

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİR DERECELİ YAPILARIN DOĞRUSAL OLMAYAN
DAVRANIŞLAR ÜZERİNE ETKİLERİ**

**DOKTORA TEZİ
Yük. Müh. Vedat ÇELİK**

**Anabilim Dalı: Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Programı: Devreler ve Sistemler**

ŞUBAT-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİR DERECELİ YAPILARIN DOĞRUSAL OLMAYAN
DAVRANIŞLAR ÜZERİNE ETKİLERİ**

**DOKTORA TEZİ
Yük. Müh. Vedat ÇELİK
(03213202)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Ocak 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Şubat 2010

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yakup DEMİR (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa POYRAZ (F.Ü)

Prof. Dr. Erhan AKIN (F.Ü)

Doç. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI (İ.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mustafa TÜRK (F.Ü)

ŞUBAT-2010

ÖNSÖZ

Kesir dereceli türev ve integral fikrinin ilk ortaya atılmasından bu yana yaklaşık olarak 300 yıl geçti. Kesir dereceli türev ve integral fikri, tarafımdan çok yakın bir tarihte öğrenildi. Aynen, bulanık mantıktaki, 1 ve 0'ların dışında ara değerlerle bir kümeye üyeliğin söz konusu olması gibi, kesir dereceli türev ve integralde de herhangi bir fonksiyonunun, 0.7'nci dereceden türevi veya 0.3'üncü dereceden integralinin alınabilme fikri, bana çok ilginç geldi. Daha sonra tabiattaki sistemlerin modellerinin tanımlanması için kullanılan tam dereceli diferansiyel denklemlerin, aslında sistemi gerçek manada modelleyen kesir dereceli diferansiyel denklemlerin yakınsatılmış bir halinin olduğu iddiası beni daha da şaşırttı. Bu süreçle başlayan doktora tezi çalışmamın merkezine, kesir dereceli kontrolörlerin doğrusal olmayan sistemler ve kaotik sistemler üzerine etkisi ile kaotik kesir dereceli sistemler oturdu. Yaptığım bu tez çalışmasının, konuyla ilgilenen gerek lisans, gerek lisansüstü öğrencilerin ve gerekse bu konuda çalışmak isteyen akademisyenlere bir rehber olacağını düşünüyorum ve umuyorum.

Öncelikle, kendisiyle çalışma isteğimi geri çevirmeyen, bu tez çalışması boyunca ilgisini ve samimi yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yakup DEMİR'e teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca kesir dereceli hesaplama ile tanışmamı sağlayan ve tez konusunun belirlenmesinde zaman ve emek harcayan Sayın Doç. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI'ya, bu tez çalışması boyunca sürekli olarak beni cesaretlendiren ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Mehmet KAYA'ya, yönlendirmelerinden dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşegül UÇAR'a, yardımlarından dolayı Sayın Elk.-Eln. Müh. Özgür KAYA'ya, Sayın Uzm. Taner TUNCER'e, Sayın Elk.-Eln. Y. Müh. Ahmet Okan ŞEKER'e, diğer çalışma Arkadaşlarıma, Dostlarıma ve Aileme teşekkürü borç bilirim.

Vedat ÇELİK
ELAZIG-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VIII
TABLolar LİSTESİ.....	XV
SEMBOLLER LİSTESİ.....	XVI
KISALTMALAR LİSTESİ.....	XVII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kesir Dereceli Sistemler.....	1
1.2. Kaotik Sistemler.....	2
1.3. Tezin Yapısı.....	4
2. KESİR DERECELİ HESAPLAMA.....	7
2.1. Temel Tanımlamalar.....	7
2.1.1. Grünwald-Letnikov Tanımı.....	7
2.1.2. Riemann-Liouville Tanımı.....	8
2.1.3. Nümerik Kesir Dereceli Differintegrasyon.....	9
2.2. Kesir Dereceli Türev ve İntegralin Laplas Dönüşümü.....	10
2.3. Bazı Fonksiyonların Kesir Dereceli Türev ve İntegrali.....	11
2.3.1. Birim Basamak Fonksiyonu.....	11
2.3.2. Birim Rampa Fonksiyonu.....	12
2.3.3. Sin(x) Fonksiyonu.....	12
2.3.4. Cos(x) Fonksiyonu.....	12
2.3.5. ln(x) Fonksiyonu.....	14
3. YAKINSATILMIŞ KESİR DERECELİ INTEGRAL OPERATÖRÜ....	15
3.1. Kesir Dereceli İntegral Operatörünün Tam Dereceli Transfer Fonksiyonlarına Dönüştürülmesi.....	15

3.2.	Kesir Dereceli İntegral Operatörünün Tam Dereceli Yakınsatılmış Transfer Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	20
4.	KESİR DERECELİ KONTROL.....	28
4.1.	Kesir Dereceli Kontrol Yapıları.....	28
4.2.	Kesir Dereceli $PI^a D^\lambda$ Kontrol.....	34
4.3.	Kesir Dereceli Sistemlerde Kararlılık.....	38
5.	DOĞRUSAL OLMAYAN ÖZERK SİSTEM DİNAMİĞİ VE KAOS.....	42
5.1.	Doğrusal Olmayan Özerk Sistem Dinamiği.....	43
5.1.1.	Denge Noktaları.....	43
5.1.2.	Doğrusallaştırma ve Lokal Kararlılık.....	44
5.1.3.	Kararlı veya Kararsız Düğüm.....	45
5.1.4.	Eğer Noktası.....	45
5.1.5.	Kararlı veya Kararsız Odak.....	45
5.1.6.	Merkez Nokta.....	47
5.1.7.	Limit Çevrim.....	47
5.2.	Kaos ve Kaotik Davranışlar.....	49
5.3.	Kaosun Tespiti.....	54
5.3.1.	Lyapunov Üsleri.....	55
5.3.2.	Poincare Haritası.....	57
5.3.3.	Çatallaşma Diyagramı.....	60
5.4.	Kaos Kontrol.....	61
5.4.1.	Ott-Grebogi-Yorke Metodu.....	62
5.4.2.	Pyragas Metodu.....	63
5.4.3.	Geri Beslemeli Olmayan Kaos Kontrolü.....	64
5.4.3.1.	Çalışma Koşulları ile Kaos Kontrol Metodu.....	64
5.4.3.2.	Sistem Tasarımı ile Kaos Kontrol Metodu.....	64
6.	GENELLEŞTİRİLMİŞ AKTARIM İŞLEVİ ANALİZİ VE GENESİO-TESİ KAOS KESTİRİM YÖNTEMİ	66
6.1.	Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi.....	67
6.1.1.	Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi.....	67
6.1.2.	Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi.....	68
6.1.3.	Limit Çevriminin Kararlılığı.....	69
6.2.	Genesio-Tesi Kaos Kestirim Yöntemi.....	83

7.	DOĞRUSAL OLMAYAN ÖZERK SİSTEM DİNAMİĞİ ÜZERİNE KESİR DERECELİ PI^α KONTROLÖRÜN ETKİLERİ.....	93
7.1.	Kesir Dereceli PI^α Kontrolörlü Doğrusal Olmayan Sistemde Kaos Kestirimi.....	93
7.2.	Kesir Dereceli PI^α Kontrolörlün Doğrusal Olmayan Sistem Dinamiği Üzerine Etkileri İle İlgili Örnekler.....	96
8.	KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLER.....	117
8.1.	Kesir Dereceli Sürekli Zamanlı Sistemlerde Kaos.....	117
8.1.1.	Kaotik Chua Sistemi ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli.....	118
8.1.2.	Kaotik Rössler Sistemi ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli.....	122
8.1.3.	Kaotik Chen Sistemi ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli.....	126
8.2.	Kesir Dereceli Gecikme Zamanlı Sistemlerde Kaos.....	129
8.2.1.	Kaotik İki Hücreli Gecikme Zamanlı Hücresel Sinir Ağı ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli.....	129
8.2.2.	Kaotik Tek Hücreli Gecikme Zamanlı Hücresel Sinir Ağı ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli.....	134
8.2.3.	Kaotik Tek Durum Değişkenli Gecikme Zamanlı Sistem ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli.....	139
9.	SONUÇLAR.....	145
	KAYNAKLAR.....	148
	ÖZGEÇMİŞ.....	155

ÖZET

Bu tezde, endüstride sıkça kullanılan tam dereceli PID tipi kontrolörlerin yerine, kesir dereceli PI^α kontrolör kullanılması durumunda doğrusal olmayan sistem dinamiği üzerine ne gibi bir etki oluşturduğu incelenmiştir. Bunun için ilk olarak tam dereceli PI kontrolörün doğrusal olmayan sistem dinamiği üzerinde kararsızlık etkisi oluşturan kontrolör parametreleri K_p ve K_i , kesir dereceli PI^α kontrolörün parametreleri olarak seçildiğinde, kesirli α integral derecesinin değerine göre sistemde Limit Çevrim ($LÇ$) olarak bilinen osilasyonlar gözlemlendiği ve sistemi kararsızlıktan kurtardığı ortaya konmuştur. Ayrıca, tam dereceli PI kontrolörün doğrusal olmayan sistem dinamiği üzerinde kararsız $LÇ$ davranış oluşturan kontrolör parametreleri K_p ve K_i , kesir dereceli PI^α kontrolörün parametreleri olarak seçildiğinde, kararsız $LÇ$ 'yi belirleyen başlangıç değerlerinin, α integral derecesine bağlı olarak değiştiği ortaya konmuştur. α integral derecesi azaldıkça sistem cevabını belirleyen başlangıç değerlerinin arttığı gösterilmiştir. Kesirli α aralığının tespiti için, Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi analizi kullanılmıştır. Benzer şekilde, PI kontrollü kaotik bir sistemde, kontrolör parametreleri aynı kalmak kaydıyla tam dereceli PI kontrolör yerine kesir dereceli PI^α kontrolör seçilmesi durumunda, α integral derecesinin etkisi incelenmiş ve α integral derecesine bağlı olarak kesir dereceli PI^α kontrolörün, sistemi kaotik davranıştan kurtardığı gösterilmiştir. Hangi α integral derecesinde sistemin kaotik davranış gösterdiğini tespit etmek için, frekans tanım bölgesi yaklaşım tabanlı kaos kestirim yöntemi olan Genesio-Tesi varsayımı kullanılmıştır.

Bu çalışmada ayrıca, kaotik davranış gösteren tek ve iki hücreli özerk Gecikme Zamanlı Hücresel Sinir Ağı ($GZHSA$)'nın kesir dereceli modeli verilmiştir ve her iki kesir dereceli $GZHSA$ 'da sistem derecesi $\alpha \geq 0.1$ için, kaos gözlemlendiği nümerik simülasyonlarla gösterilmiştir. Ayrıca, sürekli zamanlı tek durum değişkenine sahip gecikme elemanlı özerk doğrusal olmayan kaotik sistemin kesir dereceli modeli de verilmiştir. Bu modelde, sistem derecesi $\alpha \geq 0.2$ için, kaos gözlemlendiği nümerik simülasyonlarla gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesir dereceli doğrusal olmayan sistemler, Genelleştirilmiş aktarım işlevi, Genesio-Tesi varsayımı, Kesir dereceli kontrol, Kesir dereceli kaotik sistemler.

SUMMARY

EFFECTS OF FRACTIONAL ORDER STRUCTURES ON THE NONLINEAR BEHAVIORS

In this thesis, the effects on a nonlinear system dynamics in the case of employing fractional order PI^α type controllers, instead of integer order PID type controllers which are frequently used in industry, are investigated. For this purpose, firstly, when the controller parameters K_p and K_i which create the effect of instability on nonlinear system dynamics of integer order PI controller are chosen as the parameters of fractional order PI^α controller, oscillations known as Limit Cycle (LC) with respect to the value of fractional α integral order are shown and thus, the system is prevented from instability. In addition, when the controller parameters, K_p and K_i , creating the behavior of instable LC on nonlinear system dynamics of integer order PI controller are chosen as the parameters of fractional order PI^α , it is observed that the initial values determining LC depend on α integral value. It is shown that as α integral value decreases, the initial values determining the system response increase. In order to diagnose the fractional α range, Describing Function is used. Similarly, in a chaotic system with PI controller, in case the controller parameters remain unchanged and instead of integer order PI controller, a fractional order PI^α controller is chosen, the effect of α integral order is investigated and it is shown that the fractional order PI^α controller, saves the system from chaotic behavior depending on α integral order. In order to diagnose for which α integral order the system exhibits a chaotic behavior, the frequency domain approach based chaos prediction method Genesio-Tesi conjecture is used.

In this study, also, the fractional order models of single and two-cell autonomous Delayed Cellular Neural Network ($DCNN$) exhibiting chaotic behavior are given. For the system order $\alpha \geq 0.1$ in both $DCNN$ with fractional order, a chaos is seen with numerical simulations. In addition, the fractional order model of a nonlinear autonomous continuous-time difference-differential equation and with only one variable is given. In this model, numerical simulation results of the fractional order model demonstrate the existence of chaos when system order $\alpha \geq 0.2$.

Keywords: Fractional order nonlinear systems, Describing function, Genesio-Tesi conjecture, Fractional order control, Fractional order chaotic systems.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. $f(x)=1$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.5 için türevi, $\alpha=0.3$ ve 0.7 için integrali.....	11
Şekil 2.2. $f(x)=x$ fonksiyonunun $\alpha=0.2$ ve 0.7 için türevi, $\alpha=0.4$ ve 0.6 için integrali.....	12
Şekil 2.3. $f(x)=\sin(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.6 için türevi, $\alpha=0.2$ ve 0.7 için integrali.....	13
Şekil 2.4. $f(x)=\cos(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.5 için türevi, $\alpha=0.3$ ve 0.6 için integrali.....	13
Şekil 2.5. $f(x)=\ln(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.25$ ve 0.5 için türevi, $\alpha=0.25$ ve 0.5 için integrali.....	14
Şekil 3.1. Kesir dereceli integratörün $\alpha=0.9, 0.5$ ve 0.2 için Bode Diyagramları.....	16
Şekil 3.2. -20α dB/dec eğimli kesir dereceli integratörün ve 0 dB/dec ve -20 dB/dec eğimli yakınsatılmış zik-zak eğrilerin temsili Bode Diyagramları.....	16
Şekil 3.3. -20α dB/dec eğimli kesir dereceli integratörün ve 0 dB/dec ve -20 dB/dec eğimli zik-zak eğrilerin sabit y dB hata ile temsili yakınsatılması.....	18
Şekil 3.4. $1/s^{0.9}$, $1/(1+s/0.01)^{0.9}$ ve yakınsatılmış transfer fonksiyonunun Bode Diyagramları.....	21
Şekil 3.5. $\alpha=0.9$ ve $p_T=0.001$ için kesir dereceli integral ve yakınsamasının Bode Diyagramları.....	22
Şekil 3.6. $1/s^{0.9}$, $1/(1+s/0.001)^{0.9}$ ve yakınsatılmış transfer fonksiyonunun Bode Diyagramları.....	23
Şekil 3.7. $\alpha=0.9$ ve $p_T=0.001$ için kesir dereceli integral ve yakınsamasının Bode diyagramları Şekil 3.8. $\alpha=0.8, 0.5$ ve 0.3 için kesir dereceli integral ve yakınsamasının Bode Diyagramları.....	24
Şekil 3.8. $\alpha=0.8, 0.5$ ve 0.3 için kesir dereceli integral ve yakınsamasının Bode Diyagramları.....	26
Şekil 3.9. $G^k(j\omega)$ kesir dereceli sistem $(-)$ gerçek ve $(---)$ yakınsatılmış polar Diyagramları.....	27
Şekil 4.1. Birim geri beslemeli kesir dereceli kontrol sistemi.....	28

Şekil 4.2. Kesir dereceli D^α kontrolörlü kapalı çevrimli doğrusal olmayan sistemin pozisyon kontrolü.....	29
Şekil 4.3. a) Kesir dereceli integral kullanılan ve b) Kesir dereceli türev kullanılan, <i>MRUK</i> algoritması.....	30
Şekil 4.4. Kesirli dayanımlı yapının s-düzlemindeki gösterimi.....	32
Şekil 4.5. a) Tam dereceli $P-I-D$ düzlemi, b) Kesir dereceli $P-I-D$ düzlemi.....	35
Şekil 4.6. a) Tam dereceli PID - farklı K_p değerleri için Bode Diyagramı.....	36
Şekil 4.6. b) Tam dereceli PID - farklı K_i değerleri için Bode Diyagramı.....	36
Şekil 4.6. c) Tam dereceli PID - farklı K_d değerleri için Bode Diyagramı.....	37
Şekil 4.7. a) Kesir dereceli $PI^\alpha D$ - farklı α değerleri için Bode Diyagramı.....	37
Şekil 4.7. b) Kesir dereceli PID^λ - farklı λ değerleri için Bode Diyagramı.....	38
Şekil 4.8. Kesir dereceli $F(s^\alpha)$ sistemin kararlılık bölgesinin genişlemesi.....	39
Şekil 4.9. $G^{(k)}(j\omega)$ 'nın, $\alpha=1, 0.9$ ve 0.7 için polar diyagramı.....	41
Şekil 5.1. Doğrusallaştırılmış doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramları...	46
Şekil 5.2. Kararlı, kararsız ve yarı kararlı $LÇ$	48
Şekil 5.3. $m=1, c=0.4$ ve $k=1$ için Van der Pol osilatörünün durum uzay diyagramı...	48
Şekil 5.4. $\sigma=10, \beta=8/3$ ve $\rho=28$ için Lorenz denkleminin üç boyutlu durum uzay diyagramı.....	51
Şekil 5.5. a) $x_0(0.5, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in, b) $x_0(0.50001, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in ve c) İki yörünge arasındaki fark, e 'nin zamana göre değişimleri.....	52
Şekil 5.6. $\sigma=10, \beta=8/3$ ve $\rho=99.96$ için Lorenz denkleminin üç boyutlu durum uzay diyagramı.....	53
Şekil 5.7. a) $x_0(0.5, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in, b) $x_0(0.501, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in ve c). İki yörünge arasındaki fark, e 'nin zamana göre değişimleri..	53
Şekil 5.8. Basit sarkacın $\omega_D=2/3$ ve $q=2$ a) $g=1$, b) $g=1.18$, c) $g=1.45$ ve d) $g=1.5$ durum uzay diyagramları.....	58

Şekil 5.9. Sürülen doğrusal olmayan bir sistemin a) Üç boyutlu durum uzayı b) Poincare haritası.....	58
Şekil 5.10. Sürülen basit sarkacın $\omega_D=2/3 \text{ rad/s}$, $q=2$ ve a) $g=1.5$, b) $g=1$ için Poincare haritası.....	59
Şekil 5.11. Sürülen basit sarkacın $\omega_D=2/3 \text{ rad/s}$ ve $q=2$ için g sistem parametresine göre çatallaşma diyagramı.....	61
Şekil 5.12. OGY Metodunun şekilsel gösterimi.....	63
Şekil 5.13. a) Dışardan bozucu bir etki kullanılarak, b) Gecikme zamanı kullanılarak yapılan kontrol.....	63
Şekil 6.1. Lur'e tipi sistem.....	67
Şekil 6.2. $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi.....	70
Şekil 6.3. $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi.....	73
Şekil 6.4. $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için sistem çıkışından bir kesit.....	75
Şekil 6.5. $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için sistemin iki farklı başlangıç şartı için durum uzay diyagramı.....	75
Şekil 6.6. PI kontrolörlü doğrusal olmayan Lur'e tipi sistem.....	76
Şekil 6.7. $K_i=1$ ve $K_p=0.9$ için 4 farklı başlangıç şartında sistemin durum uzay diyagramı.....	78
Şekil 6.8. $K_i=1$ ve $K_p=0.9$ için Örnek 6.2'de verilen sistem çıkışından bir kesit.....	78
Şekil 6.9. $K_i=1$ ve $K_p=0.9$ için $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi.....	79
Şekil 6.10. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi.....	81
Şekil 6.11. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için Örnek 6.3'te verilen sistemin a) $x_{01}(3.95,0,0)$ başlangıç şartı için çıkışı, b) $x_{02}(3.98,0,0)$ başlangıç şartı için çıkışı.....	82
Şekil 6.12. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için Örnek 6.3'te verilen sistemin $x_{01}(3.95,0,0)$ ve $x_{02}(3.98,0,0)$ başlangıç şartları için durum uzay diyagramı.....	83
Şekil 6.13. Ayır DN ve $LÇ$ arasındaki etkileşim.....	84

Şekil 6.14 . $y+(1/c)(y^3-dy)=0$ ifadesinin değişimi ve denge noktaları.....	87
Şekil 6.15. $a=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ için Örnek 6.4'te verilen sistemin kompleks düzlemdeki değişimi.....	88
Şekil 6.16. $a=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ için Örnek 6.4'deki sistemin x_{01} ve x_{02} başlangıç şartı için durum uzay diyagramı ve sisteme ait DN^* ları.....	89
Şekil 6.17. Örnek 6.4'deki sistemin $c=1$ ve $d=2$ için $b-a$ düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve gözlemlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi.....	91
Şekil 6.18. Örnek 6.4'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$ için Şekil 6.17'deki a) $P_1(1.5, 0.6)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı b) $Q_1(1.3, 0.6)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı.....	91
Şekil 6.19. Örnek 6.4'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$ için Şekil 6.17'deki a) $P_1(1.5, 0.6)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit b) $Q_1(1.3, 0.6)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit.....	92
Şekil 7.1. Kesir dereceli doğrusal olmayan kontrol sistemi.....	93
Şekil 7.2. Kesir dereceli Lur'e tipi sistem.....	93
Şekil 7.3. Kesir dereceli sistemde DN ve $LÇ$ kararlılık karakteristikleri.....	95
Şekil 7.4. $-1/N(B)$ ile $G^k(j\omega)$ 'nin farklı α değerleri için kompleks düzlemdeki değişimi.....	98
Şekil 7.5. Kesir dereceli doğrusal olmayan örnek sistemin $\alpha=0.7$ ve $\alpha=0.8$ için zaman cevapları.....	98
Şekil 7.6. Kesir dereceli doğrusal olmayan örnek sistemin $\alpha=0.7$, $x_{01}(0,0.01)$ ve $x_{02}(1.4,0.01)$ için durum uzay diyagramı.....	99
Şekil 7.7. q_1 noktasının karakterize ettiği $LÇ$ 'nin sürekli durumundan bir kesit.....	100
Şekil 7.8. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için $G^f(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi.....	102
Şekil 7.9. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için Örnek 7.2'de verilen sistemin a) $x_{01}^{(0.1)}$ ve $x_{02}^{(0.1)}$ başlangıç şartları için, b) $x_{01}^{(0.4)}$ ve $x_{02}^{(0.4)}$ başlangıç şartları için, c) $x_{01}^{(0.7)}$ ve $x_{02}^{(0.7)}$ başlangıç şartları için ve d) $x_{01}^{(0.9)}$ ve $x_{02}^{(0.9)}$ başlangıç şartları için çıkışları.....	103

Şekil 7.10. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için Örnek 7.2’de verilen sistemin a) $x_{01}^{(0.1)}$ ve $x_{02}^{(0.1)}$ başlangıç şartları için, b) $x_{01}^{(0.4)}$ ve $x_{02}^{(0.4)}$ başlangıç şartları için, c) $x_{01}^{(0.7)}$ ve $x_{02}^{(0.7)}$ başlangıç şartları için ve d) $x_{01}^{(0.9)}$ ve $x_{02}^{(0.9)}$ başlangıç şartları için durum uzay diyagramları.....	104
Şekil 7.11. Örnek 7.3’teki tam dereceli PI kontrollü doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı.....	105
Şekil 7.12. Örnek 7.3’teki kesir dereceli PI^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin kararlılık karakteristiği.....	107
Şekil 7.13. Örnek 7.3’de, $\alpha=0.4$ için kararlı $LÇ$ ve ayrı DN	108
Şekil 7.14. Örnek 7.3’deki kesir dereceli PI^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin a) $\alpha=0.1$ için, b) $\alpha=0.5$ için, c) $\alpha=0.9$ için, d) $\alpha=0.95$ için durum uzay diyagramı.....	109
Şekil 7.15. Örnek 7.3’deki kesir dereceli Lur’e sisteminin a) $\alpha=1$ için, b) $\alpha=0.9$ için ve c) $\alpha=0.5$ için zaman cevapları.....	110
Şekil 7.16. Örnek 7.4’teki tam dereceli PI kontrollü doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı.....	111
Şekil 7.17. Örnek 7.4’teki kesir dereceli PI^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin kararlılık karakteristiği.....	113
Şekil 7.18. Örnek 7.4’de, $\alpha=0.5$ için kararlı $LÇ$ ve ayrı DN	113
Şekil 7.19. Örnek 7.4’deki kesir dereceli PI^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin a) $\alpha=0.3$ için b) $\alpha=0.8$ için c) $\alpha=0.9$ için d) $\alpha=0.95$ için durum uzay diyagramları.....	115
Şekil 7.20. Örnek 7.4’deki kesir dereceli Lur’e sisteminin a) $\alpha=1$ için, b) $\alpha=0.9$ için, c) $\alpha=0.5$ için zaman cevapları.....	115
Şekil 8.1. Kesirli Chua sisteminin derecesinin kolay bir şekilde değiştirilmesini sağlayan geri beslemeli yapı.....	119
Şekil 8.2. Tam dereceli Chua sisteminin, $\sigma=9.5$ ve $\beta=100/7$ için durum uzay diyagramı.....	120
Şekil 8.3. Kesir dereceli Chua sisteminin a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.8$ ve c) $\alpha=0.7$ integral derecesi için durum uzay diyagramları.....	121
Şekil 8.4. Kesir dereceli Chua sisteminin a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.8$ ve c) $\alpha=0.7$ integral dereceleri için zaman cevapları.....	122

Şekil 8.5. Tam dereceli Rössler sisteminin $a=0.15$ için durum uzay diyagramı.....	123
Şekil 8.6. Kesir dereceli Rössler sistemi'nin $\alpha=0.9$ ve $a=0.4$ için durum uzay diyagramı.....	124
Şekil 8.7. Kesir dereceli Rössler sisteminin $\alpha=0.8$ ve $a=0.63$ için durum uzay diyagramı.....	125
Şekil 8.8. Kesir dereceli Rössler sistemin a) $\alpha=0.9$ ve $a=0.4$ ve b) $\alpha=0.8$ ve $a=0.63$ için zaman cevapları.....	125
Şekil 8.9. Tam dereceli Chen sisteminin $a=35$, $b=3$ ve $c=28$ için durum uzay diyagramı.....	127
Şekil 8.10. Kesir dereceli Chen sistemin a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.7$, c) $\alpha=0.4$ ve d) $\alpha=0.1$ için durum uzay diyagramları.....	128
Şekil 8.11. Kesir dereceli Chen sistemin a) $\alpha=0.3$, b) $\alpha=0.6$ ve c) $\alpha=0.8$ için zaman cevapları.....	128
Şekil 8.12. Tam dereceli iki hücreli <i>GZHS</i> A'nın $\tau=0.95$ için durum uzay diyagramı..	131
Şekil 8.13. İki hücreli kesir dereceli <i>GZHS</i> A'nın a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.8$, c) $\alpha=0.7$ ve d) $\alpha=0.6$ için durum uzay diyagramları.....	132
Şekil 8.14. İki hücreli kesir dereceli <i>GZHS</i> A'nın e) $\alpha=0.4$, f) $\alpha=0.3$, g) $\alpha=0.2$ ve h) $\alpha=0.1$ için durum uzay diyagramları.....	132
Şekil 8.15. İki hücreli kesir dereceli <i>GZHS</i> A'nın a) $\alpha=0.8$, b) $\alpha=0.5$ ve c) $\alpha=0.3$ için zaman cevapları.....	133
Şekil 8.16. Kesir dereceli iki hücreli <i>GZHS</i> A'nın a) $\alpha=0.6$, b) $\alpha=0.5$ ve c) $\alpha=0.4$ için bir birine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için oluşan yörüngeler arasındaki farkın zamana göre değişimi.....	134
Şekil 8.17. Tam dereceli tek hücreli <i>GZHS</i> A'nın $\tau=1$ için durum uzay diyagramı.....	135
Şekil 8.18. Tek hücreli kesir dereceli <i>GZHS</i> A'nın a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.8$, c) $\alpha=0.7$ ve d) $\alpha=0.6$ için durum uzay diyagramları.....	136
Şekil 8.19. Tek hücreli kesir dereceli <i>GZHS</i> A'nın e) $\alpha=0.4$, f) $\alpha=0.3$, g) $\alpha=0.2$ ve h) $\alpha=0.1$ için durum uzay diyagramları.....	137
Şekil 8.20. Tek hücreli kesir dereceli <i>GZHS</i> A'nın a) $\alpha=0.8$, b) $\alpha=0.5$ ve c) $\alpha=0.2$ için zaman cevapları.....	138

Şekil 8.21. Kesir dereceli tek hücreli <i>GZHS</i> A'nın a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.5$ ve c) $\alpha=0.1$ için bir birine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için oluşan yörüngeler arasındaki farkın zamana göre değişimi.....	138
Şekil 8.22. Denklem (8.11)'de tanımlı tam dereceli sistemde $\delta=1$, $\varepsilon=1$ ve $\tau=1.6$ için elde edilen kaotik çekici.....	140
Şekil 8.23. Denklem (8.12)'de verilen kesir dereceli sistemin blok diyagramı.....	140
Şekil 8.24. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelde a) $\alpha=0.9$ ve $\tau=1.92$, b) $\alpha=0.8$ ve $\tau=2.25$, c) $\alpha=0.7$ ve $\tau=3.30$, d) $\alpha=0.6$ ve $\tau=3.90$ için oluşan kaotik çekiciler.....	141
Şekil 8.25. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelde e) $\alpha=0.5$ ve $\tau=5$, f) $\alpha=0.4$ ve $\tau=7$, g) $\alpha=0.3$ ve $\tau=39$, h) $\alpha=0.2$ ve $\tau=70$ için oluşan kaotik çekiciler.....	141
Şekil 8.26. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelin a) $\alpha=0.8$ ve $\tau=2.25$, b) $\alpha=0.4$ ve $\tau=7$, c) $\alpha=0.2$ ve $\tau=70$ için zaman cevapları.....	142
Şekil 8.27. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelin a) $\alpha=0.9$ ve $\tau=1.92$, b) $\alpha=0.5$ ve $\tau=5$, c) $\alpha=0.3$ ve $\tau=39$ için bir birine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için oluşan yörüngeler arasındaki farkın zamana göre değişimi.....	143

TABLÖLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. [50]'de elde edilen yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonları.....	25
Tablo 3.2. [48]'de elde edilen yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonları.....	25
Tablo 7.1. Örnek 7.3'deki sistemin farklı α dereceleri için maksimum Lyapunov üsleri.....	110
Tablo 7.2. Örnek 7.4'deki sistemin farklı α dereceleri için maksimum Lyapunov üsleri.....	116
Tablo 8.1. Kesir dereceli Chua sisteminin, sistem derecesi q , kesirli integral derecesi α ve sistem parametreleri σ, β için maksimum Lyapunov üsleri.....	120
Tablo 8.2. Kesir dereceli Rössler sisteminin, sistem derecesi α ve sistem parametreleri a için maksimum Lyapunov üsleri.....	124
Tablo 8.3. Kesir dereceli Chen sisteminin, sistem derecesi α ve sistem parametreleri a, b, c için maksimum Lyapunov üsleri.....	127
Tablo 8.4. Kesir dereceli iki hücreli $GZHS A$ 'nın sistem derecesi α ve gecikme zamanı τ için maksimum Lyapunov üsleri.....	133
Tablo 8.5. Kesir dereceli tek hücreli $GZHS A$ 'nın sistem derecesi α ve gecikme zamanı τ için maksimum Lyapunov üsleri.....	139
Tablo 8.6. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelin sistem derecesi α ve gecikme zamanı τ için maksimum Lyapunov üsleri.....	143

SEMBOLLER LİSTESİ

A	: Limit çevriminin sabit bileşeni
B	: Limit çevriminin değişken bileşeni
$G(s)$	: Doğrusal alt sistem
$G_p(s)$	: Kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonu
$G_c(s)$	: Kontrolör transfer fonksiyonu
$G_p^k(s)$	: Kesir dereceli kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonu
$G_c^k(s)$	: Kesir dereceli kontrolör transfer fonksiyonu
$G^k(s)$	: Kesir dereceli doğrusal alt sistem
N	: $-1+j0$ noktasının Nyquist eğrisinin sarım sayısı
$n(\cdot); n(y)$	: Doğrusalsızlık
$N(B)$	: Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi
$N_0(A,B)$	: Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevinin sabit bileşeni
$N_1(A,B)$	: Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevinin değişken bileşeni
P	: Açık çevrimli sistemin kutup sayısı
$r(t)$	: Sistem girişi
$y(t); y_0(t)$	: Sistem çıkışı
$x_1; x_2; x_3; x; y; z$	: Durum değişkenleri
Z	: Kapalı çevrimli sistemin kutup sayısı
ω	: Limit çevriminin frekansı
α	: Kesir derecesi
$\Gamma(v)$	: Euler Gama fonksiyonu
${}_aD_x^\alpha$	: Kesir dereceli türev operatörü
${}_aI_x^\alpha$	: Kesir dereceli integral operatörü
τ	: Gecikme zamanı
$\lambda_{\max}$	: Maksimum Lyapunov üssü

KISALTMALAR LİSTESİ

GAİ	: Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi
TGGAİ	: Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi
ÇGGAİ	: Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi
LÇ	: Limit Çevrim
DN	: Denge Noktası
OGY	: Ott-Grebogi-Yorke
GZHSA	: Gecikme Zamanlı Hücresel Sinir Ağı
MRUK	: Model Referans Uyarlamalı Kontrol
CRONE	: Commande Robuste D'Ordere Non Entier
TGTÇ	: Tek Girişli Tek Çıkışlı

1. GİRİŞ

1.1. Kesir Dereceli Sistemler

İlk olarak 1695 yılında, Leibniz tarafından L'Hospital'e gönderilen mektupta kesir dereceli hesaplamadan bahsedilmiş ve Leibniz mektubunda aşağıdaki soruyu muhatabına yöneltmiştir [1].

“ Tam dereceli türevin anlamı, tam dereceli olmayan türev için de genellenebilir mi? ”

L'Hospital, gönderilen mektubu büyük bir ilgiyle okumuş ve bir soruyla cevap vermiştir.

“ Farz edelim bu derece $1/2$, bu durumda ne olacak? ”

Leibniz'in bu mektuba cevabı ise;

“ Bu gelecekte faydalı sonuçları olacak bir paradoksa dönüşecek ”

şeklinde olmuştur. Devam eden dönemde; Euler ve Lagrange'in çalışmaları her ne kadar daha erken yapılmış olsa da, sistematik çalışmalar aşağı yukarı 19. yüzyılın başlangıcı ve ortalarında, Liouville, Holmgren ve Riemann tarafından yapılmıştır [1-2].

Kesir dereceli hesaplama, saf matematik konusu olmadığından dolayı, teorik gelişmelere paralel olarak çeşitli uygulamaların da önünü açmıştır. Kesir dereceli hesaplama, bir çok fiziksel problemin ifade edilebilmesine ve başarıyla çözülmesine yardımcı olmuştur [2]. Son yıllarda yapılan araştırmalar, kesir dereceli diferansiyel denklemlerin karmaşık dinamikleri tanımlamak için etkin bir araç olduğunu ve birçok fiziksel ve mühendislik ile ilgili sistemleri daha etkili modelleyebildiğini göstermiştir [3]. Bunlara örnek olarak; fiziko-kimyada, bir metal ve iyonik ortam arasındaki pürüzlü ara yüzden akan akımın, gerilimin kesir dereceli türeviyle orantılı olması; elektrikte, bir kapasitenin elektrotlarından en az bir tanesinin pürüzlü bir yüzeye sahip olması durumunda benzer şekilde kapasiteden geçen akımın, gerilimin kesir dereceli türeviyle orantılı olması; elektronikte, $5/2$ dereceden sinüzoidal osilatörlerin varlığı; yayılma alanında, homojen olmayan medyada anormal yayılma olayının tanımlanmasının kesir dereceli türevle sağlanması verilebilir. Aslında fizik ve mühendislik ile ilgili yapılan tam dereceli modeller,

kesir dereceli modellerinin tam dereceye yakınsatılmış hali olarak değerlendirilebilir. Fizik ve mühendislik ile ilgili sistemlerin, kesir dereceli modelleme ile daha iyi tanımlanıyor olması ve bu yapılar içerisinde kesir dereceli operatörlerin de var olması nedeniyle, bu tür sistemlerde oluşacak dinamiklerin incelenmesi önem kazanmaktadır.

Kesir dereceli hesaplama ve modellemeye paralel olarak, kesir dereceli sistem veya kontrolörden oluşan kesir dereceli kontrol yapılarının literatürdeki ilk uygulaması; 1958'de ağır cisimlerin pozisyon kontrolünü yapmak için Tustin [4] tarafından yapılmıştır. Bunun dışında 1961 ve 1963 yıllarında Manabe [5-6]'da kesir dereceli integratörü kontrol sistemlerine uygulamıştır. Fakat geçen süre içerisinde sınırlı hesaplama gücünden dolayı kesir dereceli hesaplama, yukarıda bahsedilen birkaç çalışma dışında kontrol sistemlerine uygulanmamıştır. Son yıllarda, bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak, Axtell'in [7] çalışmasıyla kesir dereceli kontrol tekrar gündeme gelmiştir. Böylece kesir dereceli kontrol yöntemleri, doğrusal sistemlerin kontrolünde yoğun bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır [8-24].

Kesir dereceli kontrol yapılarında kullanılan kontrolör tiplerinden biri de, kesir dereceli $PI^a D^\lambda$ tipi kontrolörlerdir. Bu tip kontrolörlerin, şu ana kadar doğrusal sistemler üzerindeki etkisi irdelenmiştir [25-32]. Benzer şekilde, doğrusal olmayan sistemler üzerine de kesir dereceli kontrolörlerin etkisi, son zamanlarda araştırılmaya başlanmıştır [33-36].

1.2. Kaotik Sistemler

Son yıllarda, kaos teorisi ve doğrusal olmayan sistemlerde gözlenen ve tuhaf çekiciler olarak adlandırılan kaotik dinamikler, araştırmacılar tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaya başlanmıştır [37-41]. Kaos kabaca; başlangıç şartlarına hassas bağlı davranış gösteren doğrusal olmayan deterministik bir sistemde, düzensiz davranışlar olarak tanımlanabilir [40]. Deterministik sistemler; sistem davranışlarının, sistem parametreleri ve başlangıç şartları tarafından belirlendiği sistemlerdir [41]. Kaotik sistemin deterministik olması, gürültü ile kaos arasındaki en önemli farklılıktır. Çevremize baktığımızda, rastlantıya dayanan veya rasgele olarak isimlendirilecek tipte davranışlar görmek mümkündür. Bu davranış türleri, aldığımız kararlardan toplumsal olaylara, ekonomiden biyolojik sistemlere, meteorolojiden mühendislik ile ilgili sistemlere çok geniş alanda gözlemlenebilir. İçilen sigara dumanının yükselişi, rüzgarda salınan bayrağın şekli veya musluktan damlayan suyun zamanla periyodikliğini kaybetmesi bu davranış şekillerine

basit birkaç örnektir. Bu sistemlerde oluşan düzensizliğin sebebi; sistemin belirsizlikler içeren bir yapıda olmasından kaynaklanmaktadır. Belirsizlik içeren sistemler; sistemin bilinmeyen parametrelerinden, tanımlanması zor olan doğrusal olmayan bağlantılardan ve modellenemeyen dinamiklerden meydana gelebilir [42-43]. Aslında tüm sistemler deterministik yapıdadır. Ancak, belirsizlikler içeren yapılardan dolayı sistem deterministik olmayan yapıdaymış gibi algılanır. Bu noktada dikkat çekici bir husus ise kaotik sistemlerin belirsizlik içeren bir yapıda olmamasıdır.

Kaotik sistemlerin en önemli özelliği olan başlangıç şartına hassas bağıllık, çok eski tarihlerde bile gözlenen bir durumdur.

“ Bir mih bir nalı - Bir nal bir atı - Bir at bir komutanı - Bir komutan bir orduyu – Bir ordu bir ülkeyi kurtarır.”

Atasözü bu durumun gözleendiğine bir örnektir. Başlangıç şartına hassas bağıllık Poincare tarafından aslında dile getirilmiş bir durumdur. Poincare;

“ Eğer doğa kanunları ve evrenin başlangıç anındaki durumunu biliyor olsaydık, evrenin tam olarak durumunun ne olacağını başarıyla tahmin edebilirdik. ”

“ Gözümüzden kaçan çok küçük bir ayrıntı, görmezden gelemeyeceğimiz oranda büyük bir etkiye yol açar ve biz bu etkinin rasgele olduğunu sanırız. ”

diyerek başlangıç şartlarının önemine vurgu yapmıştır [44]. Fakat, garip çekiciler olarak adlandırılan kaotik davranışlar, ilk olarak 1963’de E. N. Lorenz’in meteorolojik tahminler yapmak amacıyla oluşturduğu üç durum değişkenine sahip modelin, bilgisayarda simülasyonu sonucunda ortaya somut bir şekilde konmuştur [45]. Lorenz 1972’de, *“Tahmin edilebilirlik: Brezilya’da bir kelebeğin kanat çırpışı Teksas’ta bir hortuma sebep olur mu?”* başlıklı konuşmasıyla başlangıç şartına hassas bağıllığı anlatmış ve başlangıç şartıyla özdeşleşen kelebek etkisi tabirinin çıkmasını sağlamıştır [44].

Kaotik davranışlar, doğrusal olmayan sistemlerde gözlenen dinamiklerdir. Tabiattaki veya insan yapımı birçok sistem, doğrusal olmayan yapıdadır. Dolayısıyla, kaotik davranışlar ve sistemlerle karşılaşma olasılığı çok yüksektir. Özellikle mühendislik sistemlerinde, kaotik davranışlar istenmeyen davranış türleridir [46]. Örneğin, kontrol sistemlerinde istenmeyen bu davranış türünü ortadan kaldırmak için çeşitli yöntemlerle bu

davranışlar elimine edilebilir. Bu işleme kaos kontrol denir. Sistemin kaotik davranış gösterip göstermemesi, geri beslemeli kontrol yapılarıyla sağlanacağı gibi tasarım aşamasında sistemin bu özelliği göstermeyecek şekilde gerçekleştirilmesiyle de sağlanabilir. Bunun yanı sıra kaos, çeşitli sayısal haberleşme tekniklerinde de kullanılmaktadır [47]. Bu yüzden, kaotik davranış gösteren sistemlerin ortaya çıkarılması ve doğrusal olmayan dinamiklerin ve kaos kontrol üzerinde çalışılması gerekliliği doğmuştur. Bununla ilgili olarak son zamanlarda, kesir dereceli birçok sistemin kaotik davranış gösterdiği ortaya konmuştur [48-55].

1.3. Tezin Yapısı

Bu tez çalışmasında, genel olarak kesir dereceli özerk ve deterministik olan doğrusal olmayan yapıdaki sistemler incelenecektir. Günümüzde kesir dereceli kontrolörlerin doğrusal sistemler üzerine ne tür etkilerinin olduğu incelenmiş olmasına karşın, doğrusal olmayan sistem dinamiği üzerine etkileri araştırılmamıştır. Bu nedenle kesir dereceli PI^a kontrolörün doğrusal olmayan sistemler üzerine ne tür etkilerinin olduğunu ortaya koymak ve kaotik sistemler üzerine etkilerini göstermek amaçlanmıştır. Ayrıca yeni kesir dereceli gecikme zamanlı sistemlerde kaotik davranışların varlığını göstermek amacıyla, tezin yapısı devam eden kısımdaki gibi planlanmıştır.

Bölüm 2: Kesir Dereceli Hesaplama

Bu bölümde, kesir dereceli hesaplamadan bahsedilecek ve Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tanımları verilecektir. Ayrıca kesir dereceli diferansiyel denklemlerin çözümü için nümerik bir yöntem verilecek ve bazı fonksiyonların kesir dereceli türev ve integralleri $1 > \alpha > -1$ aralığındaki bazı değerler için elde edilecektir.

Bölüm 3: Yakınsatılmış Kesir Dereceli İntegral Operatörü

Bu bölümde, kesir dereceli sistemlerin zaman cevabını pratik bir şekilde elde etmek ve sistemlere ait simülasyonların rahat bir şekilde sağlanabilmesi amacıyla kullanılacak olan, kesir dereceli integral operatörünün yakınsatılmış transfer fonksiyonlarının elde edilmesi için önerilen bir metot anlatılacak ve bu metodun kullanılmasıyla elde edilen kesir

dereceli integral operatörünün yakınsatılmış transfer fonksiyonları $\alpha=0.1-0.9$ aralığında 0.1 adımlarla verilecektir.

Bölüm 4: Kesir Dereceli Kontrol

Bu bölümde ise, genel olarak kesir dereceli kontrol kavramı açıklanacak ve kesir dereceli kontrol yapılarına birkaç örnek verilecektir. Kesir dereceli kontrol çeşitlerinden kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrol üzerinde özellikle durulacak ve kabaca kesir dereceli kontrol sistemlerinde kararlılığa değinilecektir.

Bölüm 5: Doğrusal Olmayan Özerk Sistem Dinamiği ve Kaos

Bu bölümde, doğrusal olmayan özerk sistemlerde gözlenen dinamikler anlatılacak ve kaotik davranışın tanımı verilecektir. Ayrıca, kaotik davranışların nicel ve nitel olarak tespitini sağlayan yöntemlerden bir kaçısı açıklanacak ve kaos kontrol metotlarına değinilecektir.

Bölüm 6: Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi ve Genesio-Tesi Kaos Kestirim Yöntemi

Bu bölümde, doğrusal olmayan sistemlerin frekans analiz yöntemlerinden Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi (GAI) analizi ve kaotik davranışların oluşmasıyla ilgili sistem parametre kestirim yöntemi olan Genesio-Tesi varsayımı örneklerle adım adım anlatılacaktır.

Bölüm 7: Doğrusal Olmayan Özerk Sistem Dinamiği Üzerine Kesir Dereceli PI^α Kontrolörün Etkileri

Bu bölümde, Bölüm 6’da anlatılan yöntemler kullanılarak, kesir dereceli PI^α kontrolörün doğrusal olmayan özerk sistem dinamiği ve kaotik sistemler üzerine etkisi elde edilen simülasyon sonuçlarıyla ortaya konacaktır.

Bölüm 8: Kesir Dereceli Kaotik Sistemler

Bu bölümde, mevcut sürekli zamanlı kaotik Chua, Rössler ve Chen sistemlerin kesir dereceli modellerinde de kaosun varlığı, simülasyon sonuçlarıyla gösterilecek ve yeni kesir dereceli gecikme zamanlı sistemlerde kaotik davranışların varlığı, sistem derecesi ve parametrelerine göre ortaya konacaktır.

Bölüm 9: Sonuçlar

Bu bölümde, genel bir değerlendirme ile tezde elde edilen sonuçlar verilecektir.

2. KESİR DERECELİ HESAPLAMA

2.1. Temel Tanımlamalar

Genel olarak kesir dereceli hesaplamada integro-diferansiyel operatörü Denklem (2.1)'deki gibi tanımlanmaktadır.

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{Re}(\alpha) > 0 \\ 1 & \text{Re}(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \text{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada, α kompleks türev veya integral derecesini göstermektedir. Bu tez çalışmasında, kesir dereceli hesaplama operatör derecesinin reel olduğu kabul edileceğinden, α 'nın reel kısmına göre operatör sınıflandırılacaktır. Kesir dereceli matematikte, birçok kesir dereceli türev ve integral tanımı mevcuttur. Bunlardan en çok bilinenleri, Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tanımlarıdır [2,56-57].

2.1.1. Grünwald-Letnikov Tanımı

Grünwald ve Letnikov, kesir dereceli türev için bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Geliştirilen bu tanımlamaya göre, α dereceli bir integro-diferansiyel; Denklem (2.2) ile ifade edilir [2,57].

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Delta_h^\alpha f(x)}{h^\alpha} \quad (2.2)$$

Burada; h adım sayısı olup, $\Delta_h^\alpha f(x)$

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh) \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilirse ve toplam işleminin r gibi sonlu bir sayıya kadar yapılması durumunda;

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(r+1-\alpha)}{\Gamma(r+1)} \quad (2.4)$$

olacaktır. Eğer, $h = \frac{x-a}{r}$ olarak kabul edilir ise Denklem (2.2)

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left(\frac{x-a}{r}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j\left(\frac{x-a}{r}\right)\right) \right\} \quad (2.5)$$

olur. Burada α : rasgele bir sayı, a : başlangıç değeri ve $\Gamma(\cdot)$: Euler Gama fonksiyonudur.

2.1.2. Riemann-Liouville Tanımı

Sık karşılaşılan diğer bir kesir dereceli integro-differansiyel tanımlama, Riemann-Liouville tanımıdır [2]. Bu tanımlamaya göre kesir dereceli integral (2.6)'daki gibi ifade edilir.

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{-\alpha} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha < 0 \quad (2.6)$$

$n-1 < \alpha < n$ olmak kaydıyla Denklem (2.6)'nın n . dereceden türevi alınır

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n > 0 \quad (2.7)$$

olur. Denklem (2.7), $f(x)$ fonksiyonunun $(n-\alpha)$. dereceden kesir dereceli türevine karşılık gelmektedir. Burada, n bir tam sayıdır.

Her iki tanımlamada da kullanılan Euler Gama Fonksiyonu,

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} y^{v-1} e^{-y} dy, \quad y > 0 \quad (2.8)$$

ile bulunur. Burada, $v \geq 0$ olup bir tamsayıdır. Denklem (2.8)'in $v+1$ için integrali alınır;

$$\Gamma(v+1) = \int_0^{\infty} y^v e^{-y} dy = -e^{-y} y^v \Big|_0^{\infty} + v \int_0^{\infty} e^{-y} y^{v-1} dy = v\Gamma(v) \quad (2.9)$$

olarak elde edilir [58].

2.1.3. Nümerik Kesir Dereceli İntegro-Diferansiyel

Kesir dereceli integro-diferansiyel işleminin, nümerik olarak yapılabilmesi için birçok algoritma vardır [2,59-61]. Bu alt bölümde, nümerik olarak α dereceli bir integro-diferansiyel çözüm algoritmalarından olan *GI* algoritmasından bahsedilecektir [2]. Bu algoritma, diğerleri gibi bağımsız x değişkeninin 0 değerinden başlayarak, biri birinden ayrı $N+1$ noktada $f(x)$ fonksiyonun değerinin bilinmesi durumunda, $d^\alpha f(x)/dx^\alpha$ 'nın herhangi bir α için yakınsatılarak tasarlanmasını sağlar. $f(x)$ fonksiyonu için örneklendirme,

$$f_N \equiv f(0); f_{N-1} \equiv f(x/N); \dots f_j \equiv f(x - jx/N); \dots f_0 \equiv f(x) \quad (2.10)$$

biçiminde yapılır. Burada; N örnek sayısıdır. *GI* algoritmasıyla Denklem (2.5)'de verilen Grünwald-Letnikov tanımı, $N \rightarrow \infty$ ifadesi çıkarılıp $\alpha=0$ değeri alınarak basitleştirilebilir. Bu durumda Denklem (2.5), $r=N$ için Denklem (2.11)'e dönüşür.

$${}_0 D_x^\alpha f(x) \approx ({}_0 D_x^\alpha f(x))_{GI} = \frac{x^{-\alpha} N^\alpha}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - \frac{jx}{N}\right) = \frac{x^{-\alpha} N^\alpha}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f_j \quad (2.11)$$

Gama fonksiyonundan kaçınmak ve programın daha etkin çalışabilmesi için, çarpma toplama ile *GI* algoritması (2.12)'deki formda uygulanabilir.

$$\left({}_0 D_x^\alpha f(x)\right)_{G1} = \frac{N^\alpha}{x^\alpha} \left[\left[\left[\left[f_{N-1} \left\{ \frac{N-\alpha-2}{N-1} \right\} + f_{N-2} \right\} \left\{ \frac{N-\alpha-3}{N-2} \right\} + f_{N-3} \right] \dots \left\{ \frac{1-\alpha}{2} \right\} + f_1 \right] \left\{ \frac{-\alpha}{1} \right\} \right] f_0 \right] \quad (2.12)$$

2.2. Kesir Dereceli Türev ve İntegralin Laplas Dönüşümü

α kesir derecesine sahip bir türev veya integral operatörünün Laplas Dönüşümü, özellikle kontrol sistemlerinin ve modellerin transfer fonksiyonlarının elde edilmesi ve analizlerinin yapılmasında büyük kolaylıklar sağlar. Bunun için, ${}_0 D_x^\alpha f(x)$ ifadesinin Laplas Dönüşümü elde edilirse;

$$L\left\{{}_0 D_x^\alpha f(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} dx \quad (2.13)$$

Bu ifadeden kesir dereceli türev;

$$L\left\{{}_0 D_x^\alpha f(x)\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0 D_x^{\alpha-k-1} f(0) \quad (2.14)$$

olacaktır. Eğer tüm başlangıç şartları sıfır alınırsa, bu durumda kesir dereceli türevin Laplas Dönüşümü,

$$L\left\{{}_0 D_x^\alpha f(x)\right\} = s^\alpha F(s) \quad (2.15)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde kesir dereceli integralin Laplas Dönüşümü de,

$$L\left\{{}_0 I_x^\alpha f(x)\right\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (2.16)$$

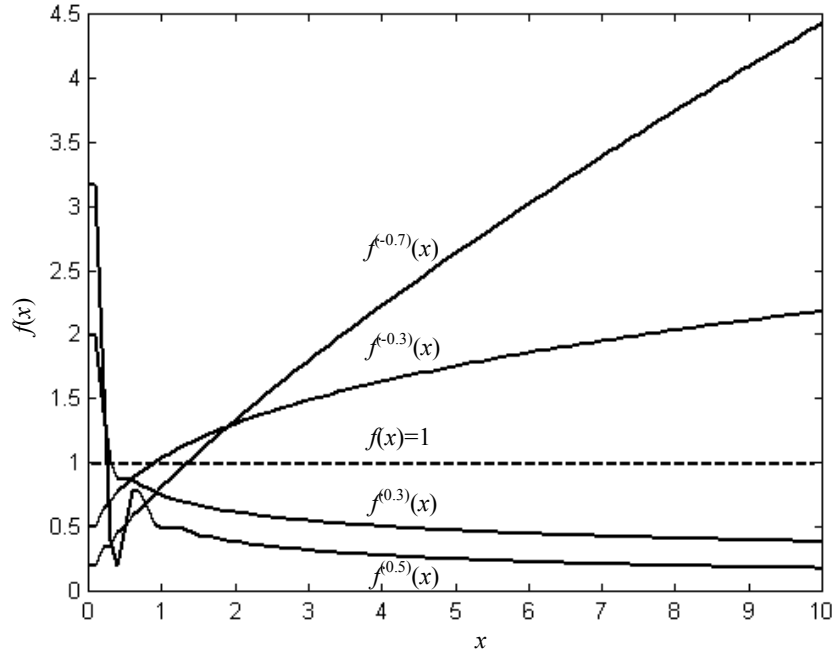
olur. Böylece kesir dereceli sistemler analiz edilirken, Gama fonksiyonundan oluşan karmaşık çarpma işlemlerinden de kaçınılmış olunur.

