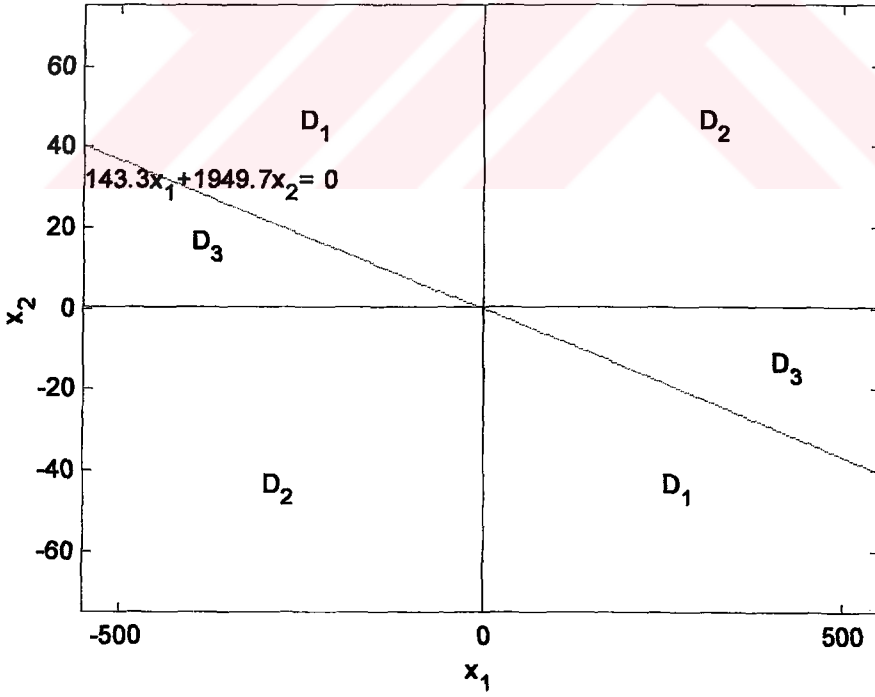
Sonuç olarak elde edilecek kontrol işareti, iki doğrusal ve bir doğrusal olmayan terimin toplamının saturasyonudur.

Kapalı çevrimli sistem için asimptotik kararlılık sağlanmaktadır. Kapalı çevrime ait diğer karakteristikler tasarım aşamasında kullanıcı seçimine göre elle ayarlanabilir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

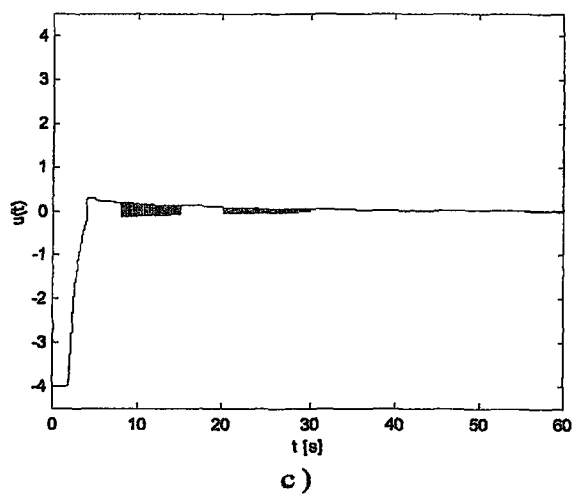
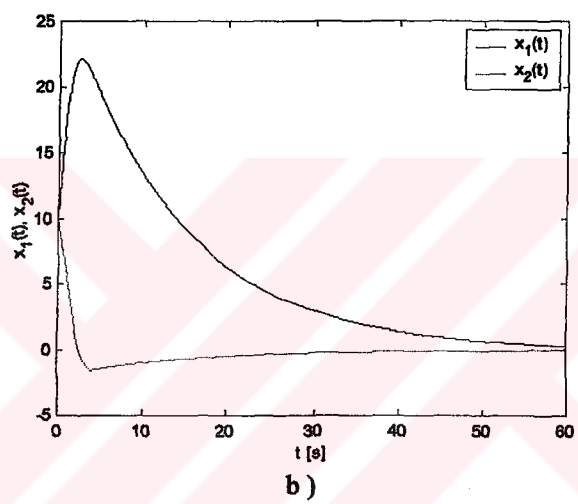
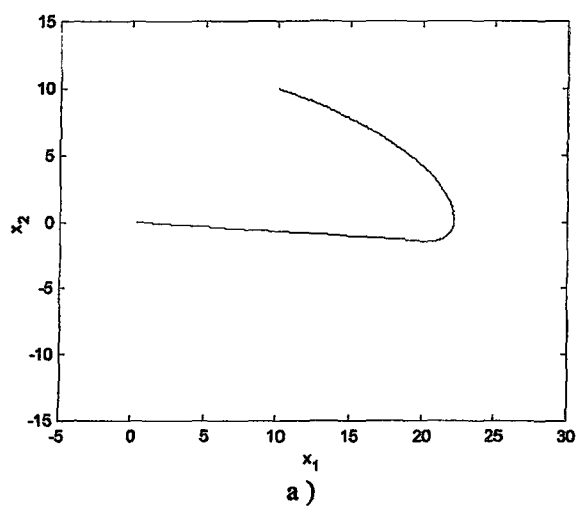