2.3. Bazı Fonksiyonların Kesir Dereceli Türev ve İntegrali

Bu alt bölümde, bazı fonksiyonların kesir dereceli türev ve integralleri, Bölüm 2.1.3' te verilen algoritma kullanılarak *MATLAB* ortamında elde edilmiş ve nümerik çözümleri grafiksel olarak gösterilmiştir.

2.3.1. Birim Basamak Fonksiyonu

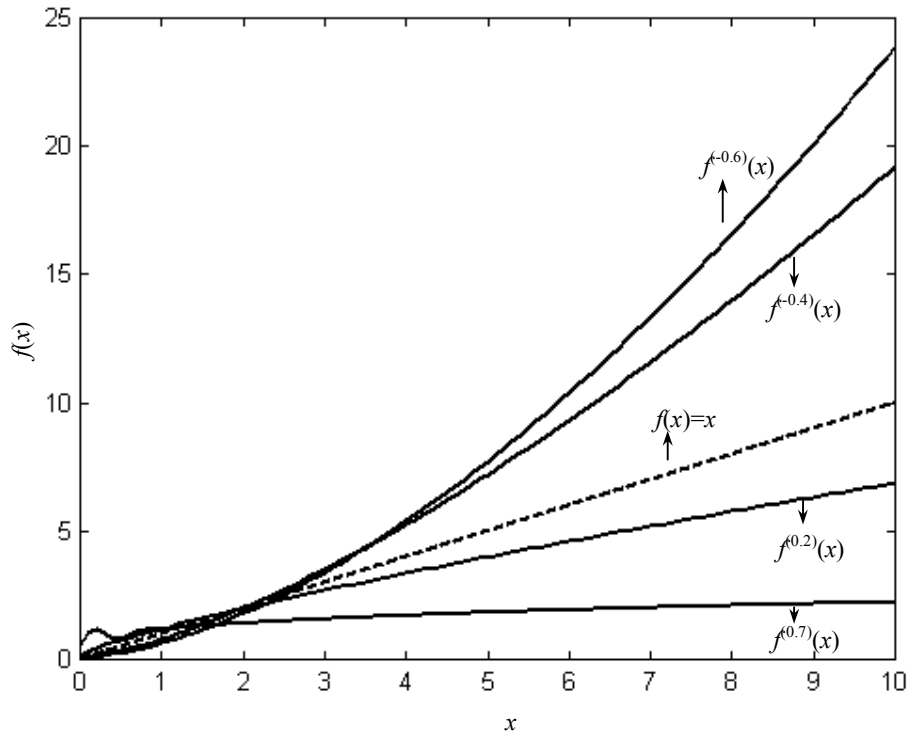
$f(x)=1$ birim basamak fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.5 için türevleri ile $\alpha=0.3$ ve 0.7 için integralleri Şekil 2.1'de verilmiştir. Grafiklere dikkat edilirse, kesir dereceli türevde kesir derecesi 1'e yaklaştıkça, $f(x)=1$ fonksiyonunun türevi 0'a doğru yaklaşmaktadır. Kesir dereceli integralde kesir derecesi 1'e yaklaştıkça $f(x)=1$ fonksiyonunun integrali x fonksiyonuna yaklaşmaktadır.



Şekil 2.1. $f(x)=1$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.5 için türevi, $\alpha=0.3$ ve 0.7 için integrali

2.3.2. Birim Rampa Fonksiyonu

$f(x)=x$ birim rampa fonksiyonunun $\alpha=0.2$ ve 0.7 için türevleri ile $\alpha=0.4$ ve 0.6 için integralleri Şekil 2.2’de verilmiştir. Bu değişimlerden de görüleceği gibi kesir dereceli türevde kesir derecesi 1’e yaklaştıkça $f(x)=x$ fonksiyonunun türevi 1 değerine yaklaşmaktadır. Kesir dereceli integrali ise kesir derecesi 1’e yaklaştıkça $f(x)=x$ fonksiyonunun integrali $x^2/2$ ’ye yaklaşmaktadır.



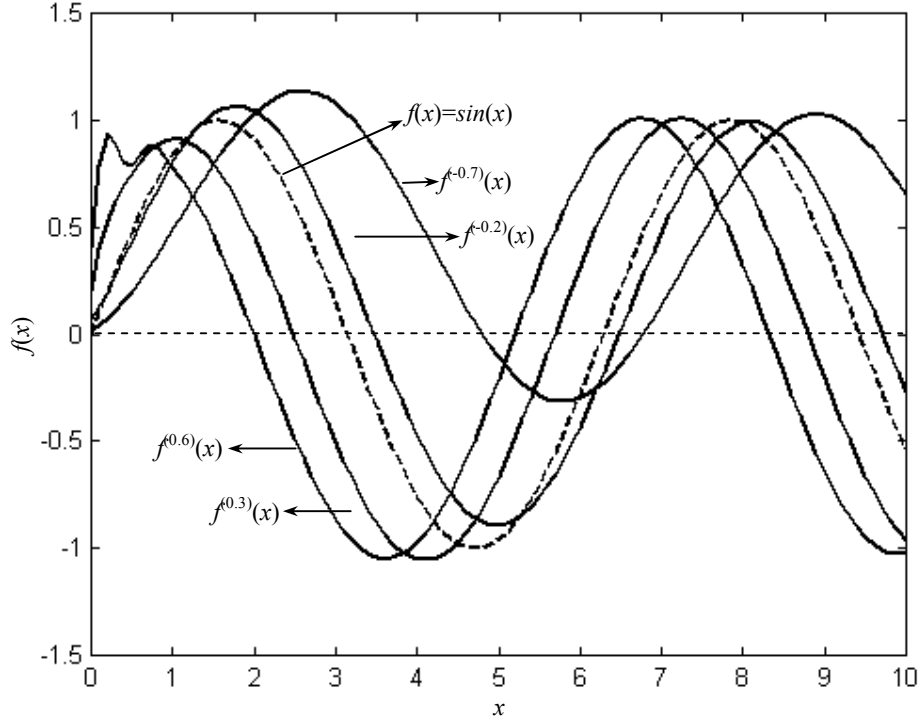
Şekil 2.2. $f(x)=x$ fonksiyonunun $\alpha=0.2$ ve 0.7 için türevi, $\alpha=0.4$ ve 0.6 için integrali

2.3.3. Sin(x) Fonksiyonu

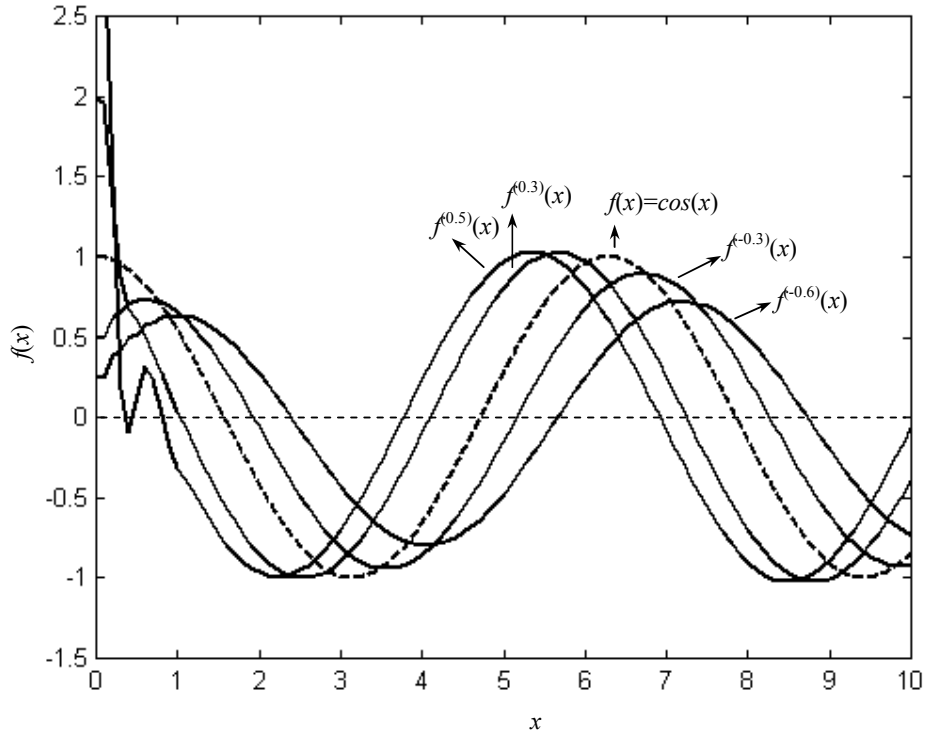
$f(x)=\sin(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.6 için türevleri ile $\alpha=0.2$ ve 0.7 için integralleri Şekil 2.3’de verilmiştir.

2.3.4. Cos(x) Fonksiyonu

$f(x)=\sin(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.5 için türevleri ile $\alpha=0.3$ ve 0.6 için integralleri Şekil 2.4’de verilmiştir.



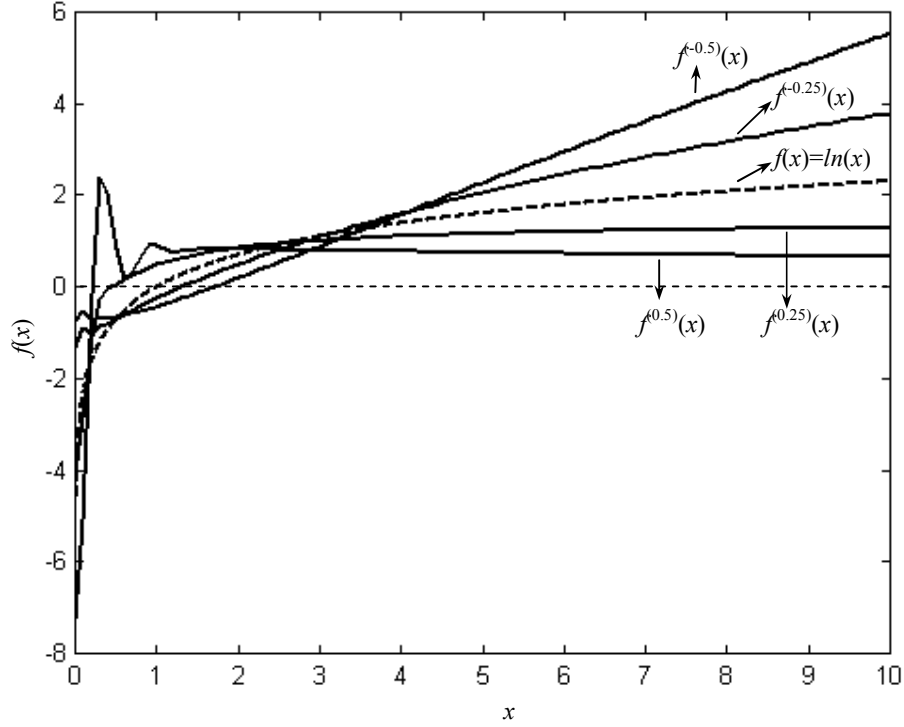
Şekil 2.3. $f(x)=\sin(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.6 için türevi, $\alpha=0.2$ ve 0.7 için integrali



Şekil 2.4. $f(x)=\cos(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.3$ ve 0.5 için türevi, $\alpha=0.3$ ve 0.6 için integrali

2.3.5. $\ln(x)$ Fonksiyonu

Son olarak $f(x)=\ln(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.25$ ve 0.5 için türevleri ile $\alpha=0.25$ ve 0.5 için integralleri Şekil 2.5’de verilmiştir.



Şekil 2.5. $f(x)=\ln(x)$ fonksiyonunun $\alpha=0.25$ ve 0.5 için türevi, $\alpha=0.25$ ve 0.5 için integrali

Yukarıda verilen örnek fonksiyonlar için elde edilen, kesir dereceli türev ve integraller grafiksel olarak incelendiğinde, kesir derecesi 1’e yaklaştıkça ilgili $f(x)$ fonksiyonları da tam dereceli birinci dereceden türev ve integral değişimlerine yaklaşmaktadır.

3. YAKINSATILMIŞ KESİR DERECELİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ

Kesir dereceli hesaplama, karmaşık ve zahmetli süreçleri de beraberinde getirmektedir. Özellikle kontrol sistemlerinin analiz ve simülasyonlarını kolaylaştırmak amacıyla, kesir dereceli operatörlerin tam dereceli transfer fonksiyonlarına yakınsatılması düşünülmüştür. Bunun için literatürde sıkça karşılaşılan ve kullanılan, kesir dereceli integral operatörünün tam dereceli transfer fonksiyonlarına yakınsatılması için bir yöntem önerilmiştir [62]. Bu yöntem kabaca, belirli frekans aralığında ve hata ile kesir dereceli integralin yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonunu elde etmektedir.

3.1. Kesir Dereceli İntegral Operatörünün Tam Dereceli Transfer Fonksiyonlarına Dönüştürülmesi

Bölüm 2’de verildiği gibi kesir dereceli bir integratör s - tanım bölgesinde (3.1)’deki gibi ifade edilir.

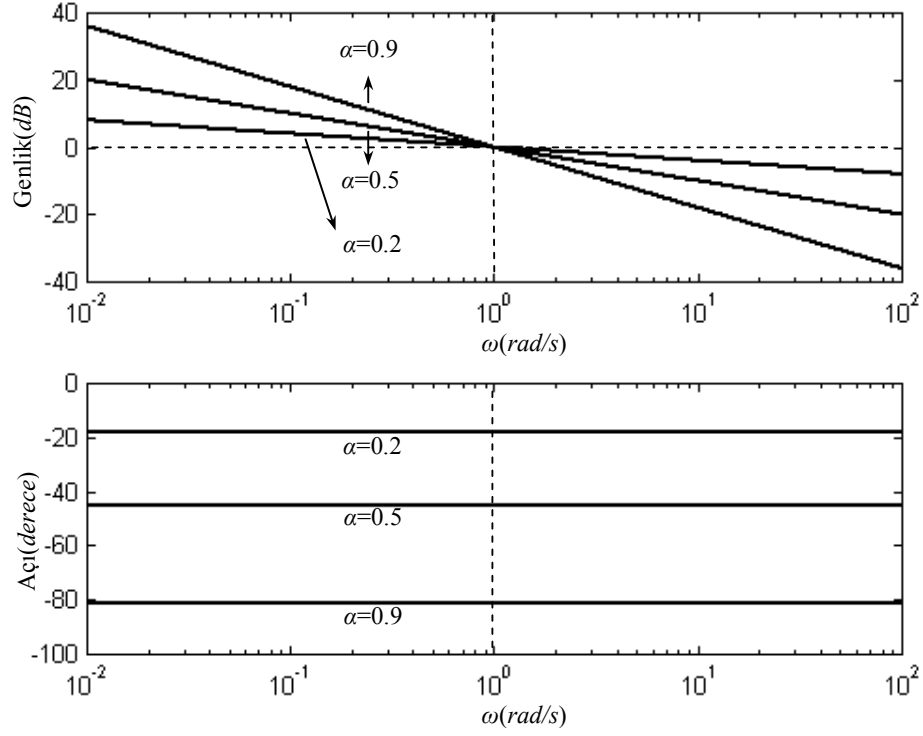
$$I^{\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}} \quad (3.1)$$

Burada; $s=j\omega$ için kompleks frekansı ve α pozitif kesirli integratör derecesini temsil etmektedir. Kesir dereceli bir integratörün Bode Diyagramında, frekans cevabına bakıldığında -20α dB/dec eğimle değiştiği görülecektir. Şekil 3.1’de kesirli $\alpha=0.9, 0.5$ ve 0.2 dereceli integratör için *MATLAB* ortamında elde edilen Bode Diyagramı verilmiştir. Dikkat edilirse integratör derecesi azaldıkça, α ’ya bağlı olarak Bode Diyagramındaki genlik değişiminin eğimi azalmakta, açının ise değeri artmaktadır.

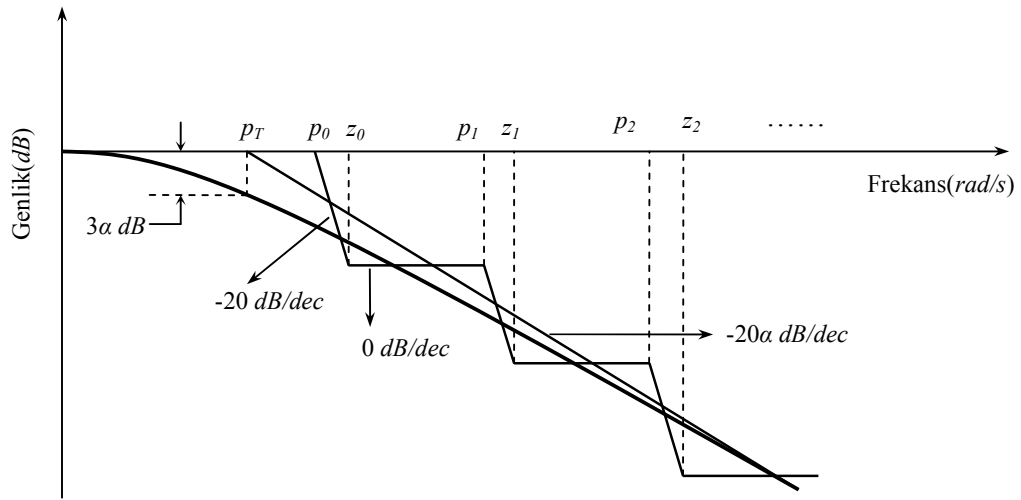
Denklem (3.1), frekans tanım bölgesinde ifade edilmek istenirse, yaklaşık olarak (3.2)’deki biçimde tek kesirli güç kutbu ile modellenenebilir [62-63].

$$I^{\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.2)$$

Burada; p_T : köşe frekansını, $1/p_T$: durulma zaman sabitini temsil etmektedir. $-20\alpha \text{ dB/dec}$ eğimli değişime sahip kesir dereceli integratör, Şekil 3.2’de gösterildiği gibi 0 dB/dec ve -20 dB/dec alternatif zik-zak eğrilerin toplamına yakınsatılabilir.



Şekil 3.1. Kesir dereceli integratörün $\alpha=0.9, 0.5$ ve 0.2 için Bode Diyagramları



Şekil 3.2. $-20\alpha \text{ dB/dec}$ eğimli kesir dereceli integratörün ve 0 dB/dec ve -20 dB/dec eğimli yakınsatılmış zik-zak eğrilerin temsili Bode Diyagramları

Bu durumda Denklem (3.2) ile verilen yakınsatılmış transfer fonksiyonu, kutup ve sıfır çiftleri tarafından tanımlanacak biçimde tekrar yazılabilir.

$$I^\alpha(s) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.3)$$

$(N+1)$ sistem; yakınsatılacak frekans bandı ile belirlenen toplam kutup-sıfır çiftlerinin toplamına karşılık gelecektir. Bu nedenle, sınırlı bir frekans aralığı için Denklem (3.3) sonlu N sayısına düşürülebilir.

$$I^\alpha(s) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.4)$$

Bu durumda, yakınsatma işlemi için kutup ve sıfır çiftlerinin tespit edilmesi gerekecektir.

Şekil 3.3'te gösterildiği gibi arzulanan değişimle, yakınsatılan zik-zak değişim arasındaki maksimum hatanın veya uyumsuzluğun y dB (y pozitif bir sayıdır) olduğu kabul edilsin. Böylece yakınsatılan fonksiyonun kutup ve sıfırları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\text{İlk kutup:} \quad p_0 = p_T 10^{[y/20\alpha]}$$

$$\text{İlk sıfır:} \quad z_0 = p_0 10^{[y/10(1-\alpha)]}$$

$$\text{İkinci kutup:} \quad p_1 = z_0 10^{[y/10\alpha]}$$

$$\text{İkinci sıfır:} \quad z_1 = p_1 10^{[y/10(1-\alpha)]}$$

•

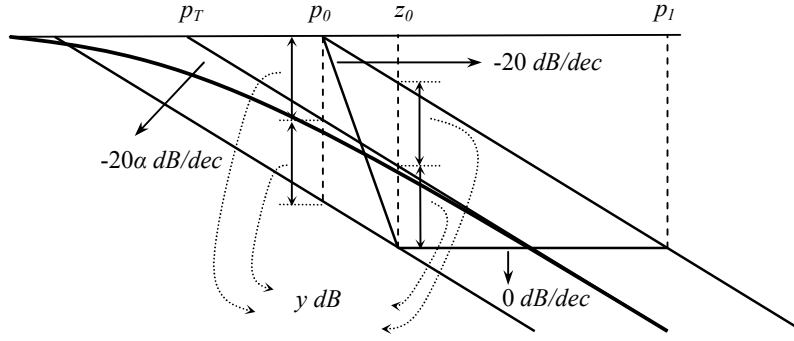
•

•

$$N. \text{ sıfır:} \quad z_{N-1} = p_{N-1} 10^{[y/10(1-\alpha)]}$$

$$(N+1). \text{ sıfır:} \quad p_N = z_{N-1} 10^{[y/10\alpha]} \quad (3.5)$$

Burada, p_T köşe frekansı; Şekil 3.2'den görüldüğü gibi transfer fonksiyonunda, -3α dB genliğin olduğu frekans değeridir. Yakınsatılmış transfer fonksiyonunun p_0 ilk kutbunun değeri; hata olarak seçilen y dB tarafından belirlenmektedir. Son kutbu olan p_N değeri ise N tarafından belirlenmektedir.



Şekil 3.3. -20α dB/dec eğimli kesir dereceli integratörün ve 0 dB/dec ve -20 dB/dec eğimli zikzak eğrilerin sabit y dB hata ile temsili yakınsatılması

Eğer Denklem (3.5) için a ve b değerleri,

$$a = 10^{[y/10(1-\alpha)]}; \quad b = 10^{[y/10\alpha]}; \quad ab = 10^{[y/10\alpha(1-\alpha)]} \quad (3.6)$$

olarak tanımlanırsa, yakınsatılmış transfer fonksiyonunun kutup ve sıfır dağılımları,

$$\frac{z_0}{p_0} = \frac{z_1}{p_1} = \dots = \frac{z_{N-1}}{p_{N-1}} = a; \quad \frac{p_1}{z_0} = \frac{p_2}{z_1} = \dots = \frac{p_N}{z_{N-1}} = b \quad (3.7)$$

olur. a değeri sıfırın bir önceki kutba oranı, b ise kutbun bir önceki sıfıra oranı olarak tanımlanabilir.

Ayrıca, ab ifadesi de kutbun bir önceki kutba veya sıfırın bir önceki sıfıra oranına karşılık gelmektedir.

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{z_2}{z_1} = \dots = \frac{z_{N-1}}{z_{N-2}} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} = \dots = \frac{p_N}{p_{N-1}} = ab \quad (3.8)$$

Yukarıda verilen ilişkilerden, ilk kutup olan p_0 kullanılarak, diğer kutup ve sıfırlar (3.9) ve (3.10) ifadelerinden faydalanılarak üretilebilir.

$$p_i = (ab)^i p_0, \quad i=1,2,3,\dots \quad (3.9)$$

$$z_i = (ab)^i ap_0, \quad i=1,2,3,\dots \quad (3.10)$$

Dikkat edilirse, hem p_i hem de z_i , ab oranında geometrik olarak artmaktadır. Bu durumda, Denklem (3.4)'te tanımlanan yakınsatılmış transfer fonksiyonu,

$$I^\alpha(s) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (3.11)$$

olur. Burada, $(N+1)$ tane kutup olacaktır. N sayısı, seçilen frekans bandından hareketle bulunabilir. Maksimum frekans değeri $\omega_{\max}$, son kutuptan büyük olamayacağı gibi son kutuptan bir önceki kutuptan da küçük olamaz. Bu eşitsizlikten faydalanılarak,

$$p_{N-1} < \omega_{\max} < p_N \Rightarrow (ab)^{(N-1)} p_0 < \omega_{\max} < (ab)^N p_0 \Rightarrow (ab)^{(N-1)} < \frac{\omega_{\max}}{p_0} < (ab)^N$$

$$(N-1) \log(ab) < \log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right) < \log(ab) \Rightarrow N-1 < \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} < N$$

$$N = \text{int} \left(\frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right) + 1 \quad (3.12)$$

ifadesi elde edilir.

Bu ifadeler kabaca özetlenecek olursa, yakınsama; başlangıç kırılma frekansı, dB cinsinde kabul edilebilir hata ve s -düzlemindeki kutup sayılarının uygun belirlenmesiyle gerçekleştirilebilir.

3.2. Kesir Dereceli İntegral Operatörünün Tam Dereceli Yakınsatılmış Transfer Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

Bu alt bölümde, kesir dereceli integratörün $\alpha=0.1-0.9$ aralığında, 0.1 adımlarla bir önceki kısımdaki metot kullanılarak elde edilen yakınsatılmış tam dereceli doğrusal transfer fonksiyonları verilecek ve metodun uygulanmasına yönelik birkaç örnek gösterilecektir.

$\alpha=0.9$, $\omega_{max}=100 \text{ rad/s}$, $\gamma=2 \text{ dB}$ ve $p_T=0.01 \text{ rad/s}$ için:

Frekans bandı $\omega=10^{-2}-10^2 \text{ rad/s}$ aralığı seçilecek olursa ve köşe frekansı $p_T=0.01 \text{ rad/s}$ alınır;

Denklem (3.5)'ten $p_0=0.0129$,

Denklem (3.6)'dan $a=100$, $b=1.6681$ ve $ab=166.81$,

Denklem (3.12)'den $N=2$,

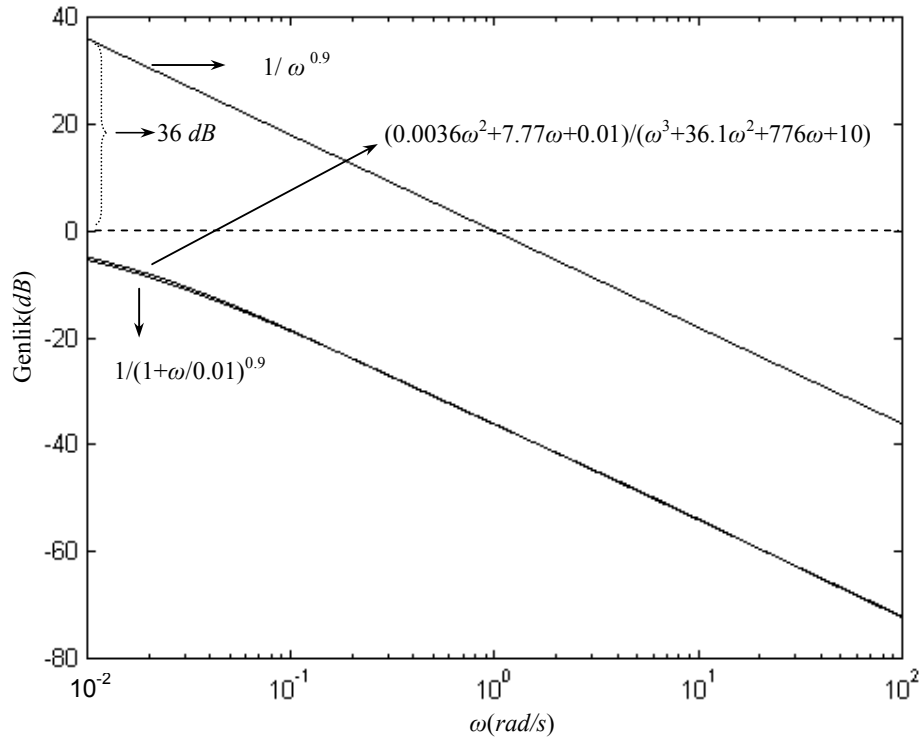
Denklem (3.9) ve (3.10)'dan $p_1=2.15$, $p_2=358.9$, $z_0=1.29$, $z_0=215.1$

değerleri bulunur. Bu değerler Denklem (3.4)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{0.01}\right)^{0.9}} &\approx \\ &\approx \frac{\prod_{i=0}^1 \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^2 \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{s}{1.29}\right)\left(1 + \frac{s}{215.1}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0.0129}\right)\left(1 + \frac{s}{2.15}\right)\left(1 + \frac{s}{358.9}\right)} = \frac{0.036s^2 + 7.77s + 10}{s^3 + 361s^2 + 776s + 10} \end{aligned} \quad (3.13)$$

transfer fonksiyonu elde edilir. Şekil 3.4'te, Denklem (3.13)'de elde edilen transfer fonksiyonunun, $1/(1+s/0.01)^{0.9}$ ifadesinin ve $1/s^{0.9}$ kesir dereceli integratörün Bode Diyagramları verilmiştir.

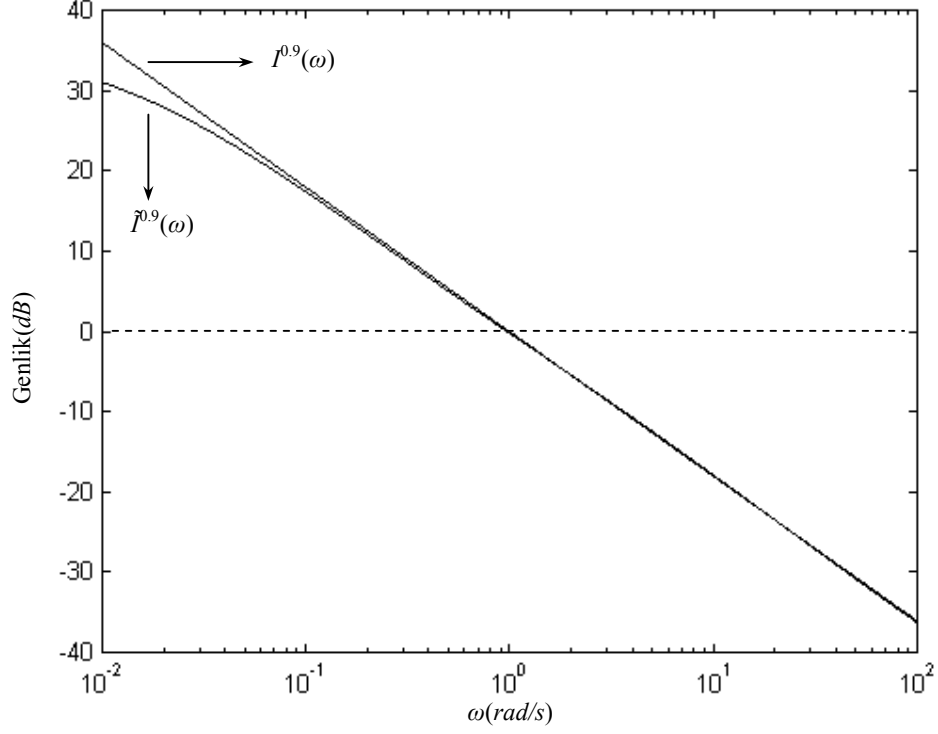
Şekil 3.4 incelendiğinde Denklem (3.13)'te elde edilen tam dereceli doğrusal transfer fonksiyonu, $1/(1+s/0.01)^{0.9}$ ifadesine yakınsamıştır. Denklem (3.13)'ün $1/s^{0.9}$ kesir dereceli integratöre yakınsaması için, 36 dB'lık bir genliğin transfer fonksiyonuna kazanç olarak katılması gerekecektir. Bu durumda Denklem (3.13), $K=10^{1.8}=63$ ile çarpılarak kesir dereceli integratöre $1/s^{0.9}$ 'a yakınsaması sağlanacaktır.



Şekil 3.4. $1/s^{0.9}$, $1/(1+s/0.01)^{0.9}$ ve yakınsatılmış transfer fonksiyonunun Bode Diyagramları

$$I^{0.9}(s) = \frac{1}{s^{0.9}} \approx \tilde{I}^{0.9}(s) = \frac{2.268s^2 + 489.515s + 630}{s^3 + 361s^2 + 776s + 10} \quad (3.14)$$

Şekil 3.5'te, $1/s^{0.9}$ kesir dereceli integratör ve Denklem (3.14)'te verilen tam dereceli doğrusal transfer fonksiyonunun Bode Diyagramları verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi iyi bir yakınsamanın olduğu söylenebilir.



Şekil 3.5. $\alpha=0.9$ ve $p_T=0.01$ için kesir dereceli integral ve yakınsamasının Bode Diyagramları

$\alpha=0.9$, $\omega_{max}=100 \text{ rad/s}$, $\gamma=2 \text{ dB}$ ve $p_T=0.001 \text{ rad/s}$ için:

Benzer şekilde frekans bandı $\omega=10^{-2}-10^2 \text{ rad/s}$ aralığı seçilirse ve farklı olarak köşe frekansı $p_T=0.001 \text{ rad/s}$ alınırsa;

Denklem (3.5)'ten $p_0=0.00129$,

Denklem (3.6)'dan $a=100$, $b=1.6681$ ve $ab=166.81$,

Denklem (3.12)'den $N=3$ ($N=2$ alınacaktır),

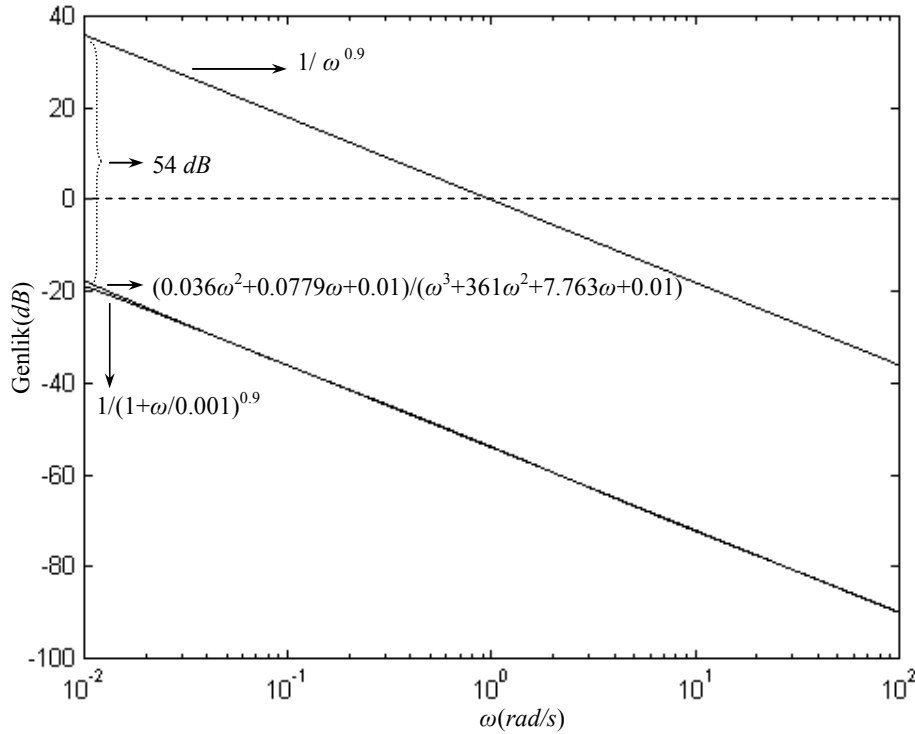
Denklem (3.9) ve (3.10)'dan $p_1=0.215$, $p_2=35.89$, $z_0=0.129$, $z_0=21.51$

değerleri bulunur. Bu değerler Denklem (3.4)'te yerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{0.01}\right)^{0.9}} \approx \\
& \approx \frac{\prod_{i=0}^1 \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^2 \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{s}{0.129}\right)\left(1 + \frac{s}{21.51}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0.00129}\right)\left(1 + \frac{s}{0.215}\right)\left(1 + \frac{s}{35.89}\right)} = \frac{0.0036s^2 + 0.0779s + 0.01}{s^3 + 36.1s^2 + 7.763s + 0.01}
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

transfer fonksiyonu elde edilir. Şekil 3.6’da, Denklem (3.15)’te elde edilen transfer fonksiyonunun, $1/(1+s/0.001)^{0.9}$ ifadesinin ve $1/s^{0.9}$ kesir dereceli integratörün Bode Diyagramları verilmiştir.

Şekil 3.6’ya bakıldığında Denklem (3.15)’te elde edilen tam dereceli doğrusal transfer fonksiyonu, $1/(1+s/0.001)^{0.9}$ ifadesine yakınsamıştır. Denklem (3.15)’in $1/s^{0.9}$ kesir dereceli integratöre yakınsaması için, 54 dB’lik bir genliğin transfer fonksiyonuna kazanç olarak katılması gerekecektir. Bu durumda Denklem (3.15), $K=10^{2.7}=501$ ile çarpılarak kesir dereceli integratöre, yani $1/s^{0.9}$ ’a yakınsaması sağlanacaktır.

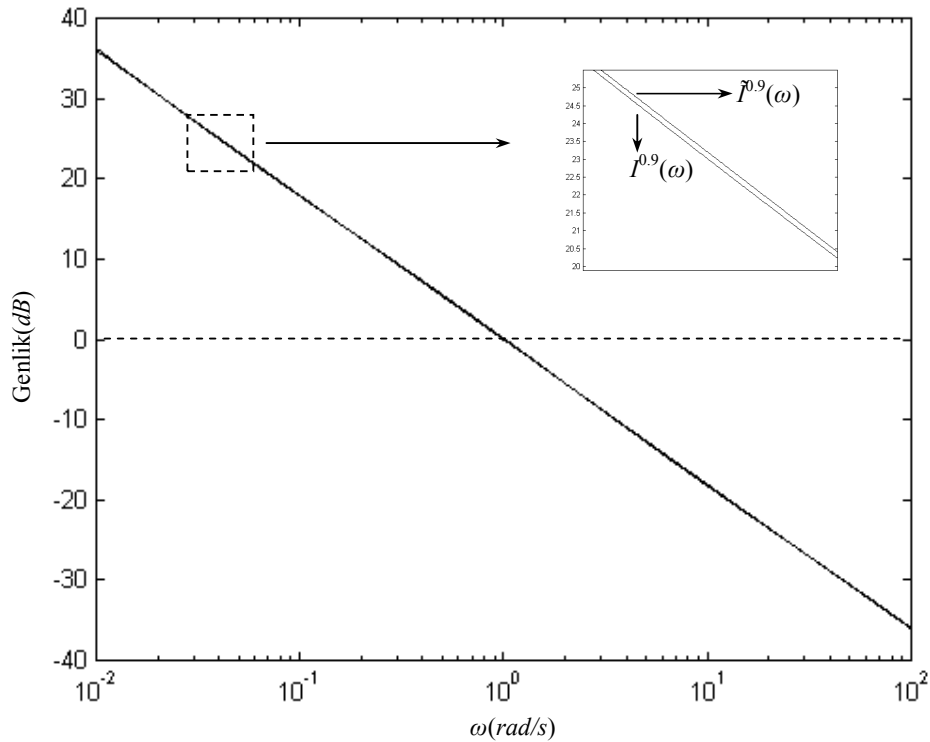


Şekil 3.6. $1/s^{0.9}$, $1/(1+s/0.001)^{0.9}$ ve yakınsatılmış transfer fonksiyonunun Bode Diyagramları

$$I^{0.9}(s) = \frac{1}{s^{0.9}} \approx \tilde{I}^{0.9}(s) = \frac{1.803s^2 + 39.01s + 5}{s^3 + 36.1s^2 + 7.763s + 0.01} \quad (3.16)$$

Şekil 3.7’de, $1/s^{0.9}$ kesir dereceli integratör ve Denklem (3.16)’da elde edilen tam dereceli doğrusal transfer fonksiyonunun Bode Diyagramları verilmiştir. Şekil 3.7’den de görüldüğü gibi Denklem (3.14)’e göre çok daha iyi bir yakınsama sağlanmıştır.

$0 < \alpha < 1$ aralığında 0.1 adımlarla kesir dereceli integratörlerin yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonları, literatürde yukarıda anlatılan algoritma kullanılarak, $\omega_{\max}=100 \text{ rad/s}$ ($\omega=10^{-2}$ - 10^2 rad/s olmak kaydıyla), $\gamma=2 \text{ dB}$ hata ve $p_T=0.01 \text{ rad/s}$ köşe frekansı için elde edilmiştir [50]. Tablo 3.1’de, Ahmad [50]’de elde edilen tam dereceli transfer fonksiyonları verilmiştir. $\alpha=0.9$ için Denklem (3.14)’te elde edilen sonuçların, Tablo 3.1’deki sonuçlarla hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Ayrıca Hartley [48]’de $\omega_{\max}=100 \text{ rad/s}$ ($\omega=10^{-2}$ - 10^2 rad/s olmak kaydıyla), $\gamma=2 \text{ dB}$ hata ve $p_T=0.001 \text{ rad/s}$ köşe frekansı için elde edilen yakınsatılmış transfer fonksiyonları Tablo 3.2’de verilmiştir. Benzer şekilde $\alpha=0.9$ için Denklem (3.16)’da elde edilen sonuçların, Tablo 3.2’deki sonuçlarla çok yakın olduğu söylenebilir.



Şekil 3.7. $\alpha=0.9$ ve $p_T=0.001$ için kesir dereceli integral ve yakınsamasının Bode Diyagramları

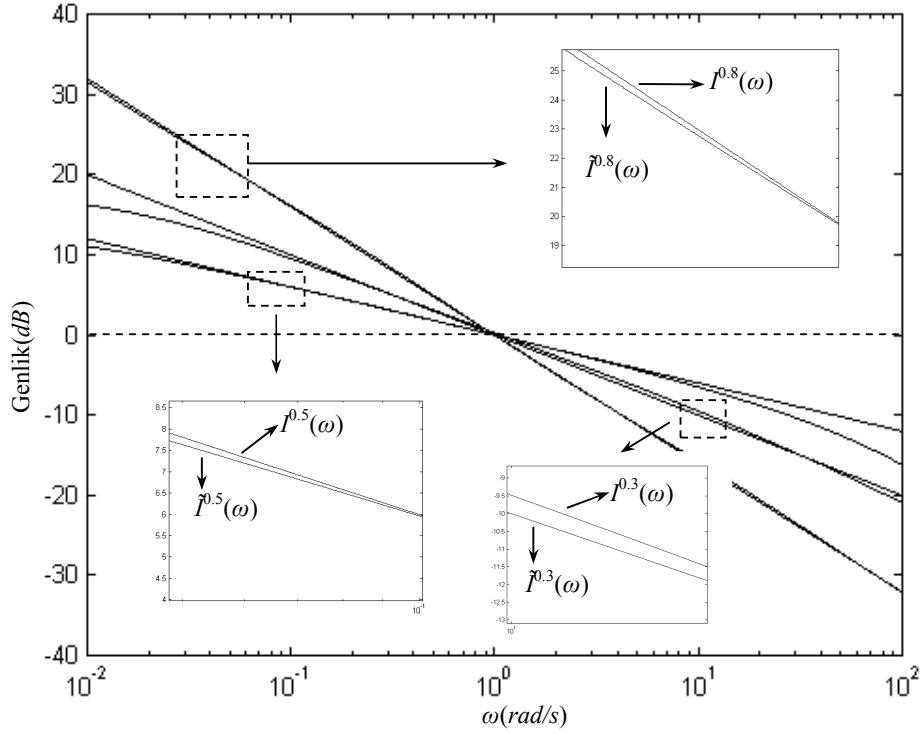
Tablo 3.1. Ahmad [50]'de elde edilen yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonları

$\frac{1}{s^{0.1}} \approx \frac{1584.8932(s + 0.1668)(s + 27.83)}{(s + 0.1)(s + 16.68)(s + 2783)}$
$\frac{1}{s^{0.2}} \approx \frac{79.4328(s + 0.05623)(s + 1)(s + 17.78)}{(s + 0.03162)(s + 0.5623)(s + 10)(s + 177.8)}$
$\frac{1}{s^{0.3}} \approx \frac{39.8107(s + 0.0416)(s + 0.3728)(s + 3.34)(s + 29.94)}{(s + 0.02154)(s + 0.1931)(s + 1.73)(s + 15.51)(s + 3138.9)}$
$\frac{1}{s^{0.4}} \approx \frac{35.4813(s + 0.03831)(s + 0.261)(s + 1.778)(s + 12.12)(s + 82.54)}{(s + 0.01778)(s + 0.1212)(s + 0.8254)(s + 5.623)(s + 38.31)(s + 261)}$
$\frac{1}{s^{0.5}} \approx \frac{15.8489(s + 0.03981)(s + 0.2512)(s + 1.585)(s + 10)(s + 63.1)}{(s + 0.01585)(s + 0.1)(s + 0.631)(s + 3.981)(s + 25.12)(s + 158.5)}$
$\frac{1}{s^{0.6}} \approx \frac{10.7978(s + 0.04642)(s + 0.3161)(s + 2.154)(s + 14.68)(s + 100)}{(s + 0.01468)(s + 0.1)(s + 0.6813)(s + 4.642)(s + 31.62)(s + 215.4)}$
$\frac{1}{s^{0.7}} \approx \frac{9.3633(s + 0.06449)(s + 0.578)(s + 5.179)(s + 46.42)(s + 416)}{(s + 0.01389)(s + 0.1245)(s + 1.116)(s + 10)(s + 89.62)(s + 803.1)}$
$\frac{1}{s^{0.8}} \approx \frac{5.3088(s + 0.1334)(s + 2.371)(s + 42.17)(s + 749.9)}{(s + 0.01334)(s + 0.2371)(s + 4.217)(s + 74.99)(s + 89.62)(s + 1334)}$
$\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)}$

Tablo 3.2. Hartley [48]'de elde edilen yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonları

$\frac{1}{s^{0.1}} \approx \frac{220.4s^4 + 5004s^3 + 5038s^2 + 234.5s + 0.4840}{s^5 + 359.8s^4 + 5742s^3 + 4247s^2 + 147.7s + 0.2099}$
$\frac{1}{s^{0.2}} \approx \frac{60.95s^4 + 816.9s^3 + 582.8s^2 + 23.24s + 0.04934}{s^5 + 134s^4 + 956.5s^3 + 383.5s^2 + 8.953s + 0.01821}$
$\frac{1}{s^{0.3}} \approx \frac{23.76s^4 + 224.9s^3 + 129.1s^2 + 4.733s + 0.01052}{s^5 + 64.51s^4 + 252.2s^3 + 63.61s^2 + 1.104s + 0.002267}$
$\frac{1}{s^{0.4}} \approx \frac{25s^4 + 558.5s^3 + 664.2s^2 + 44.15s + 0.1562}{s^5 + 125.6s^4 + 840.6s^3 + 317.2s^2 + 7.428s + 0.02343}$
$\frac{1}{s^{0.5}} \approx \frac{15.97s^4 + 593.2s^3 + 1080s^2 + 135.4s + 1}{s^5 + 134.3s^4 + 1072s^3 + 543.4s^2 + 20.10s + 0.1259}$
$\frac{1}{s^{0.6}} \approx \frac{8.579s^4 + 255.6s^3 + 405.3s^2 + 35.93s + 0.1696}{s^5 + 94.22s^4 + 472.9s^3 + 134.8s^2 + 2.639s + 0.009882}$
$\frac{1}{s^{0.7}} \approx \frac{5.406s^4 + 177.6s^3 + 209.6s^2 + 9.197s + 0.0145}{s^5 + 88.12s^4 + 279.2s^3 + 33.3s^2 + 1.927s + 0.0002276}$
$\frac{1}{s^{0.8}} \approx \frac{5.235s^3 + 1453s^2 + 5306s + 254.9}{s^4 + 658.1s^3 + 5700s^2 + 658.2s + 1}$
$\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{1.766s^2 + 38.27s + 4.914}{s^3 + 36.15s^2 + 7.789s + 0.01}$

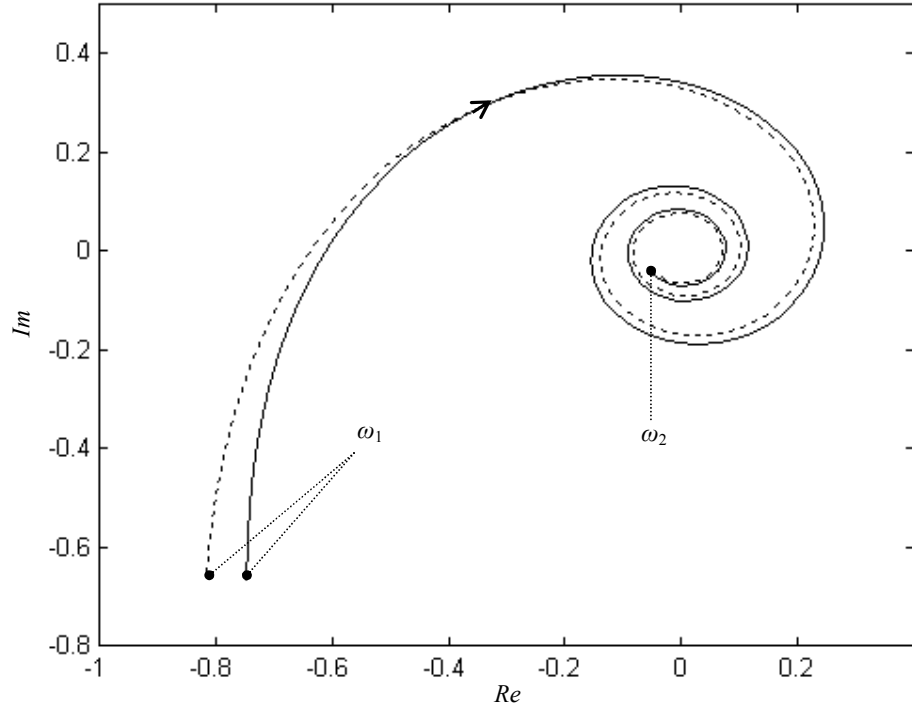
Elde edilen sonuçlar; daha iyi bir yakınsamanın sağlanmasının N değerinden çok p_T değerine bağlı olduğunu göstermektedir. $p_T=0.001 \text{ rad/s}$ köşe frekansı için elde edilen yakınsama çok daha iyi olduğundan, ilerleyen bölümlerde yapılacak simülasyonlarda Tablo 3.2'den faydalanılacaktır. Şekil 3.8'de, Tablo 3.2'deki yakınsatılmış transfer fonksiyonları ve kesir dereceli integratörlerin Bode Diyagramları $\alpha=0.8, 0.5$ ve 0.3 için verilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre çok iyi bir yakınsamanın olduğu söylenebilir.



Şekil 3.8. $\alpha=0.8, 0.5$ ve 0.3 için kesir dereceli integral ve yakınsamasının Bode Diyagramları

Şekil 3.9'da, Denklem (3.17)'de verilen ve Bölüm 8'de kullanılacak gecikme zamanı elemanı ile kesir dereceli integratörden oluşan yapının, $\alpha=0.9$ ve $\tau=1$ değerlerinde, $s=j\omega$ alınarak polar diyagramı verilmiştir. Yakınsamanın daha iyi fark edilebilmesi için sadece $\omega_1=1 \text{ rad/s}$ ve $\omega_2=20 \text{ rad/s}$ frekans aralığı gösterilmiştir.

$$G^k(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s^\alpha} \quad (3.17)$$



Şekil 3.9. $G^k(j\omega)$ kesir dereceli sistem (—) gerçek ve (---) yakınsatılmış polar diyagramları

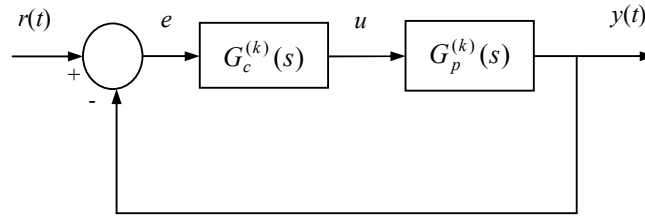
Burada, τ ; gecikme zamanını göstermektedir. Şekil 3.9'dan kesikli çizgilerle gösterilen değişim $\alpha=0.9$ için Tablo 3.2'de verilen yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonu kullanılarak elde edilen değişimi, düz çizgi ise $\alpha=0.9$ için kesir dereceli integratör kullanılarak elde edilen değişimi göstermektedir. Elde edilen şekilden de net olarak yakınsama görülmektedir.

4. KESİR DERECELİ KONTROL

Kesir dereceli hesaplama ile birlikte, 20. yüzyılın ortalarından itibaren dinamik sistemlerin kontrolünde, kesir dereceli kontrolörler ve kontrol yapıları kullanılmaya başlandı [4-6]. Fakat, bu çalışmalar hesapsal güçlüklerden dolayı çok kısıtlı kalmıştır. Yüzyılın sonlarına doğru, Axtell'in [7]'de konuyu gündeme tekrar getirmesiyle birlikte son yıllarda yoğun bir şekilde kesir dereceli kontrol yapılarıyla ilgili çalışmalar yapılmıştır [8-36]. Bu yapılarda, gerek kontrolör gerekse kontrol edilen sistem kesir dereceli olabilmektedir. Her durumda, sistemin tamamı kesir dereceli bir kontrol sistemi halini almaktadır. Bu bölümde, kesir dereceli kontrol yapıları ve kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrol anlatılacaktır.

4.1. Kesir Dereceli Kontrol Yapıları

En basit haliyle, birim geri beslemeli Tek Girişli Tek Çıkışlı (TGTÇ) kesir dereceli kontrol sistemi Şekil 4.1'de görülmektedir.



Şekil 4.1. Birim geri beslemeli kesir dereceli kontrol sistemi

Burada; $G_c^{(k)}(s)$ kontrolörü, $G_p^{(k)}(s)$ ise kontrol edilen sistemi temsil etmektedir. Sistemin, kesir dereceli kapalı çevrimli bir kontrol sistemi olabilmesi için kontrolörün veya kontrol edilen sistemlerden en az birinin kesir dereceli olması gerekmektedir.

Şekil 4.1'de verilen TGTÇ kesir dereceli kontrol yapısı, (4.1)'de verilen diferansiyel denklem ile tanımlanabilir.

$$a_n D_t^{\alpha n} y(t) + \dots + a_1 D_t^{\alpha 1} y(t) + a_0 D_t^{\alpha 0} y(t) = b_m D_t^{\beta m} r(t) + \dots + b_1 D_t^{\beta 1} r(t) + b_0 D_t^{\beta 0} r(t) \quad (4.1)$$

Burada, $\alpha_n > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$ ve $\beta_m > \dots > \beta_1 > \beta_0 \geq 0$ olmak kaydıyla α_k, β_k ($k=0,1,2,\dots$) rasgele reel sayılar ve a_k, b_k ($k=0,1,2,\dots$) katsayılarıdır.

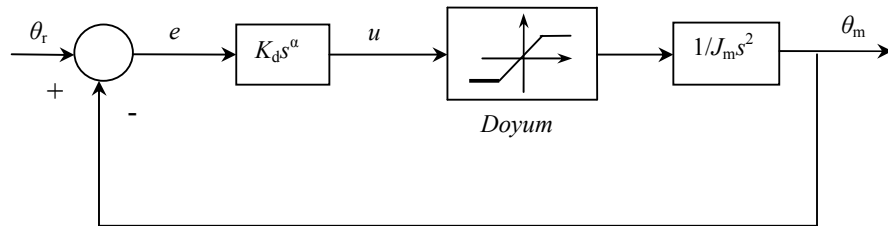
Denklem (4.1)'in s - tanım bölgesindeki ifadesi,

$$G^k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (4.2)$$

olur. $G^k(s)$, Şekil 4.1'de verilen kesir dereceli kontrol yapısının transfer fonksiyonudur. Bu durumda, $G^k(s)$ 'nin durum uzay modeli tam dereceli sistemlerde olduğu gibi (4.3)'teki biçimde ifade edilir.

$$\begin{aligned} s^\alpha X(s) &= A(s)X(s) + B(s)R(s) \\ Y(s) &= C(s)X(s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Kesir dereceli kontrol yapısının literatürdeki ilk örneği, Şekil 4.2.'de verilen doğrusal olmayan yapıdaki kapalı çevrimli bir sistemde, kesir dereceli türev operatörünün kullanılarak pozisyon kontrolünün yapılmasıdır [4]. Bu çalışmada; sistemin sönüm oranı, ζ 'nin kontrolörün derecesi α 'ya bağlı olduğu ve K_d kazancından bağımsız olduğunu gösterilmiştir. Ayrıca, sistemin kararlı ve dayanımlı olması arasındaki en iyi dengenin, $0 < \alpha < 1$ aralığında sağlandığı gösterilmiştir. Benzer şekilde Manabe [5]'te, doğrusal olmayan bir sistemi kesir dereceli integral operatörüyle Şekil 4.2'dekine benzer bir yapıyla kontrol etmiştir. Manabe'nin incelediği sistemde, kontrol edilen sistem ve kontrolör kesir dereceli integratör formunda seçilmiştir. Bu çalışmada ayrıca, sıfır hız hatalı bir sistem için optimal parametrelerin kesir dereceli yapıda olması gerektiği gösterilmiştir.

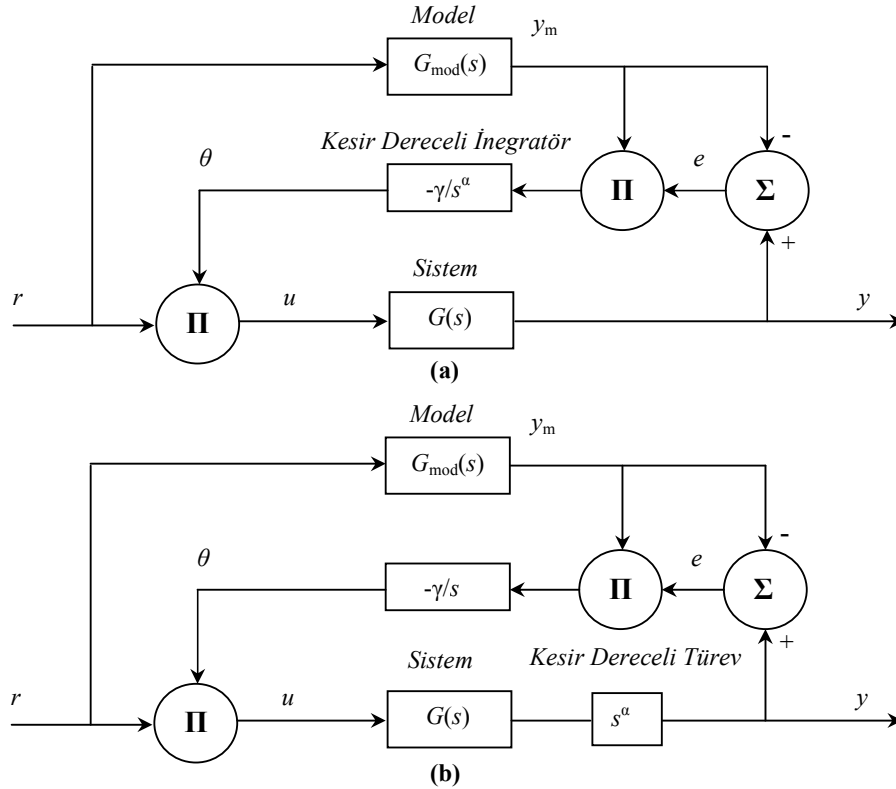


Şekil 4.2. Kesir dereceli D^α kontrolörlü kapalı çevrimli doğrusal olmayan sistemin pozisyon kontrolü

Yakın geçmişte ise kesir dereceli kontrol, çok farklı kontrol yapılarında kullanılmıştır. Bunlardan birisi Model Referans Uyarlamalı Kontrol (MRUK)'ün, kesir

dereceli integratör ve türev kullanılarak elde edilmesidir [14,20]. Şekil 4.3(a) ve (b)'de sırasıyla kesir dereceli integral ve türev kullanılarak elde edilen kontrol yapılarının blok şemaları verilmiştir. Burada, $G_{\text{mod}}(s)$ referans modelin ve $G(s)$ kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonunu, r : referans sinyali, u : kumanda sinyalini, y : sistem çıkışını y_m : referans model çıkışını, e : referans model ile kontrol edilen sistem arasındaki hatayı, θ : parametre vektörünü ve γ : uyarılma kazancını göstermektedir. Uygulamalarda $G_{\text{mod}}(s)$ kesir dereceli seçilerek, $G(s)$ sistemiyle arasındaki hataya bağlı olarak Π kontrolörünün parametreleri ayarlanmaya çalışılmıştır.

Vinagre [14] ve Ladaci [20]'de verilen, kesir dereceli türev operatörü içeren tek girişli tek çıkışlı bir sistem, *MRUK* algoritması kullanılarak kontrol edilmek istendiğinde, kapalı çevrimli sistemin kararlılığı, tatminkar performans düzeyinde ve yüksek bozucu etkileri bertaraf etme yeteneğiyle garanti edilmektedir. Ayrıca benzer sonuçlar, kesir dereceli integral kullanımı içinde geçerlidir. Bu yapının, gürültünün etkin olduğu çalışma ortamlarında ve tasarımcının isteklerine karşılık verecek bazı kontrol sistemleri için avantajlar sağladığı gösterilmiştir.



Şekil 4.3. a) Kesir dereceli integral kullanılan ve b) Kesir dereceli türev kullanılan, *MRUK* algoritması

Bir diğ er önemli kesir dereceli kontrol yöntemi, *CRONE* olarak adlandırılan ve Fransızca “*Commande Robuste D’Ordere Non Entier*” (anlamı kesir dereceli dayanımlı kontrol) olarak açılımlı verilen kontrol yapısıdır [64]. *CRONE* yaklaşımı, kesirli dayanımlıktan hareket ederek, bu dayanımlı yapıyı kontrol sistemlerine uygular.

Bu kontrol yapısının anlaşılabilmesi için delikli bir seddin önündeki suyun dinamiği ele alınacaktır. Bu dinamik, (4.4)’de verilen matematiksel modelle ifade edilmektedir.

$$M \frac{dV(t)}{dt} + F(t) = 0 \quad (4.4)$$

Burada; M : suyun kütlesini, $V(t)$: delikli gözlerden geçen suyun hızını ve $F(t)$: gözenekli seddin suya uyguladığı tepki kuvvetini temsil etmektedir. S ara yüzey alanı olmak üzere, $V(t)=Q(t)/S$ ve $F(t)=P(t) \cdot S$ olarak ifade edilirse, Denklem (4.4)

$$\frac{M}{S^2} \frac{dQ(t)}{dt} + P(t) = 0 \quad (4.5)$$

olur. Burada suyun akışı $Q(t)$, su setinin ara yüzeyinde oluşan basınç $P(t)$ ’nin kesir dereceli türeviyle ifade edilebilir [64].

$$Q(t) = \frac{1}{\omega_0^{\alpha-1}} \left(\frac{d^{\alpha-1} P(t)}{dt^{\alpha-1}} \right), \quad 1 < \alpha < 2 \quad (4.6)$$

Bu durumda Denklem (4.5);

$$\frac{M}{S^2} \left(\frac{1}{\omega_0^{\alpha-1}} \right) \frac{d^{\alpha} P(t)}{dt^{\alpha}} + P(t) = 0 \Rightarrow \tau^{\alpha} \frac{d^{\alpha} P(t)}{dt^{\alpha}} + P(t) = 0 \quad (4.7)$$

halini alır. τ değişken zaman sabiti olarak isimlendirilir ve (4.8)’deki ifadeyle tanımlanır.

$$\tau = \left(\frac{M}{S^2} \frac{1}{\omega_0^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha} \quad (4.8)$$

Bu yapı, kesir dereceli dayanımlı kontrol için kullanılabilir. Bunun için Denklem (4.7)'nin Laplas formundaki karakteristik denkleminin köklerine bakılarak, sistemin dinamik davranışı öncelikle analiz edilecek olursa;

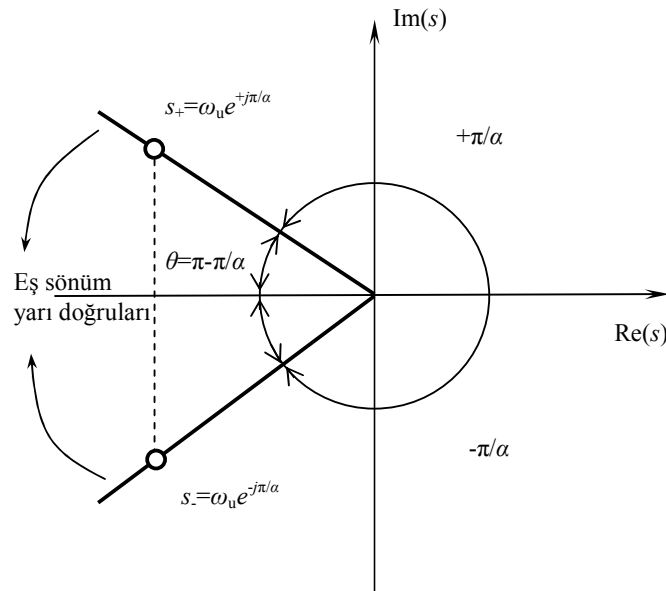
$$1 + (\tau s)^\alpha = 0 \quad (4.9.a)$$

$$(\tau s)^\alpha = -1 = e^{\pm j\pi} \quad (4.9.b)$$

denkleminde,

$$s_{\pm} = \frac{1}{\tau} e^{\pm j\pi/\alpha} \quad (4.9.c)$$

kutupları elde edilecektir. Bu kutuplar, kompleks eşlenik yapıdadır ve merkez açısı 2θ ($\theta = (\pi - \pi/\alpha)$) dır. Şekil 4.4'de, *eş sönüm yarı doğru parçaları* olarak adlandırılan ve θ açısı değerleri kesir derecesi α tarafından belirlenen s -düzlemindeki dayanımlı yapı verilmektedir. Şekilden, doğal frekans ve sönüm oranları kutupların konumundan faydalanılarak doğrudan bulunabilir.



Şekil 4.4. Kesirli dayanımlı yapının s-düzlemindeki gösterimi

$$\omega_p = \frac{1}{\tau} \sin \theta = \frac{1}{\tau} \sin(\pi - \pi / \alpha) = \frac{1}{\tau} \sin(\pi / \alpha) \quad (4.10.a)$$

$$\zeta(s) = \cos \theta = \cos(\pi - \pi / \alpha) = -\cos(\pi / \alpha) \quad (4.10.b)$$

Görüldüğü gibi doğal frekansı ω_p 'nin, bağlı olduğu parametrelerden biri kesir derecesi α olmakla birlikte, sönüm oranı ζ yalnızca α 'nın bir fonksiyonudur. (4.7) s- tanım bölgesinde tekrar yazılırsa;

$$(\tau s)^\alpha P(s) + P(s) = 0 \quad (4.11.a)$$

$$P(s) = -\left(\frac{1}{\tau s}\right)^\alpha P(s) \quad (4.11.b)$$

olur. Burada, $(1/(\tau s))^\alpha$ ifadesi bir kontrol bloğu olarak düşünülebilir. Bu blok,

$$\beta(s) = \left(\frac{1}{\tau s}\right)^\alpha = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^\alpha \quad (4.11.c)$$

olarak ifade edilebilir. Burada, $\omega_u = 1/\tau$ dur ve birim kazanç frekansı olarak adlandırılır. Bu durumda $\beta(j\omega)$, $\omega \in [\omega_A, \omega_B]$, dayanımlı kontrolün yapıldığı frekans aralığı olmak üzere, eğer CRONE kontrolör Şekil 4.1'deki $G_c^k(j\omega)$ olarak ifade edilirse,

$$\beta(j\omega) = G_c^k(j\omega) G^{(k)}(j\omega) \quad (4.11.d)$$

ifadesinden

$$G_c^k(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{G^{(k)}(j\omega)} \quad (4.11.e)$$

olarak frekans cevabından kesir dereceli kontrolör elde edilmiş olur.

Oustaloup [64], bu yapının, arabaların süspansiyon sistemlerinde kullanıldığında, titreşimlerin izole edilmesinde etkin bir araç olduğunu göstermiştir.

4.2. Kesir Dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ Kontrol

PID kontrolörler, günümüzde en fazla kullanılan kontrolörlerdir [65]. Tüm kontrol yapılarının yaklaşık %90'ı PID 'dir. Integral, oransal ve türevden oluşan yapıda, integral geçmişte sistemde oluşan hatayı, oransal anlık sistemde oluşan hatayı ve türev de gelecekte sistemde oluşacak hatayı düzeltmeyi hedefler. PID kontrolörler; proses kontrol, motor sürücüleri, manyetik ve optik hafızalar, otomotiv, uçuş kontrolü, takım tezgahları gibi bir çok alanda uygulanmaktadır [1]. Tam dereceli bir PID kontrolörün transfer fonksiyonu;

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (4.12)$$

şeklindedir. Burada; K_p : oransal, K_i : integral, K_d : türev katsayılarıdır. PID kontrolörler, PD veya PI şeklinde de kullanılabilir. Bu iki kontrolör kaskad bağlandığında ise klasik PID kontrolöre dönüşmektedir. Bir kontrol sisteminde, PD kontrolörler sönüm oranını ve yükseliş zamanını etkileyebilmektedir ama sürekli durum cevabı üzerinde bir etkileri yoktur. PI kontrolörler ise sürekli durum hatasını etkilemekte ama yükselme zamanını arttırmaktadır.

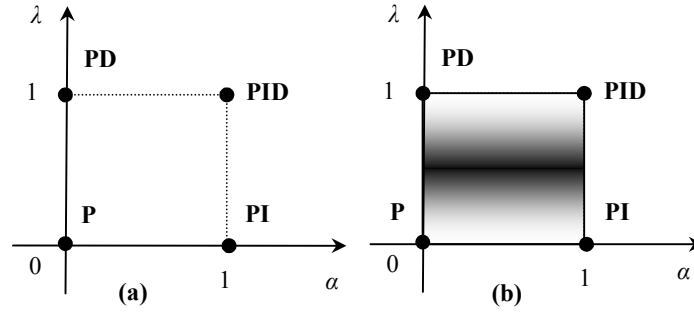
Bu kadar çok kullanılan ve birçok kontrol problemlerine çözümler üretebilen PID kontrolörler kesir dereceli seçilerek de kullanılabilir. Bu durumda Denklem (4.12), (4.13)'deki kesir dereceli transfer fonksiyonuyla ifade edilecektir.

$$G_c^k(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\lambda \quad (4.13)$$

Burada; tam dereceli PID kontrolördeki gibi K_p : oransal, K_i : integral, K_d : türev katsayılarıdır, $0 < (\alpha, \lambda) < 2$ olmak kaydıyla, α : kesirli integral derecesini ve λ : kesirli türev derecesini göstermektedir. Kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrolör, Şekil 4.1'deki yapıda $G_c^k(s)$ olarak seçilirse, birim geri beslemeli yapı, kesir dereceli bir kontrol sistemine dönüşecektir.

Aslında bu fikir ilk defa Podlubny tarafından ortaya atıldı ve geliştirildi [9,25-26]. Podlubny [26]'da, kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrolörlerin sadece tam dereceli sistemlerin değil kesir dereceli sistemlerin de kontrolünde, etkin bir şekilde kullanıldığını göstermiştir. Ayrıca kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrolörlerin, tam dereceli PID kontrolörlere göre kontrol kalitesini ve dayanımı arttırdığı gösterilmiştir [28,66].

Şekil 4.5.(a)'da $\alpha=1$ ve $\lambda=1$ için tam dereceli PID kontrolörün α - λ düzlemdeki gösterimi, (b)'de ise kesirli halinin aynı düzlem üzerindeki gösterimi verilmiştir.

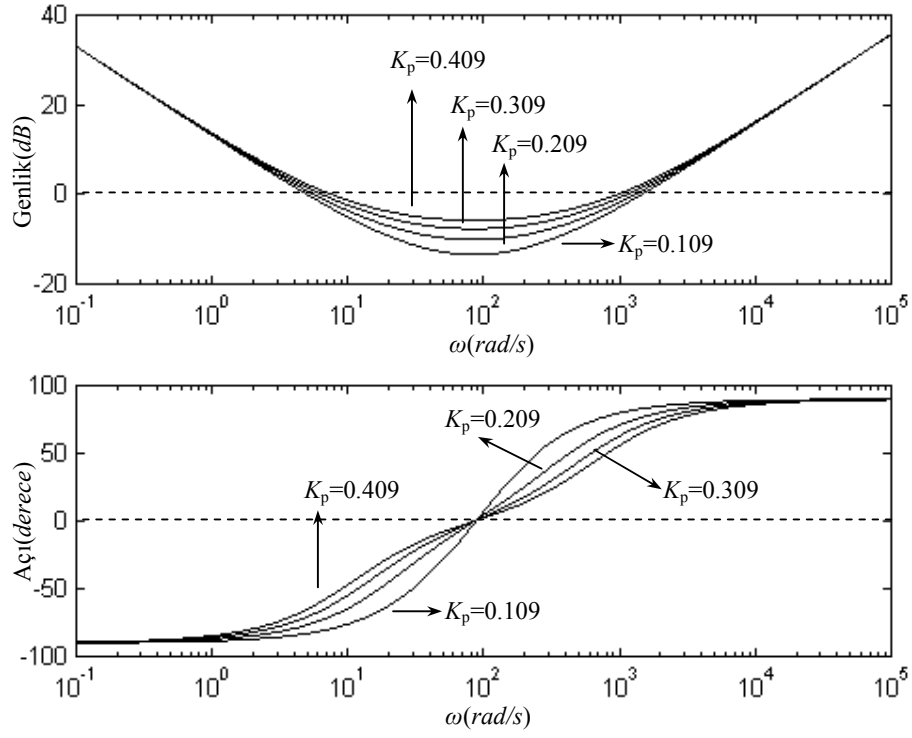


Şekil 4.5. a) Tam dereceli P - I - D düzlemi b) Kesir dereceli P - I - D düzlemi

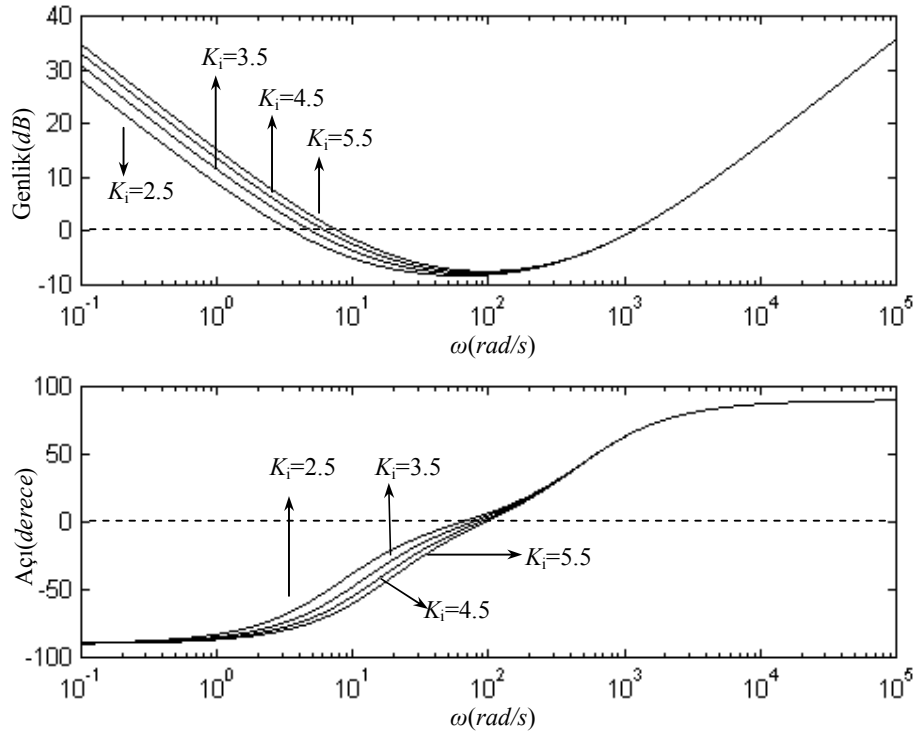
Dikkat edilirse; tam dereceli kontrolör düzlem üzerinde 4 nokta ile ifade edilirken, kesir dereceli kontrolör, taralı alandaki sonsuz nokta ile ifade edilebilmektedir. Ayrıca; tam dereceli PID kontrolörde kontrol parametreleri 3 tane olmasına rağmen, kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrolörde kontrol parametre sayısı 5'e çıkmaktadır. Bu durum, kontrol edilen sisteme daha esnek bir müdahale imkanı sunmaktadır. Optimal kontrol sağlamak için bu parametrelerin uygun seçilebilmesi önemlidir ve bu amaçla tam dereceli PID kontrolörlerde olduğu gibi genetik algoritmalar kullanılmıştır [29].

Tam dereceli PID kontrolörün, $K_p=0.309$, $K_i=4.5$ ve $K_d=0.0006$ değerleri için Şekil 4.6.(a), (b) ve (c)'de sırasıyla, diğer katsayılar sabit kalmak şartıyla, farklı K_p , K_i ve K_d değerleri için Bode Diyagramları elde edilmiştir. Şekil 4.7.(a) ve (b)'de benzer şekilde kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrolörün, sabit $K_p=0.309$, $K_i=4.5$ ve $K_d=0.0006$ değerlerinde, sırasıyla, diğer değerler sabit kalmak kaydıyla, farklı α ve λ değerleri için Bode Diyagramları elde edilmiştir.

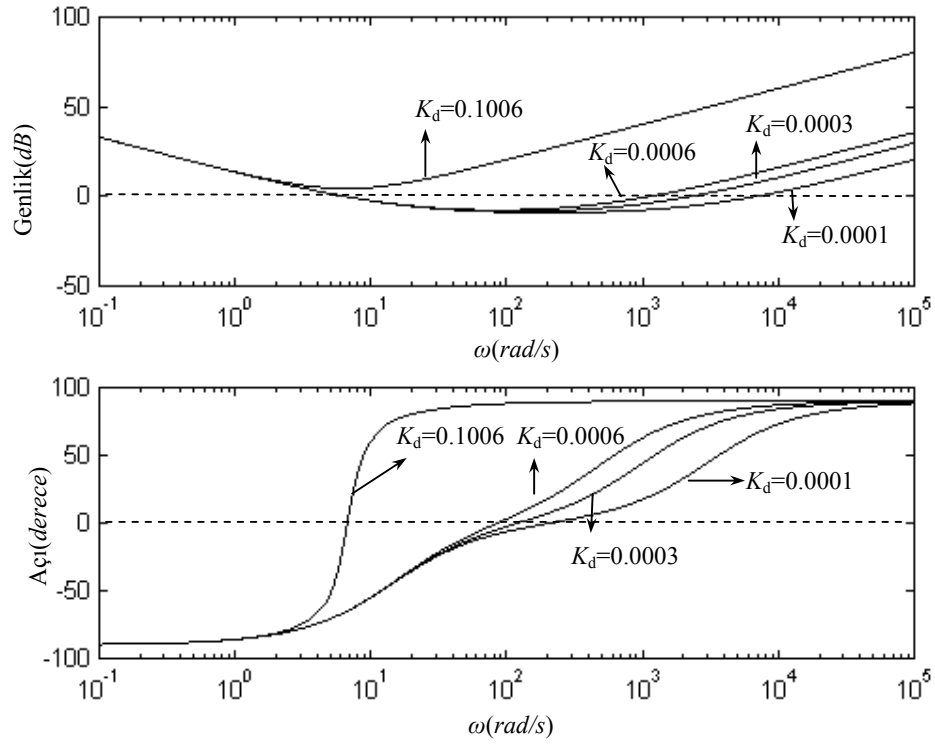
Kesir dereceli $PI^\alpha D^\lambda$ kontrol uygulamaları sadece kesirli integral veya türev uygulamaları olabileceği gibi kesirli PI^α veya PD^λ 'de olabilir. Ya da kesirli $PI^\alpha D$ veya PID^λ şeklinde de uygulanabilmektedir [27,30-31]



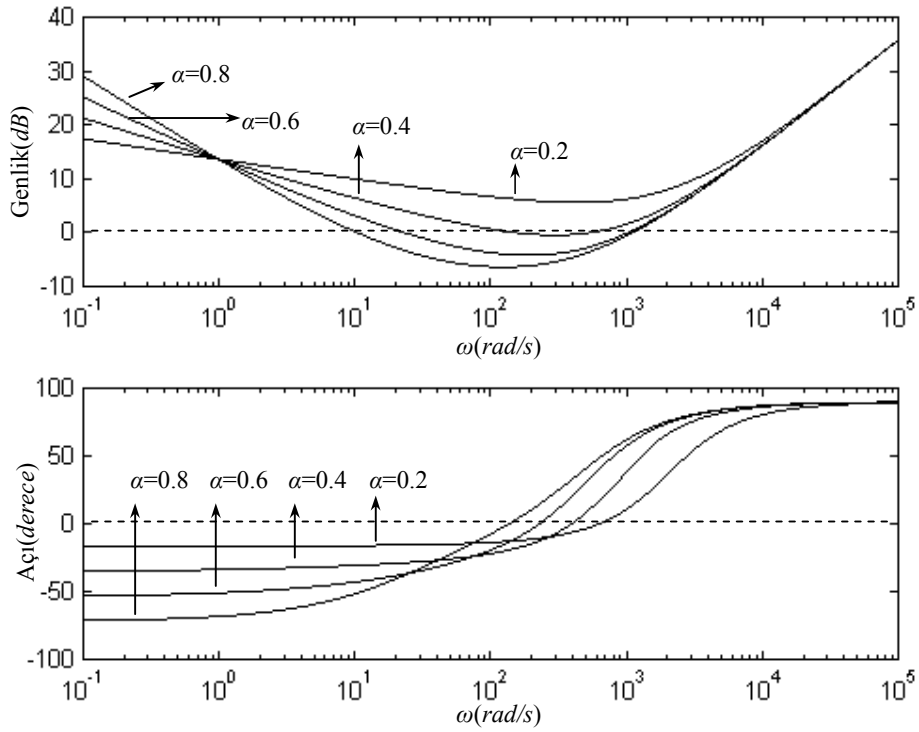
Şekil 4.6.a) Tam dereceli *PID*-farklı K_p değerleri için Bode Diyagramı



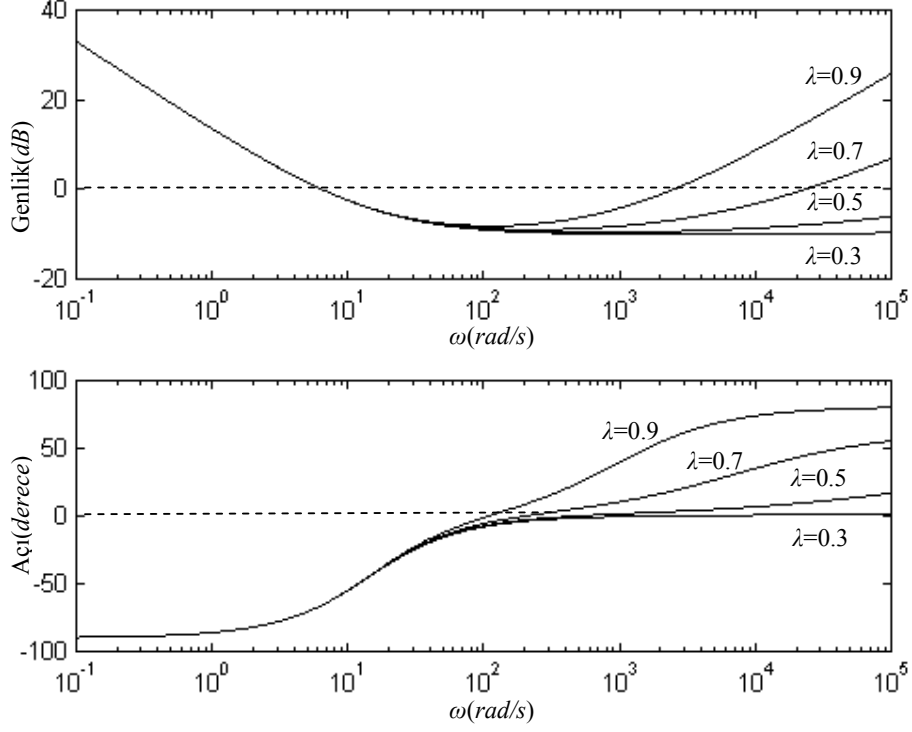
Şekil 4.6. b) Tam dereceli *PID*-farklı K_i değerleri için Bode Diyagramı



Şekil 4.6. c) Tam dereceli PID -farklı K_d değerleri için Bode Diyagramı



Şekil 4.7. a) Kesir dereceli PI^aD -farklı α değerleri için Bode Diyagramı



Şekil 4.7. b) Kesir dereceli PID^λ -farklı λ değerleri için Bode Diyagramı

4.3. Kesir Dereceli Sistemlerde Kararlılık

Kararlılık, kontrol teorisindeki en temel sorundur. Bir kesir dereceli sistemin eğer tüm kutupları Riemann düzlemi üzerinde negatif değerde veya negatif reel kısımda ise kararlıdır [1]. Bununla birlikte, kesir dereceli sistemler için tam dereceli sistemlerde olduğu gibi genel bir kararlılık analizi henüz bulunmamıştır.

Özel kesir dereceli bir sistem için kararlılık sorusu, kolay bir şekilde cevaplanabilir. Örneğin, karakteristik denklemi $F(s^\alpha) = N(s^\alpha)/D(s^\alpha)$ olan kesir dereceli bir sistemin kökleri (4.14)'deki denklemin çözülmesiyle bulur.

$$(s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0 = 0 \quad (4.14)$$

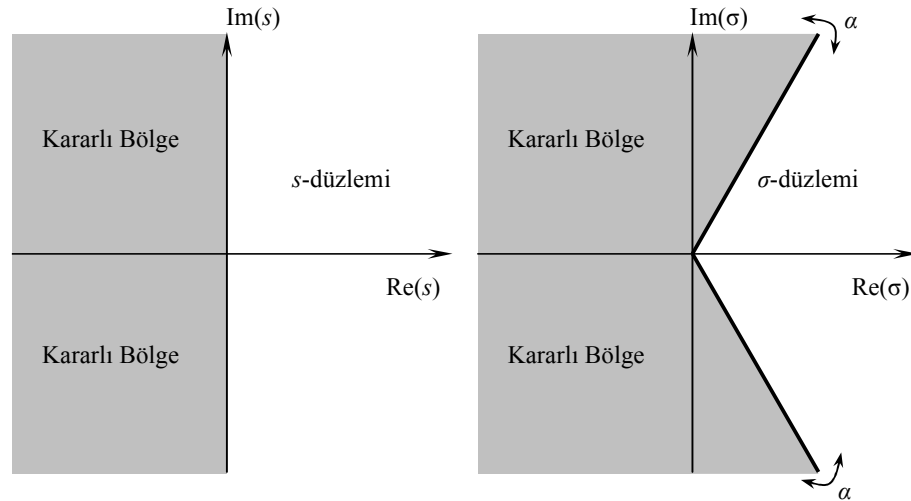
Burada, $0 < \alpha < 1$ dir. Eğer $\sigma = s^\alpha$ alınarak Denklem (4.14)'de yerine yazılırsa;

$$\sigma^n + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \dots + a_1\sigma + a_0 = 0 \quad (4.15)$$

olur. Denklem (4.14)'ün kararlı olabilmesi için, Riemann düzleminde $(-\pi/2 < \arg(s) < \pi/2)$ karakteristik denklemin tüm köklerinin sağ yarı s -düzleminde bulunması gerekir. Şekil 4.8'de $\sigma = s^\alpha$ dönüşümü yapıldığında, Denklem (4.15)'in kararlılığı, σ -düzleminde tüm köklerin $-\pi/2(\alpha) < \arg(s^\alpha) < \pi/2(\alpha)$ bölgesinin dışında olmasına bağlıdır. Yani; $F(s^\alpha)$ sistemi için kararlılığın garantisi, Denklem (4.15)'in tüm köklerinin (4.16)'da verilen ifadeyle tanınan kapalı açısız bölgenin dışında olmasıyla sağlanabilecektir.

$$|\arg(\delta)| = \alpha \frac{\pi}{2} \quad (4.16)$$

Burada, δ burada kapalı bölgeyi temsil etmektedir. Kesir dereceli $F(s^\alpha)$ sisteminin durum uzay gösterimi için de durum geçiş matrisi A 'nın tüm öz değerleri, yukarıda bahsedilen bölgenin dışında olması kararlılık için gereklidir. Aynı parametre değerlerinde, tam dereceli kontrol sistemleri ile kesir dereceli kontrol sistemlerin kararlılık gereksinimleri kıyaslanırsa, kesir dereceli yapıların daha esnek olduğu görülmektedir. Belirsizlik içeren davranışlara karşı tam dereceli kontrol sistemlerinde, karakteristik denklemin parametreleri ayarlanarak sistem belirsizlikten çıkarılabilir. Fakat, kesir dereceli kontrol sistemlerinin bu esnek kararlılık özelliği belirsizliğe karşı çok daha dayanımlı bir yapı ortaya koymaktadır.



Şekil 4.8. Kesir dereceli $F(s^\alpha)$ sistemin kararlılık bölgesinin genişlemesi

Tam dereceli sistemlerde olduğu gibi kesir dereceli sistemlerin kararlılığının tespiti için de, frekans cevap analizleri daha etkin ve uygundur. Kesir dereceli kontrol sistemlerinin frekans cevabı, tam dereceli kontrol sistemlerinde olduğu gibi $s=j\omega$ alınarak

elde edilebilir. Bode Diyagramı veya Nyquist eğrileri, bu sayede elde edilebilir ve kararlılık analizi yapılabilir.

Şekil 3.1’de, $1/s^\alpha$ integratörünün Bode Diyagramı elde edilmişti. Elde edilen α değerlerinde, faz marjini pozitif olduğundan elde edilen sonuçlar için kapalı çevrimli sistem kararlıdır. Fakat, $\alpha = 2.2$ için $\theta = -\alpha \cdot 90 = 2.2 \cdot 90 = 198^\circ$ olacağı için faz marjini pozitif olacak ve sistem kararsız olacaktır.

Nyquist kriteriyle kararlılık analizi yapılabilmesi için, kesir dereceli kontrol sisteminin açık çevrim transfer fonksiyonunun polar diyagramının $-1+j0$ noktasını çevreleyip çevrelemediğine veya kaç defa çevrelediğine bakılmalıdır. Örnek olarak, Denklem (4.17)’de verilen kesir dereceli sistemin kararlılığı Nyquist kriteriyle incelenecek olursa;

$$G^{(k)}(s) = \frac{6}{(s^\alpha)s^2 + 1.834(s^\alpha)s + (s^\alpha) + 0.1667} \quad (4.17)$$

öncelikle açık çevrim transfer fonksiyonu olan $G^{(k)}(s)$ ’in kompleks düzlemdeki değişimine bakmak gerekir. $\alpha=1$, 0.9 ve 0.7 için Şekil 4.9’da tam dereceli ($\alpha=1$) ve kesir dereceli ($\alpha=0.9$ ve 0.7) sisteme ait polar diyagram elde edilmiştir.

Şekil 4.9’a göre üç farklı α değeri için sistemin polar diyagramı gösterilmiştir. Nyquist kriterine göre kararlılığı; elde edilen polar diyagramın $-1+j0$ noktasını kaç defa çevrelediği ve ayrıca N ve $G^{(k)}(s)$ açık çevrim transfer fonksiyonunun sağ yarı s -düzlemindeki kutup sayısı P belirleyecektir. (4.18)’deki ifade, kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemindeki kutup sayısını vermektedir.

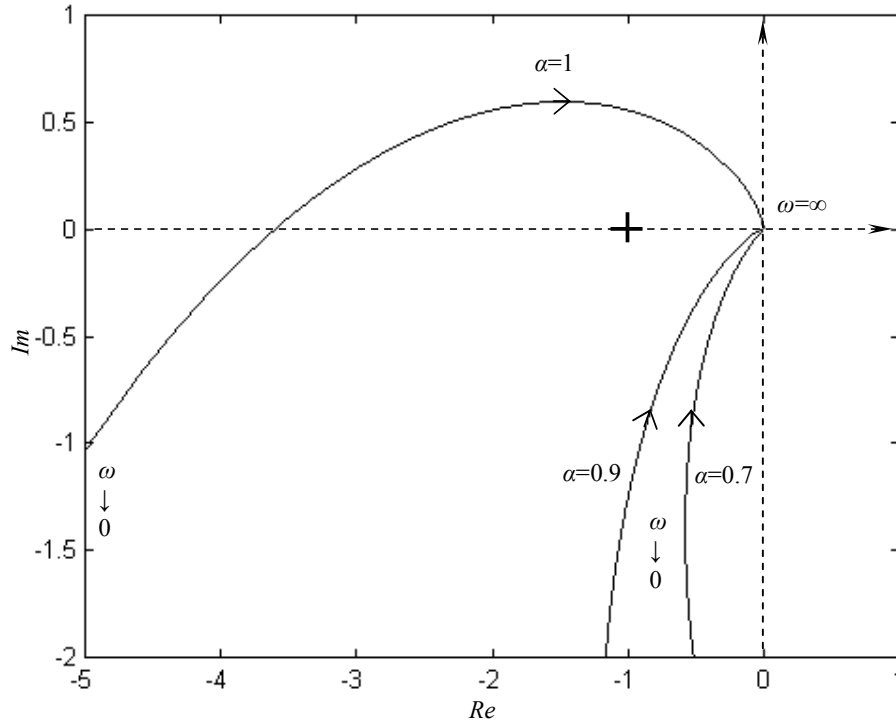
$$Z = P + N \quad (4.18)$$

$\alpha=1$ için sistem, tam dereceli yapıdadır. Şekil 4.9’a bakıldığında, eğri $-1+j0$ noktasını bir defa çevrelemektedir. Bu durumda $N=1$ dir. $G(s)$ ’in $s_1=-1$, $s_2=-0.5$ ve $s_3=-0.334$ olmak üzere 3 kutbu vardır ve bunların hiçbiri sağ yarı s -düzleminde değildir. Bu durum için $P=0$ olacaktır. Böylece, kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemdeki kutup sayısı $Z=P+N=1$ olarak bulunacaktır. Bu sonuca göre sistem, kararsız bir yapıya sahiptir.

$\alpha=0.9$ kesir dereceli sistem için Şekil 4.9’a bakıldığında, eğrinin $-1+j0$ noktasını hiç çevrelemediği görülür. Bu durumda $N=0$ dir. $G^{(k)}(s)$ ’in $s_1 \approx -1.027$ ve $s_{2,3} \approx -0.612 \pm j0.25$ olmak

üzere 3 kutbu vardır ve bunların hiçbiri sağ yarı s -düzleminde değildir. Bu durum için $P=0$ olacaktır. Böylece kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemdeki kutup sayısı $Z=P+N=0$ olarak bulunacaktır. Bu sonuca göre sistem kararlıdır.

Benzer şekilde $\alpha=0.7$ kesir dereceli sistem için Şekil 4.9'a bakıldığında, eğrinin $-1+j0$ noktasını hiç çevrelemediği görülür. Bu durumda $N=0$ dır. $G^k(s)$ 'in $s_1 \approx -1.2144$ ve $s_{2,3} \approx -0.684 \pm j0.405$ olmak üzere 3 kutbu vardır ve bunların hiçbiri sağ yarı s -düzleminde değildir. Bu durum için $P=0$ olacaktır. Böylece, kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemdeki kutup sayısı $Z=P+N=0$ olarak bulunacaktır. Bu sonuca göre de sistem kararlıdır.



Şekil 4.9. $G^{(k)}(j\omega)$ 'nin, $\alpha=1, 0.9$ ve 0.7 için polar diyagramı

5. DOĞRUSAL OLMAYAN ÖZERK SİSTEM DİNAMİĞİ VE KAOS

Bir sisteme, eğer toplamsallık teoremi uygulanamıyorsa o sistem doğrusal olmayan bir sistemdir. İnsan yapımı ve tabiattaki sistemlerin çoğu doğrusal olmayan yapıdadır [42-43]. Fakat matematiksel kolaylığından dolayı, sıklıkla temel doğrusal diferansiyel denklemlere yakınsatılırlar. Deneysel sonuçlarla uyum içerisinde olduğu sürece, bu basitleştirme işlemi kabul edilebilmektedir. Doğrusal olmayan sistemlerin en önemli özelliklerinden birisi, sistem giriş işaretinin tipi ve genliğine bağlı olarak sistem cevabının belirgin farklılıklar göstermesidir. Doğrusal olmayan sistemler, doğrusal sistemlerde görünmeyen birçok davranışları göstermektedir. Bu doğrusal olmayan sistem davranışlarına; çoklu denge noktaları, kendinden uyarımlı osilasyonlar (limit çevrim), çatallaşma ve kaos, rezonans atlaması, alt harmoniklerin üretilmesi, asenkron sönümleme ve frekans-genlik bağımlılığı örnek olarak verilebilir [43].

Doğrusal olmayan bir dinamik sistem (5.1)'deki formda verilen diferansiyel denklemle ifade edilebilmektedir.

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (5.1)$$

Burada; f : $n \times 1$ boyutlu doğrusal olmayan vektör fonksiyonu ve x : $n \times 1$ boyutlu durum vektörüdür. n ise, durum değişkeni sayısı olup sistem derecesini göstermektedir. Denklem (5.1)'e, kontrol işareti eklenecek olursa sistem,

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (5.2.a)$$

şeklinde ifade edilir. Burada kontrol işareti; $u=g(x, t)$ ile tanımlanırsa, kapalı çevrimli doğrusal olmayan kontrol sistemi,

$$\dot{x} = f[x, g(x, t), t] \quad (5.2.b)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Doğrusal sistemler, zamana bağımlı ve zamandan bağımsız sistemler olarak sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırmayı, A katsayı matrisinin zamana bağlı

olup olmaması belirlemektedir. Doğrusal olmayan sistemler de biçimsel olarak, özerk ve özerk olmayan sistemler olarak sınıflandırılabilir.

5.1. Doğrusal Olmayan Özerk Sistem Dinamiği

Denklem (5.1)'de verilen sistemin, özerk bir sistem olabilmesi için f 'nin zamana bağımlı olmaması gerekir. Bu durumda sistemin durum denklemleri,

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.3)$$

olur. Aksi durumda sistem, özerk olmayan bir sistemdir. Tüm fiziksel sistemler, özerk olmayan yapıdadır denebilir. Özerk sistem kavramı, doğrusal sistem kavramı gibi idealize edilmiş bir kavramdır. Bununla birlikte pratikte sistem özellikleri, sıklıkla çok yavaş da olsa değişmektedir. Fakat, zamana bağımlı bu değişiklikler, pratikte anlamlı bir hataya sebep olmuyorsa ihmal edilebilir.

Özerk ve özerk olmayan sistemlerin arasındaki temel fark, özerk sistemlerin durum yörüngelerinin başlangıç zamanından bağımsız olmasıdır. Genel olarak, özerk olmayan sistemlerde bu böyle değildir. Bu nedenle, özerk olmayan sistemlerin analizlerinin yapılmazı, özerk sistemlere göre daha zordur. Özerk sistemler analiz edilirken, aşağıda açıklanan belirli kavramların kullanılması gerekmektedir.

5.1.1. Denge Noktaları

Sistem yörüngesine karşılık gelen noktaya, denge noktası denmektedir. Bir sistem yörüngesi ancak bir denge noktasına karşılık gelmektedir. Denge noktalarına göre, doğrusal olmayan özerk sistemlerin kararlılık problemleri çözülebilmektedir. Denklem (5.3)'ün denge noktaları, matematiksel olarak Denklem (5.4)'ün çözümüyle elde edilir.

$$f(x^*) = 0 \quad (5.4)$$

Burada x^* , denge noktalarıdır.

5.1.2. Doğrusallaştırma ve Lokal Kararlılık

Doğrusallaştırma; doğrusal olmayan sistemin lokal kararlılığı ile ilgilidir. Doğrusal olmayan sistem, küçük oranlardaki değişimler için doğrusallaştırılmış sisteme benzer davranışlar gösterir.

(5.3)'de verilen özerk sistem göz önüne alınsın ve $f(x)$ 'in sürekli türevlenebilir olduğu kabul edilsin. Bu şartlarda, doğrusal olmayan sistem dinamiği Denklem (5.5) ile ifade edilebilir.

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} x + f_{y.d.t.}(x) \quad (5.5)$$

Burada; $f_{y.d.t.}(x)$, x 'in yüksek dereceli terimlerini ifade etmektedir. (5.5)'deki Taylor açılımı birinci terimden başlamaktadır. $f(0)=0$ olduğundan dolayı, denge noktası $x=0$ dır. A katsayı matrisi; $x=0$ 'daki f 'in x 'e göre Jakobien matrisini göstermektedir ($\partial f_i / \partial x_j$ elemanlı $n \times n$ matrisinden oluşmaktadır).

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (5.6.a)$$

Bu durumda, $x=0$ denge noktasındaki doğrusallaştırılmış sistem (veya doğrusal yakınsama)

$$\dot{x} = Ax \quad (5.6.b)$$

olur. Bu yapının kararlılığı için, aşağıdaki değerlendirmeler yapılabilir.

- Eğer A matrisinin tüm öz değerleri tamamen sol yarı kompleks düzlemde ise doğrusallaştırılmış sistem kararlıdır ve denge noktası asimptotik kararlıdır.
- Eğer A matrisinin öz değerlerinden en az bir tanesi sağ yarı kompleks düzlemde ise doğrusallaştırılmış sistem ve denge noktası kararsızdır.
- Eğer A matrisinin tüm öz değerleri tamamen sol yarı kompleks düzlemde ama en az bir tanesi $j\omega$ ekseninde ise doğrusallaştırılmış sistem kritik kararlıdır. Yani

denge noktası kararlı, asimptotik kararlı veya kararsız olabilir. Bu durumdaki sistemin kararlılığı hakkında bir şey söylenemez.

Özerk doğrusal olmayan sistemlerde üssel kararlı davranış, asimptotik kararlı davranış, limit çevrim, periyot katlama ve kaotik davranışlar görülebilmektedir. Doğrusallaştırılmış, doğrusal olmayan sistemin durum uzay analizleriyle, özerk sistem davranışları aşağıda açıklanacağı gibi çeşitlilik göstermektedir.

5.1.3. Kararlı veya Kararsız Düğüm

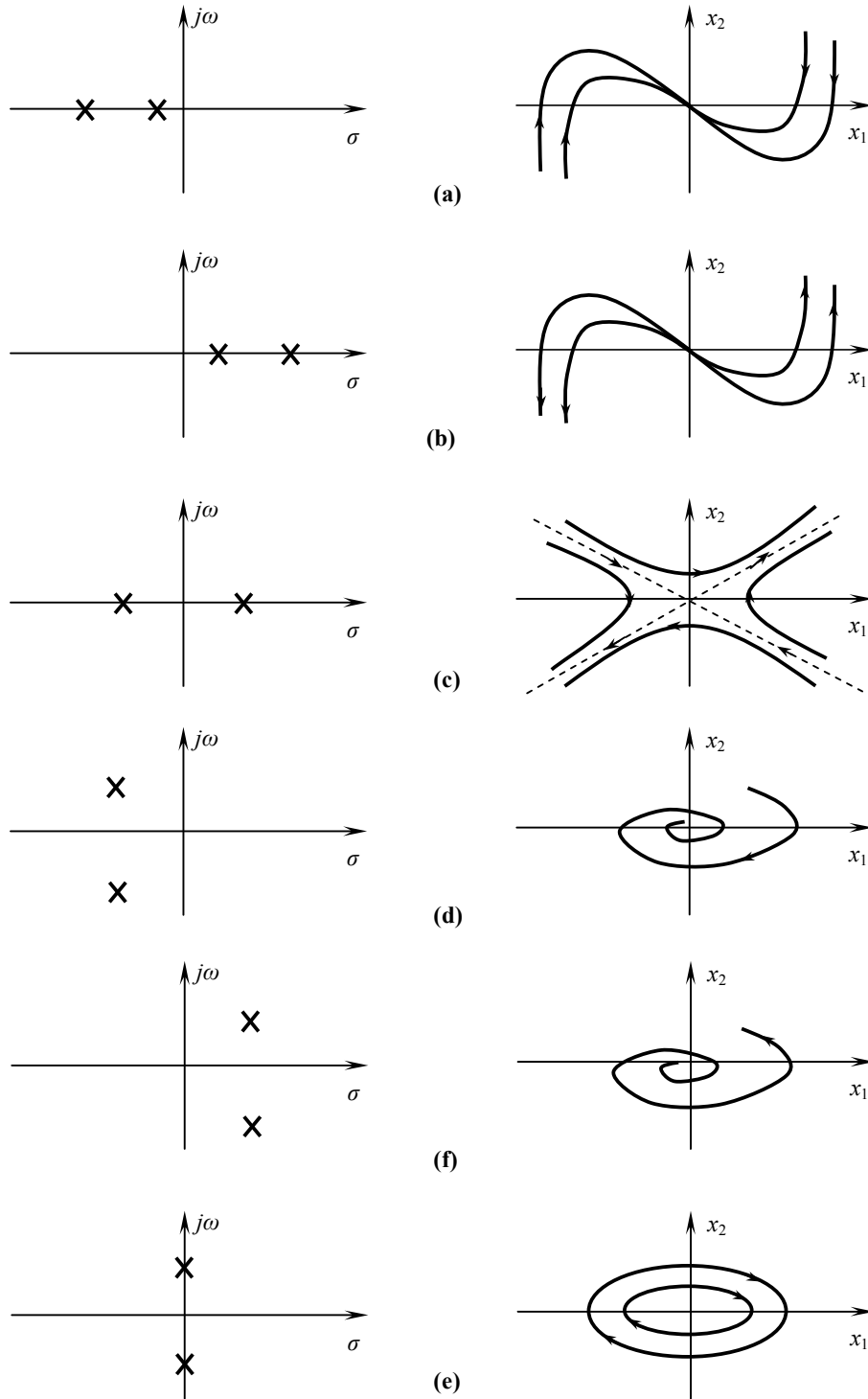
Eğer öz değerlerin hepsi negatifse, bu nokta kararlı düğüm olarak isimlendirilir. Çünkü, Şekil 5.1(a)'da görüldüğü gibi x ve $\dot{x}$ 'nin her ikisi de üssel olarak sıfıra yakınsayacaklardır. Bu yapı, üssel kararlı davranış olarak tanımlanır. Eğer öz değerlerin hepsi pozitifse, bu nokta kararsız düğüm olarak isimlendirilir. Şekil 5.1(b)'den görüleceği gibi, x ve $\dot{x}$ 'nin her ikisi de üssel olarak sıfırdan uzaklaşacaklardır. Bu yapı üssel kararsız davranış olarak tanımlanır. Her iki durum içinde, öz değerler reel eksen üzerindedir. Bu nedenle, sistem yörüngesinde bir osilasyon söz konusu olmayacaktır.