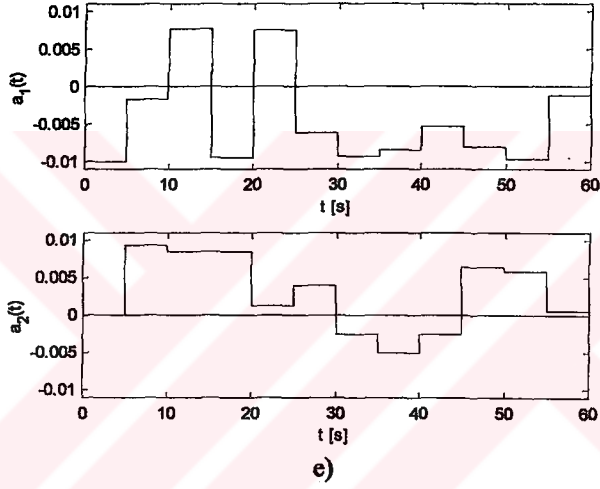
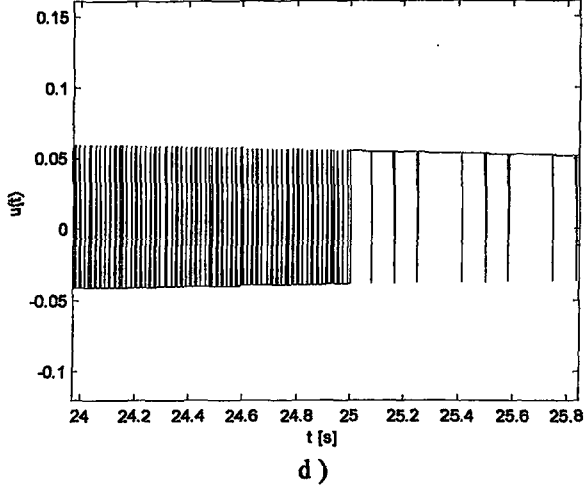
a)



b)