5.1.4. Eğer Noktası

Durum uzay diyagramı, *eğer*'e benzediği için bu ismi almıştır. Denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin, öz değerlerinden biri pozitif diğeri negatif ise sistem kararsız olacaktır. Şekil 5.1(c)'de bu yapı görülmektedir.

5.1.5. Kararlı veya Kararsız Odak

Kararlı odak, öz değerlerin sol yarı düzlemde kompleks eşlenik olması durumunda meydana gelir. Bu durumda, x ve $\dot{x}$ 'nin her ikisi de asimptotik olarak orijine yakınsayacaklardır. Bu durum asimptotik kararlı yapıya karşılık gelmektedir ve Şekil 5.1.(d)'de bu yapı görülmektedir. Öz değerler, eğer kompleks eşlenik olarak sağ yarı düzlemde iseler, bu durumda x ve $\dot{x}$ 'nin her ikisi de asimptotik olarak orijinden uzaklaşacaklardır. Sistem kararsız yapıdadır. Bu yapı Şekil 5.1.(e)'de görülmektedir.



Şekil 5.1. Doğrusallaştırılmış doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramları

5.1.6. Merkez Nokta

Şekil 5.1.(f)'de görüldüğü gibi, tüm yörüngelerin elips olduğu ve bu yörüngelerin merkezinde ise denge noktasının olduğu yapıdır. Bu yapıda, öz değerler kompleks eksen üzerinde bulunmaktadır.

5.1.7. Limit Çevrim

Doğrusal olmayan sistemlerde, dışardan uyarı olmaksızın gözlenen sabit genlik ve frekanslı osilasyonlara Limit Çevrim ($LÇ$) veya kendinden uyarımlı osilasyonlar denmektedir. 1920 yılında Balthasar Van der Pol kendi adıyla anılan ünlü osilatör dinamikleriyle bu önemli olayı basitçe göstermiştir [43].

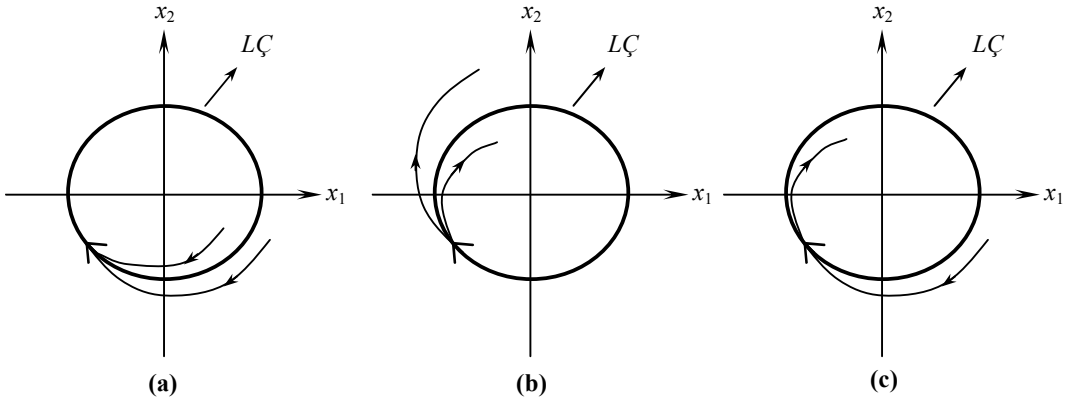
Durum uzay gösteriminde $LÇ$, kapalı izole eğri olarak tanımlanır. Yani yörüngenin kapalı (hareketin doğal bir periyoduna işaret eder) ve izole(çevrimin doğal sınırlarına işaret eder) olması gerekir. $LÇ$ 'nin, yakınındaki yörüngelere göre üç farklı tipi vardır:

1. Kararlı $LÇ$: Tüm yörüngeler, Şekil 5.2.(a)'da görüldüğü gibi $LÇ$ 'ye yakınsar.
2. Kararsız $LÇ$: Tüm yörüngeler Şekil 5.2.(b)'de verildiği gibi $LÇ$ 'den uzaklaşır.
3. Yarı Kararlı $LÇ$: Şekil 5.2.(c)'de görüldüğü gibi bazı yörüngeler $LÇ$ 'ye komşu bölgelerden uzaklaşırken, bazı yörüngeler yakınsamaktadır.

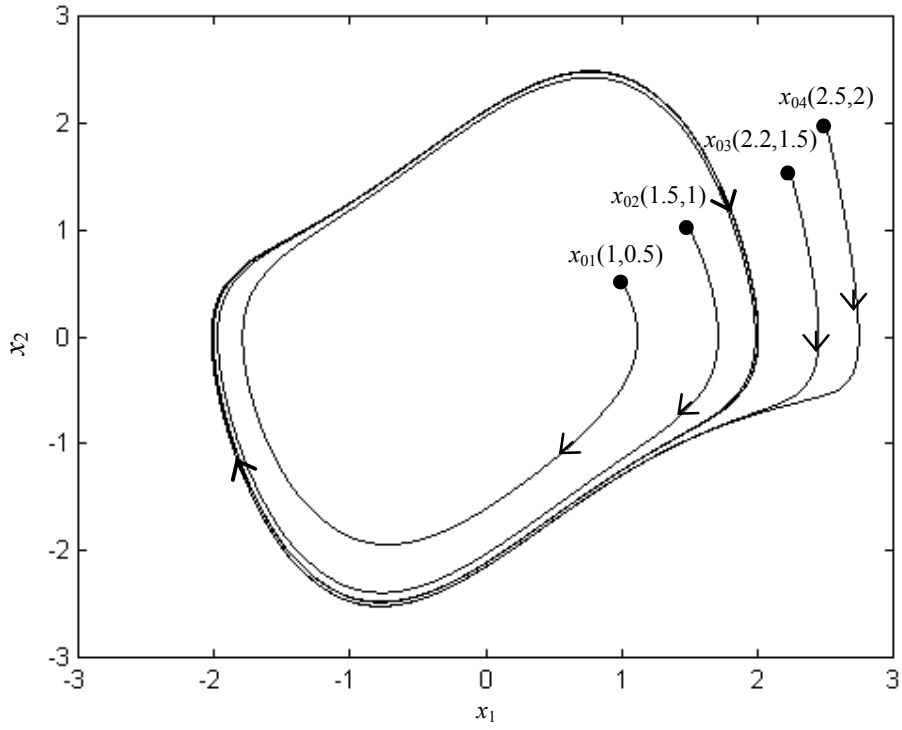
Van der Pol osilatörü matematiksel olarak Denklem (5.7.a)'daki diferansiyel denklemlerle tanımlanmaktadır.

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad (5.7.a)$$

Burada; m , c ve k pozitif sayılardır. Eğer $m=1$, $c=0.4$ ve $k=1$ alınarak sistemin *MATLAB/Simülink* ortamında benzetimi yapılırsa, Şekil 5.3'teki $LÇ$ davranış elde edilecektir.



Şekil 5.2. Kararlı, kararsız ve yarı kararlı $LÇ$



Şekil 5.3. $m=1$, $c=0.4$ ve $k=1$ için Van der Pol osilatörünün durum uzay diyagramı

İkinci dereceden bir özerk sistem

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (5.8.a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (5.8.b)$$

bağıntılarıyla tanımlanabilir. Burada; x_1 ve x_2 sistemin durum değişkenleri, f_1 ve f_2 fonksiyonları ise durum değişkenlerinin doğrusal olmayan fonksiyonlarıdır. Denklem (5.8) ile tanımlanan doğrusal olmayan özerk sistem için $LÇ$ 'nin varlığı Poincare, Bendixson ve Poincare-Bendixson teoremleriye tespit edilebilir [43].

Teorem 5.1(Poincare): N , $LÇ$ tarafından çevrelenen düğüm, merkez ve odakların sayısını ve S , çevrelenen eğer noktası sayısını vermek üzere, Denklem (5.8) ile tanımlanan ikinci derece özerk sistemde $N=S+1$ olması durumunda $LÇ$ vardır.

Teorem 5.2(Bendixson): Denklem (5.8) ' ile tanımlanan doğrusal olmayan sistem için durum uzay diyagramının bir Ω bölgesinde, $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ ifadesinin kaybolmaması ve işaret değiştirmemesi durumunda $LÇ$ mevcut olmayabilir.

Teorem 5.3(Poincare-Bendixson): Denklem (5.8)'deki doğrusal olmayan sistem için sınırlı bir Ω bölgesinde aşağıda verilenler doğrudur.

- Yörünge, bir denge noktasına gitmektedir.
- Yörünge, asimptotik bir $LÇ$ olmaya meyillidir
- Yörünge, bir $LÇ$ 'nin kendisidir.

5.2. Kaos ve Kaotik Davranışlar

Son yıllarda, kaos teorisi ve doğrusal olmayan sistemlerde gözlenen ve tuhaf çekiciler olarak adlandırılan kaotik dinamikler araştırmacılar tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaktadır [37-41]. Kaos; başlangıç şartlarına hassas bağlı davranış gösteren deterministik bir sistemde, düzensiz davranışlar olarak tanımlanmaktadır. Deterministik sistemler; sistem davranışlarının, sistem parametreleri ve başlangıç şartları tarafından belirlendiği sistemler olduğundan dolayı gürültü ile kaos arasındaki en önemli farklılıktır.

Denklem (5.1)'de verilen doğrusal olmayan sürekli zamanlı bir sistemde kaosun gözlenebilmesi için;

- Sistemin *durum değişken sayısı*, $n \geq 3$ olması,
- Sistemin *doğrusal olmayan en az bir eleman* içermesi,
- Sistemin *başlangıç şartına hassas bağlı* olması,

gerekir [38]. Sürekli zamanlı bir sistemde kaosu gözlenebilmesi için, sistemin en az üç tane durum değişkenine sahip olması gerekir. Yani; tam dereceli sistemler için sistem derecesinin $n \geq 3$ olması gerekir. Fiziksel olarak bunun anlamı ise, özerk bir sistemin en az üç tane enerji depolayan elemanın olması gerekliliğidir. Doğadaki ve insan yapımı sistemlerin hemen hemen hepsi, doğrusal olmayan yapıdadırlar. Bu şartlara göre birçok sistemde, kaosu karşılaştırmaya olasılığı yüksektir. Fakat, kaotik dinamiğin en önemli özelliği olan başlangıç şartına hassas bağlılık, her 3. derece ve üzeri doğrusal olmayan sistemde gözlenmez. Başlangıç şartına sistem yörüngesinin duyarlılığı veya başlangıç şartına hassas bağlılık, şu şekilde açıklanabilir: Kaotik olmayan bir sistemde, bir durum değişkeninin, birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartları için sistem yörüngelerinden birinin, diğer başlangıç şartına göre elde edilen yörüngeye bakılarak tahmin edilebilmesi söz konusudur. Kaotik bir sistemde bu olanaksızdır. Kaotik sistemde, sistem durum değişkeninin birbirine çok yakın iki farklı başlangıç değeri için sistem yörüngesi, kısa bir süre sonra birbiriyle ilişkisi tahmin edilemeyecek derecede değişim gösterir [37].

Bu durumun daha iyi anlaşılabilmesi için, Lorenz Denklemi incelenecektir. Lorenz modeli, iklim ve hava durumu tahmini için kullanılan önemli bir araçtır ve doğrusal olmayan bir yapıdadır [44]. Lorenz denklemlerinin durum uzay formunda ifadesi

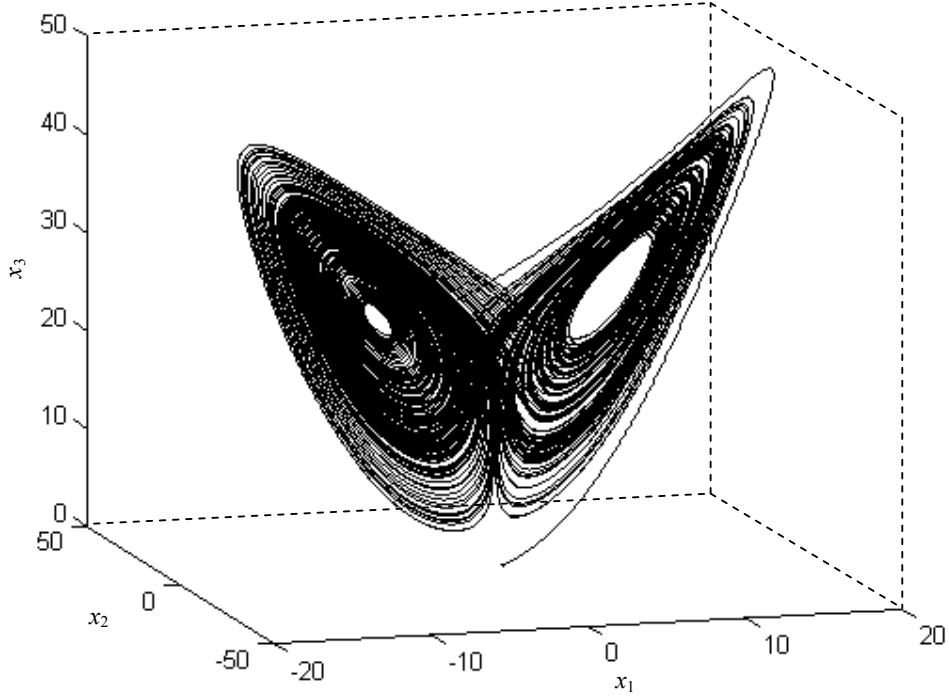
$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \quad (5.9.a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(\rho - x_3) - x_2 \quad (5.9.b)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - \beta x_3 \quad (5.9.c)$$

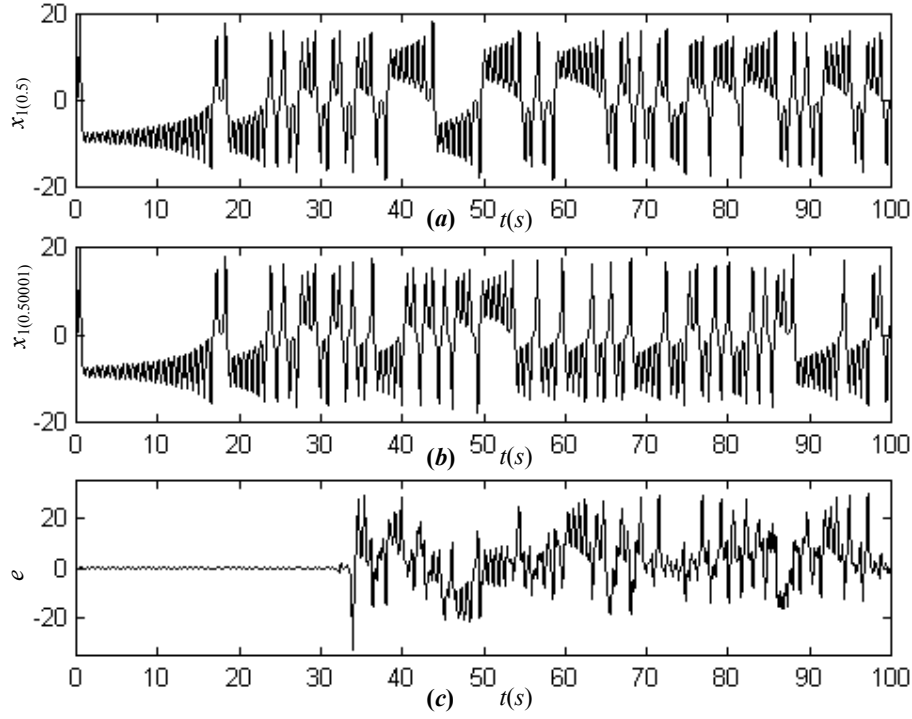
şeklinde. Burada; σ , ρ ve $\beta > 0$ olan katsayılarıdır, x_1 : ısı yayılım devrilme oranını, x_2 : yatay sıcaklık değişim miktarını ve x_3 : dikey sıcaklık değişim miktarını temsil etmektedir. Eğer $\sigma=10$ ve $\beta=8/3$ sabit alınarak, ρ değiştirilirse $\rho=28$ değerinde sistem kaotik davranış

gösterir. Şekil 5.4'te, bu değerler ve $x_0(0.5, 0, 0)$ başlangıç değeri için *MATLAB/Simulink* ortamında Lorenz denkleminin elde edilmiş üç boyutlu durum uzay diyagramı verilmektedir.



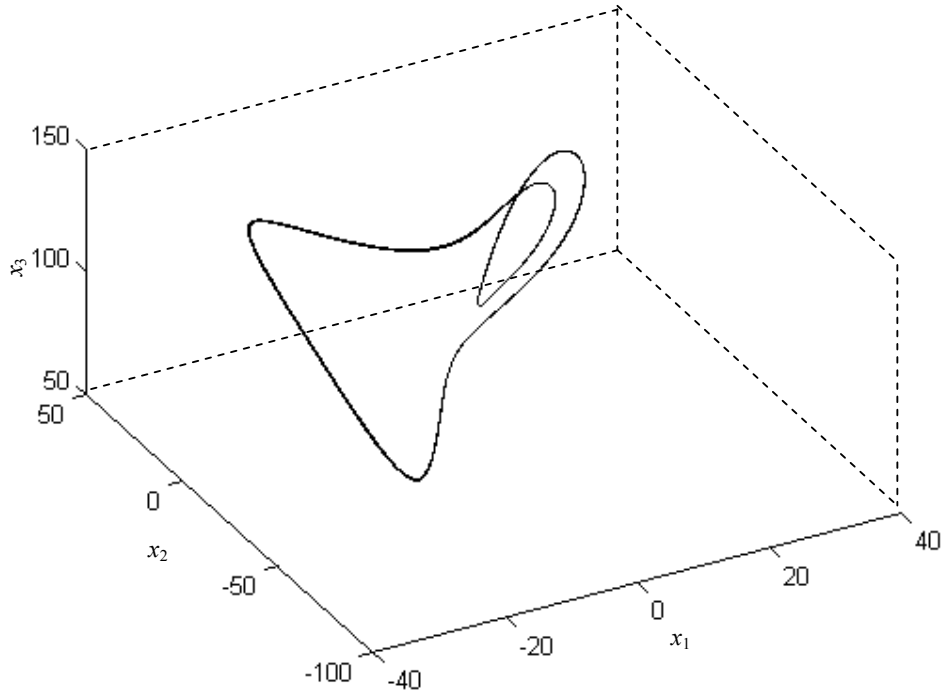
Şekil 5.4. $\sigma=10$, $\beta=8/3$ ve $\rho=28$ için Lorenz denkleminin üç boyutlu durum uzay diyagramı

Şekil 5.4'ten de görüldüğü gibi, sistem kaotik davranış göstermektedir. Bu sistemin başlangıç şartına hassas bağlı olduğunu göstermek için, x_1 durum değişkeninin $x_0(0.5, 0, 0)$ başlangıç şartında izlediği yörünge ile $x_0(0.50001, 0, 0)$ başlangıç şartında izlediği yörünge arasındaki farka bakmak gerekir. Şekil 5.5.(a) ve (b)'de, verilen farklı başlangıç şartlarında x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimleri, (c)'de ise iki yörünge arasındaki farkın zamana göre değişimleri görülmektedir. Şekil 5.5'e dikkat edilirse, başlangıç şartındaki elli binde birlik bir değişime karşılık iki yörünge arasındaki fark, sinyalin kendisinden büyük değerlere ulaşmaktadır.

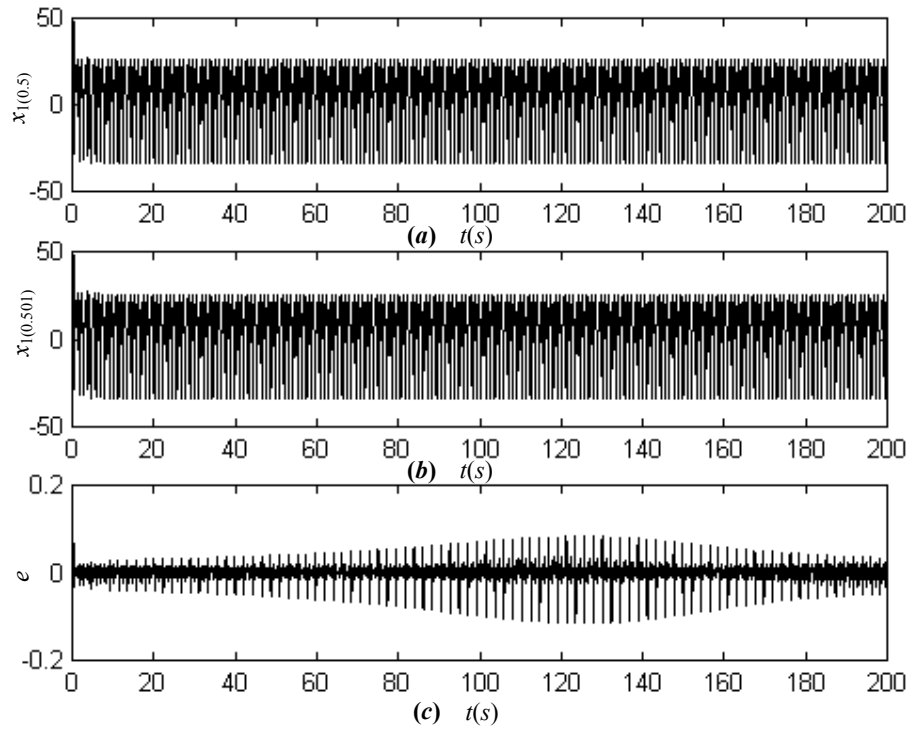


Şekil 5.5. a) $x_0(0.5, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in b) $x_0(0.50001, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in ve c) İki yörünge arasındaki fark, e 'nin zamana göre değişimleri

Şekil 5.5.(c)'de görüldüğü gibi, başlangıçta $t < 35$ için iki yörünge arasındaki fark çok küçüktür. Ancak $t > 35$ için hata, gittikçe artmakta ve bir süre sonra tahmin edilemeyecek bir değişim göstermektedir. Buradan açıkça görüldüğü gibi $t > 35$ 'den sonra sistem yörüngesinin değişimi, $t < 35$ kısmına bakılarak farklı başlangıç değerleri için tahmin edilemez. Kaotik olmayan dinamik davranışlarda ise bu durum gözlenmez. Eğer σ , ve β aynı kalmak kaydıyla $\rho = 99.96$ alınırsa, Şekil 5.6'da elde edilen periyot katlamalı $LÇ$ davranışı sistemde gözlenir. Bu davranış, kaotik davranış değildir ve sistemde başlangıç şartına hassas bağlı davranışın gerçekleşmemesi gerekir. Bunu gözlemleyebilmek için Şekil 5.7.(a) ve (b)'de x_1 durum değişkeninin, sırasıyla $x_0(0.5, 0, 0)$ ve $x_0(0.501, 0, 0)$ başlangıç şartlarında izlediği yörüngelerin zamana göre değişimi, (c)'de ise iki yörünge arasındaki farkın zamana göre değişimleri verilmiştir. Bu sistem parametreleri için iki farklı başlangıç şartı arasındaki fark büyük tutulmasına rağmen, iki yörünge arasındaki hata ihmal edilecek boyuttadır. Bu durumda, geçici rejim bittikten sonra, $LÇ$ osilasyonun karakteristiği rahatlıkla farklı başlangıç şartları için tahmin edilebilir.



Şekil 5.6. $\sigma=10$, $\beta=8/3$ ve $\rho=99.96$ için Lorenz denkleminin üç boyutlu durum uzay diyagramı



Şekil 5.7. **a)** $x_0(0.5, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in, **b)** $x_0(0.501, 0, 0)$ başlangıç şartı için x_1 'in ve **c)** İki yörünge arasındaki fark, e 'nin zamana göre değişimleri

Sonuç olarak, kaotik bir sistemin temel özellikleri genel olarak aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Sistem, deterministik yapıdadır.
- Sistemin yörüngesi, belirli sınırlar içerisindedir (tuhaf çekici).
- Sistemin yörüngeleri, periyodik yapıda değildir. Asla birbirini tekrar etmezler.
- Sistem, başlangıç şartlarına hassas bağlı yapıdadır.

5.3. Kaosun Tespiti

Kaotik davranışların tespitinde kullanılan yöntemler, sistemin kaotik davranış gösterip göstermediğini ortaya koymak amacıyla kullanılmaktadır. Bu yöntemler;

- Zaman yörüngesinin izlenmesi,
- Durum uzay diyagramının incelenmesi,
- Lyapunov üsleri,
- Poincare haritası,
- Güç spektrumu,
- Çatallaşma diyagramı

olarak isimlendirilirler [37]. Bu yöntemlerle, nicel veya nitel olarak kaotik davranışların varlığı tespit edilebilmektedir. Bu yöntemlerden; Lyapunov Üsleri, Poincare Harita ve Çatallaşma Diyagramı aşağıda verilecektir. Bu kaos analiz yöntemleri anlatılırken, Denklem (5.10)'da durum uzay formunda denklemleri verilen basit sarkaç incelenecektir.

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{q}\omega - \sin \theta + g \cos \phi \quad (5.10.a)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (5.10.b)$$

$$\dot{\phi} = \omega_D \quad (5.10.c)$$

Burada; $\phi = \omega_D t + \phi_0$ dir. q : basit sarkacın uzunluğu, g : sürme işaretinin genliği, ω_D : sürme işaretinin açısal hızı, θ : basit sarkacın normal ile yaptığı açı ve ω : basit sarkacın açısal hızını temsil etmektedir.

5.3.1. Lyapunov Üsleri

Kaotik davranışın nicel olarak tespiti için kullanılan yöntemlerden biri, Lyapunov üsleridir [41]. Bu yöntem, kaotik davranış ile rasgele dış etkilerden oluşan gürültüyü ayırt edilebilmekte ve nicel olarak kaotik davranışın derecesini göstermektedir. Denklem (5.3) ile ifade edilen sistemin, birbirine yakın iki farklı başlangıç şartı için elde edilen sistem yörüngeleri, $x(t)$ ve $x_0(t)$ olsun ve sırasıyla x ve x_0 iki yörüngenin başlangıç değerleri kabul edilsin. Ayrıca iki yörünge arasındaki farkta s ile gösterilsin. Denklem (5.3) Taylor serisine açıldığında;

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (5.11.a)$$

elde edilir. Burada ilk türev teriminden sonrası ihmal edilecektir. İki yörünge arasındaki farkın değişim oranı ise;

$$\dot{s} = \dot{x} - \dot{x}_0 = f(x) - f(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \quad (5.11.b)$$

biçiminde elde edilir. Zamanla ayrışmanın üssel yapıda olması beklenecektir ve Lyapunov üssü olarak tanımlanan λ ile temsil edilecektir.

$$s(t) = s(t_0) e^{\lambda t} \quad (5.11.c)$$

$t_0=0$ için Denklem (5.11.c)'nin zamana göre türevi alınacak olursa,

$$\dot{s} = \lambda s(0) e^{\lambda t} = \lambda s \quad (5.11.d)$$

olur, Denklem (5.11.b) ile (5.11.d) eşitlenirse,

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (5.11.e)$$

ifadesi elde edilir. Görüldüğü gibi eğer λ pozitif ise iki yörünge birbirinden uzaklaşıyor, eğer λ negatif ise iki yörünge birbirine yaklaşıyor demektir.

Kaotik sistemlerin en önemli özelliği olan birbirine çok yakın başlangıç değerlerindeki sistem yörüngelerinin birbirinden ıraksaması, zamana göre üssel değişimin göstergesidir. Eğer, t_0 başlangıç zamanı ile t arasındaki iki yörüngede, τ örnekleme aralığında n tane örnek alınacak olursa, matematiksel olarak (5.12.a)'deki eşitlik elde edilir.

$$t - t_0 = n \tau \quad (5.12.a)$$

Burada; x_i yörüngesi üzerindeki, $x_i(t_0), x_i(t_1), x_i(t_2), \dots, x_i(t_n)$ değerlerine, sırasıyla $x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ değerlerinin karşılık geldiği ve x_{i0} noktasına çok yakın bir değerden başlayan başka bir x_j yörüngesinin ise, $x_j(t_0), x_j(t_1), x_j(t_2), \dots, x_j(t_n)$ değerlerine karşılık, sırasıyla $x_{j0}, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}$ değerlerinin karşılık geldiği kabul edilsin. Bu durumda iki farklı yörünge arasındaki belirli aralıktaki fark dizisi, (5.12.b)'deki gibi elde edilecektir.

$$\begin{aligned} d_0 &= |x_i - x_j| \\ d_1 &= |x_{i+1} - x_{j+1}| \\ d_2 &= |x_{i+2} - x_{j+2}| \\ &\vdots \\ d_n &= |x_{i+n} - x_{j+n}| \end{aligned} \quad (5.12.b)$$

Eğer iki yörünge arasındaki farkın üssel değiştiği kabul edilirse,

$$d_n = d_0 e^{\lambda n} \quad (5.12.c)$$

olacaktır. Her iki tarafın doğal logaritması alınırsa, (5.12.d) elde edilir.

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{d_n}{d_0} \right) \quad (5.12.d)$$

Elde edilen λ Lyapunov üssü olarak tanımlanmaktadır. Eğer ortalama Lyapunov üssü elde edilmek isteniyorsa,

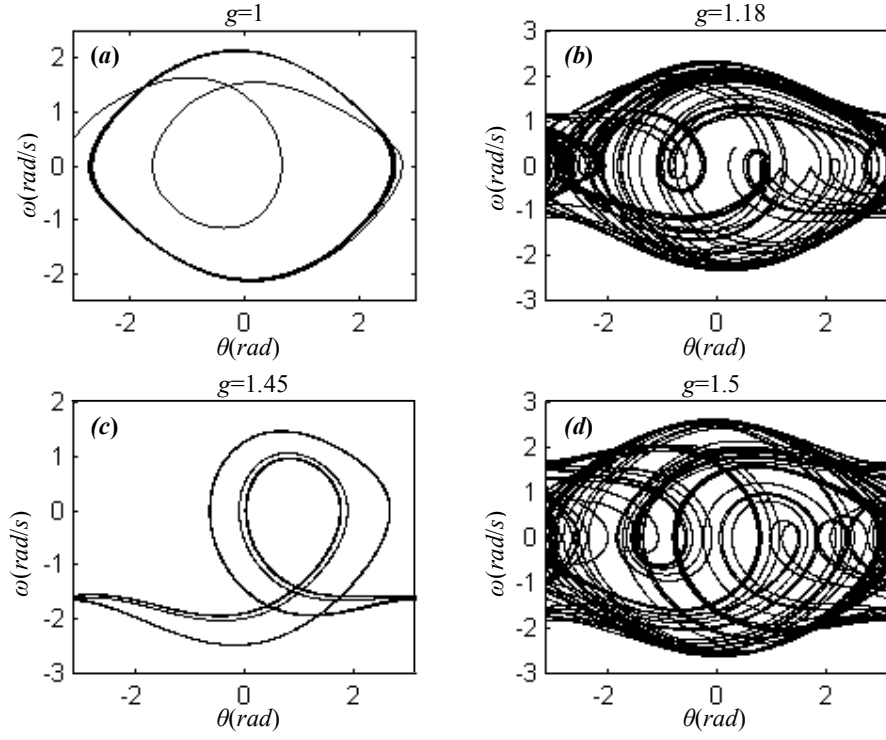
$$\lambda_{ort} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (5.13)$$

ifadesi kullanılacaktır. Sisteme ait zaman serilerinden faydalanılarak, küçük bir örnekleme aralığı için Lyapunov üsleri elde edilebilir [67-68]. Elde edilen λ değerleri içerisinde maksimum değere sahip olana da maksimum Lyapunov üssü denir. Bu değer eğer sıfırdan büyükse, sistemde kaotik davranış kanıtlanmış demektir. Sıfır ve negatif değerler almışsa, en azından örneklenen bölgedeki değerlere göre sistemde kaos yoktur denir.

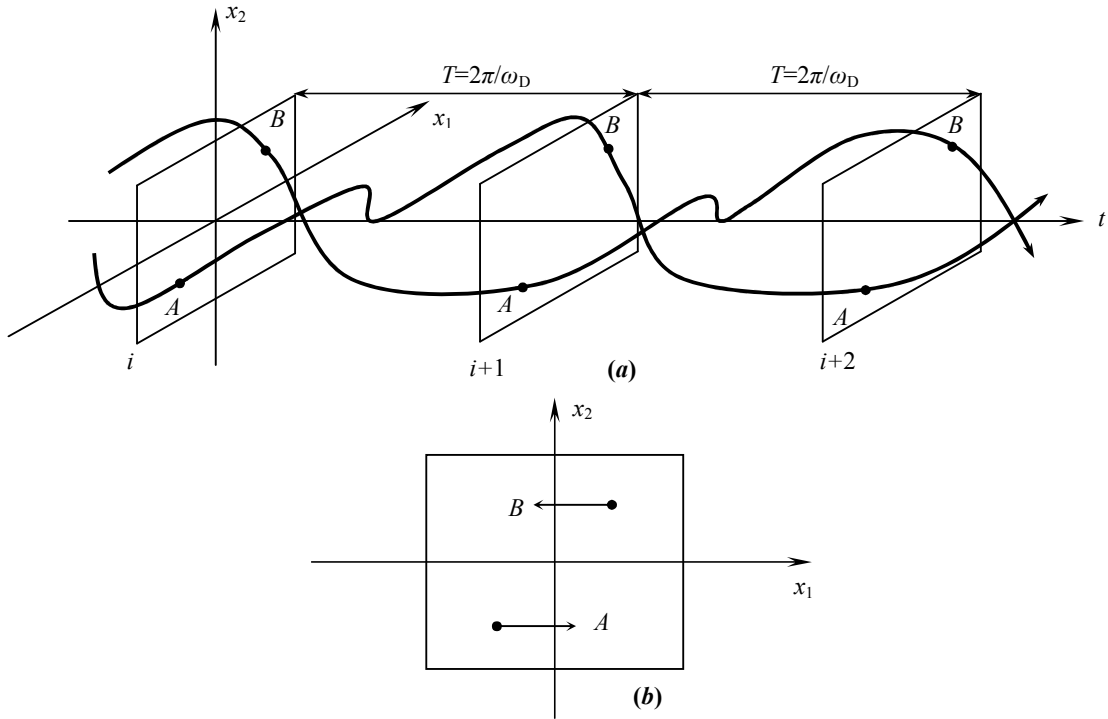
Denklem (5.10)'da sürülen basit sarkacın, $\omega_D=2/3 \text{ rad/s}$, $q=2 \text{ m}$ ve $g=1, 1.18, 1.45, 1.5$ için Şekil 5.8'de simülasyon sonuçlarına göre elde edilen durum uzay diyagramları görülmektedir. Buna göre $g=1$ için sistemde LÇ davranış varken, $g=1.45$ 'de periyot katlama davranışı görülmekte ve $g=1.18$ ve 1.5 'te ise kaotik davranış gözlenmektedir. Simülasyonda elde edilen ω durum değişkeninin yörüngesinden faydalanılarak, Lyapunov üsleri elde edilebilir. Bu durumda; $g=1$ için $\lambda_{\max}=0$ ve $\lambda_{\text{ort}}=-0.0469$; $g=1.18$ için $\lambda_{\max}=0.0046$ ve $\lambda_{\text{ort}}=0.0043$; $g=1.45$ için $\lambda_{\max}=0$ ve $\lambda_{\text{ort}}=-0.0091$; $g=1.5$ için $\lambda_{\max}=0.0035$ ve $\lambda_{\text{ort}}=0.0027$ değerleri bulunacaktır. Elde edilen Lyapunov üslerinin Şekil 5.8'de verilen sonuçları doğruladığı görülmektedir.

5.3.2. Poincare Haritası

Periyodik olarak sürülen osilatörlerin, üç boyutlu durum uzayıyla (x_1, x_2, t) ilgili standart bir teknik olan Poincare harita, Şekil 5.9'da görüldüğü gibi yörüngenin zamana göre $T=2\pi/\omega_D$ periyoduyla örneklenecek (x_1, x_2) üzerine iz düşümünün gerçekleştirilmesidir [69]. Burada, T sürme işaretinin periyodunu göstermektedir.



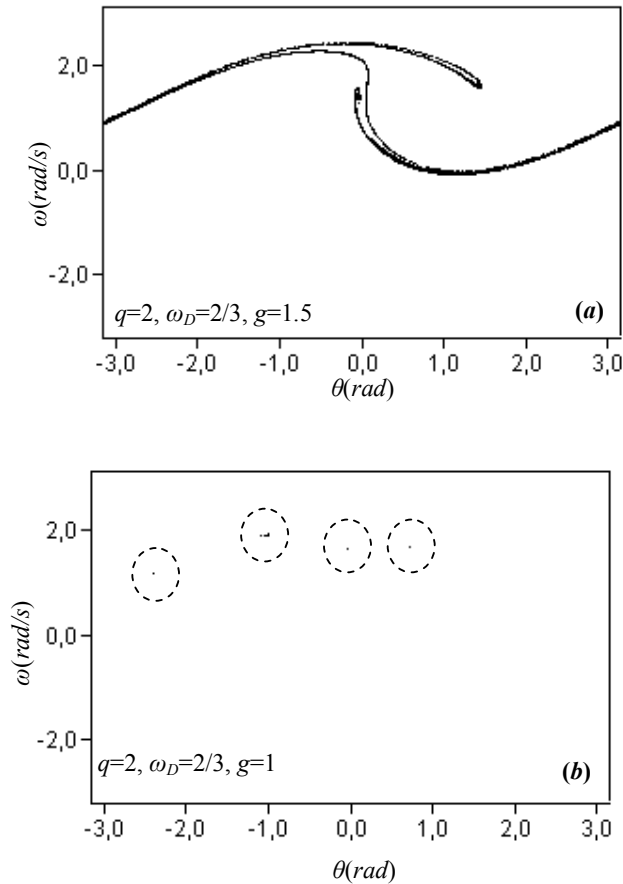
Şekil 5.8. Basit sarkacın $\omega_D=2/3$ ve $q=2$ a) $g=1$, b) $g=1.18$, c) $g=1.45$ ve d) $g=1.5$ durum uzay diyagramları



Şekil 5.9. Sürülen doğrusal olmayan bir sistemin a) Üç boyutlu durum uzayı, b) Poincare haritası

Şekil 5.9'dan açıkça görüleceği gibi, benzer bir yörüngede her bir $t=mT$ yüzeyinde ($m=1,2,3,\dots$) yörüngelerin oluşturduğu noktalar benzer olacaktır. Bununla birlikte, Şekil 5.9.(a)'ya dikkat edilirse, yörüngenin $2T$ periyotlu bir osilasyon yaptığı görülecektir. Şekil 5.9.(b)'den görüleceği gibi, yüzey üzerinde oluşan A ve B noktaları periyot katlamasının olduğunu göstermektedir.

Sistem sürekli duruma ulaşınca kadar oluşan geçici durumun süresine bağlı olarak, Poincare haritasında kendini tekrarlamayan ve sadece geçici davranışta gözlenen noktalarda örneklenebilir. Sistem davranışının net bir şekilde analiz edilebilmesi için yörüngenin geçici durum dışındaki kısmı alınarak, bu haritanın elde edilmesi gerekmektedir. Poincare haritada, periyot katlama davranışları da açık bir şekilde gözlemlenebilir. Çatallaşma ve kaotik davranışlar gibi karmaşık yörüngelerin Poincare haritası çıkarıldığında, bir veya dağınık birkaç nokta değil de çok sayıda noktalardan oluşan bir şekil oluşacaktır. Şekil 5.10'da, basit sarkacın kaotik davranış göstermesi ve periyodik davranış göstermesi durumu için elde edilmiş Poincare haritalar görülmektedir.



Şekil 5.10. Sürülen basit sarkacın $\omega_D=2/3 \text{ rad/s}$, $q=2$ ve **a)** $g=1.5$, **b)** $g=1$ için Poincare haritası

Şekil 5.10.(a)'da sistemin kaotik davranış gösterdiği görülmekte, (b)'de ise periyodik bir davranış şekline sahip olduğu sonucuna rahatlıkla varılabilmektedir. Nitekim Şekil 5.8'de verilen durum uzay diyagramları, bu sonucu net bir şekilde ortaya koymaktadır.

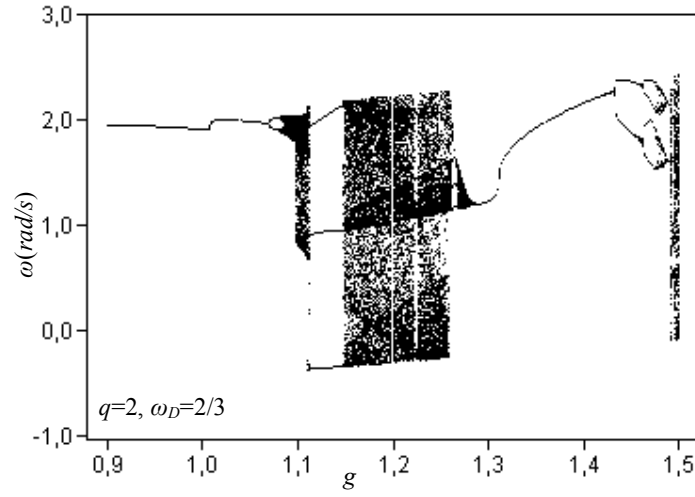
5.3.3. Çatallaşma Diyagramı

Sistem davranışları, sistemin özelliklerini belirleyen değerlere bağlıdır. Bu değerlere, sistem parametresi denmektedir. Genellikle sistem parametresinde meydana gelen ufak değişiklikler, sistemin davranışı üzerinde ufak farklılıklar oluşturur. Fakat bazen sistem parametresinde oluşan veya oluşturulan ufak bir değişiklik, sistemin davranışında büyük farklılaşmaya sebep olabilir. Bu duruma da, çatallaşma adı verilir [70]. Daha teknik olarak çatallaşma, sistem parametresinin değişmesiyle çekici noktanın kararlılığında meydana gelen değişimle, ani oluşan davranış kayması olarak ta tanımlanabilir. Çatallaşma, bir sistemde $LÇ$, periyot katlama, periyodumsu davranış ve kaos şeklinde oluşabilir. Bu bir genelleme olmamakla birlikte, çatallaşmanın başlaması sistemin kaotik davranışa gidiyor olduğunun bir işareti olarak değerlendirilebilir.

Bir sistemde çatallaşma, çatallaşma diyagramı ile görülebilir. Çatallaşma diyagramı; bir sistem parametresine göre sistem değişkenlerinden birinin grafiksel gösterimine denir. Diyagram; x -ekseni bir sistem parametresine göre değişirken, y -ekseni zamana göre elde edilen diğer değişkenin birçok değerini noktalayarak elde edilmektedir. Bu sayede x -eksenindeki sistem parametresinde oluşacak çok küçük değişimlere karşılık, sistemin davranışında oluşacak ani değişiklikler tespit edilebilecektir.

Kaotik bir sistemin çatallaşma diyagramı, fraktal bir yapıya sahiptir [70]. Bu yapı şeklin çok küçük bir bölgesinin, çok geniş bir bölgesiyle benzer olduğu anlamına gelmektedir.

Şekil 5.11'de, Denklem (5.10)'da verilen sistemin çatallaşma diyagramı, sarkacı süren işaretin genliği g 'ye göre elde edilmiştir. Şekilden; yaklaşık olarak sistemde $g=1.08$ 'den itibaren çatallaşmanın başladığı, $g=1.1$ 'de sistemin kaosa girdiği ve $g=1.12$ 'de sistemin kaostan çıktığı periyot katlama davranışı sergilediği söylenebilir. Bu değerlendirmeler, elde edilen diyagramın diğer bölgeleri içinde yapılabilir. Bu diyagram Lyapunov üsleri ve Poincare haritada elde edilen sonuçlarla da örtüşmektedir.



Şekil 5.11. Sürülen basit sarkacın $\omega_D=2/3$ rad/s ve $q=2$ için g sistem parametresine göre çatallaşma diyagramı

5.4. Kaos Kontrol

Kaos, düzensizlik ve kestirilemezlik içerdiğinden dolayı bir çok kontrol sisteminde varlığı istenmemektedir. Fakat, güvenli haberleşmenin sağlanması gibi durumlarda da istenmektedir [71-72]. Bu nedenle kaos kontrolü, kaos kadar önemli bir konu haline almıştır. Kaos kontrolü, genel olarak iki başlıkta incelenebilir. Bunlardan birisi güncel sistem yörüngesinin takip edilerek, sistemin arzulanan sistem yörüngesinde kalmasını sağlayacak olan geri beslemeli yapıdır. Diğerisi ise sisteme ait bilgi ve özellikleri, kaotik davranışı değiştirmede veya istenilen davranışı sağlaması yönünde kullanmayı amaçlayan geri beslemeli olmayan yapıdır. Geri beslemeli metotlar, kontrol edilen sistemleri değiştirmeden kaotik garip çekiciler üzerindeki kararsız periyodik yörüngeleri, kararlı hale getirir. Geri beslemeli olmayan metotlarda ise, kontrol edilen sistemin parametrelerinden biri çok az değiştirilerek, kaotik yörüngelerden başlangıç yörüngesine sistem davranışı değiştirilir [46]. Bir dinamik sistemde kaotik davranışların değiştirilmesi, parametre uzayında yerinin farklı bir bölgeye alınması veya kaldırmasını sağlayan bir çok metot vardır. Bunlardan birisi Ott-Grebogi-York (OYG) metodudur [73]. Bu metod; genel ve güvenilir olmakla birlikte, duyarlı ve yüksek hassasiyetli olarak yörüngenin takip edilmesini ve geri beslemeli olarak çalıştırılmasını gerektirmektedir. Bu durum, özellikle bazı uygulamalı sistemlerin çok zahmetli ve pahalı olmasına sebep olmaktadır. Geri beslemeli olmayan yaklaşımlar ise daha esnek ve sistemi iyi tanımlayan denklemlerin

kullanımını gerektirir. Fakat, bu metotlarda sistem yörüngesinin takip edilmesine gerek yoktur ve kontrol işlemi herhangi bir zamanda uygulanabilir. Bu sayede sistem periyodik bir yörüngeden kaotik davranış göstermeyen başka bir periyodik yörüngeye geçirilebilir. Bu kontrol yöntemlerinden bazıları, aşağıda genel özellikleriyle birlikte verilecektir.

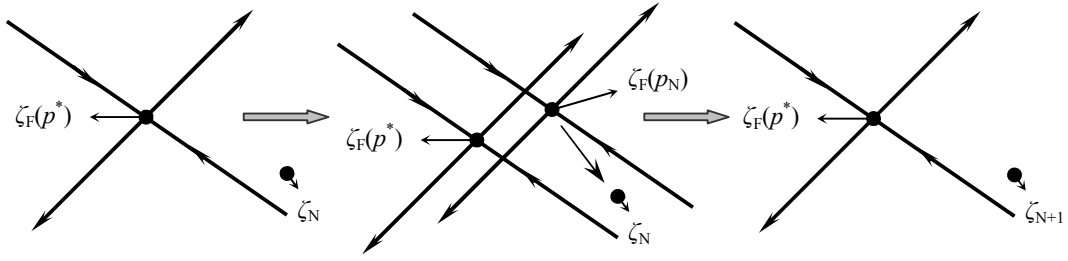
5.4.1. Ott-Grebogi-Yorke (OGY) Metodu

Bu metot; kaotik çekici içerisinde gömülü bulunan sınırsız sayıdaki kararsız yörüngelerden birinin gölgelemesiyle bastırılabilmesini göstermiştir [46]. Bu metodun temel kabulleri aşağıda verildiği gibidir.

- Sistem dinamiği n -boyutlu harita formunda tanımlanabilir, $\zeta_{n+1} = f(\zeta_n, p)$ (örneğin Poincare harita).
- p , çalışılan yörüngenin olduğu nominal sistem parametresi p^* 'nin çok yakınında değiştirilebilir ve ulaşılabilir bir sistem parametresidir.
- Bu p^* değeri için sistem, kararlı hale getirilmek istenen çekici civarındaki periyodik bir yörüngeye yönlendirilir.
- p 'nin küçük değişimleri için sistemin bölgesel sistem davranışlarında küçük değişiklikler olur ve p 'nin değişimiyle bu yörüngenin pozisyonu güvenilir bir şekilde değiştirilmiş olur.

ζ_F , p^* parametre değeri için f haritası üzerinde var olan sabit bir noktayı temsil etmek kaydıyla, Şekil 5.12'de bu metot grafiksel olarak verilmiştir. Bu metodun ana özellikleri ise aşağıda sıralandığı gibidir.

- Sistemin dinamik modeli gerekmez. Deneysel olarak elde edilen, zaman serisi bile yeterli olabilmektedir.
- Her hangi bir erişilebilir parametre, kontrol parametresi olarak kullanılabilir.
- Hata ve gürültü yoksa uygulanan kontrol sinyali, kontrolü gerçekleştirmek için yeterlidir.
- Gürültü, kararlı hale getirilmiş yörüngeyi bozabilir.
- Sistemin istenen yörüngeye oturabilmesi için sistem, geçici kaotik davranış gösterir.

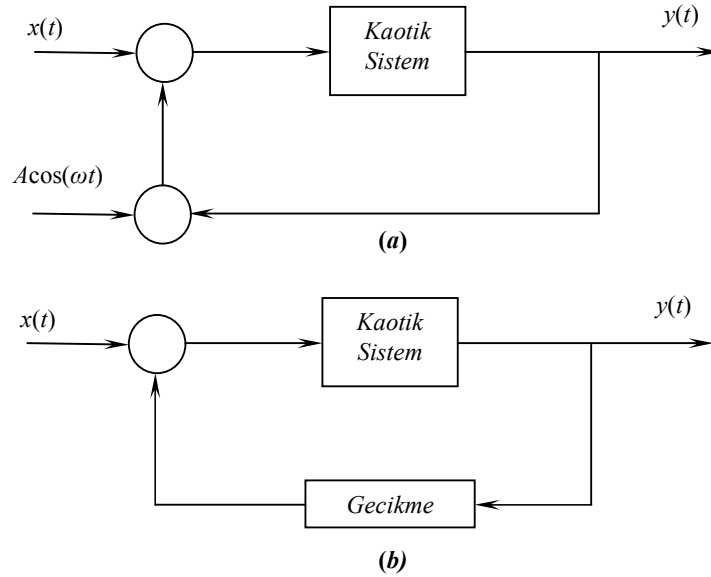


Şekil 5.12. OGY Metodunun şekilsel gösterimi

Bu yöntemin kullanılmasına örnek olarak, bulanık kontrolörler ile yapılan kaos kontrol uygulamaları verilebilir [74].

5.4.2. Pyragas Metodu

Bir diğer geri beslemeli kaos kontrol metodudur. *OGY* metodunda karşılaşılan problemlerden kurtulabilmek için, Pyragas [75] tarafından sürekli zamanlı sistemler için önerilmiştir. Bu metot; belirli şartlar altında, kararsız periyodik yörüngeleri, bozulmuş sürekli zamanlı yapıya dönüştürerek kararlı hale getirmektedir. Bu durum, Şekil 5.13’de verilen iki farklı geri beslemeli yapıyla sağlanabilmektedir.



Şekil 5.13. a) Dışardan bozucu bir etki kullanılarak, **b)** Gecikme zamanı kullanılarak yapılan kontrol

Şekil 5.13.(a)’daki yapı, dışardan geri beslemeli sistemin periyodik bir işaret kullanılarak sürülmesiyle sağlanabilmektedir. Şekil 5.13.(b)’deki yapı ise dışarıdan geri beslemeli

sisteme bir enerji girişinin olmadığı gecikmeli kendi kendine kontrolün sağlandığı yapıdır. Kontrolün gerçekleşebilmesi için kaotik çekicide gömülü bulunan kararsız periyodik yörüngelerden birinin periyodunun, dışardan sistemi süren işaretin periyodu $2\pi/\omega$ 'ya ya da τ gecikme zamanına eşit olması gerekir.

Bu metodun genel avantajları ise aşağıda verilmektedir.

- Orijinal sisteme ait her hangi bir çözüm, kontrol amacı olarak seçilebilir.
- Kontrolör, çok basit bir yapıya sahiptir.
- Erişilebilir bir sistem parametresine gerek duyulmaz.
- Küçük parametre değişimlerinden ve bazı uygulamalar için gürültüden etkilenmez.

5.4.3. Geri Beslemeli Olmayan Kaos Kontrolü

5.4.3.1. Çalışma Koşulları ile Kaos Kontrol Metodu

Çalışma koşulları ile kaos kontrolü, analitik veya nümerik yöntemler kullanarak parametre uzayındaki kaotik bölgeyi bulmaya veya tahmin etmeye yarar. Böylece, elde edilen parametre uzayına göre yapılan değişikliklerle, kaos kontrolü gerçekleştirilebilir. Bu metod, sistem parametrelerinden biri veya bir kaçını kaydırılarak sistemin davranışı kaotiklikten çıkarılıp periyodik bir hale getirilebilir [46].

5.4.3.2. Sistem Tasarımı ile Kaos Kontrol Metodu

Bu metod, uygun sistem tasarımıyla sistemi kaostan kurtarmak veya ortadan kaldırmak düşüncesine dayanmaktadır. Sistemi kaotik davranıştan kurtarmak, aynı zamanda sistemi tasarlanan yapının dışına da çıkarabilir. Yani sistem tasarlanırken bir sistem parametresi değişikliği, sistemi tasarım amacının dışına çıkarabilir. Örneğin, bu parametre hareketli bir parçanın eylemsizliği veya kütlesi olabilir. Ayrıca, sistemin tasarımına ters düşmeyecek düzeyde verimliliği azaltmaksızın yapılacak parametre değişikliklerinin yapılmasını engelleyen güçlüklerde söz konusu olabilir. Bunu yapmak için kaotik sistemin, basit ve genellikle doğrusal özerk bir sisteme (kontrolör) bağlanması yeterli olacaktır [46]. Bu durumda, ana sisteme bağlanan özerk doğrusal sistem, kaotik davranışları veya kararsız yörüngeleri elimine etmeye çalışacaktır. Bu yöntem, ana

sistemin herhangi bir parametresinin değiştirilmesinin zor olduğu durumlarda kullanılmaktadır.

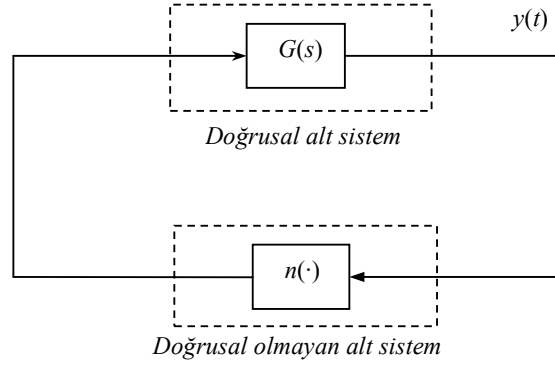
Genel olarak kaos kontrol yöntemleriyle ilgili genel bir değerlendirme yapılırsa, eğer amaç sadece kaosun bastırılması ise geri beslemeli olmayan yöntemler daha çok tercih edilir. Çünkü, bu yöntemlerin uygulanması daha basittir. Geri beslemeli yöntemlerin temelinde ise kaotik çekici içinde bulunan bir çok kararsız periyodik yörüngeden bir tanesini alarak kararlı hale getirmek vardır. *OGY* metodu, gürültüye duyarlı olduğu için gürültünün etkisi dikkat edilecek ilk etmendir. Bunun için bu metodun kullanıldığı kontrol sistemlerinin aşırı gürültünün olduğu durumlarda hatalı çalışma olasılığı yüksektir. Bu nedenle, sistemde gürültü varsa Pyragas'ın yöntemleri tercih edilebilir. Ayrıca *OGY* metodu, karmaşık bilgisayar analizlerine ihtiyaç duyar ve bu da maliyeti artırır.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ AKTARIM İŞLEVİ ANALİZİ VE GENESİO-TESİ KAOS KESTİRİM YÖNTEMİ

Kaotik sistemlerin deterministik olması, kaosu kontrolünü büyük oranda kolaylaştırmaktadır. Fakat, sistemin hangi parametrelerde kaotik davranış gösterdiğinin bulunması işlemi, zor ve zahmetli bir iştir. Bu nedenle, bir önceki bölümde verilen yöntemlerin dışında, önerilen frekans tanım bölgesi analiz yöntemleriyle de doğrusal olmayan sistemlerde çatallaşma tespit edilebilir [76-77]. Ayrıca frekans tanım bölgesi yaklaşımlarıyla, kaos kestirimi Genesio-Tesi varsayımı ile yapılabilmektedir [78-79]. Genesio-Tesi varsayımı ile, sistemin hangi sistem parametrelerinde kaosu beklenmesi gerektiği, hangilerinde kaosu kesinlikle gözlenemeyeceği tespit edilebilmektedir. Bu sayede, kaotik davranışın oluşmasının beklendiği sistem parametreleri sonsuz bir uzaydan sınırlı bir uzaya indirgenebilmektedir.

Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi kaosu kontrolü, ulaşılabilir sistem parametreleri değiştirilerek sistemi bu davranıştan çıkarmak veya bu davranışın içerisine sokmakla mümkün olabilmektedir. Kontrol sistemlerinde, sistem parametreleri üzerine bir müdahalenin istenmediği veya imkanı olmadığı durumlarda, doğrusal sistemlerin kontrolü için *PID* tipi kontrolörler hem avantajlı ve hem de pratiktir. Benzer şekilde, doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü için de kontrolör parametreleri ile bu işlem sağlanabilmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken konu, Şekil 6.1’de verilen kaotik davranış göstermesi olanaksız doğrusal olmayan Lur’e tip bir sistem, bir *PI* kontrolörle kontrol edilmek istendiğinde, sisteme yüklediği ek dinamikten dolayı kontrolör parametrelerine göre kaotik davranış gösterebilmesidir. Bu yapıdaki sistemler için kaos kestirim yöntemi olan Genesio-Tesi varsayımı kullanılarak, parametre ayarlaması yapılabilmektedir [80]. Bu sayede, *PI* kontrolör parametrelerine göre sistem kaotik bölgeye sokulup çıkarılabilmektedir. Bu sonuç, kaotik sistemlerin *PI* tipi kontrolörle kontrol edilmesini mümkün kılmaktadır.

Bir sonraki bölümde verilecek olan kesir dereceli PI^a kontrolörün, doğrusal olmayan Lur tipi özerk sistem üzerine etkilerini analiz edebilmek için, *GAI* analizi ve Genesio-Tesi varsayımı kullanılacaktır. Bu ki konu örneklerle devam eden alt bölümlerde verilecektir.



Şekil 6.1. Lur'e tipi sistem

6.1. Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi

GAI metodu, genel olarak doğrusal olmayan sistemlerde görülebilen periyodik osilasyonların analizinde kullanılır [43,81]. Doğrusal olmayan sistemlerde gözlenen periyodik davranışların en başında $LÇ$ gelir. Bazı sistemlerde $LÇ$ istenebilir. Örnek olarak, elektronikte, laboratuvarlarda kullanılmak amacıyla osilatörlerde istenebilir. Ama yinede çoğu kontrol sisteminde $LÇ$ istenmez. Genel olarak GAI metodu ile $LÇ$ dalga şekli hakkında kesin bir bilgi elde edilmese de, görülebilecek $LÇ$ 'nin kararlılığı ile yaklaşık genlik ve frekansının tespiti mümkündür. Bununla beraber GAI metodu, doğrusal olmayan sistemlerin $LÇ$ davranış göstermesini sağlamak veya $LÇ$ 'den kurtarmak için kompanzatör tasarımında da kullanılmaktadır.

6.1.1. Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi

Denklem (5.3)'de tanımlanan, Şekil 6.1'deki Lur'e tipi sistem göz önünde bulundursun ve sistemin çözümü $y(t)=B\sin\omega t$ olsun. Burada, B ve ω pozitif tamsayılardır. Bu durumda doğrusal olmayan alt sistem $n(y)$ 'nin çıkışı;

$$n(.) = \sum_{k=1}^{\infty} \{F_{kR}(B, \omega) \sin(k\omega t) + F_{kI}(B, \omega) \cos(k\omega t)\} \quad (6.1)$$

biçimindeki harmonik bileşenlerden oluşacaktır. Ana harmonik dışındaki bileşenler ihmal edilirse, Şekil 6.1'teki sistemin karakteristik denklemi;

$$(1 + G(j\omega))((F_{1R}(B, \omega) + jF_{1I}(B, \omega)) / B) = 0 \quad (6.2)$$

olacaktır. Şekil 6.1’de görülen Lur’e tipi sistem için, Denklem (6.2)’de verilen karakteristik denklemlerdeki Fourier katsayıları, Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi ($TGG\hat{A}\hat{I}$), $N \cong (F_{1R} + jF_{1I}) / B$ ile tanımlanarak yerine konursa,

$$1 + G(j\omega)N(B, \omega) = 0 \quad (6.3)$$

elde edilir. Burada, $n(\cdot)$ tek değerli doğrusal olmayan bir fonksiyondur. Bu durumda, Şekil 6.1’teki Lur’e tipi sistem $G(s)$ ve $N(B)$ tarafından temsil edilmiş olacaktır. $N(B, \omega)$ ifadesi (6.4)’de verilen eşitlikle bulunabilir.

$$N(B, \omega) = \frac{F_{1R} + jF_{1I}}{B} = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t + j \int_{-\pi}^{\pi} (f(B \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t) \right) \quad (6.4)$$

6.1.2. Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi

Bu analiz yönteminin anlaşılması için, Şekil 6.1’deki sistem göz önünde bulundursun ve sistem çıkışı $y(t) = A + B \sin \omega t$ olsun. Burada B ve ω pozitif tamsayılardır. Bu durumda doğrusal olmayan alt sistem $n(y)$ ’nin çıkışı;

$$n(\cdot) = F_o(A, B, \omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \{F_{kR}(A, B, \omega) \sin(k\omega t) + F_{kI}(A, B, \omega) \cos(k\omega t)\} \quad (6.5)$$

biçimindeki harmonik bileşenlerden oluşacaktır. Ana harmonik dışındaki bileşenler ihmal edilirse, Şekil 6.1’deki sistemin karakteristik denklemi;

$$(1 + G(0)F_o(A, B, \omega) / A) = 0 \quad (6.6)$$

$$(1 + G(j\omega))((F_{1R}(A, B, \omega) + jF_{1I}(A, B, \omega)) / B) = 0 \quad (6.7)$$

olur. Denklem (6.6) *dc* biası, Denklem (6.7) frekans terimini temsil etmektedir. Şekil 6.1’de verilen Lur’e tipi sistem için (6.6) ve (6.7)’de verilen karakteristik denklemlerde ki Fourier katsayıları, Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi (*ÇGGAİ*), $N_o \cong F_o / A$ ve $N_1 \cong (F_{1R} + jF_{1I}) / B$ ile tanımlanarak yerine konursa

$$1 + G(0)N_o(A, B, \omega) = 0 \quad (6.8)$$

$$1 + G(j\omega)N_1(A, B, \omega) = 0 \quad (6.9)$$

elde edilir. Burada, $n(.)$ tek değerli doğrusal olmayan bir fonksiyondur. Bu durumda Şekil 6.1’deki Lur’e tipi sistem, $G(s)$, $N_o(A, B, \omega)$ ve $N_1(A, B, \omega)$ tarafından temsil edilmiş olacaktır. $N_o(A, B, \omega)$ ve $N_1(A, B, \omega)$ ifadeleri (6.10.a ve b) denklemleriyle elde edilir.

$$N_o(A, B, \omega) = \frac{F_o}{A} = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} f(A + B \sin \omega t) d\omega t \quad (6.10.a)$$

$$N_1(A, B, \omega) = \frac{F_{1R} + jF_{1I}}{B} = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(A + B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t + j \int_{-\pi}^{\pi} f(A + B \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t \right) \quad (6.10.b)$$

6.1.3. Limit Çevriminin Kararlılığı

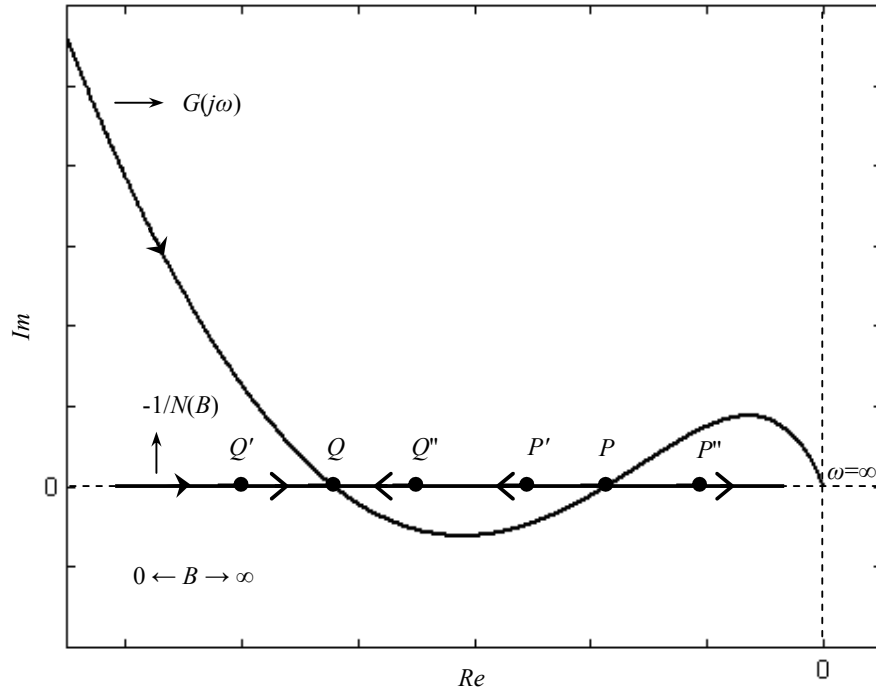
Denklem (6.3), (6.11)’deki gibi tekrar yazılarak, $LÇ$ ’nin karakterize ettiği B ve ω değerleri bulunur.

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(B)} \quad (6.11)$$

$LÇ$ ’nin kararlılığı, $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ ’nin kompleks düzlemdeki değişimlerinin kesişme noktası veya noktalarına komşu bölgelere bakılarak değerlendirilir. $G(j\omega)$ eğrisi $-1/N(B)$ ’yi tamamen çevreliyorsa (içine alıyorsa) bu sistem kararsızdır. Bu durumda, sistemin çıkışında genliği giderek artan bir sinüzoidal işaret görülecektir. Eğer $G(j\omega)$ eğrisi hiçbir şekilde $-1/N(B)$ ’yi çevrelemiyor ise, sistem kararlıdır. Bu durumda sistem çıkışında

genliği sıfıra giden bir sinüzoidal işaret beklenmelidir. $G(j\omega)$ eğrisi $-1/N(B)$ 'nin bir bölümünü çevreliyor, bir bölümünü çevrelemediği durumda çevrelediği kısımda bir nokta alındığında sistemin çıkışının genliği artacak, çevrelemediği kısımda bir nokta alındığında genlik azalacaktır. Kesişme noktası için osilasyonun genliği, B 'ye bağlı olarak $-1/N(B)$ 'nin değişiminden, frekansı olan ω 'nın değeri de $G(j\omega)$ 'nin değişiminden elde edilir.

$G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi Şekil 6.2'de gösterildiği gibi olsun ve $G(j\omega)$ 'nin sağ yarı s -düzleminde hiç kutbu olamadığı kabul edilsin.



Şekil 6.2. $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi

Görüldüğü gibi $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ değişimleri, P ve Q olmak üzere iki farklı noktada kesişmekte ve bu noktalarda Denklem (6.11) sağlanmaktadır. $-1/N(B)$ değişimi üzerinde bulunan P noktasındaki B 'nin değeri, Q noktasındaki B 'nin değerinden küçük olduğu kabul edilsin. P noktasındaki osilasyonun kararlılığı incelenmek istenirse, bu noktada çalışan sistemde, sistem parametrelerinde bir değişme veya bozucu bir etki olduğunda bu çalışma noktası P' veya P'' 'ye kayacaktır. P' noktasına kayarsa bu nokta, $G(j\omega)$ eğrisi tarafından çevrelenmediği için B genliği azalacak ve P noktasından uzaklaşılacaktır. Eğer bozulmanın etkisiyle çalışma noktası P'' 'ne kayarsa bu defa $G(j\omega)$ eğrisi bu noktayı içine aldığından B genliği artacak ve çalışma noktası yine P noktasından uzaklaşacaktır. Buna göre P noktası, *bir noktadan uzaklaşan* karakteristiğe sahiptir ve bu

nokta kararsız bir $LÇ$ 'ye karşılık gelmektedir. Yani, Denklem (6.11)'den analitik olarak B_p ve ω_p değerleri hesaplanırsa bile sistemde $LÇ$ gözlenmeyecektir. Aynı şekilde bir bozucu etkiyle Q çalışma noktası Q' veya Q'' 'ne kayarsa; Q'' 'ne doğru kaydığında $G(j\omega)$ tarafından çevrili bu noktada, genlik artarak Q noktasına kayacaktır, Q'' 'ne kaymışsa bu nokta $G(j\omega)$ tarafından çevrili olmadığından dolayı genlik azalacak ve çalışma noktası Q noktasına geri dönecektir. Q noktası, *bir noktada birleşen* karakteristiğe sahiptir ve bu noktada $LÇ$ kararlıdır. Başka bir deyişle Denklem (6.11) ile analitik olarak hesaplanan B_Q ve ω_Q 'nun yaklaşık olarak karakterize ettiği bir $LÇ$ gözlenir.

Yukarıda anlatılanlar özetlenecek olursa;

“ $G(j\omega)$ eğrisi ile $-1/N(B)$ 'nin her bir kesişme noktası, bir $LÇ$ 'ye karşılık gelmektedir. Eğer, kesişme ve yakınındaki noktalara bakıldığında, kesişme noktasından itibaren $-1/N(B)$ değişiminin B artım yönündeki kısmı, $G(j\omega)$ tarafından çevrelenmiyorsa, bu kesişme noktası kararlı bir $LÇ$ 'ye karşılık gelir. Aksi halde $LÇ$ kararsızdır”

Bu noktada kısa bir değerlendirme yapılmak istenirse, Nyquist kararlılık kriterine göre doğrusal geri beslemeli sistemlerde $G(j\omega)$ değişimi $-1+j0$ noktasından geçtiği durumda, sistem “*başlangıç şartlarına bağlı osilasyonlar*” yapacaktır. Fakat GAI metoduyla, doğrusal olmayan geri beslemeli sistemler incelendiğinde, $G(j\omega)$ eğrisi ile $-1/N(B)$ 'nin kesiştiği nokta veya noktaların karakterize ettiği ve kararlılığa bağlı olarak “*başlangıç şartlarından bağımsız osilasyonlar*” gözlenecektir. Bu doğrusal sistemler ile doğrusal olmayan sistemler arasındaki önemli bir farklılıktır.

Örnek 6.1: Örnek olarak, Çelik [80]'de incelenen sistem verilecektir. Şekil 6.1'de verilen sistemdeki doğrusal alt sistem,

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}, \quad a, b, c > 0 \quad (6.12.a)$$

ve doğrusal olmayan alt sistem de,

$$n(y) = -y^3 \quad (6.12.b)$$

kabul edilerek sistemde; $LÇ$ 'nin varlığı, kararlılığı, varsa genliği ve frekansı $TGGAI$ analiziyle incelenecektir.

Çelik [80]'de Denklem (6.12.b)'nin $TGGAI$ aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

$$N(B) = -\frac{3}{4}B^2 \quad (6.12.c)$$

Bu ifade Denklem (6.3)'te yerine konursa,

$$\left(\frac{c - a\omega^2}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} - j \frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) \left(-\frac{3}{4}B^2 \right) = -1 \quad (6.12.d)$$

olur. Denklem (6.12.d)'nin sanal kısmı 0'a eşitlenirse,

$$\left(\frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) \left(-\frac{3}{4}B^2 \right) = 0 \quad (6.12.e)$$

$\omega = \sqrt{b}$ olarak bulunur. Denklem (6.12.d)'nin reel kısmı da -1 'e eşitlenerek,

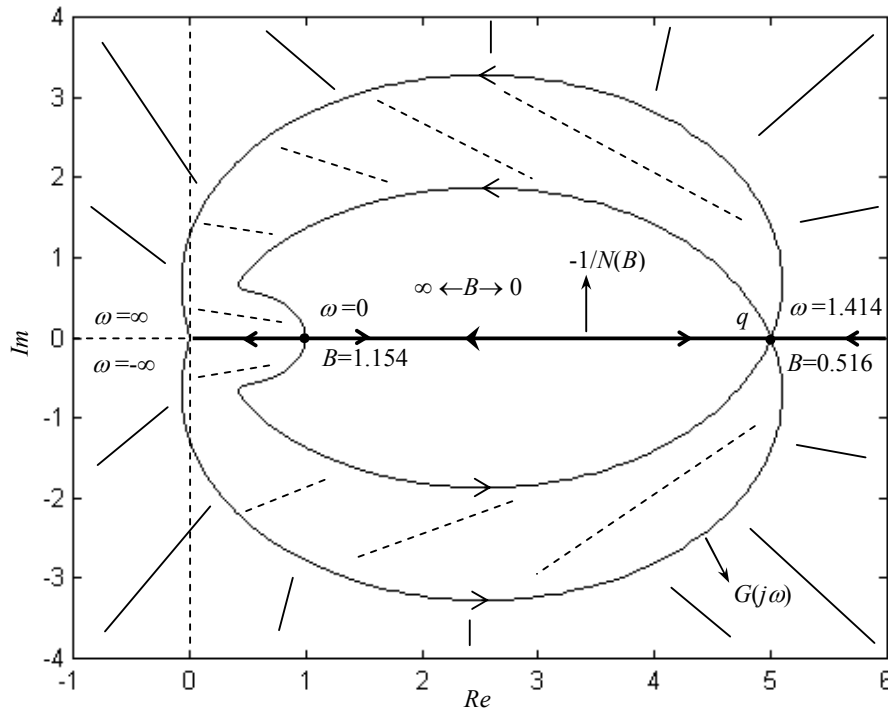
$$\left(\frac{c - a\omega^2}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) \left(-\frac{3}{4}B^2 \right) = -1 \quad (6.12.f)$$

$B = \sqrt{\frac{4}{3}(c - ab)}$ olarak bulunur. Denklem (6.12.a)'daki sistem parametreleri, sistemde $LÇ$ oluşma şartlarını sağlayacak şekilde $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ alındığında sistemde oluşacak olan başlangıç şartlarından bağımsız osilasyonların genliği, $B = \sqrt{\frac{4}{3}(c - ab)} = 0.516$ ve frekansı $\omega = \sqrt{b} = 1.414 \text{ rad/s}$ bulunur. Bu durumda sistem çıkışı,

$$y_0(t) = 0.516 \sin(1.414t)$$

$$(6.12.g)$$

olur. Fakat, Denklem (6.12.g) ile ifade edilen osilasyonun sistemin çıkışında pratikte gözlemlenebilmesi için $LÇ$ kararlı olmalıdır. $TGGAİ$ metoduyla tespit edilen $LÇ$ kararlılığının incelenmesi için Denklem (6.11) sağlanmak koşuluyla, $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimlerine bakılmalıdır. Kararlılık için, iki değişimin kesişme noktasının *bir noktada birleşen* karakteristiğe sahip olması gerekir. Şekil 6.3'de $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimleri verilmiştir. Şekile bakıldığında $G(j\omega)$ tarafından; taralı olmayan bölge saat yönünün tersinde 2 defa, $N=-2$, kesikli çizgilerle taranmış bölge saat yönünün tersiyle 1 defa, $N=-1$ çevrelenmiş ve düz çizgilerle taralı bölge hiç çevrelenmemiştir, $N=0$.



Şekil 6.3. $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi

Bu sistem parametrelerinde açık çevrim transfer fonksiyonunun kutupları; $s_1=0.044+j1.428$, $s_2=0.044-j1.428$ ve $s_3=-0.489$ olmak üzere üç tanedir. Bunlardan s_1 ve s_2 sağ yarı s -düzleminde, $P=2$.

Nyquist kararlılık kriterine göre, kapalı çevrimli sistemin kutupları açık çevrimli sistemin sıfırlarına eşittir ve açık çevrimli sistemin sıfırları da, $Z=P+N$ dir. Buna göre Şekil 6.3'deki düz çizgilerle taralı olan bölgeye denk gelen $0 < B < 0.516$ aralığındaki B değerleri için Nyquist kararlılık kriteri uygulanırsa ($Z=2-0=2$), Şekil 6.1'deki sistemin 2 kutbu sağ yarı s -düzleminde ve sistem kararsız bir davranış gösterir. Dolayısıyla Şekil 6.1'deki sistemin çıkışındaki işaret artarak denge noktası olan q noktasına kayar. Şekil 2.9'da kesikli çizgilerle taralı olan bölge $\infty > B > 1.154$ ve taralı olmayan bölge $1.154 > B > 0.516$ aralığına denk gelir. Buraya da Nyquist kararlılık kriteri uygulanırsa, taralı olmayan bölgedeki B değerlerinde ($Z=2-2=0$), Şekil 6.1'deki sistemin hiç bir kutbu sağ yarı s -düzleminde değildir. Bu aralıkta sistem kararlıdır ve Şekil 6.1'deki sistemin çıkışındaki işaretin genliği azalarak denge noktası olan q 'ya kayacaktır. Aynı şekilde kesikli çizgilerle taranmış bölgede kalan B değerlerine bakıldığında burada da Şekil 6.1'deki sistemin sağ yarı s -düzleminde ($Z=2-1=1$), 1 tane kutbu vardır. Bu durumda bu bölgeye ait B değerlerini sağlayan başlangıç şartlarında Şekil 6.1'deki sistem kararsız bir davranış gösterecek ve çıkışındaki işaretin genliği artarak sonsuza gidecektir.

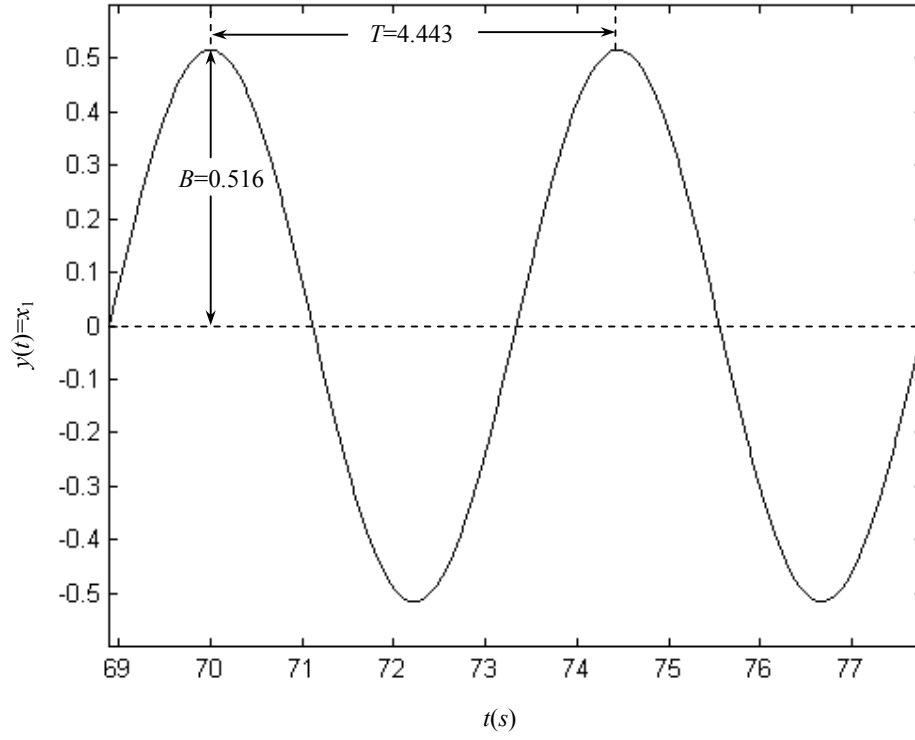
Yukarıda yapılan değerlendirmelere göre q noktası, *bir noktada birleşen* karakteristiğe sahiptir. Bu durumda Denklem (6.11)'i sağlayan ve q noktasının karakterize ettiği bir $LÇ$ pratik olarak gözlenecektir. Bu sonucun doğruluğunu ve metodun etkinliğini görebilmek için örnek sistemin, simülasyon sonucunda elde edilen çıkışın, $y_0(t)=x_1$, zamana göre değişimi Şekil 6.4'te ve durum uzay diyagramı farklı iki başlangıç şartı ($x_{01}(-0.2, -0.8, 0)$ ve $x_{02}(0.2, 0.1, 0)$) için Şekil 6.5'te verilmiştir.

Örnek 6.2: Bu örnekte, Şekil 6.6'te verilen ve Uçar [82]'de incelenen PI kontrollü doğrusal olmayan Lur'e tipi sistem incelenecektir. Bunun için sisteme ait bloklar aşağıda verilen denklemlerle ifade edilecektir.

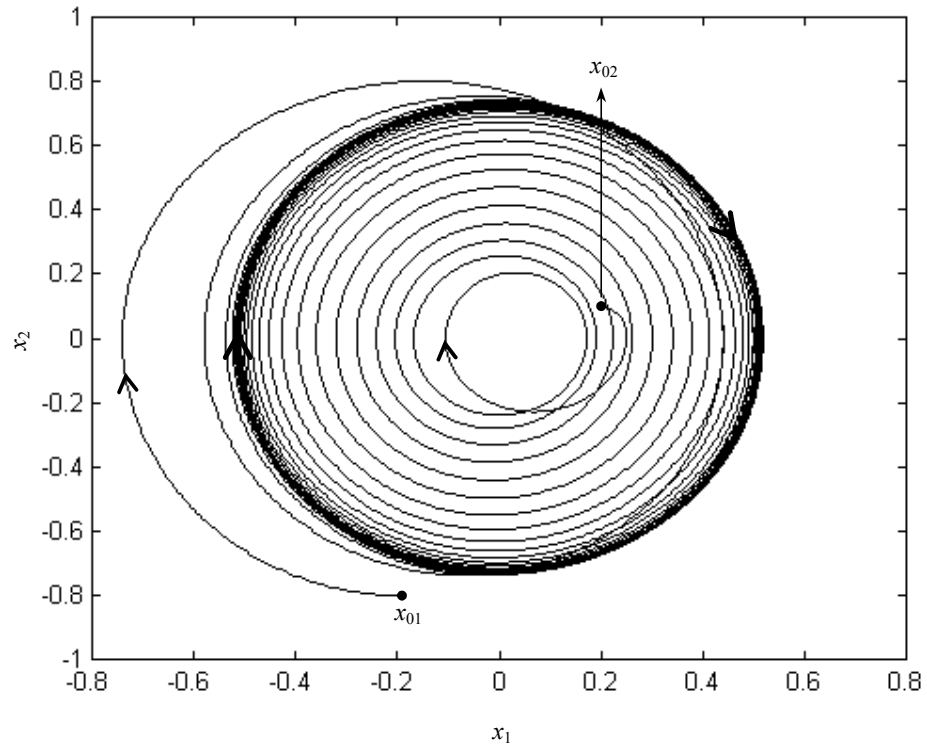
$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (6.13.a)$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 1} \quad (6.13.b)$$

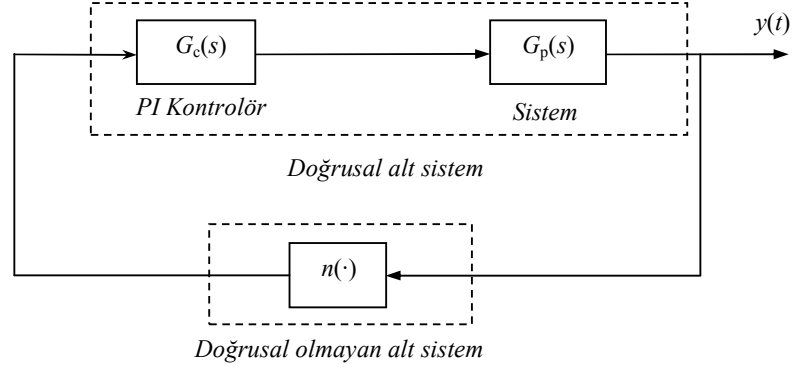
$$n(y) = y^3 \quad (6.13.c)$$



Şekil 6.4. $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için sistem çıkışından bir kesit



Şekil 6.5. $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için sistemin iki farklı başlangıç şartı için durum uzay diyagramı



Şekil 6.6. *PI* kontrolörlü doğrusal olmayan Lur'e tipi sistem

Bu durumda, kapalı çevrimli yapının doğrusal alt sisteminin transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 2s^2 - s} \quad (6.13.d)$$

olur. Burada K_p ve K_i sırasıyla oransal ve integral katsayılarıdır. Genellikle $G_c(s)$ 'in genliği üzerinde herhangi bir sınırlama olmadığı kabul edilmekle beraber, pratik uygulamalar için özellikle küçük K_p ve K_i değerleri üzerinde durulmuştur. Kapalı çevrimli sistemin frekans tanım bölgesinde karakteristik denklemi, $s=j\omega$ için;

$$\left(\frac{-(K_p \omega^4 + (2K_i + K_p)\omega^2)}{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2} - j \frac{(K_i - 2K_p)\omega^3 + K_i \omega}{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2} \right) \left(\frac{3}{4} B^2 \right) = -1 \quad (6.13.e)$$

elde edilir. Böylece kapalı çevrimli sistemde oluşacak osilasyonun frekansı Denklem (6.13.e)'den

$$\omega = \sqrt{\frac{K_i}{2K_p - K_i}} \quad (6.13.f)$$

olarak elde edilir, $\omega > 0$ olması için;

$$K_{si} > K_i > 0; \quad K_{sp} > K_p > K_i / 2 \quad (6.13.g)$$

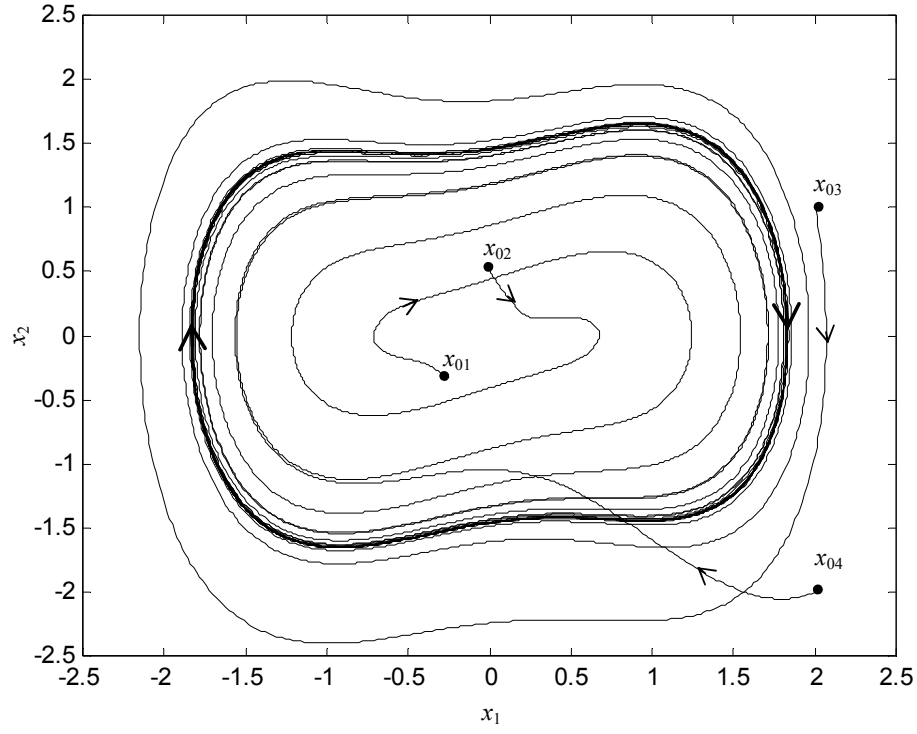
olmalıdır ve burada K_{sp} ve K_{si} pratikte olabilecek en büyük kazanç değerleridir. Kapalı çevrimde oluşacak osilasyonun genliği;

$$B = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2}{K_p \omega^4 + (2K_i + K_p)\omega^2}} \quad (6.13.h)$$

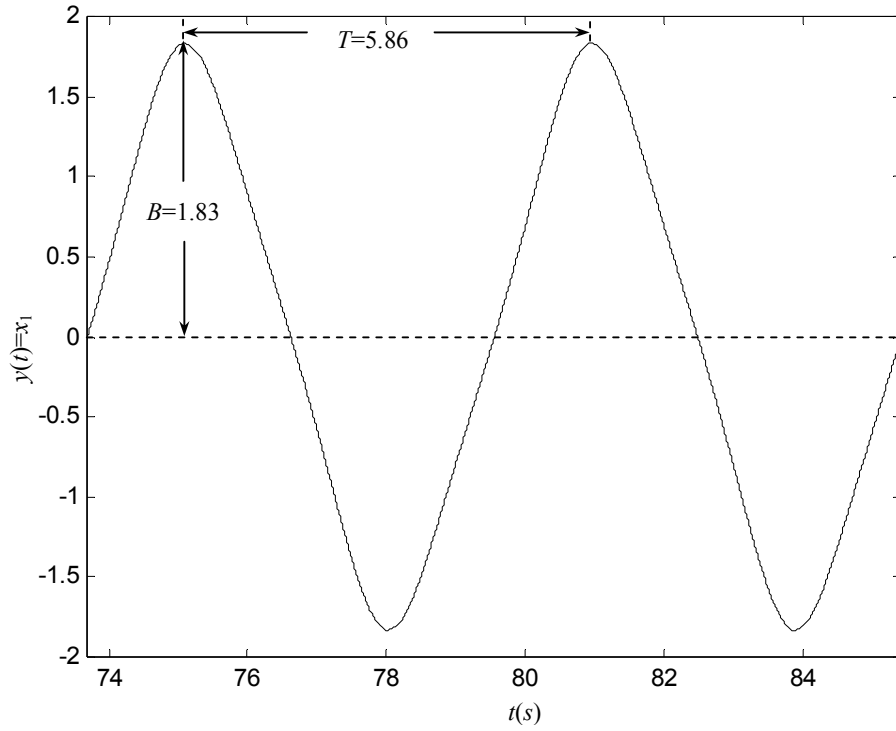
biçiminde Denklem (6.13.e)'den elde edilir. Denklem (6.13.f) ve (6.13.h)'de analitik olarak görüldüğü gibi Şekil 6.6'daki sistemde $G_c(s)$, PI tipi bir kontrolör olduğu durumda kapalı çevrimli sistemde bir $LÇ$ oluşmaktadır. Bu $LÇ$, Şekil 6.3'deki sistemin girişine her hangi bir işaret uygulanmadan, sadece durum değişkenlerinin başlangıç şartlarının sıfırdan farklı olduğu durumda oluşmaktadır. PI kontrolör kazançlarının pratikte alacağı en büyük değerler, $K_{si} \equiv 2$ ve $K_{sp} \equiv 1$ olduğu düşünülerek, $K_i = 1$ ve $K_p = 0.9$ alınırsa, Şekil 6.6'daki kapalı çevrimli sistemde oluşabilecek $LÇ$ genliği $B = 1.82$ ve frekansı $\omega = 1.12$ rad/s değerlerinde GAI analizi yardımıyla analitik olarak bulunur. Bu değerler yaklaşık değerler olmakla beraber, gerçek değerler ancak kapalı çevrimli sistemin nümerik çözümünde elde edilebilir. Şekil 6.7'de, $K_i = 1$ ve $K_p = 0.9$ için sistemde beklenen $LÇ$ değişimi farklı dört başlangıç şartı; $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0.5), (-0.3, -0.3), (2, 1)$ ve $(2, -2)$ için sistemin durum uzay diyagramında, x_1 durum değişkeninin x_2 durum değişkenine göre çizdirilmesiyle elde edilen değişim gösterilmiştir. $LÇ$, durum değişkenlerinin başlangıç şartı ne olursa olsun genliği $B = 1.82$ ve frekansı $\omega = 1.12$ rad/s civarındadır. $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ denge noktası hariç, olabilecek tüm durum değişkenlerinde Şekil 6.6'daki kapalı çevrimli sistem, Şekil 6.8'de verilen ve genliği $B = 1.83$, periyodu $T = 5.84$ s olan $LÇ$ davranışı gösterir.

Şekil 6.8'de görüldüğü gibi kapalı çevrimli sistemde oluşan ve nümerik olarak bulunan $LÇ$ genliği ve frekansı daha önce GAI uygulanarak bulunan sonuçlara çok yakındır.

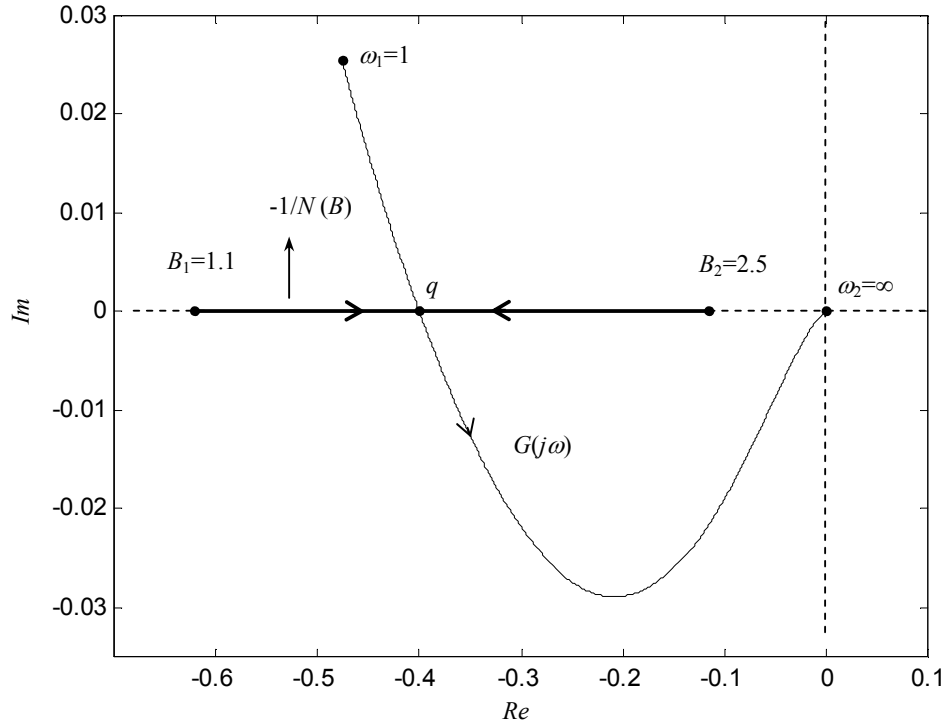
PI Kontrolörlü Sistemde Oluşan Limit Çevrim Kararlılığı: Şekil 6.9'da Denklem (6.13.e)'nin grafiksel çözümü $\omega_1 < \omega < \omega_2$ aralığı ve $B_1 < B < B_2$ aralığı için çizdirilmiştir. Şekil 6.9'da, $-1/N(B)$ doğrusu ve $G(j\omega)$ eğrisi birbirini q noktasında kesmektedir ve bu noktada bir $LÇ$ vardır.



Şekil 6.7. $K_i=1$ ve $K_p=0.9$ için 4 farklı başlangıç şartında sistemin durum uzay diyagramı



Şekil 6.8. $K_i=1$ ve $K_p=0.9$ için Örnek 6.2’de verilen sistem çıkışından bir kesit



Şekil 6.9. $K_i=1$ ve $K_p=0.9$ için $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi

Şekil 6.9'daki $-1/N(B)$ üzerinde işaretlenen ok yönleri bu q noktasının bir noktada birleşen karakteristikte olduğunu göstermektedir. Bu durumda, q noktasındaki $LÇ$ kararlıdır.

Örnek 6.3: Burada, kararsız $LÇ$ davranışa örnek olarak, (6.14.a, b ve c) bağıntılarıyla tanımlanan sistem blokları için Şekil 6.6'da verilen PI kontrollü doğrusal olmayan Lur'e tipi sistem ele alınacaktır.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (6.14.a)$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad (6.14.b)$$

$$n(y) = y^3 \quad (6.14.c)$$

Şekil 6.6’da $G_c(s)$ ile $G_p(s)$ ’den oluşmuş doğrusal alt sistem, $G(s)$ ve $n(y)$ doğrusal olmayan elemanın $TGGAI\hat{n}$ ’nı, $N(B)$ ’nin oluşturduğu kapalı çevrimli sistemin frekans karakteristik denklemi,

$$\left(\frac{-K_p \omega^2 + (K_p - 2K_i)}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} - j \frac{(2K_p - K_i)\omega^2 + K_i}{\omega^5 + 2\omega^2 + \omega} \right) \left(\frac{3B^2}{4} \right) = -1 \quad (6.14.d)$$

olarak elde edilir. Şekil 6.6’da verilen sistemde oluşacak osilasyonların frekansı ω , Denklem (6.14.d)’nin sanal kısmının sıfıra eşitlenmesi ile;

$$\omega = \sqrt{\frac{K_i}{K_i - 2K_p}} \quad (6.14.e)$$

bulunur ve $\omega > 0$ olması için;

$$\begin{aligned} K_i &> 0 \\ K_p &< K_i / 2 \end{aligned} \quad (6.14.f)$$

dir. Oluşabilecek osilasyonun genliği de Denklem (6.14.d)’nin reel kısmı -1 ’e eşitlenerek bulunur.

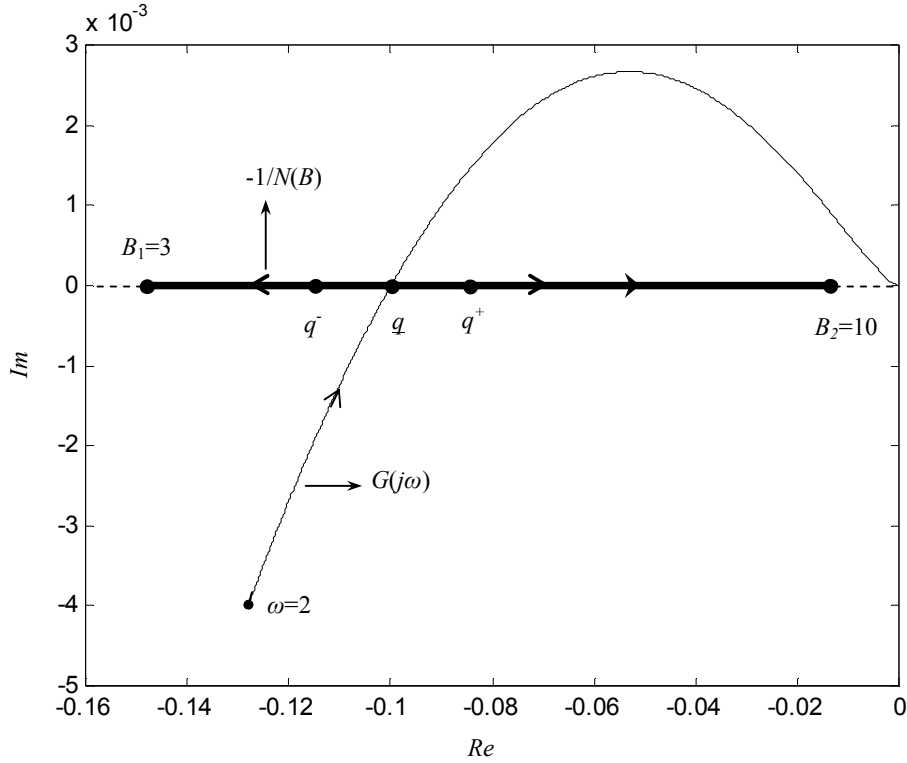
$$B = \sqrt{\frac{4(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)}{3(K_p \omega^2 + 2K_i - K_p)}} \quad (6.14.g)$$

Bu sistemde, $LÇ$ ’nin olabilmesi için kontrol parametreleri K_p ve K_i Denklem (6.14.f)’yi sağlayacak şekilde, $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ alınırsa, beklenen $LÇ$ genliği $B=3.65$ ve frekansı $\omega=2.23 \text{ rad/s}$ olur.

Bu aşamada beklenen $LÇ$ kararlılığı için bir şey söylemek mümkün değildir ve ancak Denklem (6.14.d)’nin grafiksel çözümünün analizinden anlaşılabılır. Şekil 6.10’da $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için $\omega=[2,+\infty)$ ve $B=[3,10]$ aralığı için $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ ’nin değişimi kompleks düzlemde verilmiştir.

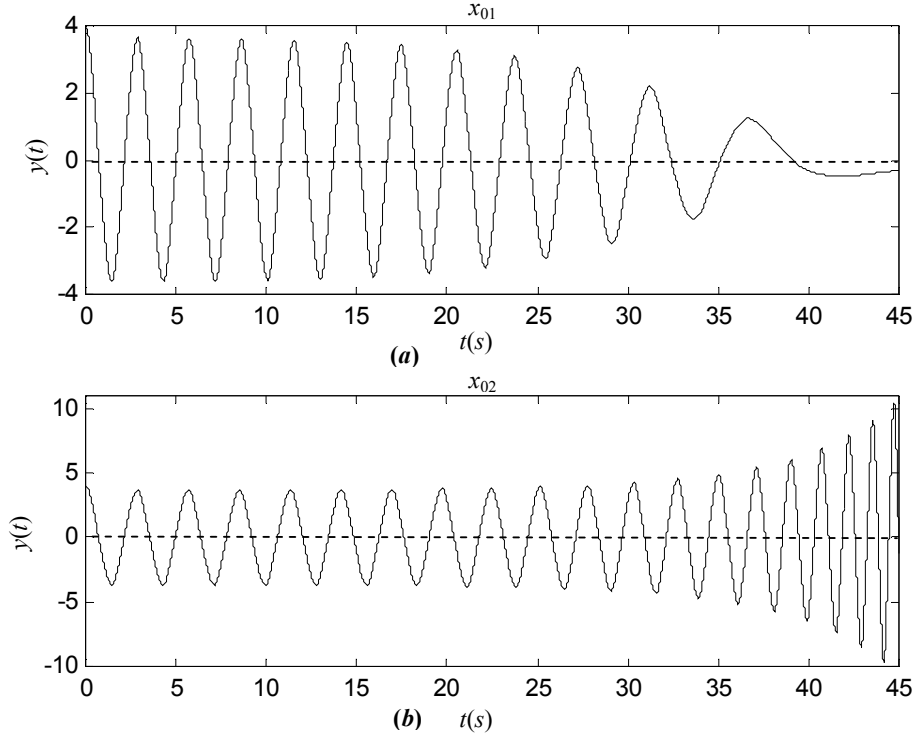
PI Kontrolörlü Sistemde Oluşan Limit Çevrim Kararlılığı: Şekil 6.10’da görüldüğü gibi $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$, q noktasında kesişmektedir ve kapalı çevrimli sistem bu noktada Denklem (6.14.e)’deki frekansa ve Denklem (6.14.g)’deki genliğe sahiptir. Buna göre q noktasında dengedeki sistem, bir bozucu tarafından q^+ noktasına kayarsa $-1/N(B)$, $G(j\omega)$ eğrisi içerisinde yer alacaktır. Bu durumda q^+ noktasındaki osilasyonun genliği artarak sonsuza gidecektir ve sistem kararsız bir davranış gösterecektir. Eğer bozucu etki sistemi q^- noktasına kaydırırsa, bu durumda $-1/N(B)$, $G(j\omega)$ eğrisi dışında kalacaktır ve osilasyonun genliği azalarak sıfıra gidecektir. Bu davranış, doğrusal sistemlerde görülen asimptotik kararlı bir davranıştır. Sonuç olarak, $LÇ$ ’nin meydana geldiği q denge noktasında oluşacak ufak bir sapmada sistem bu denge noktasından uzaklaşacaktır. Şekil 6.10’daki $-1/N(B)$ üzerinde gösterilen okların yönleri, bu değişimi göstermektedir. Buna göre, q noktasındaki $LÇ$ kararsızdır.

Bu yapıdaki bir sistem, durum değişkenlerinin başlangıç şartına veya kontrol parametrelerinin değerlerine göre farklı iki davranış tipi; kararlı davranış veya kararsız davranış gösterecektir. Burada kontrol parametreleri, $K_p=0.4$ ve $K_i=1$, sabit seçilirse, Şekil



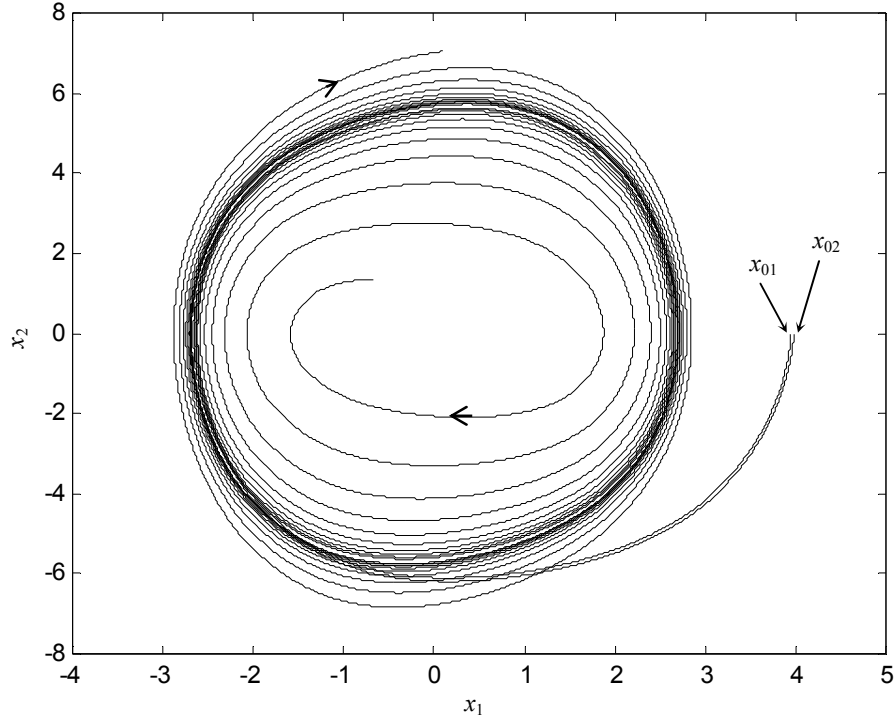
Şekil 6.10. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ ’nin kompleks düzlemdeki değişimi

6.10'daki q^+ noktasını içine alan q noktasının sağına denk gelen durum değişkenlerinin başlangıç değerleri için sistem kararsız olacaktır. q^- noktasını içine alan, q noktasının solunda yer alan durum değişkenlerinin başlangıç değerleri için sistem, asimptotik kararlı davranış gösterecektir. Şekil 6.11'de birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için sistemin zaman cevabı, *MATLAB/Simülink* ortamında benzetim yoluyla elde edilmiştir.