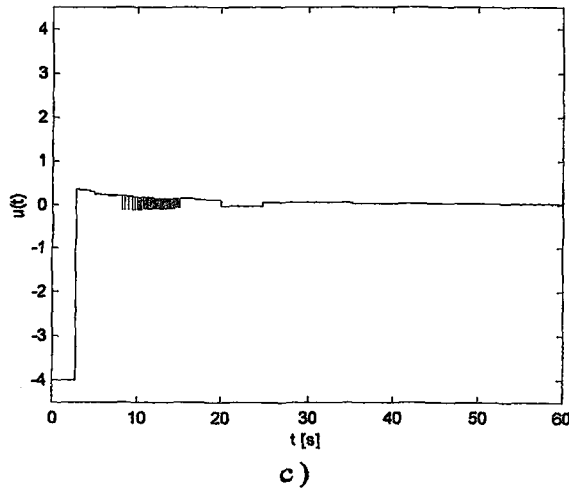
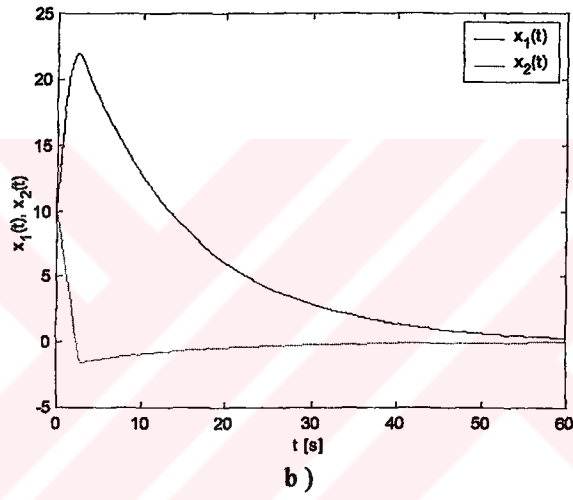
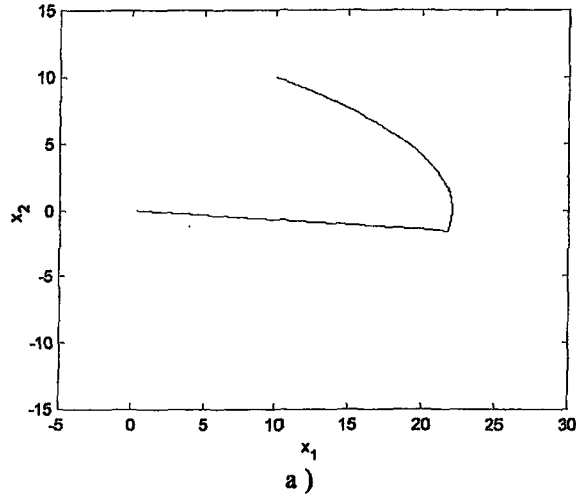
Şekil 4.8: Örnek 4.2 için a) D , Ω ve G bölgelerinin gösterimi, b) (4.74) de tanımlı D_1 , D_2 ve D_3 bölgelerinin, $B^T P_\infty x = 0$ doğrusu ve x_1 - x_2 eksenleri yardımıyla tesbiti.



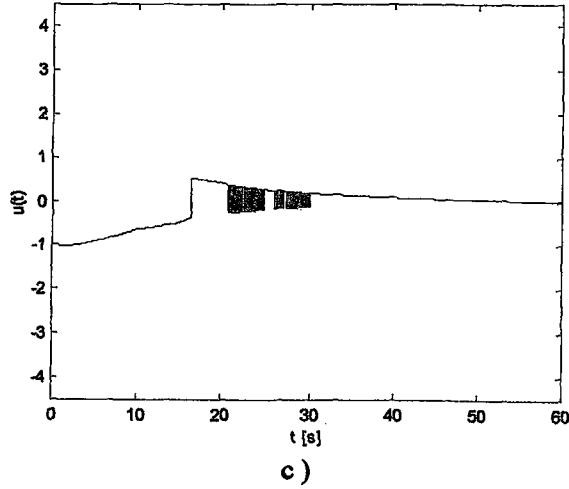
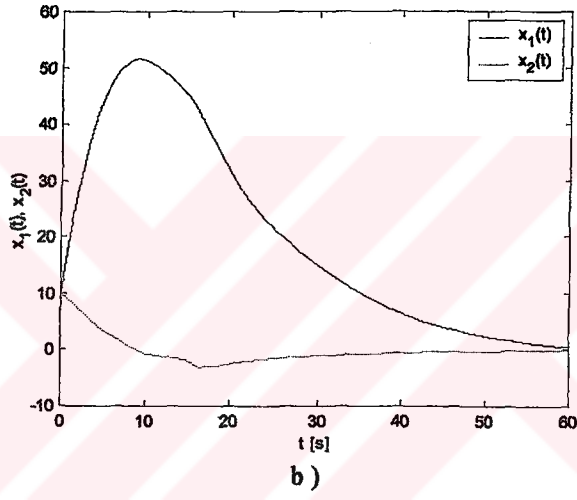
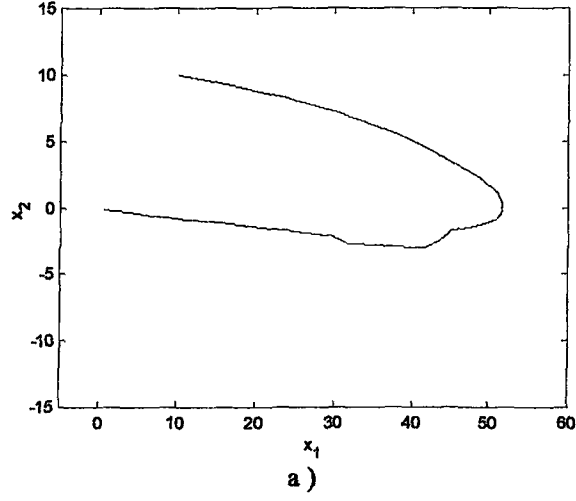