Şekil 6.11. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için Örnek 6.3'te verilen sistemin **a)** $x_{01}(3.95,0,0)$ başlangıç şartı için çıkışı, **b)** $x_{02}(3.98,0,0)$ başlangıç şartı için çıkışı

Şekil 6.11'de görüldüğü gibi, $x_{01}(3.95,0,0)$ başlangıç şartında sistem sönümlü bir osilasyon yapmakta, fakat $x_{02}(3.98,0,0)$ başlangıç şartı için sistem kararsız bir davranış sergilemektedir. Dikkat edilirse x_{01} başlangıç şartı ile x_{02} başlangıç şartı birbirine çok yakın değerlerdir ve sistemin geçici durumu $LÇ$ 'nin karakterize ettiği osilasyon büyüklüklerine yakındır. Şekil 6.12'de, bu iki farklı başlangıç şartı için sistemin durum uzay diyagramında iki farklı yörünge gözlenmektedir. Yörünge, özellikle kararsız $LÇ$ etrafında yoğunlaştıktan sonra saparak farklı yerlere yönelmişlerdir. Buradan da anlaşılacağı gibi, sistemin dinamiğinde başlangıç şartları belirleyici durumdadır.



Şekil 6.12. $K_p=0.4$ ve $K_f=1$ için Örnek 6.3'te verilen sistemin $x_{01}(3.95,0,0)$ ve $x_{02}(3.98,0,0)$ başlangıç şartları için durum uzay diyagramı

6.2. Genesio-Tesi Kaos Kestirim Yöntemi

Doğrusal olmayan sistemlerde gözlenen kaotik davranıştan, kaçınmak veya üretmek için sistem parametrelerinin ayarlanmasını sağlayacak genel bir metot henüz mevcut değildir. Fakat mühendislik sistemlerinin analiz ve tasarımında kullanılan frekans cevabı tabanlı yöntemler yardımıyla, kaotik davranışın gözleneceği parametre kestirimlerinin yapılması mümkündür. Harmonik denge metodu olarak ta bilinen bu yöntemlerden birisi de, aşağıdaki gibi ifade edilen Genesio-Tesi varsayımıdır [78]:

“Bir geri beslemeli Lur’e tipi bir sistem uygun filtreleme etkisi ile limit çevrim (LÇ) ve denge noktası (DN) belirli kararlılık karakteristiklerinde kendileri aralarında etkileşime girdikleri zaman sistem kaotik davranış gösterir.”

Bu varsayımın temelinde üç önemli adım vardır.

1. LÇ ve ayrı DN'nin etkileşimi,

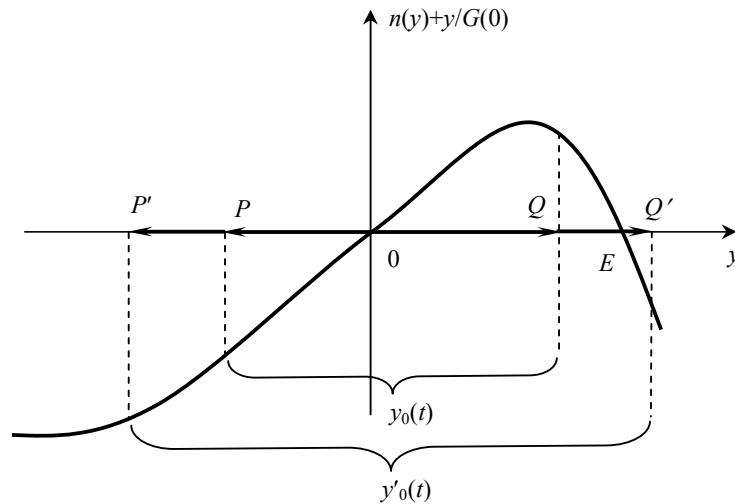
2. Kararlılık karakteristikleri,
3. Filtreleme etkisi.

Sistemin DN 'leri sistem çıkışı y 'nin çözümü ile elde edilecektir.

$$y + G(0)n(y) = 0 \quad (6.15)$$

Mümkün olan $LÇ$, karakteristik Denklemler (6.8) ve (6.9) kullanılarak harmonik denge metoduyla bulunabilir.

1.Etkileşim: Şekil 6.13'de, doğrusal olmayan $n(y)$ fonksiyonunun da içinde bulunduğu Denklem (6.15)'in y 'ye göre değişimi verilmiştir. Burada, y eksenini üzerindeki iz düşümlere bakıldığında $LÇ$ 'nin en az bir DN 'yi içermesi gerektiği kolay bir şekilde görülmektedir. Şekil 6.13'te, $LÇ$ 'nin, $y=0$ 'daki DN 'yi içerdiği ve $LÇ$ oluşabilmesi için bunun temel şart olduğu kabul edilsin. Göz önünde bulundurulan $LÇ$ 'nin, P ve Q arasında değiştiği ve $y=E$ 'de ayrı bir DN 'nin var olduğu varsayalım. Bu durumda $y=E$ 'deki DN , sistem davranışında etkisi olmayacaktır. Bu duruma karşılık gelen periyodik çözüm $y_0(t)$, yalnız $n(y)$ fonksiyonuna bağlıdır ve $y=E$ 'deki DN 'nin varlığı veya yokluğundan etkilenmez. Diğer taraftan P' ve Q' arasında değişen bir $LÇ$, $y=E$ 'deki DN 'den etkilenir. Bu durumda, $y'_0(t)$, DN 'yi içine aldığı zaman $LÇ$ ile DN arasındaki etkileşim şartı sağlanır.



Şekil 6.13. Ayrı DN ve $LÇ$ arasındaki etkileşim

Bu şart (6.16)'daki eşitsizlik ile ifade edilebilir.

$$B \geq |E - A| \quad (6.16)$$

2.Kararlılık Karakteristikleri: $LÇ$ yani $y_0(t)$ kararlı ve $y=E$ 'deki ayrı DN 'nin kararsız olması gerekir. Burada, $LÇ$ 'nin varlığı ve kararlılığı GAI metodu ile belirlenirken ayrı DN 'nin kararlılığı ise sistemin bu noktadaki doğrusal eş değerinin, Nyquist kararlılık kriteriyle sorgulanmasıyla mümkündür. Her iki kararlılık analizinin de grafiksel olarak yapılabilmesi varsayımın uygulanmasını kolaylaştıracaktır.

3.Filtreleme Etkisi: $LÇ$ 'nin oluşmasını sağlamak için göz önünde bulundurulanan sistemde uygun bir filtreleme etkisinin olması gerekmektedir. Fakat kaotik davranışın oluşması, $LÇ$ 'nin garantili bir şekilde oluşması için gerekli olan yüksek filtreleme etkisinden daha az bir filtreleme etkisinin sağlanmasına bağlıdır. Bu yönüyle bahsedilen şartlar içerisinde yalnız filtreleme etkisi nitel gibi gözükmemektedir ve etkili bir parametre kombinasyonu ile sonuca gidilebilir.

Genesio-Tesi bu varsayımla, aslında doğrusal olmayan sistemlerin analizinde kullanılan GAI metodunu genişleterek kaotik davranışların kestiriminde kullanmışlardır. Bu varsayımın anlaşılabilmesi için, Çelik [80]'de incelen kaotik bir sistem, örnek olarak verilecektir.

Örnek 6.4: Bu örnekte, Şekil 6.1'de verilen doğrusal olmayan geri beslemeli sistemin blokları (6.17.a ve b)'deki gibi olsun. Bu sistemin kaotik davranış göstereceği sistem parametreleri Genesio-Tesi varsayımıyla bulunacaktır.

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}, \quad a, b, c > 0 \quad (6.17.a)$$

$$n(y) = y^3 - dy \quad (6.17.b)$$

Sistemde, kaotik bir davranış gözlenip gözlenemeyeceğinin anlaşılması için Genesio-Tesi varsayım gereği, öncelikle bir $LÇ$ 'nin varlığı sorgulanmalıdır. Bunun için $ÇGGAİ$ analiz metodu kullanılarak, $n(y)$ 'nin $ÇGGAİ$ 'ni,

$$N_0(A, B) = A^2 + \frac{3}{2}B^2 - d \quad (6.17.c)$$

$$N_1(A, B) = 3A^2 + \frac{3}{4}B^2 - d \quad (6.17.d)$$

olarak elde edilir. $L\zeta$ 'nin tespiti için (6.17.a), (6.17.c) ve (6.17.d), Denklem (6.8) ve (6.9)'da yerlerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{c}\right)\left(A^2 + \frac{3}{2}B^2 - d\right) = -1 \quad (6.17.e)$$

$$A^2 + \frac{3}{2}B^2 = d - c \quad (6.17.f)$$

$$\left(\frac{(c - a\omega^2) - j(b\omega - \omega^3)}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^2 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2}\right)\left(3A^2 + \frac{3}{4}B^2 - d\right) = -1 \quad (6.17.g)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (6.17.g)'nin sanal kısmı “0” ’a eşitlenerek;

$$\left(\frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^2 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2}\right) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{b} \quad (6.17.h)$$

$L\zeta$ 'nin frekansı bulunur. $\omega = \sqrt{b}$ için Denklem (6.17.f)'den A çekilip, Denklem (6.17.g)'de yerine yazılırsa,

$$B = \sqrt{\frac{4}{15}(2d - 2c - ab)} \quad (6.17.i)$$

olarak $L\zeta$ 'nin değişken bileşeni B elde edilir. Denklem (6.17.i), Denklem (6.17.f)'de yerine yazılırsa,

$$A = \pm \sqrt{\frac{1}{5}(2ab + d - c)} \quad (6.17.i)$$

olarak osilasyonun sabit bileşeni A elde edilir.

Sistemde $LÇ$ oluşabilmesi için Denklem (6.17.f) ve (6.17.i)'nin pozitif olması gerekir. Bunun için;

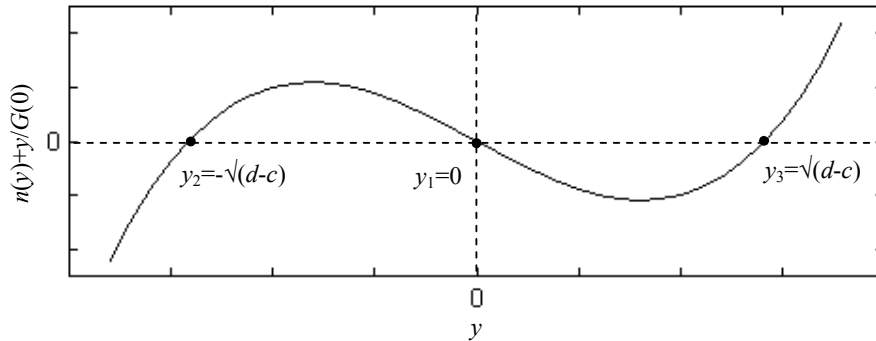
$$d > c + \frac{ab}{2} > 0 \quad (6.17.j)$$

şartının sağlanması gerekir. Denklem (6.17.j)'in tanımladığı şartlarda, sistemde bir $LÇ$ vardır.

Kaotik davranışın varlığının tespiti için, sistemin DN 'leri araştırılmalıdır. Bunun için Denklem (6.15), bu örnek için çözülürse,

$$y + G(0)(y^3 - dy) = 0 \Rightarrow y \left(1 + \left(\frac{1}{c} \right) (y^2 - d) \right) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_{2,3} = \pm \sqrt{d - c} \quad (6.17.k)$$

sonuçları elde edilecektir. Doğrusal olmayan elemanın değişimi ve sistemin DN 'leri Şekil 6.14'de verilmiştir.

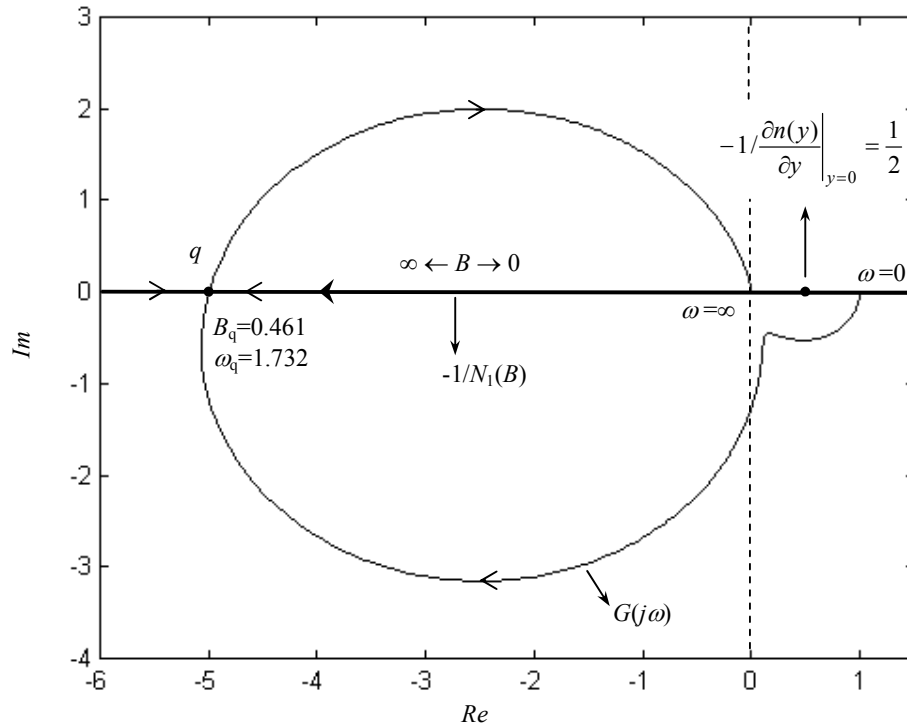


Şekil 6.14 . $y + (1/c)(y^3 - dy) = 0$ ifadesinin değişimi ve denge noktaları

$LÇ$ şartı olan $a, b, c > 0$ ve Denklem (6.17.j) sağlanacak şekilde $a=0.4, b=3, c=1$ ve $d=2$ alınarak, $LÇ$ 'nin frekansı $\omega = 1.732 \text{ rad/s}$, değişken bileşeni $B=0.461$ ve sabit bileşeni $A = \pm 0.824$ olarak bulunur. Kompleks düzlemde kararlılık analizi yapabilmek için $N_1(A, B)$ 'nin, $N_1(A(B), B)$ şekline dönüştürülmesi gerekir. Bunun için denklem (6.17.f)'den A çekilip, Denklem (6.17.d)'de yerine konursa $N_1(A(B), B)$ elde edilir. Bu ifade sadece B değişkenine bağlı olacak ve

$$N_1(B) = 1 - \frac{15}{4} B^2 \quad (6.17.1)$$

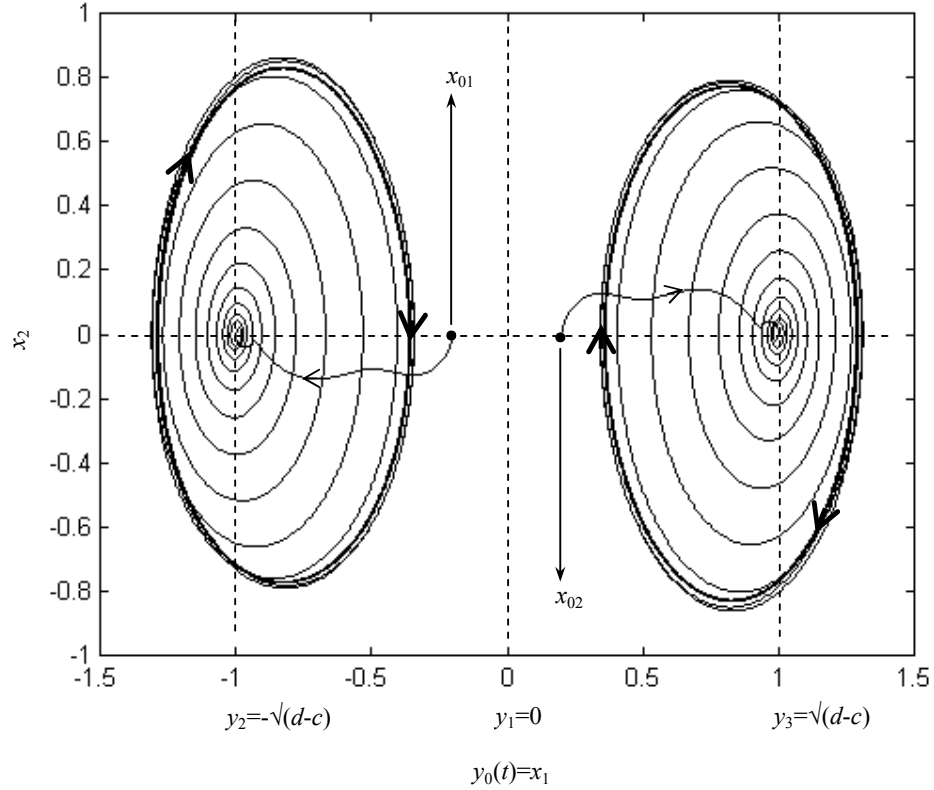
elde edilecektir. Şekil 6.15'te $a=0.4, b=3, c=1$ ve $d=2$ için $G(j\omega)$ ve $-1/N_1(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimleri verilmiştir. Bu iki değişim, $\omega=0$ durumu dışında $q(\omega_q, B_q) = (1.732, 0.461)$ noktasında kesişmektedir.



Şekil 6.15. $a=0.4, b=3, c=1$ ve $d=2$ için Örnek 6.4'te verilen sistemin kompleks düzlemdeki değişimi

Şekil 6.15'te görüldüğü gibi seçilen parametrelere göre bu q noktası bir noktada birleşen bir karakteristiğe sahiptir ve q noktasında beklenen $LÇ$ kararlıdır. $a=0.4, b=3, c=1$

ve $d=2$ için iki farklı başlangıç şartında, sistemin simülasyonu sonucunda elde edilen durum uzay diyagramları Şekil 6.16’da verilmiştir.



Şekil 6.16. $a=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ için Örnek 6.4’deki sistemin x_{01} ve x_{02} başlangıç şartı için durum uzay diyagramı ve sisteme ait DN ’leri

Şekil 6.16’da gösterilen q noktasında, $L\mathcal{C}$ ’nin kararlı olduğu görülmektedir. Ayrıca $x_{01}(-0.2, 0, 0)$ başlangıç şartında limit çevrimi $y_2 = -\sqrt{(d-c)} = -1$ ’deki DN ’yi içine almakta ve $x_{02}(0.2, 0, 0)$ başlangıç şartında ise limit çevrimi $y_3 = \sqrt{(d-c)} = 1$ ’deki DN ’yi içine almaktadır. Bu sonuca göre $y_1 = 0$ ’daki denge noktası ayrı DN dir. Genesio-Tesi kaos varsayımına göre, bu sistemin kaotik davranış gösterebilmesi için bu DN ’nin kararsız bir DN olması gerekir. Bu noktanın kararlılığı, Nyquist kararlılık kriteri ile incelenecek olursa, $n(y)$ ’nin $y=0$ ’daki denge noktası için doğrusallaştırılmış eş değeri yardımı ile kompleks düzlemde

$$\left. -1 / \frac{\partial n(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{1}{2} \text{ elde edilir. Böylece } G(j\omega) \text{ değişiminin bu noktayı çevreleme sayısına}$$

bakılabilir. Bu nokta $G(j\omega)$ değişimi tarafından saat yönünde 1 defa çevrelenmiştir ve $N=1$ dir.

İncelenen örnekteki doğrusal alt sistem, Denklem (6.17.j)'yi sağlamak koşulu ile $a=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ olarak sistem parametreleri seçilsin. Bu durumda, doğrusal alt sistem $G(s)$ 'in $s_{1,2} = -0.0321 \mp j1.7255$ ve $s_3 = -0.3357$ olmak üzere tüm kökleri sol yarı s -düzleminde ve $P=0$ dır.

Nyquist kararlılık kriterine göre, kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemindeki kutup sayısı, açık çevrimli sistemin sıfırları olan $Z=P+N=0+1=1$ 'e eşittir. Bunun anlamı, kapalı çevrimli sistem, $n(y)$ 'nin $y=0$ noktasındaki doğrusallaştırılmış eşdeğerine göre bir tane kutbunun sağ yarı s -düzleminde olması anlamına gelir ve sistem kararsızdır. Bu sonuç aynı zamanda $y=0$ DN 'nin kararsız olduğu anlamına gelir.

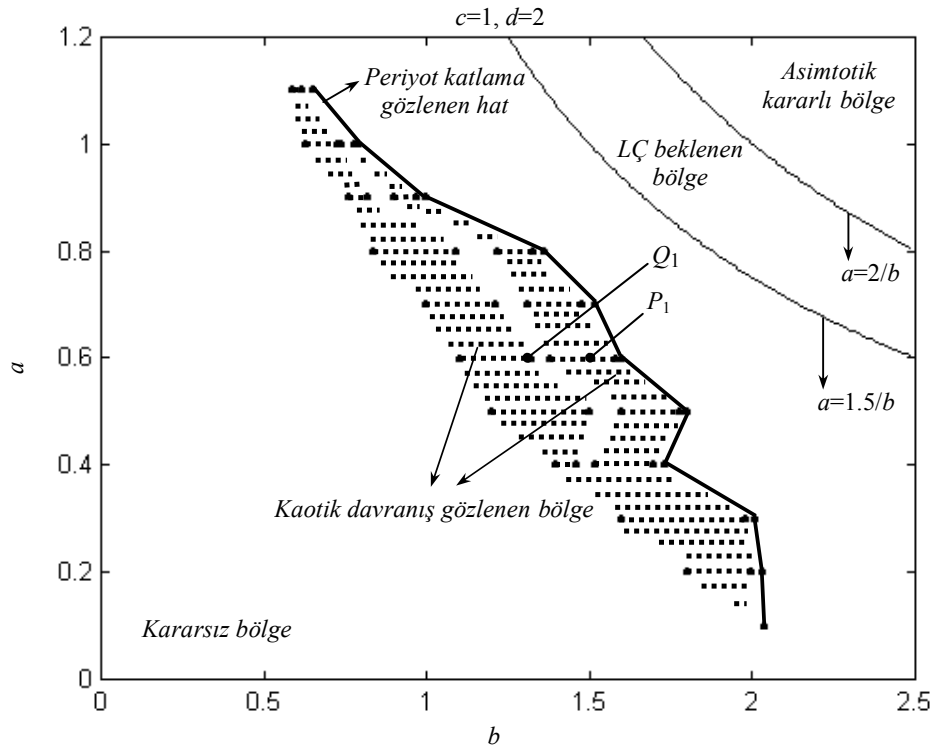
Sistem yörüngesi ile $y=0$ 'daki DN arasında bir etkileşimin olabilmesi için Denklem (6.16)'nın sağlanması gerekir. Bu sistemde $E=0$ olduğundan etkileşim şartı

$$d \geq 2ab - c \quad (6.17.m)$$

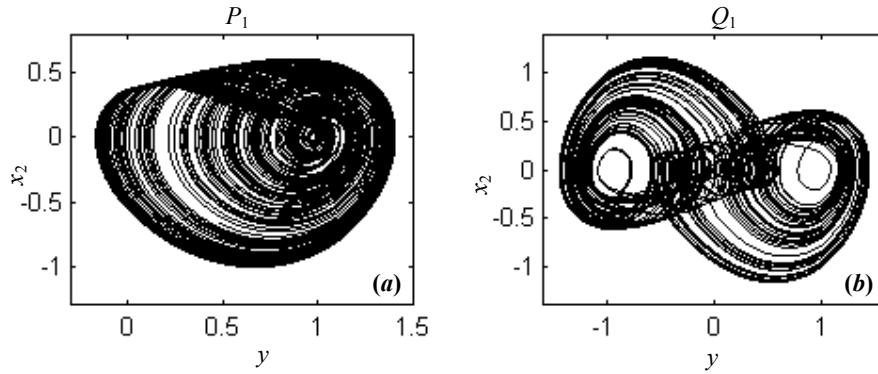
olur. Denklem (6.17.m)'yi sağlayan sistem parametrelerinde, sistemde kaotik davranış beklenmelidir. Burada bulunan sonucun, bir tahmini sonuç olduğu her zaman gözden uzak tutulmamalıdır. Bununla beraber, ileri seviyede başka bir metot kullanılmadan böyle basit bir teknik ile de kaotik davranışın varlığının belirlenmesi önemlidir.

Son olarak sistemin uygun filtreleme etkisine sahip olması gerekir. Sistemde uygun parametre kombinasyonu ile filtreleme etkisi sağlanabilmektedir. Şekil 6.17, $c=1$ ve $d=2$ sabit alınarak ve yukarıda verilen kaotik davranışın oluşma şartları göz önünde bulundurularak, örnek sistemin simülasyon sonuçlarına göre elde edilmiştir. Şekil 6.17'de, kaotik davranışların beklenildiği gibi yukarıdaki şartları sağlayan sistem parametrelerinde gözlemlenmiştir. Şekil 6.17 her ne kadar sabit $c-d$ ve değişken $a-b$ sistem parametreleri için elde edilmiş ise de farklı parametre düzlemleri için de elde edilebilir.

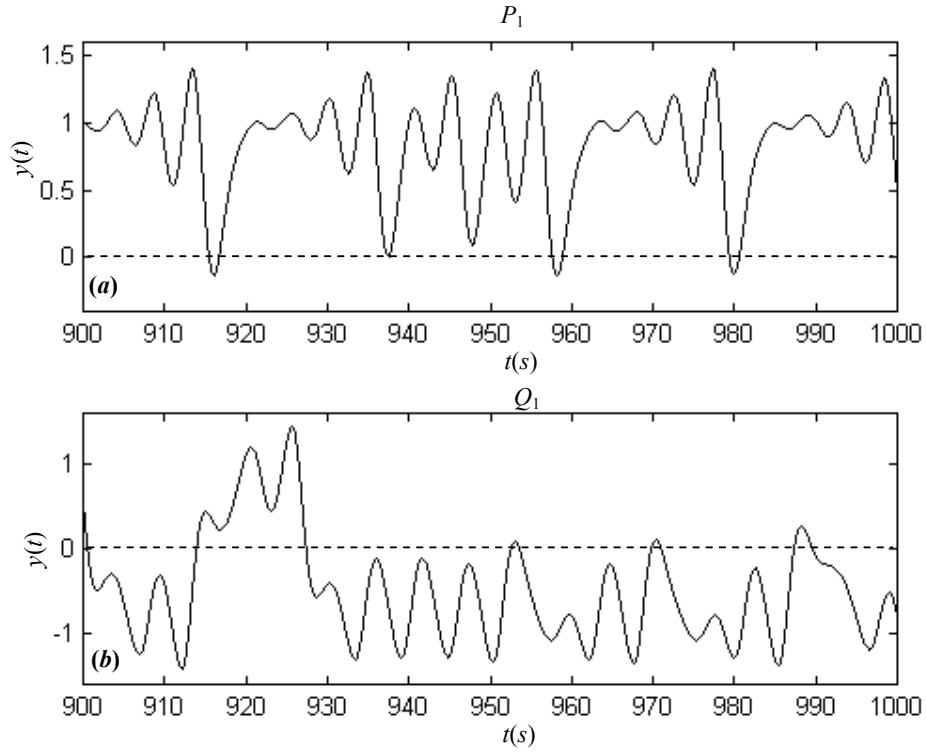
Şekil 6.17'de $a \leq 1.5/b$ ile tanımlanan bölge, kaotik davranışın oluşması için ana şart olan ayrı DN ile $LÇ$ etkileşim halinde olduğu bölgedir. Bu bölgede, uygun filtreleme etkisi altında kaotik davranış beklenmektedir. Şekil 6.17'de gösterilen $P_1(1.5, 0.6)$ ve $Q_1(1.3, 0.6)$ noktalarındaki sistem parametrelerinde elde edilen durum uzay diyagramları, Şekil 6.18(a) ve (b)'de gösterilmiştir. Ayrıca bu noktalara ait parametrelerdeki sistemin zaman cevabından bir kesit Şekil 6.19(a) ve (b)'de gösterilmiştir.



Şekil 6.17. Örnek 6.4'deki sistemin $c=1$ ve $d=2$ için b - a düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve gözlemlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi



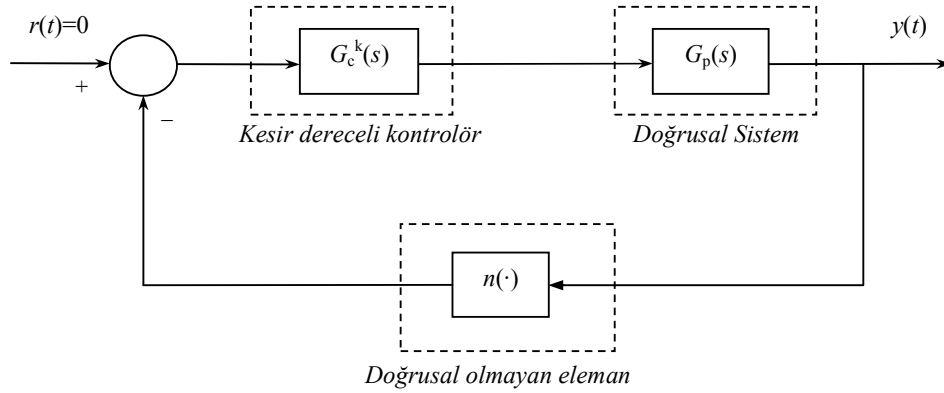
Şekil 6.18. Örnek 6.4'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$ için Şekil 6.17'deki **a)** $P_1(1.5, 0.6)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı, **b)** $Q_1(1.3, 0.6)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı



Şekil 6.19. Örnek 6.4’de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$ için Şekil 6.17’deki **a)** $P_1(1.5, 0.6)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit **b)** $Q_1(1.3, 0.6)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit

7. DOĞRUSAL OLMAYAN ÖZERK SİSTEM DİNAMİĞİ ÜZERİNE KESİR DERECELİ PI^α KONTROLÖRÜN ETKİLERİ

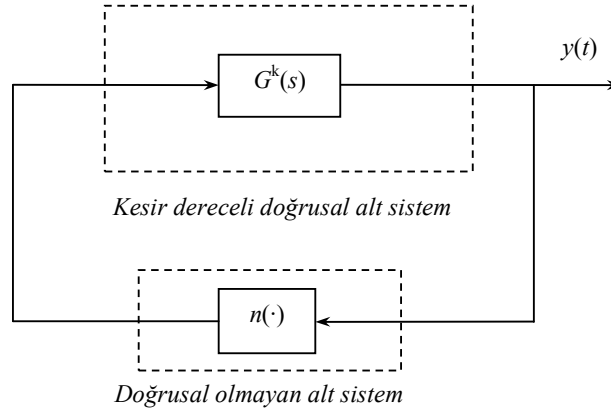
Bu bölümde, Şekil 7.1’de verilen kesir dereceli kontrolörün kullanıldığı doğrusal olmayan özerk sistemde, Genesio-Tesi varsayımından faydalanılarak kaos kestiriminin nasıl yapılabileceği anlatılacaktır.



Şekil 7.1. Kesir dereceli doğrusal olmayan kontrol sistemi

7.1. Kesir Dereceli PI^α Kontrolörlü Doğrusal Olmayan Sistemde Kaos Kestirimi

Şekil 7.1’deki kesir dereceli kontrolör ve doğrusal sistem, kesir dereceli doğrusal alt sistem olarak ifade edilebilir. Bu durumda, Şekil 7.2’deki Lur’e tipi kesir dereceli sistem elde edilmiş olur. Bu sayede sisteme, kesir dereceli kontrolördeki integral derecesinin etkisi, kaos kestirim yöntemiyle daha kolay tespit edilir.



Şekil 7.2. Kesir dereceli Lur’e tipi sistem

Şekil 7.2'deki sisteme, kesir dereceli kontrolörün etkisini tespit edebilmek için Genesio-Tesi varsayımı uygulanacak olunursa;

1. Bir $LÇ$ var olmalı; $y=y_0(t)$.
2. Ayrı bir DN var olmalı; $y=E$.
3. DN ve $LÇ$ 'nin kararlılık özellikleri; LC , $y_0(t)$ kararlı, $y=E$ 'deki DN kararsız olmalı.
4. DN ile $LÇ$ arasında bir etkileşim olmalı; bazı t değerleri için $y_0(t)=E$ olmalı.
5. Sistem uygun filtreleme etkisine sahip olmalı.

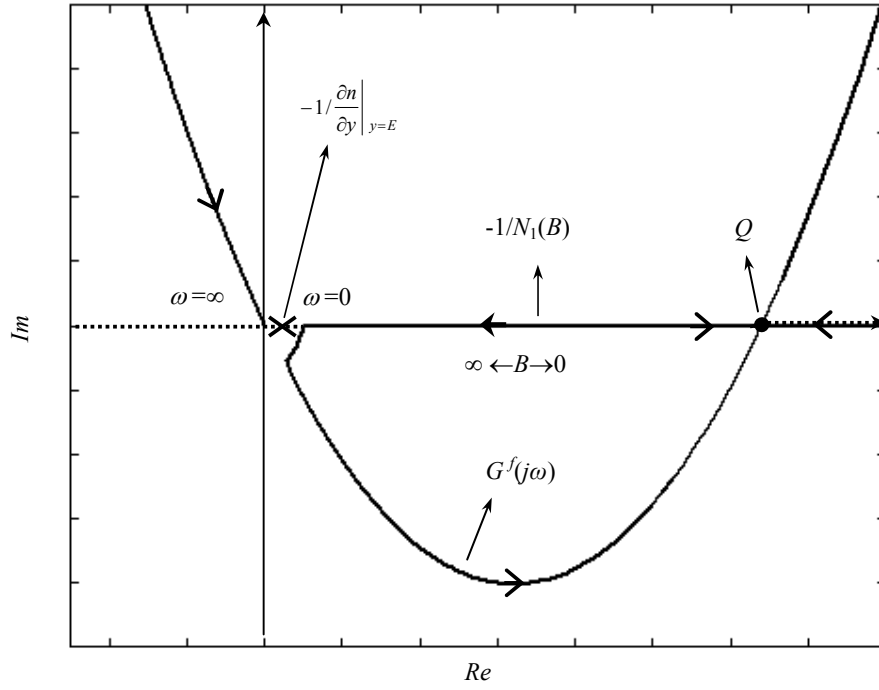
Sistemde yukarıdaki şartların sağlanmış olması gerekecektir. Bu şartların sağlandığını kontrol etmek için, Denklem (6.8) , (6.9) ve (6.15)'in Şekil 7.2'deki kesir dereceli sistem için sırasıyla aşağıda verilen biçimde yeniden tanımlanması gerekir.

$$1 + G^k(0)N_0(A, B, \omega) = 0 \quad (7.1)$$

$$1 + G^k(j\omega)N_1(A, B, \omega) = 0 \quad (7.2)$$

$$y + G^k(0)n(y) = 0 \quad (7.3)$$

Önerilen varsayımın birinci aşamasını sorgulayabilmek için, öncelikle Denklem (7.1) ve (7.2)'nin çözümüyle $LÇ$ 'yi karakterize eden A , B ve ω değerleri bulunur. Denklem (7.1) ve (7.2)'nin çözüm kümesi yoksa, sistemde bir $LÇ$ varlığından söz edilemez. İkinci aşamada ise Denklem (7.3)'den sistemin DN 'leri tespit edilebilir. Üçüncü aşamada, sistem çözümlerinin kararlılık kontrolü yapılmalıdır. Ayrı DN için, $y=E$ 'de doğrusallaştırılmış sistemin kararlılık analizi kolay bir şekilde klasik yöntemlerden biriyle yapılabilir. Bir önceki Bölümde de bahsedildiği gibi, bu işlemin yapılmasında Nyquist kararlılık kriterini kullanmak daha avantajlıdır. $LÇ$ 'nin kararlılığının tespiti için ise GAI analiz metodu kullanılabilir. Şekil 7.3'de, $G^k(j\omega)$, $-1/N_1(B)$ ve $-1/\frac{\partial n}{\partial y}\big|_{y=E}$ 'nin yerleri kompleks düzlemde temsili olarak gösterilmiştir.



Şekil 7.3. Kesir dereceli sistemde DN ve $LÇ$ kararlılık karakteristikleri

Doğrusal alt sistem $G^k(j\omega)$ 'nin sağ yarı s-düzleminde hiç kutbu olmaması kaydıyla, doğrusallaştırılmış geri beslemeli sistemin, $y=E$ 'deki DN 'nin kararsız olması için, $-1/\frac{\partial n}{\partial y}|_{y=E}$ 'nin kompleks düzlemde olması gereken yeri Şekil 7.3'de kesikli çizgiyle gösterilmiştir. Kararlı bir $LÇ$ için $-1/N_1(B)$ 'nin değişim yönü Şekil 7.3'deki gibi olmak kaydıyla, Q noktasının tanımladığı $LÇ$ bir noktada birleşen yapıdadır ve kararlıdır.

Temel şart olarak kabul edilebilecek dördüncü aşama ise etkileşim olarak adlandırılmaktadır. Etkileşimin gerçekleşebilmesi için Denklem (6.16)'da verilen eşitsizliğin sağlanması gerekir.

Son olarak; sistemde uygun filtreleme etkisinin olması gerekir. Denklem (7.4)'teki eşitsizlik, bir $LÇ$ 'nin var olması için gereklidir. Denklem (7.4)'ün etkinlik derecesi azaltılarak, sistem kaotik davranış gösterecek şartlara getirilebilir. Bu da sistem parametrelerini uygun şekilde değiştirilmesi ile sağlanır.

$$|G^k(j\omega)| \gg |G^k(nj\omega)|, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \infty \quad (7.4)$$

Bu şartlar sağlandıktan sonra sistemde kaos beklenmelidir. Devam eden alt bölümde, kesir dereceli PI^α kontrolörlerin doğrusal olmayan sistem dinamiği üzerine etkileriyle ilgili örnekler verilecektir. Bu örneklerde, kontrolör parametresi olarak sadece kesirli α integratör derecesi kullanılacaktır. Bu sayede, sistem dinamiği üzerine kesirli α integral derecesinin oluşturacağı etkileri değerlendirme imkanı olacaktır. Ayrıca bu örnekler, GAI analiz metodu ve Genesio-Tesi varsayımının kesir dereceli sistemlerde de ne derece etkin bir araç olduğunu görme imkanı verecektir.

7.2. Kesir Dereceli PI^α Kontrolörlün Doğrusal Olmayan Sistem Dinamiği Üzerine Etkileri İle İlgili Örnekler

Bu bölümde GAI analizi ve Genesio-Tesi varsayımı kullanılarak, kesir dereceli PI^α kontrolöre ait α parametresinin, doğrusal olmayan sistem dinamiği üzerine etkilerini göstermek amacıyla örnek uygulamalar incelenecektir. Örnek uygulamalara ait simülasyonlar, *MATLAB/Simulink* ortamında gerçekleştirilmiştir. Ayrıca tüm simülasyonlarda, kesir dereceli integratör operatörü yerine, Bölüm 3'te verilen Tablo 3.2'deki yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonları kullanılmıştır.

Örnek 7.1: Bu örnekte, Örnek 6.2'de incelenen ve blok diyagramı Şekil 7.1'deki gibi kontrolör, sistem ve doğrusal olmayan bloklardan oluşan yapı ele alınacaktır [83]. Bu yapıda, Örnek 6.2'den farklı olarak tam dereceli PI kontrolör yerine kesir dereceli PI^α kontrolör kullanılacaktır.

$$G_c^k(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7.5.a)$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 1} \quad (7.5.b)$$

$$n(y) = y^3 \quad (7.5.c)$$

Bu sistemde oluşması muhtemel osilasyonların varlığı, kararlılığı, frekansı ve genliği GAI analizi yardımıyla tespit edilebilir. Kesir dereceli PI^α kontrolörün tam dereceli PI kontrolörden farklı olarak sistem üzerinde ne gibi etkisi olabileceğini gözlemlemek için

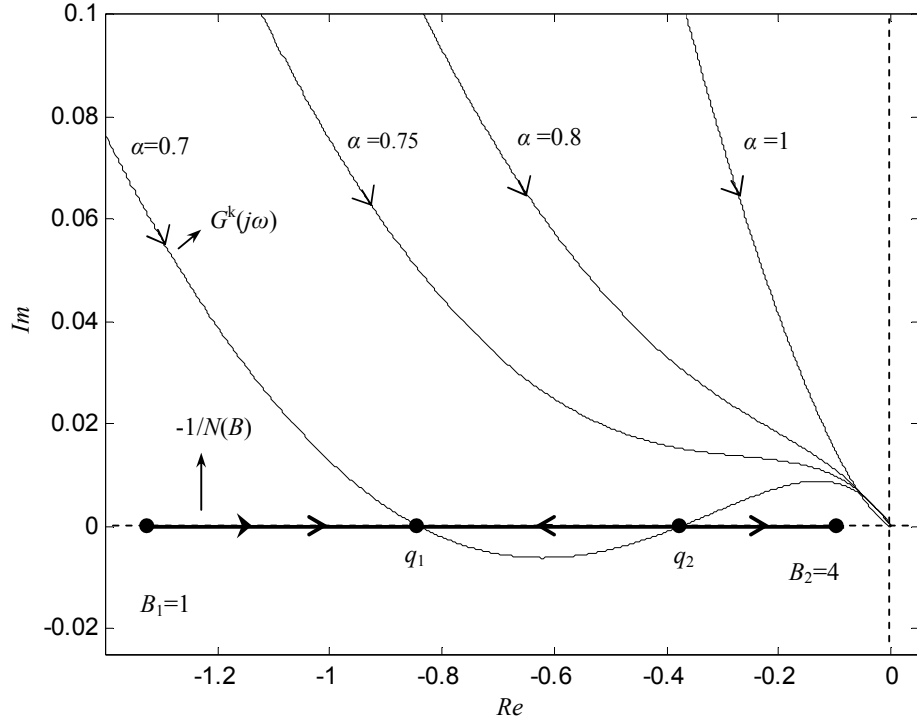
Örnek 6.2’de sistemi kararsızlaştırdığı tespit edilen kontrolör parametreleri seçilecektir. Bunun için $K_p=1$ ve $K_i=2.5$ alınacaktır. Doğrusal olmayan alt sistemin $TGGAI'$ ’si Denklem (6.12.c)’de verilmişti. Bu denklem, (7.1) ve (7.2)’de yerine yazıldığında sistemin karakteristik denklemi,

$$\left(\frac{K_p(j\omega)^\alpha + K_i}{(j\omega)^{\alpha+2} + 2(j\omega)^{\alpha+1} - (j\omega)} \right) \left(\frac{3}{4} B^2 \right) = -1, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7.5.d)$$

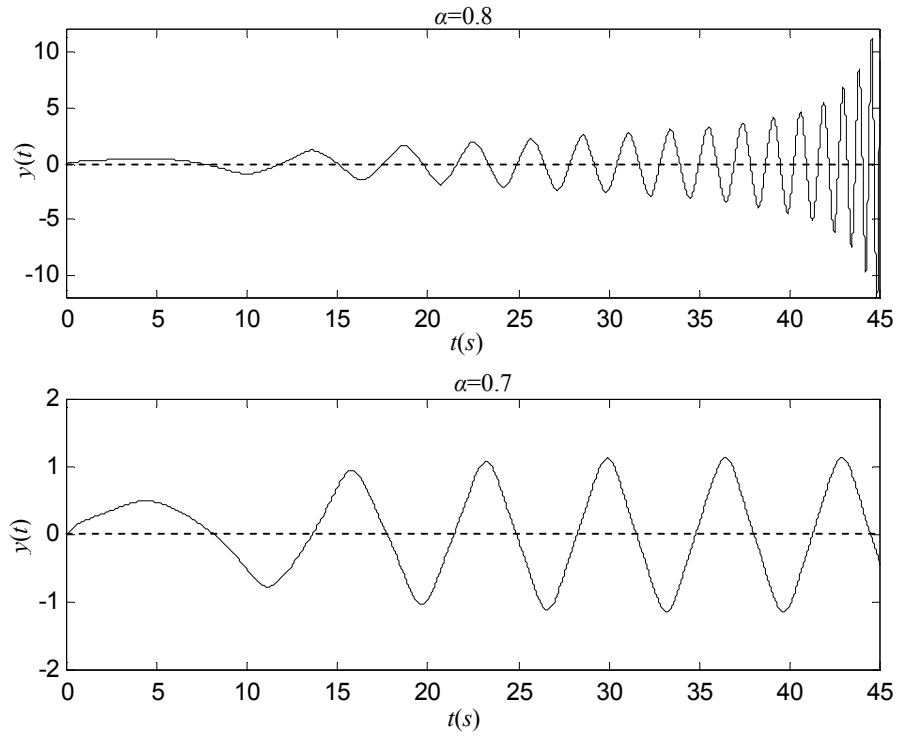
olur. $K_p=1$ ve $K_i=2.5$ değerlerinde Denklem (7.5.d)’nin sağlanabilmesi için $0 < \alpha < 0.71$ olmalıdır. Grafiksel olarak Denklem (7.5.d)’nin sağlanabilmesi için $-1/N(B)$ ile $G^k(j\omega)$ ’nin karmaşık düzlemde kesişmesi gerekmektedir. Grafiksel olarak $B=[2,4]$ aralığında $-1/N(B)$ ile $\omega=(0,+\infty)$ aralığında $G^k(j\omega)$ ’nin karmaşık düzlemdeki değişimleri Şekil 7.4’te farklı α değerleri için verilmiştir.

Şekil 7.4’te görüldüğü gibi $\alpha=0.7$ için $-1/N(B)$ ile $G^k(j\omega)$ ile q_1 ve q_2 olmak üzere iki farklı noktada kesişme söz konusu iken $\alpha=0.75, 0.8$ ve 1 için kesişme yoktur. $\alpha=0.7$ için kesişme noktalarının kararlı olması durumunda, sistemde $LÇ$ oluşacaktır. Diğer α değerlerinde ise sistem kararsız bir davranış gösterecektir.

Denklem (7.5.d)’nin verilen kontrolör parametreleri için çözümü elde edildiğinde, q_1 kesişme noktalarının karakterize ettiği frekansı, $\omega_{q1} \cong 1.18 \text{ rad/s}$, genliği, $B_{q1} \cong 1.26$ ve q_2 kesişme noktalarının karakterize ettiği frekansı, $\omega_{q2} \cong 1.88 \text{ rad/s}$ ve genliği $B_{q2} \cong 1.87$ olan $LÇ$ gerçekleşmesi beklenecektir. Fakat; q_1 noktası kararlı olmasına rağmen, q_2 noktası kararsız bir yapıya sahiptir. Bu yüzden sistemde sadece q_1 noktasının karakterize ettiği başlangıç şartından bağımsız osilasyonlar gözlenecektir. Sistemde oluşması beklenen osilasyonları gözlemleyebilmek için, sistemin zaman cevabına ihtiyaç olacaktır. Bu nedenle, sistemin *MATLAB/Simulink* ortamında benzetim yoluyla zaman cevabı elde edilecektir. Şekil 7.5’te, $x_0(0,0.4,0)$ başlangıç şartında $\alpha=0.7$ ve $\alpha=0.8$ için sistemin zaman cevapları verilmiştir.



Şekil 7.4. $-1/N(B)$ ile $G^k(j\omega)$ 'nin farklı α değerleri için kompleks düzlemdeki değişimi

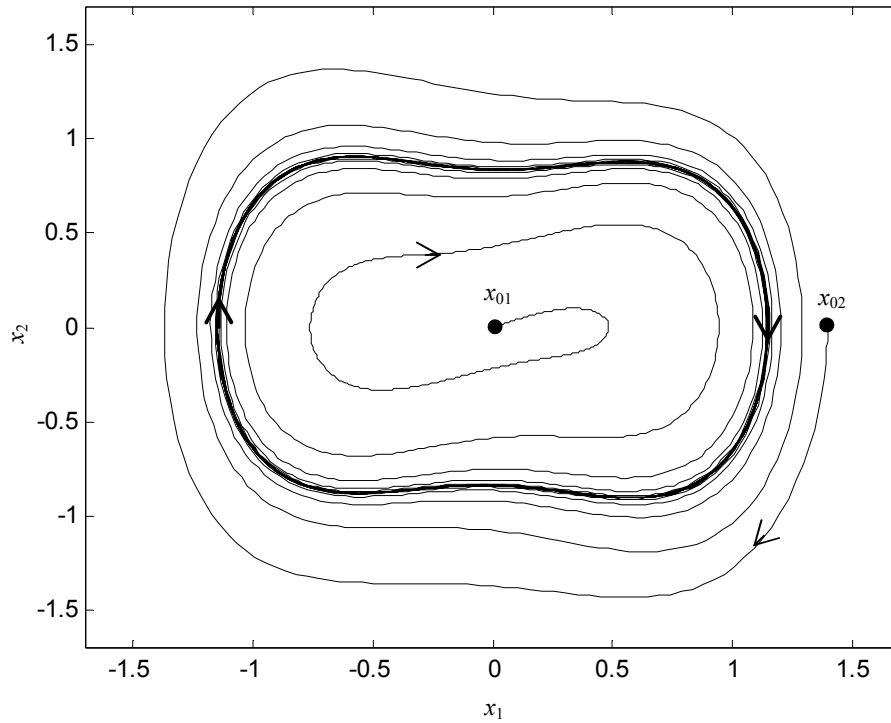


Şekil 7.5. Kesir dereceli doğrusal olmayan örnek sistemin $\alpha=0.7$ ve $\alpha=0.8$ için zaman cevapları

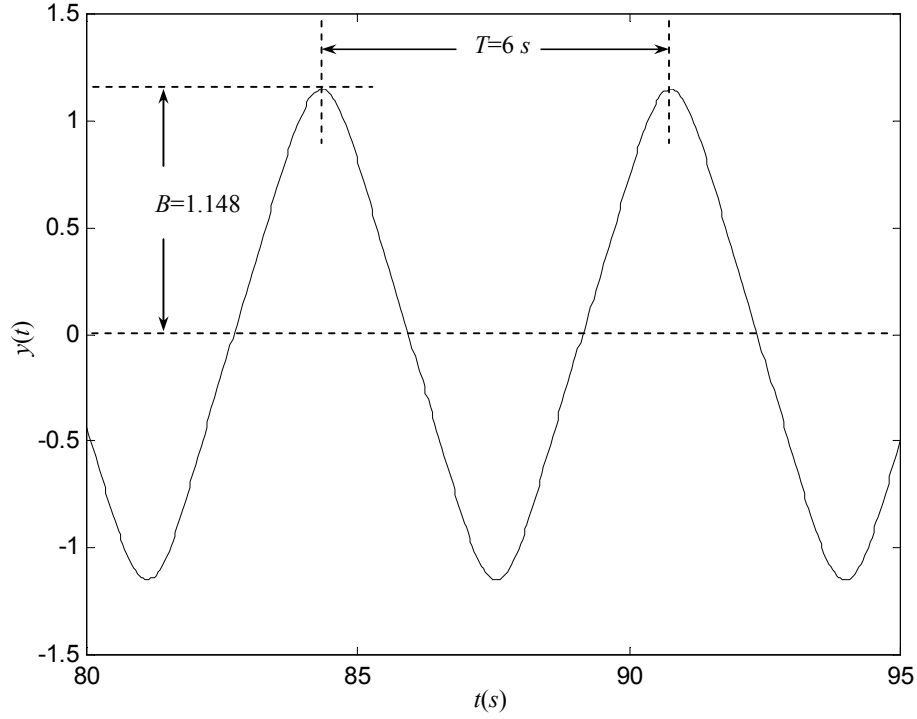
Şekil 7.5'te, beklendiği gibi $0 < \alpha < 0.71$ aralığı dışındaki $\alpha=0.8$ için sistemde kararsız bir davranış varken, bu aralık içerisinde bulunan $\alpha=0.7$ integratör derecesi için sistemde başlangıç şartından bağımsız osilasyonlar oluşmaktadır. Şekil 7.6'da, bu osilasyonların durum uzay diyagramı görülmektedir.

Şekil 7.6'da, $x_{01}(0,0.01)$ başlangıç şartı için sistem, Şekil 7.4'teki q_1 noktasının tanımladığı osilasyon karakteristiğinin belirlediği $LÇ$ yörüngesine yerleşmektedir. Benzer durum, $LÇ$ dışındaki bir nokta olan $x_{02}(1.4,0.01)$ başlangıç şartı içinde geçerlidir.

q_1 noktasının karakterize ettiği başlangıç şartından bağımsız osilasyonun, sürekli durumundan bir kesit Şekil 7.7'de verilmiştir. Görüldüğü gibi sistemin çıkışında gözlenen osilasyonun frekansı $\omega \cong 1.047 \text{ rad/s}$ ve genliği $B \cong 1.148$ dir. Bu değerler sistemin analizi için kullanılan GAI metoduyla elde edilen değerlere yakın değerlerdir.