Şekil 4.9: Örnek 4.2 de, $\tilde{k} = 5 \cdot 10^{-4}$ seçimi için simülasyon sonuçları; a) Sistem yörüngesinin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi, b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi, c) Kontrol işaretinin zamana göre değişimi, d) $t = 25$ saniye civarında kontrol işaretindeki titreşim, e) Simülasyonda kullanılan belirsiz $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ parametrelerinin zamana göre değişimi.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ



Şekil 4.11: Örnek 4.2 de. $\tilde{k} = 0,5$ seçimi için simülasyon sonuçları; a) Sistem yörüngesinin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) Kontrol işaretinin zamana göre değişimi.



Şekil 4.12: Örnek 4.2 de $\tilde{k} = 0$ seçimi için simülasyon sonuçları; a) Sistem yörüngesinin x_1 - x_2 düzleminde gösterimi b) Durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin zamana göre değişimi c) Kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Kontrol sistemleri tasarlanırken, genel olarak, dinamik sistemin denge noktasında doğrusallaştırılması ile elde edilmiş olan doğrusal bir matematiksel model kullanılır. Bu model fiziksel sistemi tam olarak karşılayamayabilir. Bunun birçok sebebi vardır. Bu tezde aşağıdaki iki sebep gözönüne alınmıştır;

- 1) Dinamik sistemler modellenirken bazı sistem parametreleri o an için belirsiz olabilir. (Örneğin, yük üzerinde değişimler olabilir)
- 2) Kontrolörün çıkışı veya sistemin kontrol girişinin fiziksel yapısından dolayı, kontrol işareti üzerinde bir sınırlama ile karşılaşılabilir (Örneğin, sistemi besleyen gücün genliğinin sınırlı olması, kontrol elemanlarının fiziksel yapısı (besleme geriliminin genliğinin sınırlı olması, veya OPAMP'ın çıkışının sınırlı olması gibi) böyle bir sınırlamayı getirir)

Parametrelerde meydana gelebilecek değişimlerin ve kontrol işareti üzerindeki fiziksel sınırlamaların dikkate alınmaması, tasarlanan kontrol sisteminin görevini yerine getirememesine, hatta bazı durumlarda sistemin kararsız hale gelmesine neden olabilir.

Bu çalışmada, böyle sistemler için önerilen kontrol, Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Önce, doğrusal dinamik sistemlerin sınırlı kontrol işareti ile kontrolü için bir kontrol önerisi yapılmıştır. Daha sonra doğrusal sistem yerine giriş kanalında belirsizlik bulunan dinamik sistem ele alınmış ve bu sistemin sınırlı kontrol işareti ile kontrolü için bir kontrol önerisi yapılmıştır. Sistemdeki belirsizliğin değişim aralığı ve kontrol işareti üzerindeki sınırlama bilinmektedir. Bu iki olumsuz etkiye rağmen, önerilen kontrol, belirlenen başlangıç koşulları kümesi içinden başlayan sistemi asimptotik olarak kararlı yapar.

Önerilen kontrol işareti, sistemi kararlı yapan düşük kazançlı doğrusal bir kontrol, sistemdeki belirsizliğin sistemin kararlılığı üzerindeki etkisini ortadan kaldıran bir doğrusal olmayan kontrol ve kontrol edilen sistemin zaman cevabının ayarlanması için bir doğrusal kontrol olmak üzere üç terimin toplamının saturasyonundan meydana gelmektedir.

Kontrol sisteminin çalışabilmesi için gerekli koşullar ve bu koşulları sağlamak için bazı yöntemler sunulmuştur.

Örnek olarak alınan sistem için kontrol hesaplanmış ve simulasyon sonuçları verilmiştir (Şekil 4.8-11). Simulasyon sonuçlarından tasarlanan kontrol sisteminin sistemi orjine götürdüğü görülmüştür. Kontrol işareti üzerinde bazı titreşimler bulunmaktadır. Bu titreşim, önerilen kontrol için bir dezavantajdır ve birinci dereceden bir filtre ile azaltılabilir.

Durum geribeslemeli kontrol sisteminin dezavantajı ise tüm durumları ölçölüp geribeslenmesi zorunluluğunun olmasıdır. Böyle bir işlem hem pahalıdır hem de her zaman için fiziksel olarak mümkün olmayabilir.

Başka bir dezavantaj, durum değişkenlerinin ölçölmesinin gerekmesi ve kontrolörün sadece sistem çıkışından yararlanarak yapılmasıdır. Böyle bir işlem hem pahalıdır hem de her zaman için fiziksel olarak mümkün olmayabilir. Ayrıca durum değişkenlerinde hata olmadığı varsayılmaktadır. Sistemdeki gürültüler ve ölçme hataları gibi olumsuzluklar göz önüne alınmamıştır.

Bu çalışma, ileriye yönelik olarak, yukarıda varsayılan dezavantajların giderilmesi veya azaltılması yönünde genişletilebilir. Sadece giriş kanalındaki belirsizlik yerine daha genel belirsizlik türleri için ve de, tüm durum değişkenlerini ölçmek yerine, ölçölülen durumlardan diğer durum değişkenlerinin elde edildiği bir çalışma olarak genişletilebilir.



KAYNAKLAR:

1. Slotine, J.J.E., Li W., 1991, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International, 461s.
2. Cook, P.A., 1994, *Nonlinear Dynamical Systems*, Prentice-Hall International.
3. Ogata, K., 1990, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall International, Second edition, 963s.
4. Anderson, B.D.O., Moore, J.B., 1971, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, 399s.
5. Boyce, W. E. and DiPrima, R. C., 1977, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, Third edition, 542s.
6. Gutman, S., 1979, Uncertain dynamic systems - A Lyapunov min-max approach, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 3, 437-443.
7. Gutman, P.-O., Hagander, P., 1985, A new design of constrained controllers for linear systems, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-30, No. 1, 22-33.
8. Gutman, P.-O. and Gutman, S., 1985, A Note on Control of Uncertain Linear Dynamical Systems with Constrained Control Input, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-30, No. 5, 484-486.
9. Corless, M. J. and Leitmann G., 1981, Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 5, 1139-1144.
10. Barmish, B. R., 1983, Stabilization of Uncertain Systems via Linear Control, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-28, No.8, 848-850.
11. Barmish, B. R. and Leitmann, G., 1982, On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-27, No.1, 153-158.
12. Steinberg, A., and Corless, M. J., 1985, Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamic Systems, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-30, No.10, 1025-1027.
13. Galimidi, A.R. and Barmish, B. R., 1986, The Constrained Lyapunov Problem and Its Application to Robust Output Feedback Stabilization, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-31, No.5, 410-419.
14. Bayır, İ., 2002, Yüksek Lisans Semineri, Belirsizlik İçeren Dinamik Sistemlerin Kararlılığının Lyapunov Tekniği ile İncelenmesi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 61s.

ÖZGEÇMİŞ

İhsan BAYIR, 1975 yılında Diyarbakır'da doğdu. İzmir'de, İlkokulu Tuborg İlkokulunda 1986'da, ortaokulu Bayraklı Lisesinde 1989'da bitirdi. Daha sonra, 1992'de İzmir Çınarlı Endüstri Meslek Lisesi, Elektrik Bölümünden mezun oldu. 1998'de Dicle Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 2000 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği A.B.D.'da yüksek lisans öğrenimine başladı.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURUMLARI
DOKÜMANASYON BAKANLIĞI