Şekil 7.6. Kesir dereceli doğrusal olmayan örnek sistemin $\alpha=0.7$, $x_{01}(0,0.01)$ ve $x_{02}(1.4,0.01)$ için durum uzay diyagramı



Şekil 7.7. q_1 noktasının karakterize ettiği $LÇ$ 'nin sürekli durumundan bir kesit

Örnek 7.2: Bu örnekte, kararsız $LÇ$ davranışın gözlemlendiği Örnek 6.3'te incelenen sistemde, kontrolör kesir dereceli PI^α seçildiğinde α derecesinin sistemin davranışı üzerine etkileri incelenecektir. Şekil 7.1'de verilen sistem için sistem elemanları

$$G_c^k(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7.6.a)$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad (7.6.b)$$

$$n(y) = y^3 \quad (7.6.c)$$

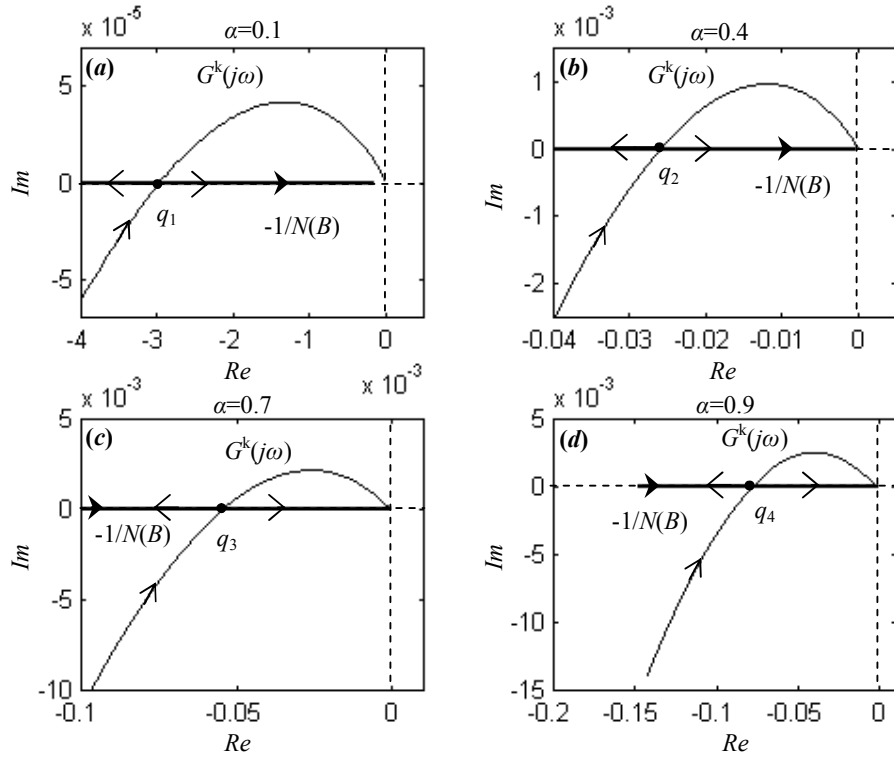
olarak seçilir. Bu örnekte de kesir dereceli PI^α kontrolörün tam dereceli PI kontrolörden farklı olarak sistem üzerinde ne gibi etkileri olabileceği incelenecektir. Bu amaçla, Örnek 6.3'de incelenen sistemde kullanılan tam dereceli kontrolör parametreleri olan, $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ alınacaktır. Doğrusal olmayan alt sistemin $TGGAI$, Denklem (6.12.c)'de verilmişti.

Şekil 7.1’de $G_c^k(s)$ ile $G_p(s)$ ’den oluşmuş doğrusal alt sistem, $G^k(s)$ ve $n(y)$ doğrusal olmayan elemanın $TGGAI$, $N(B)$ ’nin oluşturduğu kapalı çevrimli sistemin frekans karakteristik denklemi, Denklem (7.1) ve (7.2)’de yerine yazıldığında,

$$\left(\frac{K_p(j\omega)^\alpha + K_i}{(j\omega)^{\alpha+2} + 2(j\omega)^{\alpha+1} + (j\omega)^\alpha} \right) \left(\frac{3B^2}{4} \right) = -1, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7.6.d)$$

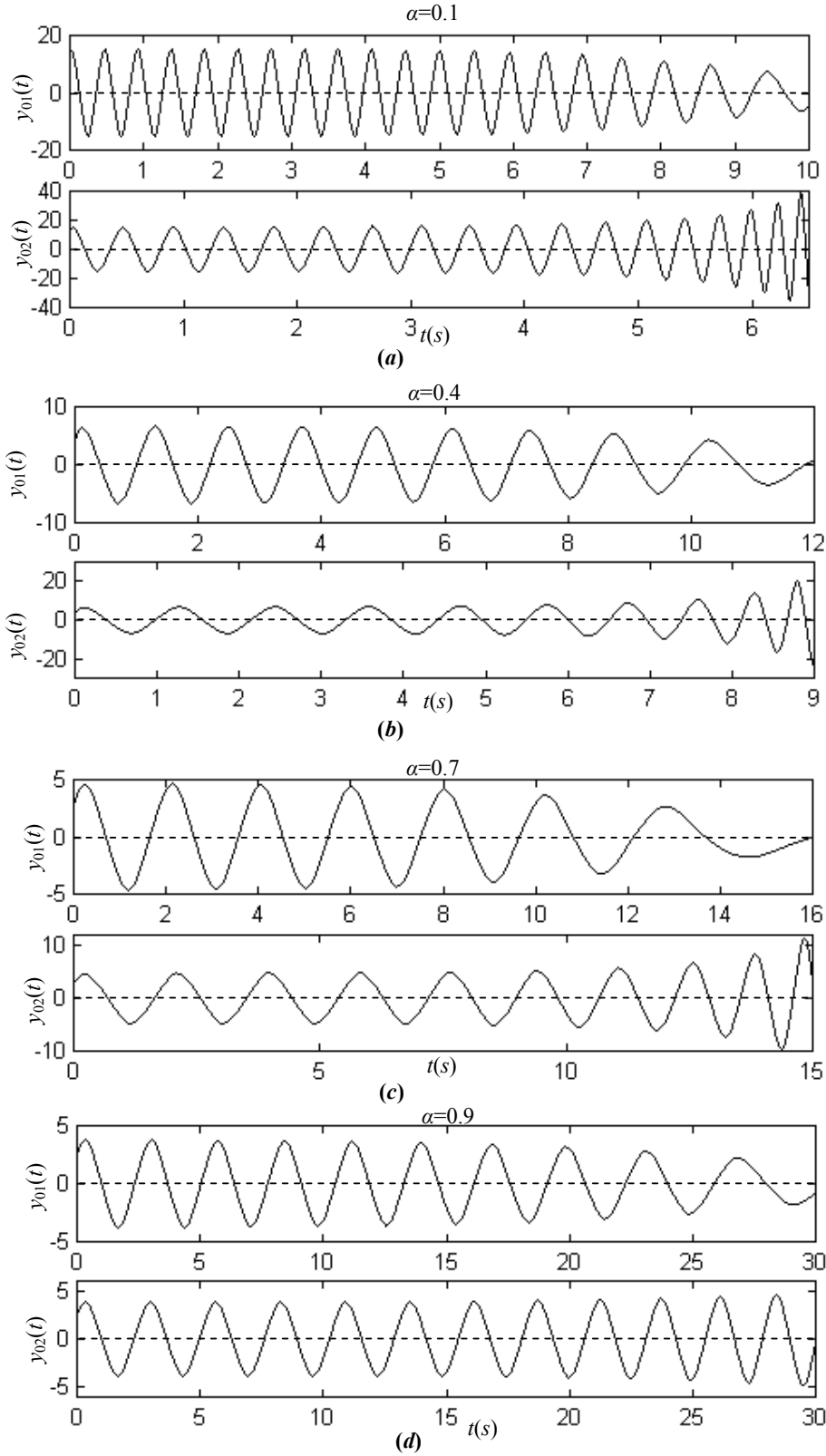
elde edilir. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için Denklem (7.6.d)’nin sağlanabilmesi için $0 < \alpha < 1$ olmalıdır. Grafiksel olarak Denklem (7.6.d)’nin sağlanabilmesi için, $-1/N(B)$ ile $G^k(j\omega)$ ’nin karmaşık düzlemde kesişmesi gerekmektedir. $B=[3,100]$ aralığında $-1/N(B)$ ile $\omega=[2,+\infty)$ aralığında $G^k(j\omega)$ ’nin kompleks düzlemdeki değişimleri grafiksel olarak Şekil 7.8’de $\alpha=0.1, 0.4, 0.7$ ve 0.9 değerleri için elde edilmiştir.

Şekil 7.8’de görüldüğü gibi $-1/N(B)$ ile $G^k(j\omega)$; $\alpha=0.1$ için q_1 , $\alpha=0.4$ için q_2 , $\alpha=0.7$ için q_3 ve $\alpha=0.9$ için q_4 noktalarında kesişmektedir. Bu durumda, her bir kesişme noktasının tanımladığı bir $LÇ$ sistemde mevcuttur. Denklem (7.6.d)’nin, verilen kontrolör parametreleri için çözümü elde edildiğinde, q_1 kesişme noktalarının karakterize ettiği frekansı $\omega_{q1} \cong 19.64 \text{ rad/s}$, genliği $B_{q1} \cong 21.1881$, q_2 kesişme noktalarının karakterize ettiği frekansı $\omega_{q2} \cong 5.66 \text{ rad/s}$ ve genliği $B_{q2} \cong 7.1611$, q_3 kesişme noktalarının karakterize ettiği frekansı $\omega_{q3} \cong 3.44 \text{ rad/s}$ ve genliği $B_{q3} \cong 4.9462$ ve q_4 kesişme noktalarının karakterize ettiği frekansı $\omega_{q4} \cong 2.63 \text{ rad/s}$ ve genliği $B_{q4} \cong 4.1213$ olan $LÇ$ davranışın beklenmesi gerekir. Fakat Şekil 7.8’den de görüldüğü gibi, tüm kesişme noktaları kararsız yapıdadır ve sistemde kararsız $LÇ$ ’nin olduğu anlamına gelir. Bu yapıdaki bir sistem, Örnek 6.3’teki gibi durum değişkenlerinin başlangıç şartına göre farklı iki davranış tipi; asimptotik kararlı davranış veya kararsız davranış gösterecektir. Şekil 7.9’da $\alpha=0.1, 0.4, 0.7$ ve 0.9 değerleri için birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için sistemin zaman cevapları *MATLAB/Simülink* ortamında benzetim yoluyla elde edilmiştir.

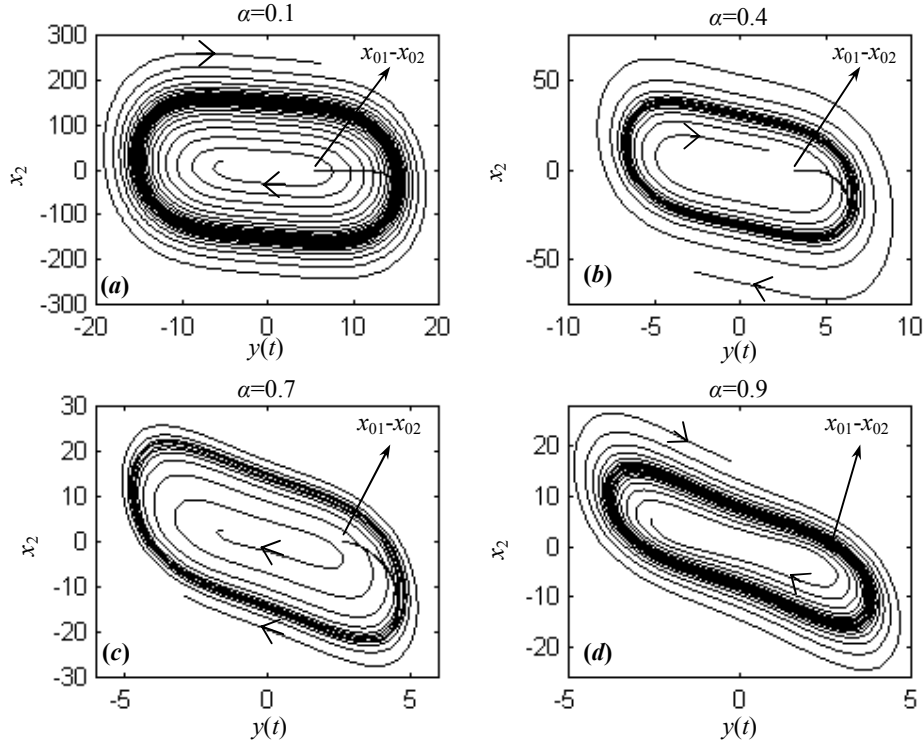


Şekil 7.8. $K_p=0.4$ ve $K_f=1$ için $G^k(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi

Şekil 7.9.(a), (b), (c) ve (d)'de görüldüğü gibi sırasıyla; $x_{01}^{(0.1)}(13.7,0,0)$, $x_{01}^{(0.4)}(8,0,0)$, $x_{01}^{(0.7)}(6.6,0,0)$ ve $x_{01}^{(0.9)}(6.1,0,0)$ başlangıç şartlarında, sistem sönümlü bir osilasyon yapmakta ama $x_{02}^{(0.1)}(13.8,0,0)$, $x_{02}^{(0.4)}(8.1,0,0)$, $x_{02}^{(0.7)}(6.7,0,0)$ ve $x_{02}^{(0.9)}(6.2,0,0)$ başlangıç şartı için sistem kararsız bir davranış sergilemektedir. Dikkat edilirse x_{01} başlangıç şartları ile x_{02} başlangıç şartları birbirine çok yakın değerlerdir ve sistemin geçici durumu $LÇ$ 'nin karakterize ettiği osilasyon büyüklüklerine yakın değerlerdir. Şekil 7.10'da $\alpha=0.1, 0.4, 0.7$ ve 0.9 değerleri için yukarıda verilen başlangıç şartlarında sistemin durum uzay diyagramları verilmiştir. Görüldüğü gibi sistemin dinamiğinde, başlangıç şartlarında belirleyici durumdadır. Ama burada α integral derecesine göre durum uzay diyagramındaki kararsız $LÇ$ yörüngesi değişmektedir. α integral derecesi azaldıkça, yörünge genişlemektedir. Bu durum, osilasyonların genliğinin arttığı anlamına gelmektedir. Aynı zamanda $LÇ$ osilasyonun frekansı da, α integral derecesinin azalmasına bağlı olarak artmaktadır. Bu örnekte, α integral derecesi Örnek 6.3'teki sistemin davranışında oluşan kararsız $LÇ$ 'yi ortadan kaldırmama veya kararlı hale getirmemekle birlikte, sistemin davranışını belirleyen başlangıç değerlerini değiştirmiştir. α integral derecesi azaldıkça, sistem cevabını belirleyen başlangıç değerlerinin arttığı görülmektedir.



Şekil 7.9. $K_p=0.4$ ve $K_i=1$ için Örnek 7.2’de verilen sistemin **a)** $x_{01}^{(0.1)}$ ve $x_{02}^{(0.1)}$ başlangıç şartları için, **b)** $x_{01}^{(0.4)}$ ve $x_{02}^{(0.4)}$ başlangıç şartları için, **c)** $x_{01}^{(0.7)}$ ve $x_{02}^{(0.7)}$ başlangıç şartları için ve **d)** $x_{01}^{(0.9)}$ ve $x_{02}^{(0.9)}$ başlangıç şartları için çıkışları



Şekil 7.10. $K_p=0.4$ ve $K_r=1$ için Örnek 7.2’de verilen sistemin **a)** $x_{01}^{(0.1)}$ ve $x_{02}^{(0.1)}$ başlangıç şartları için, **b)** $x_{01}^{(0.4)}$ ve $x_{02}^{(0.4)}$ başlangıç şartları için, **c)** $x_{01}^{(0.7)}$ ve $x_{02}^{(0.7)}$ başlangıç şartları için ve **d)** $x_{01}^{(0.9)}$ ve $x_{02}^{(0.9)}$ başlangıç şartları için durum uzay diyagramları

Örnek 7.3: Bu örnekte, Çelik [84]’te incelenen Şekil 7.1’deki doğrusal olmayan kontrol sistemi verilecektir. Bu sistem, kontrolsüz durumda kaos oluşma ihtimali olmayan bir sistemdir ve tam dereceli bir *PI* kontrolörle kontrol edilmek istendiğinde, kontrolörün yüklediği ek dinamikten dolayı sistemde kaotik davranışlar gözlenmiş ve Genesio-Tesi varsayımından faydalanılarak kontrol parametrelerinin ayarlanmasının söz konusu olduğu gösterilmiştir [80]. İncelenecek kesir dereceli sistemde, doğrusal sistem parametreleri, kaotik davranışın oluşmasını sağlayan sistem parametreleri ve tam dereceli kontrolör parametreleri, kesir dereceli kontrolörün kontrol parametreleri olarak seçilecektir. Şekil 7.1’deki sistemde, doğrusal sistem;

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}, \quad a, b > 0 \quad (7.7.a)$$

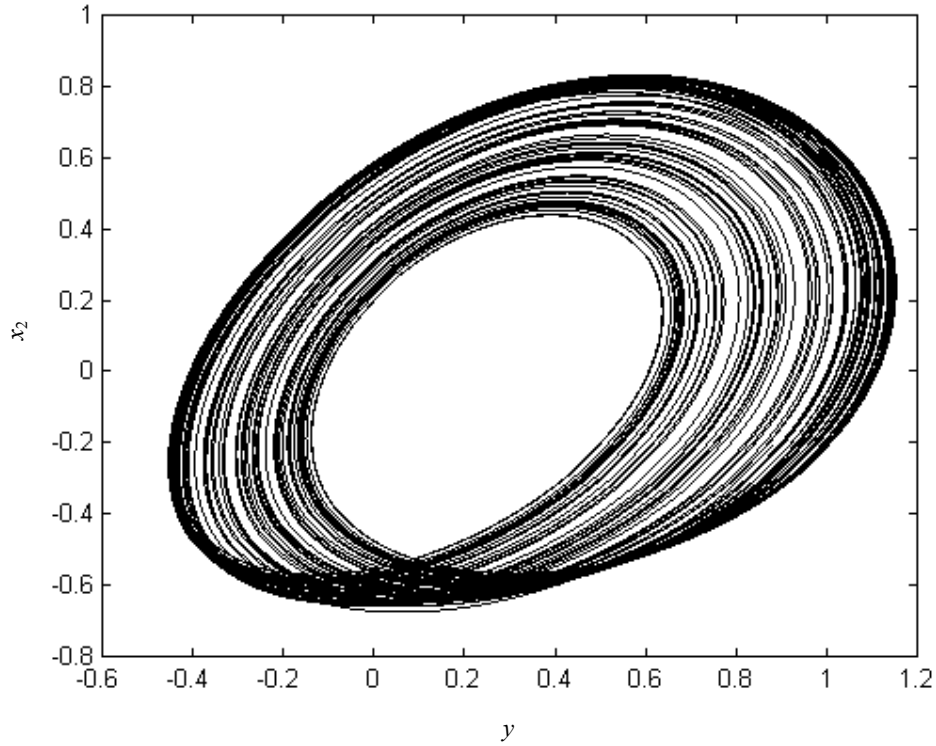
kesir dereceli kontrolör,

$$G_c^k(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7.7.b)$$

ve doğrusal olmayan eleman,

$$n(y) = cy - y^2, \quad c > 0 \quad (7.7.c)$$

olsun. Burada; tam dereceli sistemi kaosa sokacak sistem parametreleri $a=0.26$, $b=1.4$, $c=1$ ve kontrol parametreleri $K_p=0.34$, $K_i=1.134$ olarak alınacaktır. Şekil 7.11’de, tam dereceli sistemin yukarıdaki sistem parametreleri için durum uzay diyagramı verilmiştir.



Şekil 7.11. Örnek 7.3'teki tam dereceli *PI* kontrollü doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı

Sistemi, Genesio-Tesi varsayımı ile inceleyebilmek için ilk önce, bu sistemi Şekil 7.2'deki kesir dereceli Lur'e tipi sisteme dönüştürmek gerekmektedir. Bu durumda kesir dereceli doğrusal alt sistem;

$$G^k(s) = \frac{K_p s^\alpha + K_i}{s^{\alpha+2} + a s^{\alpha+1} + (b + c K_p) s^\alpha + c K_i} \quad (7.7.d)$$

olur. Bu sistemde, kaos kestirimi yapmak için Bölüm 6'da anlatılan işlemler adım adım uygulanacak olursa;

- Sistemde bir LÇ var mı?

Sistemde, α parametresine göre LÇ'nin var olabilmesi için Denklem (7.1) ve (7.2)'yi sağlayan A , B ve ω değerlerinin var olması gerekir. $n(y) = -y^2$ 'nin Çelik [80]'de elde edilen ÇGGAİ aşağıda gibidir.

$$N_0(A, B) = -A - \frac{B^2}{2A} \quad (7.7.e)$$

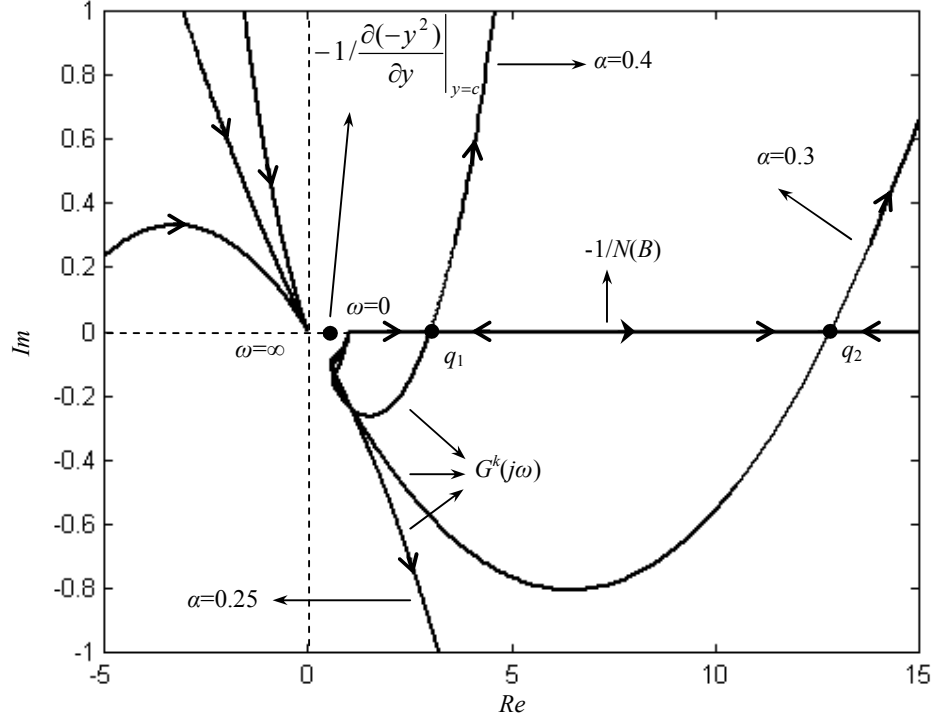
$$N_1(A, B) = -2A \quad (7.7.f)$$

Bu durumda, $s = j\omega$ için sırasıyla Denklem (7.1) ve (7.2);

$$\left(A + \frac{B^2}{2A} \right) = c \quad (7.7.g)$$

$$\left(\frac{K_p (j\omega)^\alpha + K_i}{(j\omega)^{\alpha+2} + a(j\omega)^{\alpha+1} + (b + c K_p)(j\omega)^\alpha + c K_i} \right) = \frac{1}{2A} \quad (7.7.h)$$

olur. $B > 0$ ve $\omega > 0$ olmak kaydıyla Denklem (7.7.g) ve (7.7.h)'ın sağlanması için $\alpha \geq 0.281$ olması gerekmektedir. Şekil 7.12'de $-1/N_1(B)$ ve $G^k(j\omega)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimleri $\alpha = 0.25, 0.3$ ve 0.4 için verilmiştir. Dikkat edilirse, $\alpha \geq 0.281$ 'i sağlayan $\alpha = 0.3$ ve 0.4 için $-1/N_1(B)$ ve $G^k(j\omega)$ kompleks düzlemde sırasıyla q_1 ve q_2 noktalarında birbirleriyle kesişmektedir. Bu durum LÇ'nin varlığını göstermektedir. Ama $\alpha \geq 0.281$ 'i sağlamayan $\alpha = 0.25$ için $-1/N_1(B)$ ve $G^k(j\omega)$ kompleks düzlemde bir kesişme söz konusu değildir ve sistemde LÇ yoktur.



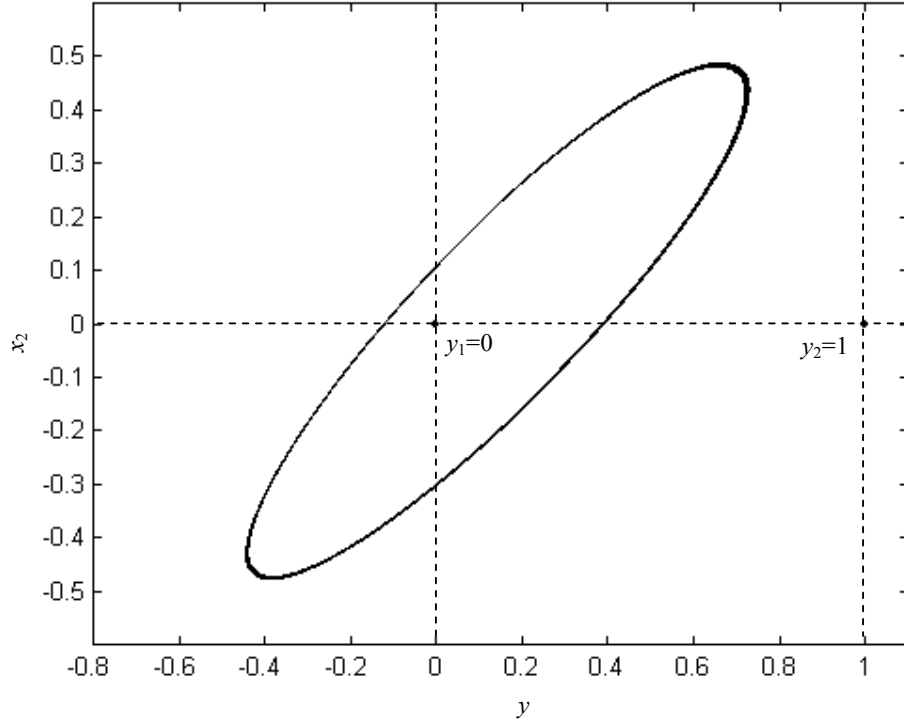
Şekil 7.12. Örnek 7.3'teki kesir dereceli PI^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin kararlılık karakteristiği

- Sistemde ayrı bir DN var mı?

Sisteme ait DN, Denklem (7.3) yardımıyla bulunabilir. Bu durumda, sistemde $y_1=0$ da ve $y_2=c$ 'de olmak üzere iki farklı DN vardır. Bunlardan, $y=c$ noktası ayrı DN'ye karşılık gelmektedir. Çünkü, sistemde gözlenecek LÇ davranışı $y=0$ 'daki DN'yi içine almakta ama $y=c$ 'deki DN'yi çevrelememektedir. Şekil 7.13'de $\alpha=0.4$ için sistemin durum uzay diyagramı verilmiştir. Görüldüğü gibi, LÇ $y=c$ 'deki DN'yi çevrelememektedir.

- LÇ kararlı ve ayrı DN kararsız mı?

Sistemde $\alpha \geq 0.281$ için LÇ vardır ve LÇ'nin kararlı olabilmesi için, Şekil 7.12'deki q_1 ve q_2 noktalarının bir noktada birleşmesi gerekmektedir. Şekil 7.12'ye bakıldığında, bu iki kesişme noktasının tanımladığı LÇ kararlıdır. Şekil 7.13'de, sistemin simülasyonu ile elde edilen durum uzay diyagramında da LÇ gözlenmektedir. Ayrı DN'nin kararlılığı, Şekil 7.12'de doğrusal olmayan elemanın $y=c$ 'deki doğrusallaştırılmış eşdeğerinin yerinden faydalanılarak, Nyquist kararlılık kriteriyle incelenebilir. Nyquist kararlılık kriterine göre, kapalı çevrim sistemin sağ yarı s-düzleminde bir kutbu olduğundan, ayrı DN kararsızdır.



Şekil 7.13. Örnek 7.3’de, $\alpha=0.4$ için kararlı $LÇ$ ve ayrı DN

- DN ile $LÇ$ arasında bir etkileşim var mı?

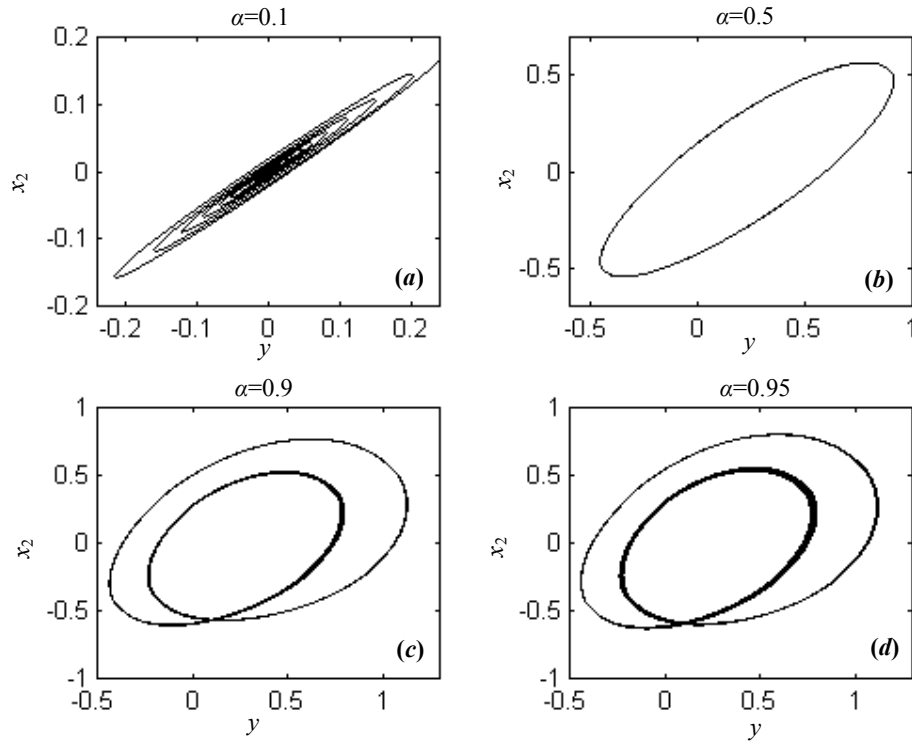
Kararsız DN ile kararlı $LÇ$ etkileşime girmesiyle, sistemde $LÇ$ gürültülü hale gelecek ve sistem kaotik davranış gösterecektir. Bu yüzden, bu şart sistemde kaosu gözleneceği sistem parametrelerinin kestirimi için ana şart olarak değerlendirilebilir. Denklem (6.16)’nın sağlanmasıyla, sistemde kaos beklenen α parametresi değerleri belirlenebilir. Denklem (6.16)’nın sağlanması için $\alpha \geq 0.89$ olmalıdır.

- $Sistem$ uygun filtreleme etkisine sahip mi?

Yukarda bahsedilen şartlar nicel, ama son şart olan uygun filtreleme etkisi niteldir. Bu yüzden, net bir şekilde uygun filtreleme etkisini sağlayacak α parametresini tespit etmek mümkün değildir. Bunun için DN ile $LÇ$ etkileşiminin sağlandığı, $\alpha \geq 0.89$ değerlerinde kaotik davranışın aranması gerekmektedir.

Şekil 7.14’de, α ’nın dört farklı değeri için sistem yörüngeleri verilmiştir. Dikkat edilirse, $\alpha < 0.281$ için sistem asimptotik kararlı bir davranış gösterirken, $0.281 > \alpha > 0.89$ aralığında $LÇ$ davranış göstermektedir. $\alpha \geq 0.89$ için sistemde DN ile $LÇ$ arasında etkileşim

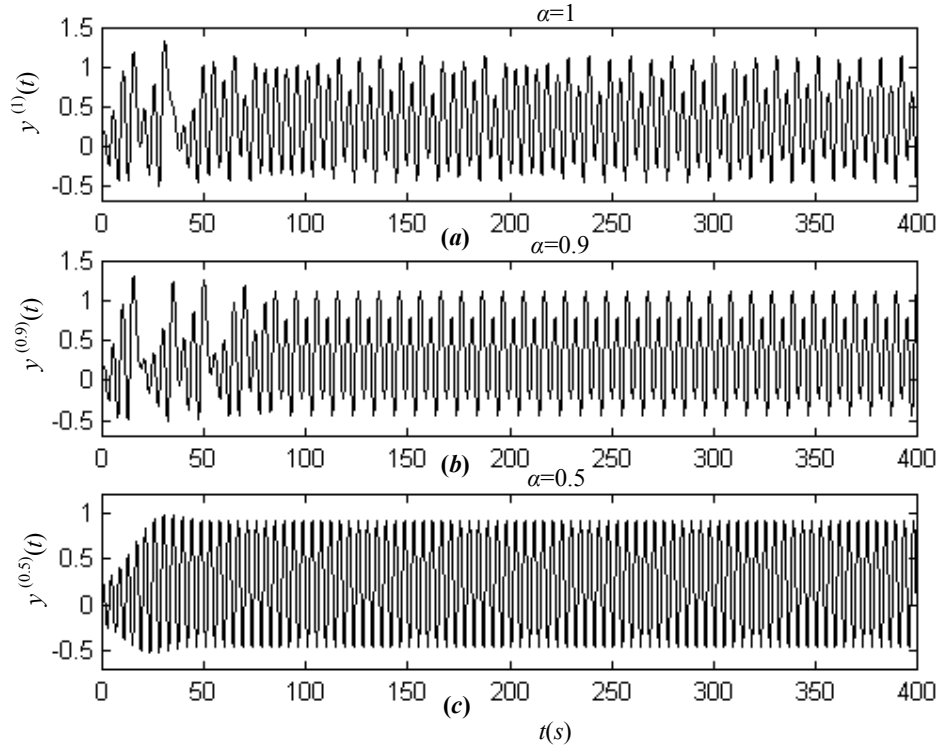
söz konusu olduğu için, Şekil 7.14.(c) ve (d)'de görüldüğü gibi $LÇ$ bozulmaya başlamaktadır ve sistemde periyot katlama davranış gözlenmektedir. Ayrıca, çeşitli α değerlerinde sistemin zaman cevabı Şekil 7.15'de elde edilmiştir. Sistemin zaman cevabı serilerinden faydalanarak, sistemde kaosu varlığı nicel olarak maksimum Lyapunov üsleri ile tanımlanabilir. Tablo 1'de çeşitli α değerleri için sisteme ait maksimum Lyapunov üsleri değerleri elde edilmiştir. Sonuç olarak, tam dereceli PI kontrolörün aksine, yaklaşık olarak $0 < \alpha < 1$ için kesir dereceli PI^α kontrolörlü sistemde kaotik davranış gözlenmemiştir. Bu sayede, tam dereceli PI kontrolörün sisteme yüklediği ek dinamikten de kurtulmuş olunur.



Şekil 7.14. Örnek 7.3'deki kesir dereceli PI^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin **a)** $\alpha=0.1$ için, **b)** $\alpha=0.5$ için, **c)** $\alpha=0.9$ için, **d)** $\alpha=0.95$ için durum uzay diyagramı

Tablo 7.1. Örnek 7.3'deki sistemin farklı α dereceleri için maksimum Lyapunov üsleri

Sistem Derecesi (α)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
1	5.907×10^{-5}
0.95	0
0.9	0
0.5	0
0.1	0



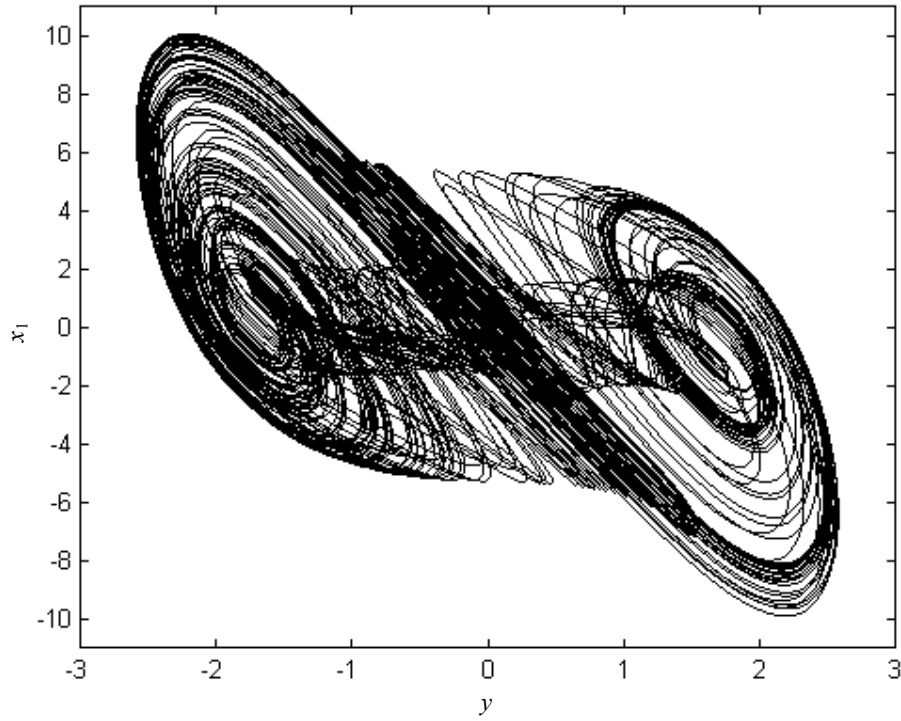
Şekil 7.15. Örnek 7.3'deki kesir dereceli Lur'e sisteminin **a)** $\alpha=1$ için, **b)** $\alpha=0.9$ için ve **c)** $\alpha=0.5$ için zaman cevapları

Örnek 7.4: Çelik [84]'te incelenen ikinci sistem, diğer bir uygulama olarak ele alınacaktır. Şekil 7.1'deki doğrusal olmayan kontrol sistemi için Denklem (7.7.a) ve (7.7.b) sırasıyla sistem ve kontrolördür. Doğrusal olmayan eleman olarak, kübik türden bir doğrusalsızlık seçilecektir ve Denklem (7.8.a) ile ifade edilecektir.

$$n(y) = y^3 - cy, \quad c > 0 \quad (7.8.a)$$

Burada, tam dereceli sistemi kaosa sokacak sistem parametreleri $a=0.2$, $b=1.5$, $c=3$ ve kontrol parametreleri $K_p=0.12$, $K_i=0.3$ olarak alınacaktır. Bu parametreler için tam dereceli PI kontrollü doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı, Şekil 7.16'da verilmiştir.

Bir önceki örnekteki sıra takip edilerek, benzer analiz yapılacak olursa; öncelikle yukarıdaki sistemin, Lur'e tipi sisteme dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu durumda kesir dereceli doğrusal sistem;



Şekil 7.16. Örnek 7.4'teki tam dereceli PI kontrollü doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı

$$G^k(s) = \frac{K_p s^\alpha + K_i}{s^{\alpha+2} + a s^{\alpha+1} + (b - K_p) s^\alpha - K_i} \quad (7.8.b)$$

Doğrusal olmayan alt sistem;

$$n(y) = y^3 - (c-1)y \quad (7.8.c)$$

olur. Denklem (7.8.b) ve (7.8.c) ile tanımlı sisteme, Bölüm 6’da anlatılan işlemler adım adım uygulanacak olursa;

- Sistemde bir LÇ var mı?

$n(y) = y^3 - (c-1)y$ ’nin Genesio [78]’de elde edilen ÇGGAİ’ı aşağıdaki biçimde verilmiştir.

$$N_0(A, B) = A^2 + \frac{3}{2}B^2 - (c-1) \quad (7.8.d)$$

$$N_1(A, B) = 3A^2 + \frac{3}{4}B^2 - (c-1) \quad (7.8.e)$$

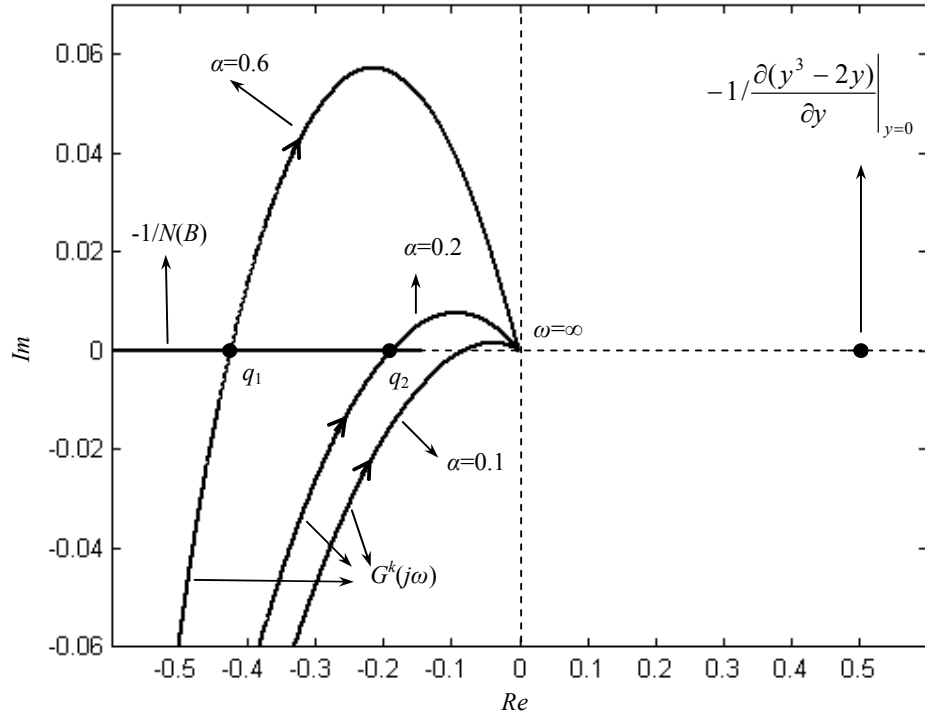
Bu durumda, $s = j\omega$ için Denklem (7.1) ve (7.2) sırasıyla;

$$\left(A^2 + \frac{3}{2}B^2 \right) = 3 \quad (7.8.f)$$

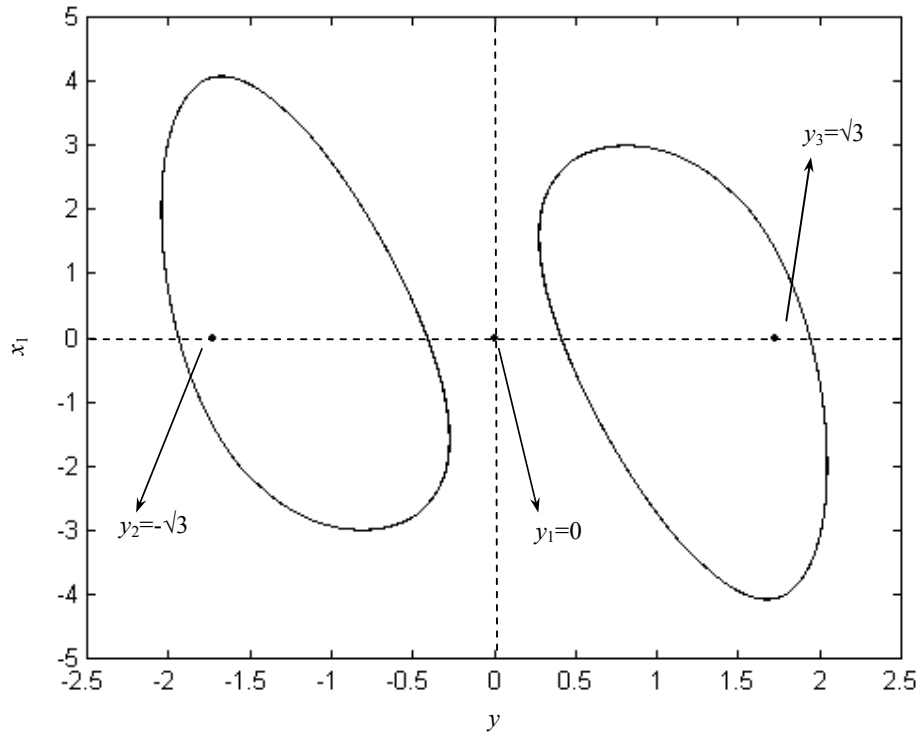
$$\left(\frac{K_p(j\omega)^\alpha + K_i}{(j\omega)^{\alpha+2} + a(j\omega)^{\alpha+1} + (b + K_p)(j\omega)^\alpha - K_i} \right) \left(7 - \frac{15}{4}B^2 \right) = -1 \quad (7.8.g)$$

olur. $B > 0$ ve $\omega > 0$ olmak kaydıyla, Denklem (7.8.f) ve (7.8.g)’nin sağlanması için yaklaşık olarak $\alpha \geq 0.155$ olması gerekmektedir. Şekil 7.17’de, $-1/N_1(B)$ ve $G^k(j\omega)$ ’nın kompleks düzlemdeki değişimleri $\alpha=0.1, 0.2$ ve 0.6 için verilmiştir.

Dikkat edilirse $\alpha \geq 0.155$ ’i sağlayan $\alpha=0.2$ ve 0.6 için $-1/N_1(B)$ ve $G^k(j\omega)$ kompleks düzlemde sırasıyla q_1 ve q_2 noktalarında birbirleriyle kesişmektedir. Bu durum, LÇ’nin varlığını göstermektedir. Ama $\alpha \geq 0.155$ ’i sağlamayan $\alpha=0.1$ için $-1/N_1(B)$ ve $G^k(j\omega)$ arasında bir kesişme söz konusu değildir ve sistemde LÇ yoktur.



Şekil 7.17. Örnek 7.4'teki kesir dereceli PT^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin kararlılık karakteristiği



Şekil 7.18. Örnek 7.4'de, $\alpha=0.5$ için kararlı $LÇ$ ve ayrı DN

- Sistemde ayrı bir DN var mı?

Sisteme ait DN 'leri, Denklem (7.3) yardımıyla bulunabilir. Bu durumda, sistemin $y_1=0$ 'da ve $y_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ 'de olmak üzere üç farklı DN 'leri vardır. Bunlardan $y=0$ noktası, ayrı DN 'ye karşılık gelmektedir. Çünkü sistemde gözlenecek $LÇ$ davranış $y = \pm\sqrt{3}$ 'deki DN 'leri içine almakta ama $y=0$ 'daki DN 'yi çevrelememektedir. Şekil 7.18'de, $\alpha=0.5$ için sistemin durum uzay diyagramı verilmiştir. Görüldüğü gibi $LÇ$ $y=0$ 'daki DN 'yi çevrelememektedir ve bu ayrı DN dir.

- $LÇ$ kararlı ve ayrı DN kararsız mı?

Şekil 7.17'deki q_1 ve q_2 noktalarının, bir noktada birleşen karakteristikte olması sebebiyle $LÇ$ kararlıdır. Ayrı DN , Nyquist kararlılık kriterine göre kapalı çevrim sistemin sağ yarı s -düzlemde bir kutbu olması sebebiyle kararsızdır.

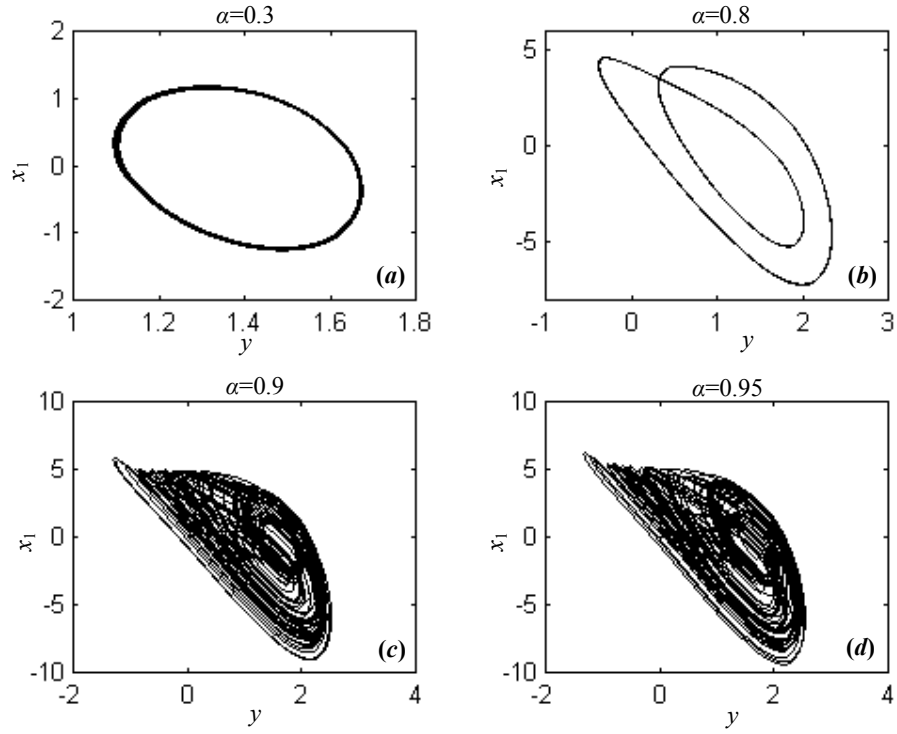
- DN ile $LÇ$ arasında bir etkileşim var mı?

Denklem (6.16)'nın sağlanmasıyla, sistemde kaos beklenen α parametresi değerleri belirlenebilir. Etkileşimin sağlanması için $\alpha \geq 0.54$ olmalıdır.

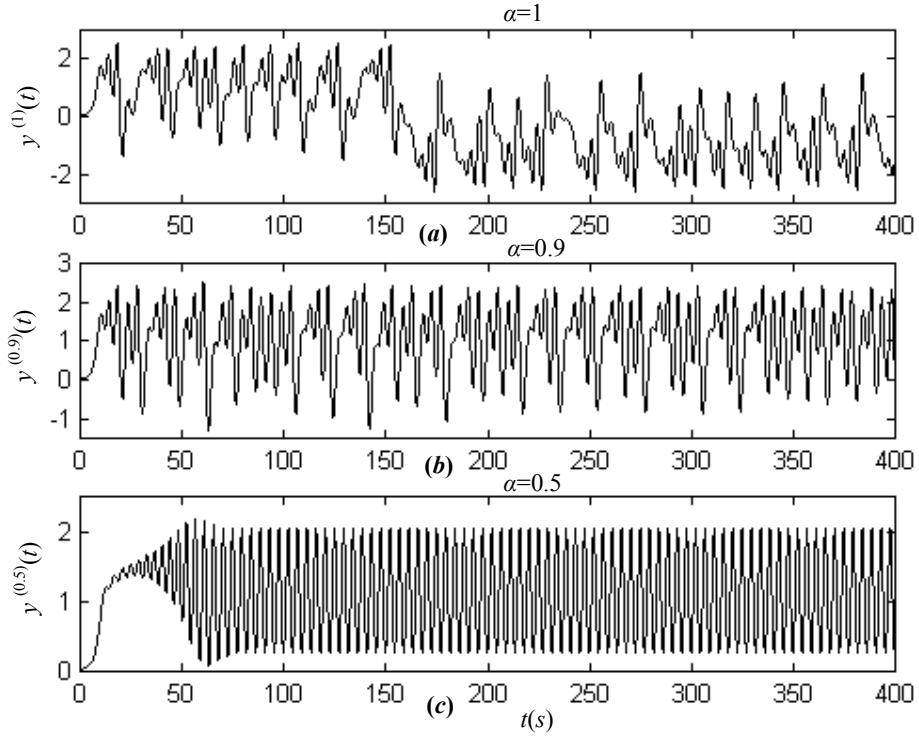
- Sistemin uygun filtreleme etkisine sahip mi?

Uygun parametre kombinasyonu ile bu şart sağlanabilir. Bunun için DN ile $LÇ$ etkileşimin sağlandığı, $\alpha \geq 0.54$ değerlerinde kaotik davranışın aranması gerekmektedir. Şekil 7.19'da, α 'nın dört farklı değerleri için sistem yörüngeleri verilmiştir. Dikkat edilirse, $\alpha < 0.54$ için sistemde $LÇ$ davranış gözlenmektedir. $\alpha \geq 0.54$ için sistemde DN ile $LÇ$ arasında etkileşim vardır ve Şekil 7.19.(b)'de görüldüğü gibi $LÇ$ bozulmaya başlamaktadır. Şekil 7.19.(c) ve (d)'de ise sistemde kaotik davranış gözlenmektedir. Bu sonucu, farklı α değerleri için Şekil 7.20'de elde edilmiş sistemin zaman cevabında ve Tablo 2'de elde edilmiş maksimum Lyapunov üsleri değerlerinde de görmek mümkündür.

Sonuç olarak, bu örnek için tam dereceli PI kontrolörün aksine, $0 > \alpha \geq 0.8$ için, kesir dereceli PI^α kontrolörlü sistemde kaotik davranış gözlenmemiştir. Bu sayede, tam dereceli PI kontrolörün sisteme yüklediği ek dinamik büyük oranda önlenmiştir.



Şekil 7.19. Örnek 7.4'deki kesir dereceli PI^α kontrollü doğrusal olmayan sistemin **a)** $\alpha=0.3$ için, **b)** $\alpha=0.8$ için, **c)** $\alpha=0.9$ için, **d)** $\alpha=0.95$ için durum uzay diyagramları



Şekil 7.20. Örnek 7.4'deki kesir dereceli Lur'e sisteminin **a)** $\alpha=1$ için, **b)** $\alpha=0.9$ için, **c)** $\alpha=0.5$ için zaman cevapları

Tablo 7.2. Örnek 7.4’deki sistemin farklı α dereceleri için maksimum Lyapunov üsleri

Sistem Derecesi (α)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
1	7.296×10^{-4}
0.95	2.692×10^{-4}
0.9	11×10^{-4}
0.8	0
0.3	0

8. KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLER

Kaos olarak adlandırılan, doğrusal olmayan sistemlerde gözlenen ve önceden kestirilemeyen dinamikler son zamanlarda yoğun bir şekilde çalışılmasına paralel olarak, kesir dereceli sistemlerde de kaotik dinamiklerin varlığının tespiti, araştırılması gereken bir konu durumuna gelmiştir. Sürekli zamanlı bir sistemde, garip çekiciler olarak tanımlanan karmaşık dinamiklerin gözlenebilme şartı: sistemin doğrusal olmayan eleman bulundurması, başlangıç şartına hassas bağıllık ve sistem derecesinin üç ve üzeri olmasıdır. Dikkat edilirse, kaosun en önemli özelliği olan başlangıç şartına hassas bağıllık, sürekli zamanlı bir sistem için sistem derecesi üçten küçük olan doğrusal olmayan sistemlerde gözlenmez. Buna karşın, gerek mevcut kaotik sistemlerin kesir dereceli modellerinde ve gerek yeni tanımlanan kesir dereceli sistemlerde, sistem derecesi üçten küçük olmasına rağmen sistemde kaotik davranışlar gözlenmiştir [48-55,85-90]. Bununla birlikte, geleneksel sürekli zamanlı sistemlerde olduğu gibi sistem derecesi hakkında net bir sınırlama sürekli zamanlı kesir dereceli sistemler için söylemek mümkün değildir. Örneğin, kesir dereceli Chua sistemi için sistem derecesi 2.7 [48] iken, kesir dereceli Rössler sistemi için 2.4 [51] ve kesir dereceli Chen sistemi için bu sınır ilk başta 2.92 [52], sonra 2.1 [53] ve son olarak ta 0.3 [54] olmuştur.

Yukarda bahsedilen, kaos gözlenen kesir dereceli sistemlerin derecesi 3'ten küçük olmasına rağmen sistemde hala üç durum değişkeni vardır ve bu üç durum değişkenlerinin en az bir tanesinin derecesi birden küçük değerdedir, ayrıca hiçbirinde gecikme elemanı mevcut değildir. Devam eden kısımlarda incelen sistemlerle ilgili yapılan simülasyonların hepsi *MATLAB/Simulink* ortamında elde edilmiştir. Ayrıca α kesir derecesi, bu bölümde incelenen tüm sistemler için $0 < \alpha < 1$ aralığında alınmıştır.

8.1. Kesir Dereceli Sürekli Zamanlı Sistemlerde Kaos

Bu alt bölümde, sürekli zamanlı kesir dereceli kaotik sistemlere örnek olarak; sırasıyla kesir dereceli Chua sistemi, kesir dereceli Rössler sistemi ve kesir dereceli Chen sistemi incelenecektir.

8.1.1. Kaotik Chua Sistemi ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli

Alışılmış Chua sisteminden farklı olarak bu sistemde, parçalı doğrusal yapıdaki doğrusal olmayan eleman yerine, kübik türden doğrusalsızlık kullanılmıştır ve benzer davranışlar gözlenmiştir [48]. Chua sisteminin durum uzay gösterimi, aşağıda verildiği gibi ifade edilmektedir.

$$\frac{dx}{dt} = \sigma \left[y + \frac{x - 2x^3}{7} \right] \quad (8.1.a)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z \quad (8.1.b)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y, \quad \beta = \frac{100}{7} \quad (8.1.c)$$

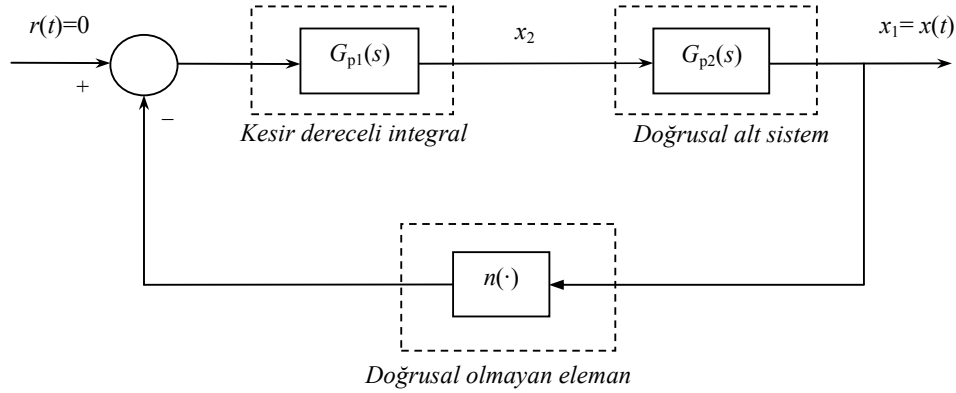
Burada; x , y ve z durum değişkenleri, σ ve β sistem parametreleridir ve verilen tüm uygulamalar için $\beta=100/7$ alınacaktır. Denklem (8.1)'de tanımlanan Chua sisteminin, kesir dereceli modelinin durum uzay gösterimi de,

$$\frac{d^q x}{dt^q} = \sigma \left[y + \frac{x - 2x^3}{7} \right] \quad (8.2.a)$$

$$\frac{d^q y}{dt^q} = x - y + z \quad (8.2.b)$$

$$\frac{d^q z}{dt^q} = -\beta y, \quad \beta = \frac{100}{7} \quad (8.2.c)$$

şeklinde. Burada, q her durum değişkeninin kesirli derecesine karşılık gelmektedir. Kesir dereceli modelin, rahat bir şekilde simülasyonlarının yapılabilmesi için durum uzay gösterimine eşdeğer blok diyagramı, Şekil 8.1'deki gibi verilmiştir [48].



Şekil 8.1. Kesirli Chua sisteminin derecesinin kolay bir şekilde değiştirilmesini sağlayan geri beslemeli yapı

Şekildeki blok diyagramında, kesir dereceli integral, doğrusal alt sistem ve doğrusal olmayan alt sistem (8.2)'de verildiği biçimdedir. Burada, x_1 ve x_2 simülasyonlarda durum değişkeni olarak kullanılacaktır

$$G_{p1}(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (8.2.d)$$

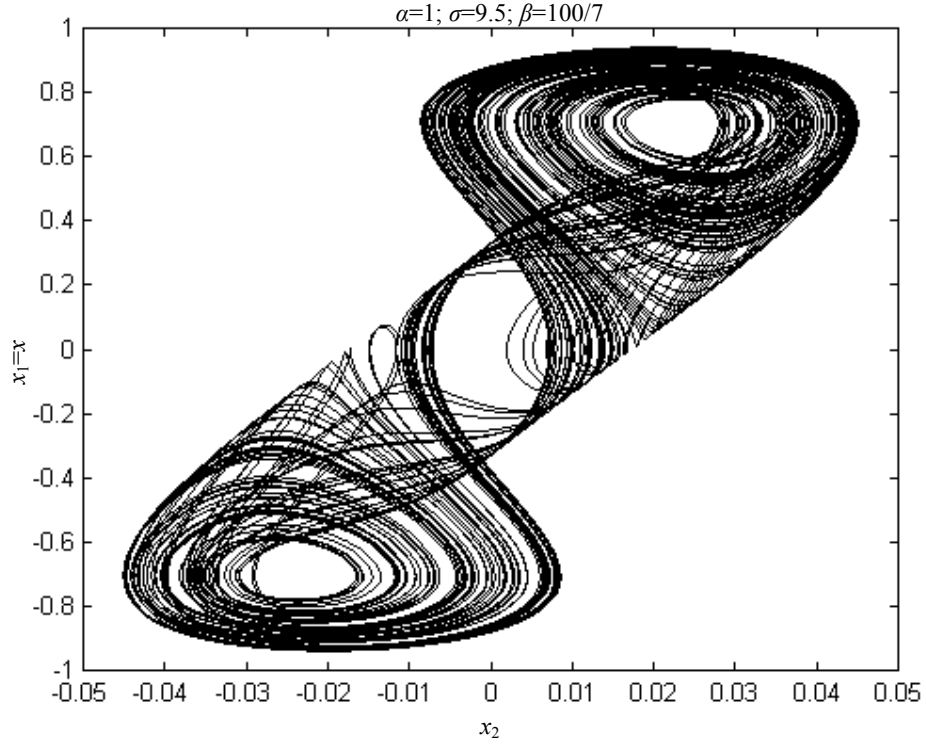
$$G_{p2}(s) = \frac{\sigma(s^2 + s + \beta)}{s^2 + s + (\beta - \sigma)} \quad (8.2.e)$$

$$n(x) = \frac{2x^3 - x}{7} \quad (8.2.f)$$

Şekil 8.1'de verilen geri beslemeli sistemde, $\sigma = 9.5$ ve $\beta = 100/7$ değerleri ve $\alpha = 1$ için tam dereceli sistemin durum uzay diyagramı, Şekil 8.2'de verildiği gibi elde edilmiştir.

Sistemin kesir dereceli modelinde ise Şekil 8.1'deki blok diyagramındaki integral derecesi $\alpha = 0.9, 0.8$ ve 0.7 için sistemde kaosu varlığı gösterilmiştir. Bu durumda sistem derecesi de sırasıyla 2.9, 2.8 ve 2.7 olacaktır. Bu durumlara karşılık gelen sistemlerin durum uzay diyagramları, Şekil 8.3'de elde edilmiştir.

Görüldüğü gibi 3.dereceden tam dereceli sistemin kaotik davranış göstermesi söz konusu olmakla birlikte, 3.dereceden küçük değerli kesir dereceli Chua sisteminde de kaotik davranışlar gözlenmektedir.



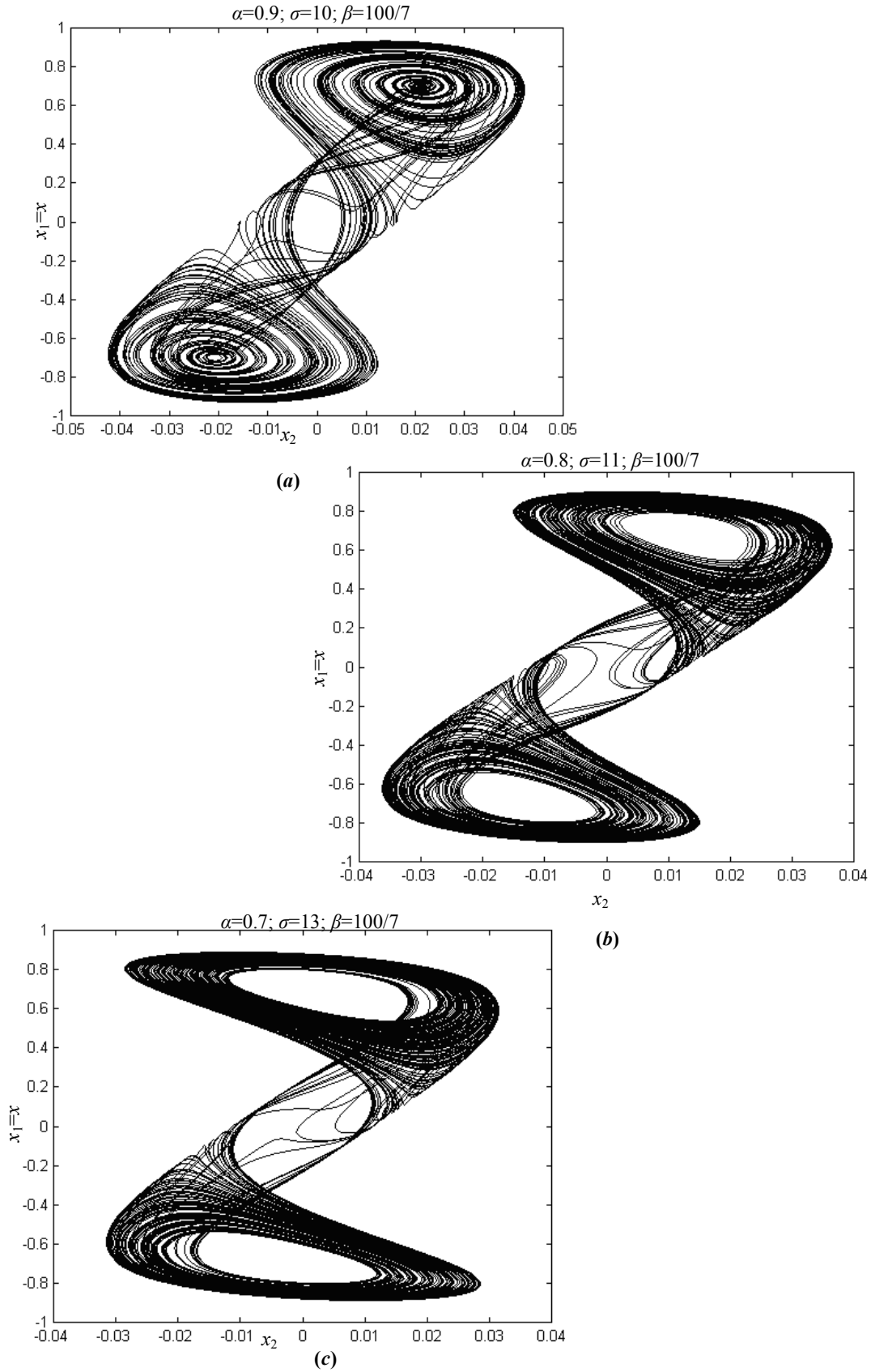
Şekil 8.2. Tam dereceli Chua sisteminin, $\sigma=9.5$ ve $\beta=100/7$ için durum uzay diyagramı

Tablo 8.1. Kesir dereceli Chua sisteminin, sistem derecesi q , kesirli integral derecesi α ve sistem parametreleri σ, β için maksimum Lyapunov üsleri

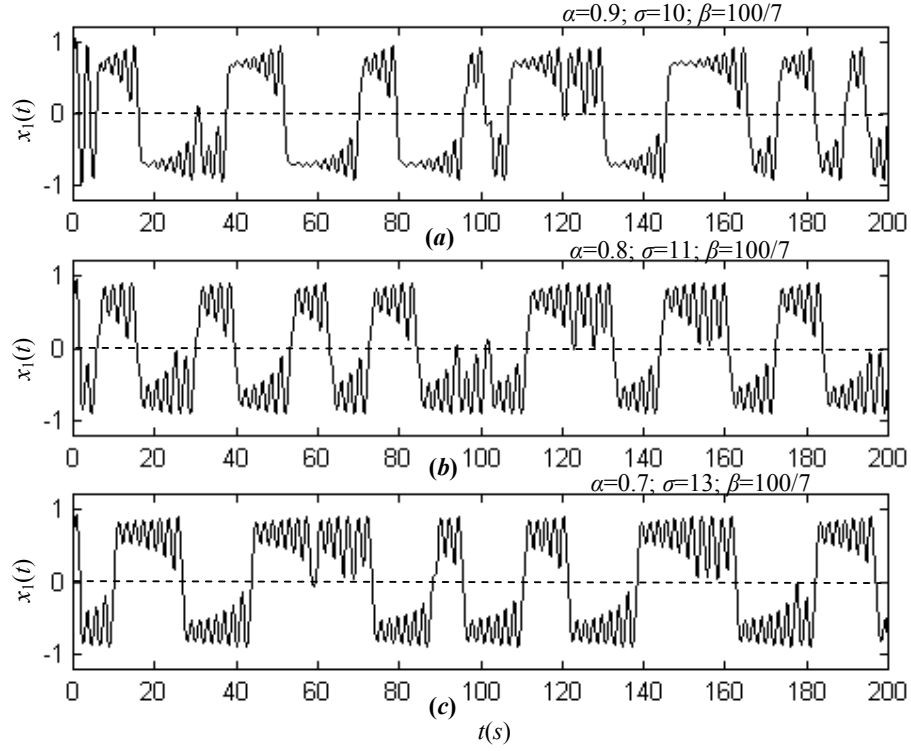
Sistem derecesi (q)	İntegral derecesi (α)	Sistem parametreleri (σ, β)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
0.9667	0.9	(10, 100/7)	0.00190
0.9333	0.8	(11, 100/7)	0.00032
0.9	0.7	(13, 100/7)	0.00008

Tablo 8.1’de, maksimum Lyapunov üsleri integral derecesi $\alpha=0.9, 0.8$ ve 0.7 için birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartına ($x_{01}(0.1,0,0)$ ve $x_{02}(0.1001,0,0)$) göre elde edilen sistem yörüngesinden faydalanılarak elde edilmiştir. Maksimum Lyapunov üslerinin hepsi pozitif değere sahiptir ve bu da sistemde kaosu var olduğunu göstermektedir.

Şekil 8.4’de sırasıyla sistemin üç farklı integral derecesi $\alpha=0.9, 0.8$ ve 0.7 için x durum değişkeninin zamana göre değişimleri elde edilmiştir. Elde edilen zaman cevaplarından da, sistemin kaotik yapıda olduğu gözlemlenmektedir.



Şekil 8.3. Kesir dereceli Chua sisteminin **a)** $\alpha=0.9$, **b)** $\alpha=0.8$ ve **c)** $\alpha=0.7$ integral derecesi için durum uzay diyagramları



Şekil 8.4. Kesir dereceli Chua sisteminin a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.8$ ve c) $\alpha=0.7$ integral dereceleri için zaman cevapları

8.1.2. Kaotik Rössler Sistemi ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli

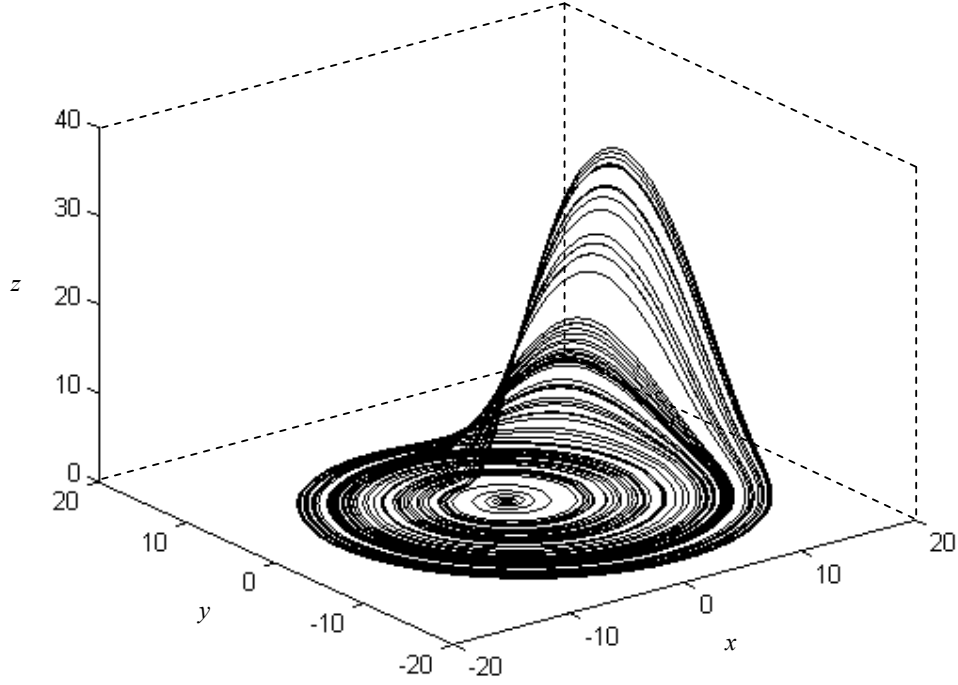
Kaotik kesir dereceli sistemlere bir diğer örnek, kesir dereceli Rössler sistemidir. Bu sistemde, sistem derecesi 2.4'e eşit ve büyük değerlerde sistemin kaotik davranış gösterdiği ortaya konmuştur [51]. Tam dereceli Rössler sistemi aşağıda verilen durum uzay gösterimiyle tanımlanmaktadır.

$$\frac{dx}{dt} = -(y + z) \quad (8.3.a)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (8.3.b)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.2 + z(x - 10) \quad (8.3.c)$$

Burada x , y ve z durum değişkenlerine karşılık gelmekte ve a sistem parametresi olarak tanımlanmaktadır. Tam dereceli Rössler sistemi, $a=0.15$ için kaotik davranış sergilemektedir. Şekil 8.5’de sisteme ait durum uzay diyagramı, üç boyutlu uzayda elde edilmiştir.



Şekil 8.5. Tam dereceli Rössler sisteminin $a=0.15$ için durum uzay diyagramı

Kesir dereceli Rössler sisteminin durum uzay formunda ifadesi

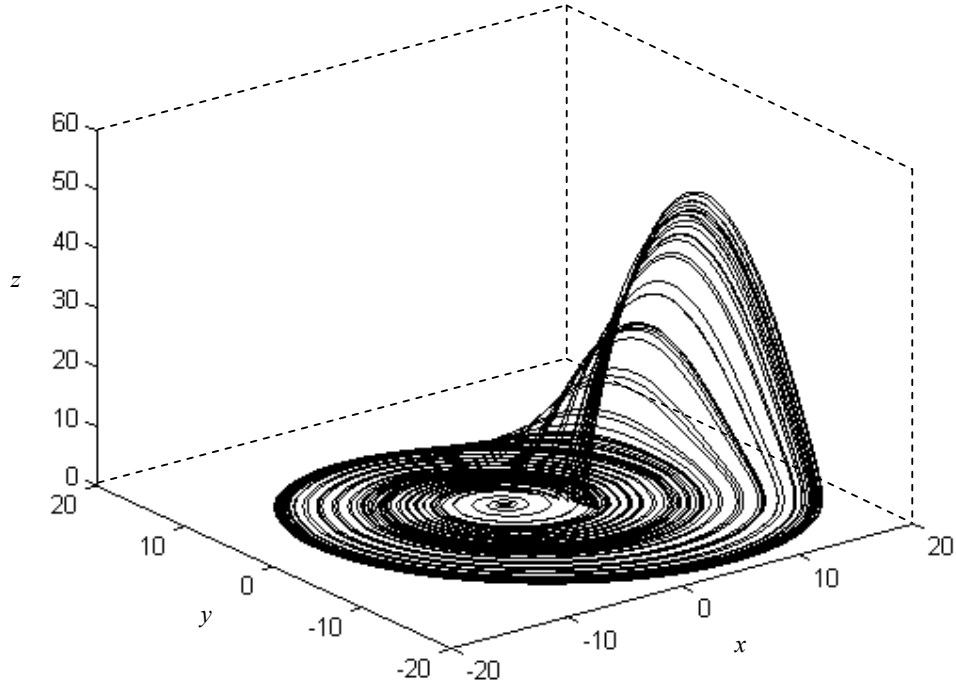
$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = -(y + z) \quad (8.4.a)$$

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = x + ay \quad (8.4.b)$$

$$\frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = 0.2 + z(x - 10) \quad (8.4.c)$$

şeklinde. Tam dereceli Rössler denkleminden farklı olarak, kesir dereceli modelde her durum değişkeni kesirli α türev derecesiyle tanımlanmaktadır.

Şekil 8.6 ve 8.7’de sırasıyla $\alpha=0.9$ ve 0.8 kesirli sistem derecesi için üç boyutlu durum uzay diyagramı $x_0(0.1,0,0)$ başlangıç şartında benzetim yoluyla elde edilmiştir.



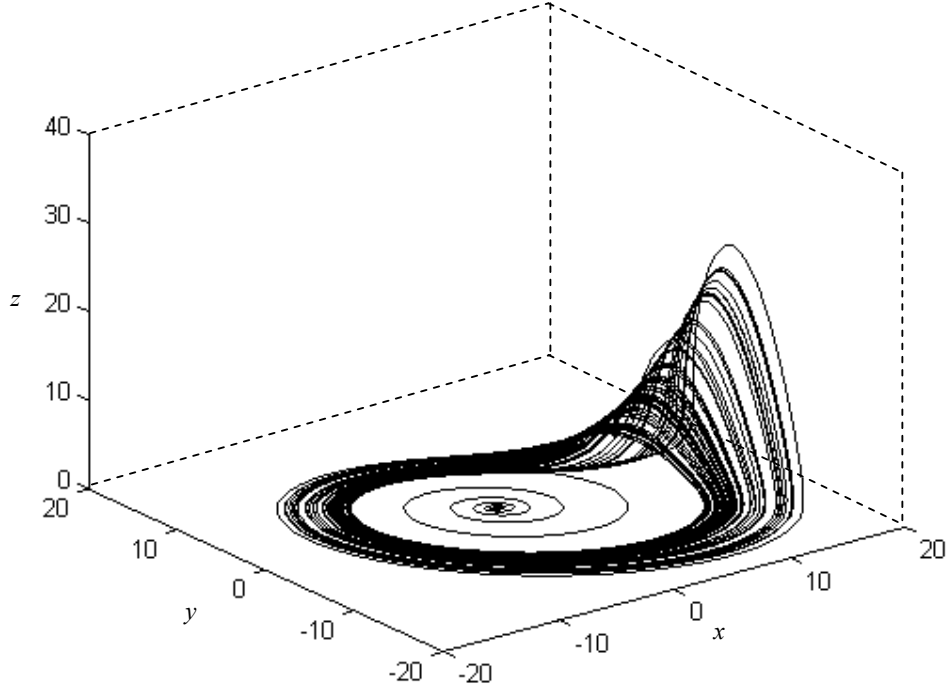
Şekil 8.6. Kesir dereceli Rössler sistemi’nin $\alpha=0.9$ ve $a=0.4$ için durum uzay diyagramı

Tablo 8.2’de maksimum Lyapunov üsleri, Rössler sisteme ait durum değişkenlerinin kesir derecesi $\alpha=0.9$ ve 0.8 için birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartına ($x_{01}(0.1,0,0)$ ve $x_{02}(0.1001,0,0)$) göre elde edilen sistem yörüngesinden faydalanılarak elde edilmiştir.

Tablo 8.2. Kesir dereceli Rössler sisteminin, sistem derecesi α ve sistem parametreleri a için maksimum Lyapunov üsleri

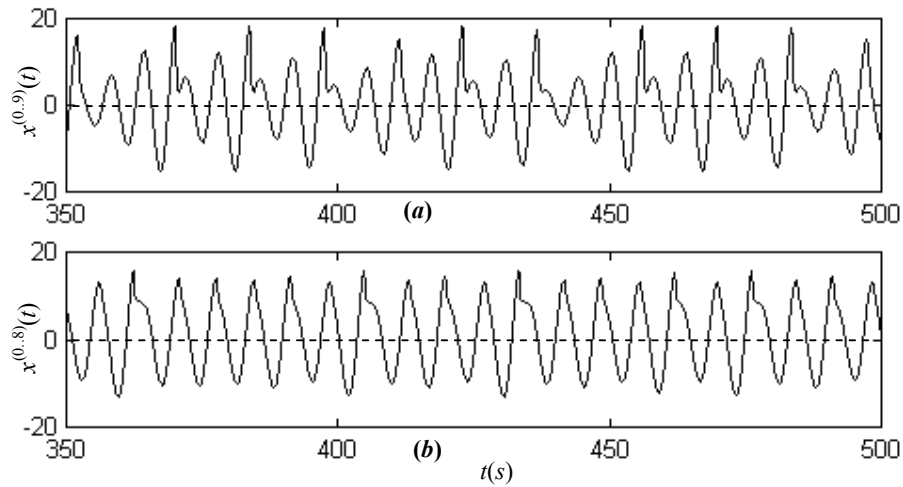
Sistem derecesi (α)	Sistem parametresi (a)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
0.9	0.40	0.0033
0.8	0.63	0.0007

Maksimum Lyapunov üslerinin hepsi pozitif değere sahiptir ve bu da sistemde kaosu var olduğunu göstermektedir.



Şekil 8.7. Kesir dereceli Rössler sisteminin $\alpha=0.8$ ve $a=0.63$ için durum uzay diyagramı

Ayrıca Şekil 8.8’de sırasıyla sistemin iki farklı kesir derecesi $\alpha=0.9$ ve 0.8 için x durum değişkeninin zamana göre değişimleri elde edilmiştir. Elde edilen zaman cevaplarından da, sistemin kaotik yapıda olduğu gözlemlenebilmektedir



Şekil 8.8. Kesir dereceli Rössler sistemin a) $\alpha=0.9$ ve $a=0.4$ ve b) $\alpha=0.8$ ve $a=0.63$ için zaman cevapları

8.1.3. Kaotik Chen Sistemi ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli

Sürekli zamanlı kesir dereceli kaotik sistemlerle ilgili incelenecek son örnek, kesir dereceli Chen sistemi olacaktır. Kaotik Chen sisteminin kesir dereceli modelinde, sistem derecesi 0.3'e kadar kaotik davranış görülmektedir [54]. Tam dereceli Chen sisteminin durum uzay modeli,

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x) \quad (8.5.a)$$

$$\frac{dy}{dt} = (c - a)x - xz + cy \quad (8.5.b)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (8.5.c)$$

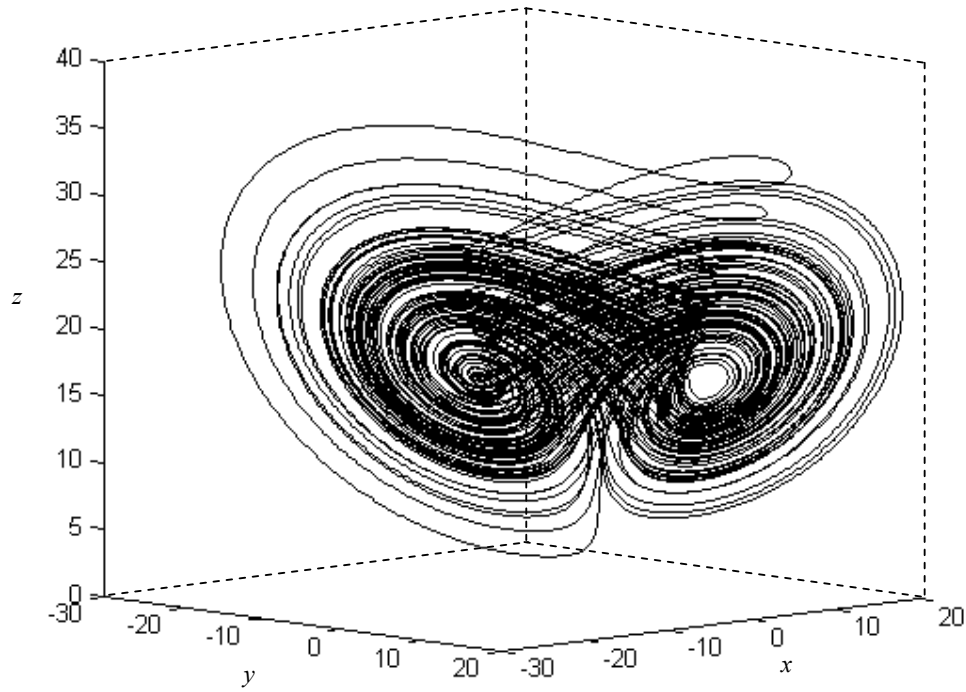
ile tanımlanır. Burada; x , y ve z durum değişkenlerine; a , b ve c sistem parametrelerine karşılık gelmektedir. Tam dereceli Chen sistemi, $a=35$, $b=3$ ve $c=28$ için kaotik davranış sergilemektedir. Şekil 8.9'da da, sisteme ait durum uzay diyagramının üç boyutlu uzaydaki değişiminden kaotik davranış açık bir biçimde gözlenmektedir. Benzer şekilde kaotik Chen sisteminin kesir dereceli modelinin durum uzay tanımı,

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = a(y - x) \quad (8.6.a)$$

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = (c - a)x - xz + cy \quad (8.6.b)$$

$$\frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = xy - bz \quad (8.6.c)$$

şeklindedir.

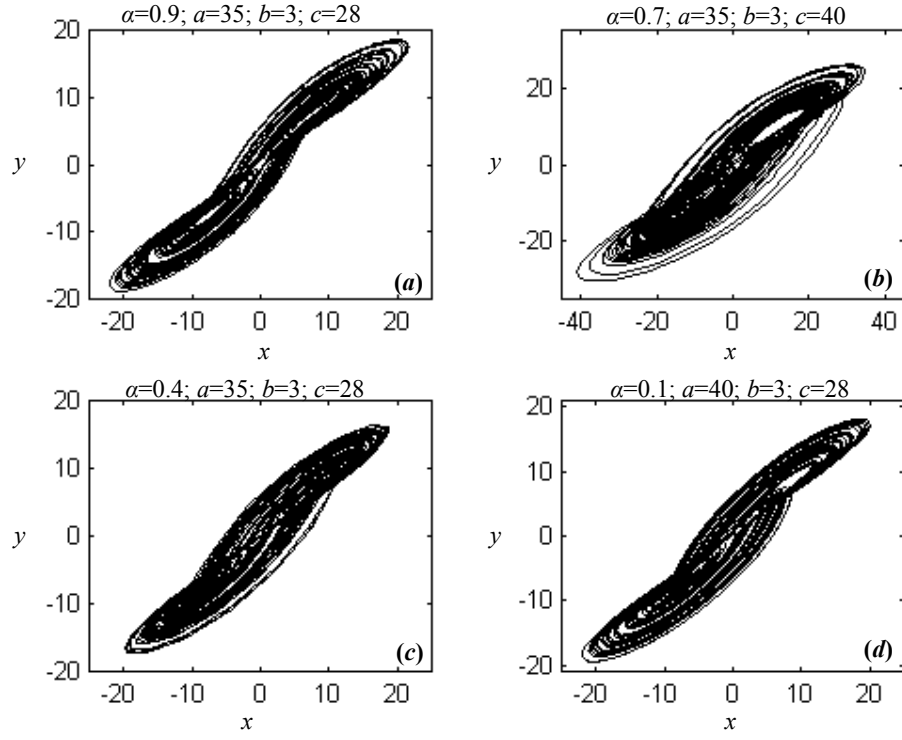


Şekil 8.9. Tam dereceli Chen sisteminin $a=35$, $b=3$ ve $c=28$ için durum uzay diyagramı

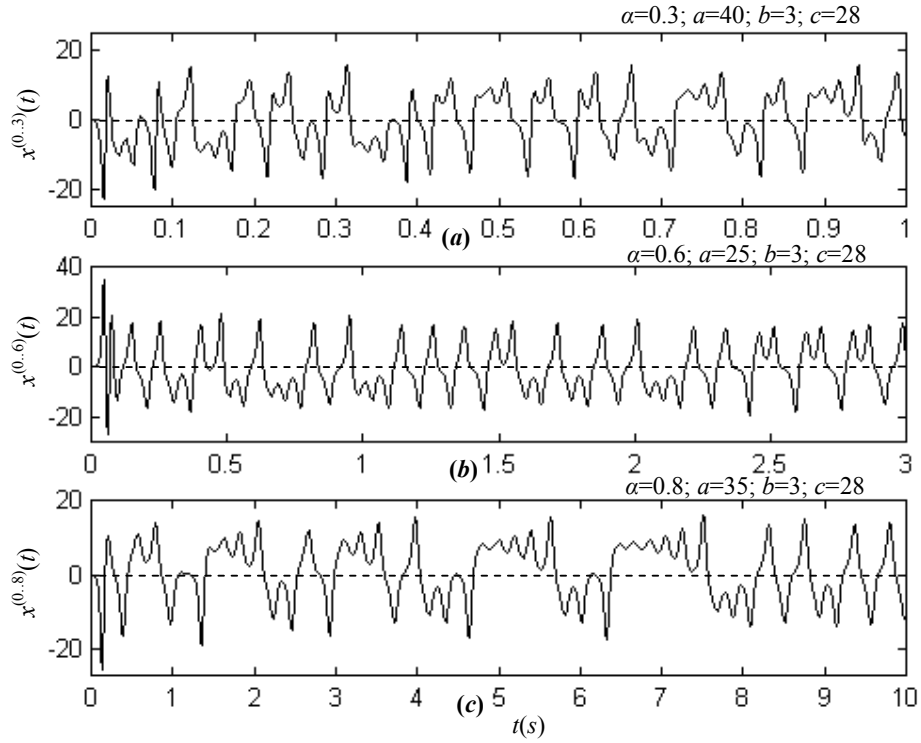
Tablo 8.3. Kesir dereceli Chen sisteminin, sistem derecesi α ve sistem parametreleri a, b, c için maksimum Lyapunov üsleri

Sistem derecesi (α)	Sistem parametreleri (a, b, c)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
0.9	(35, 3, 28)	0.0760
0.8	(35, 3, 28)	0.1900
0.7	(35, 3, 40)	0.0518
0.6	(25, 3, 28)	0.0378
0.5	(30, 3, 28)	0.2639
0.4	(35, 3, 28)	0.6058
0.3	(40, 3, 28)	0.0628
0.2	(40, 3, 28)	0.0936
0.1	(40, 3, 28)	0.1249

Tablo 8.3’de maksimum Lyapunov üsleri, Chen sisteme ait durum değişkenlerinin kesir derecesi $\alpha=0.9-0.1$ aralığı için birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartına ($x_{01}(0.2,0,0)$ ve $x_{02}(0.2001,0,0)$) göre elde edilen sistem yörüngesinden faydalanılarak elde edilmiştir. Görüldüğü gibi maksimum Lyapunov üslerinin hepsi, pozitif değere sahiptir. Bu durum, incelenen kesir dereceli sistemlerin kaotik davranışa sahip olduklarının bir göstergesidir.



Şekil 8.10. Kesir dereceli Chen sistemin **a)** $\alpha=0.9$, **b)** $\alpha=0.7$, **c)** $\alpha=0.4$ ve **d)** $\alpha=0.1$ için durum uzay diyagramları



Şekil 8.11. Kesir dereceli Chen sistemin **a)** $\alpha=0.3$, **b)** $\alpha=0.6$ ve **c)** $\alpha=0.8$ için zaman cevapları

Şekil 8.10’da, sırasıyla $\alpha=0.9, 0.7, 0.4$ ve 0.1 kesirli sistem dereceleri için iki boyutlu durum uzay diyagramları $x_0(0.2,0,0)$ başlangıç şartında benzetim yoluyla elde edilmiştir.

Şekil 8.10’a ek olarak, Şekil 8.11’de sırasıyla Chen sisteminin kesir derecesi $\alpha=0.3, 0.6$ ve 0.8 için x durum değişkeninin zamana göre değişimleri elde edilmiştir. Şekil 8.10 ve 8.11’de elde edilen sonuçlar da, kesir dereceli Chen sistemde $\alpha=0.1-0.9$ aralığı için kaotik davranışların varlığını göstermektedir. Bu durumda, sistem derecesi 0.3 ’den büyük değerler (yani, $\alpha \geq 0.1$) için kesir dereceli Chen sisteminde, kaos vardır sonucuna varılır.

8.2. Kesir Dereceli Gecikme Zamanlı Sistemlerde Kaos

Yukarda bahsedilen kesir dereceli kaotik sistemlerin hiçbiri, gecikme zamanlı değildir. Tam dereceli gecikme zamanlı kaotik sistemlerin kesir dereceli modellerinde de, kaotik davranışların oluşması söz konusu olmasına rağmen, bu konuyla ilgili çalışmalar literatürde çok sınırlı sayıdadır [91-92].

Devam eden alt bölümlerde, gecikme zamanlı kaotik sistemlerin kesir dereceli modellerinde de kaosu varlığını gösteren örnekler verilecektir. Bu amaçla Gilli [93]’te verilen, kaotik tam dereceli iki hücreli özerk Gecikme Zamanlı Hücresel Sinir Ağı (*GZHS*)’nın, ilk olarak Lu [94]’te ortaya konan ve Lu [95]’te benzer modeli incelenen tek hücreli özerk *GZHS* sistemin ve Uçar [96-98]’de verilen, tek durum değişkenine sahip gecikme zamanlı doğrusal olmayan sistemin kesir dereceli modelleri incelenecektir.

8.2.1. Kaotik İki Hücreli Gecikme Zamanlı Hücresel Sinir Ağı ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli

Gilli [93]’te verilen kaotik davranış gösteren *GZHS*, iki hücreden oluşan özerk bir yapıya sahiptir. Bu yapı, aşağıdaki denklemler ile tanımlanmaktadır.

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + A^0 y_i(t) + A^\tau y_i(t - \tau); \quad i=1,2 \quad (8.7.a)$$

$$y_i(t) = \frac{1}{2}(|x_i(t) + 1| - |x_i(t) - 1|); \quad i=1,2 \quad (8.7.b)$$

$$A^0 = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \end{bmatrix}; \quad A^\tau = \begin{bmatrix} a_{11}^\tau & a_{12}^\tau \\ a_{21}^\tau & a_{22}^\tau \end{bmatrix}; \quad a_{11}^0 = a_{22}^0; a_{11}^\tau = a_{22}^\tau \quad (8.7.c)$$

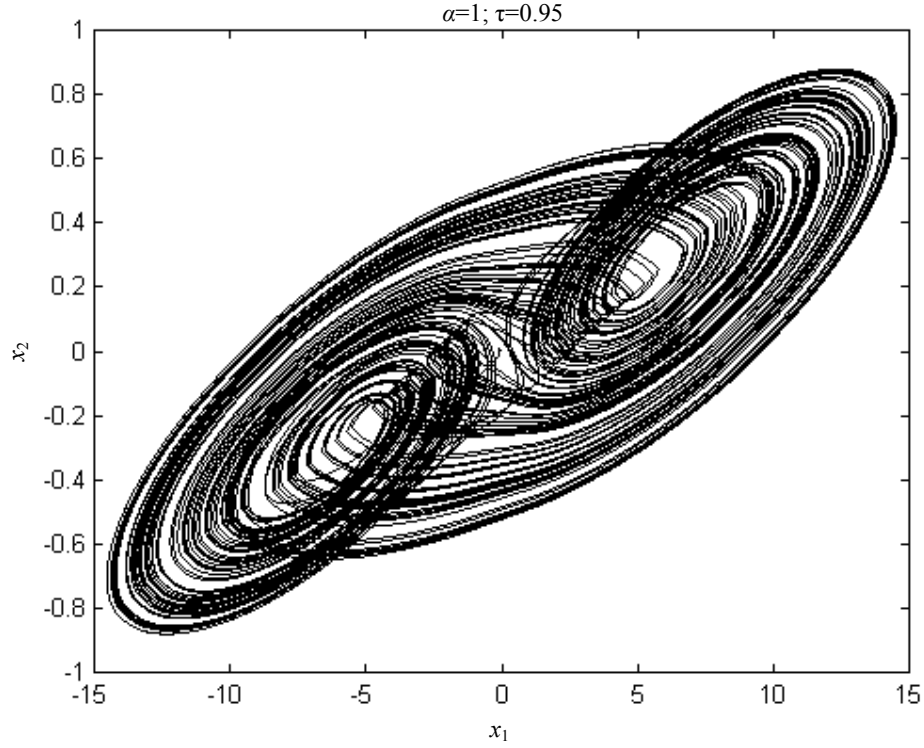
Burada $x_i(t)$: her bir hücrenin durum değişkeni, $y_i(t)$: her bir hücrenin çıkışını tanımlayan doğrusal olmayan bir fonksiyon, $y_i(t-\tau)$: gecikmeli hücre çıkışı, A^0 : kolonlama modeli ve A^τ : gecikmeli kolonlama modelidir. Tam dereceli *GZHS*A'nın sırasıyla kolonlama modeli ve gecikmeli kolonlama modeli (8.7.d)'de verilen değerlere sahip olursa,

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\pi}{4} & 20 \\ 0.1 & 1 + \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}; \quad A^\tau = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \frac{\pi}{4} 1.3 & 0.1 \\ 0.1 & -\sqrt{2} \frac{\pi}{4} 1.3 \end{bmatrix} \quad (8.7.d)$$

τ 'nın 0.84, 0.85, 0.9 ve 0.95 gecikme zamanı değerlerinde sistemde kaotik davranışlar gözlenecektir. Şekil 8.12'de, $\tau = 0.95$ için *GZHS*A'ya ait durum uzay diyagramı verilmiştir. Yukarıda verilen, tam dereceli iki hücreli özerk kaotik *GZHS*A'nın kesir dereceli modeli ise (8.8)'deki durum uzay formu ile ifade edilebilir [99].

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha_1} x_1(t)}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2(t)}{dt^{\alpha_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) \\ -x_2(t) \end{bmatrix} + A^0 \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + A^\tau \begin{bmatrix} y_1(t-\tau) \\ y_2(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

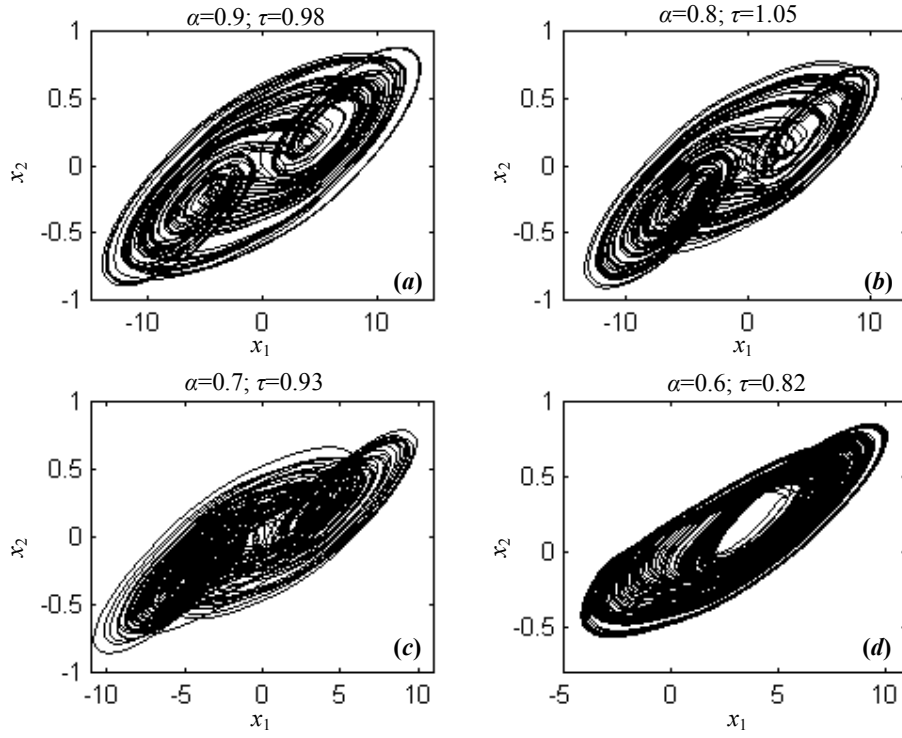
Çıkış fonksiyonu; $y_i(t)$ ise, Denklem (8.7.b) ile aynı olacaktır. Burada; α : hücrelerin kesir dereceleri ve τ : gecikme zamanıdır.



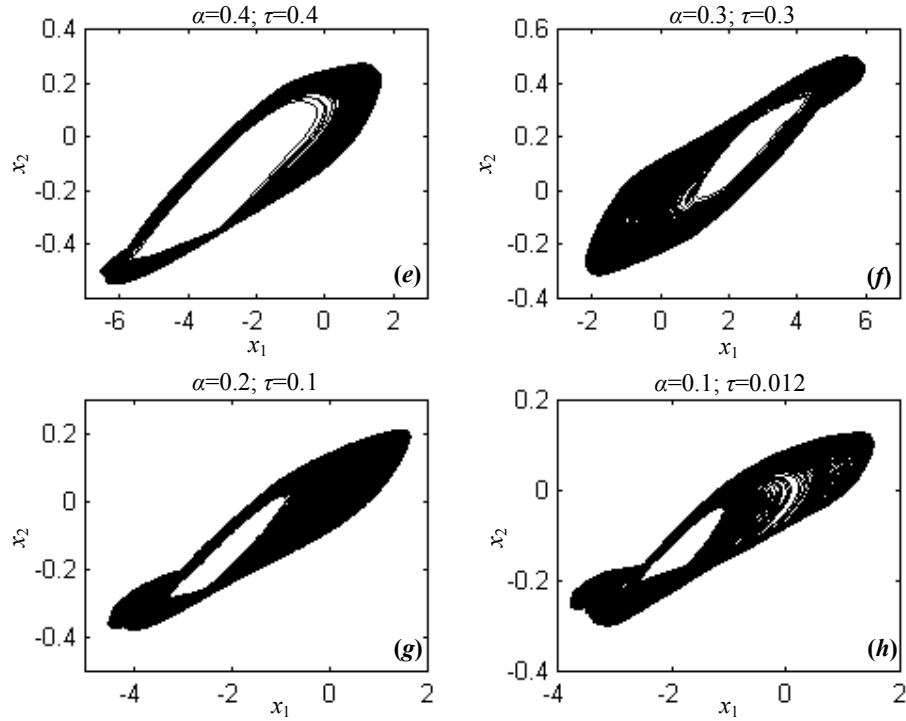
Şekil 8.12. Tam dereceli iki hücreli *GZHS A*'nın $\tau=0.95$ için durum uzay diyagramı

Denklem (8.8.a)'da verilen, kesir dereceli iki hücreli özerk *GZHS A*'nın kaotik davranışa sahip olduğunu göstermek için kesir dereceli *GZHS A* kolonlama modeli ve gecikmeli kolonlama modeli, Denklem (8.7.d)'de verildiği gibi alınacaktır. Bu durumda, α kesir derecesine ve τ gecikme zamanına göre, kesir dereceli sistemde kaotik davranışlar elde edilen simülasyon sonuçlarıyla gösterilecektir. Şekil 8.13 ve 8.14'te, kaotik davranış gözlenen τ gecikme zamanı değerleri için sırasıyla $\alpha = 0.9-0.6$ ve $\alpha = 0.4-0.1$ aralıklarındaki kesir dereceli sistemin durum uzay diyagramları verilmiştir.

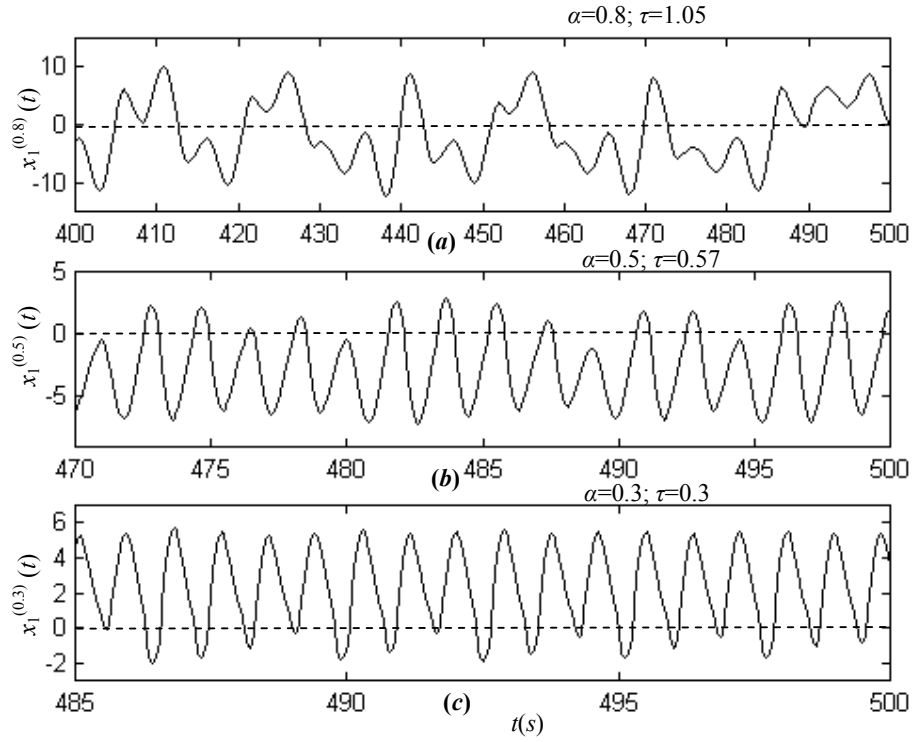
Dikkat edilirse kesirli sistem derecesi α azaldıkça, sistemde kaos gözlenebilmesi için gecikme zamanı τ değerinin de azaldığı görülmektedir. Ayrıca α azaldıkça, sistemde oluşan kaotik davranışlar daha dar bir alana sıkışmaktadır. Buna ek olarak $\alpha=0.3, 0.5$ ve 0.8 kesir dereceleri için sistemi kaosa sokan τ gecikme zamanı değerlerinde, elde edilen x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimlerinden bir kesit de Şekil 8.15'te verilmiştir.



Şekil 8.13. İki hücreli kesir dereceli *GZHS*'nın a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.8$, c) $\alpha=0.7$ ve d) $\alpha=0.6$ için durum uzay diyagramları



Şekil 8.14. İki hücreli kesir dereceli *GZHS*'nin e) $\alpha=0.4$, f) $\alpha=0.3$, g) $\alpha=0.2$ ve h) $\alpha=0.1$ için durum uzay diyagramları



Şekil 8.15. İki hücreli kesir dereceli *GZHS*A'nın **a)** $\alpha=0.8$, **b)** $\alpha=0.5$ ve **c)** $\alpha=0.3$ için zaman cevapları

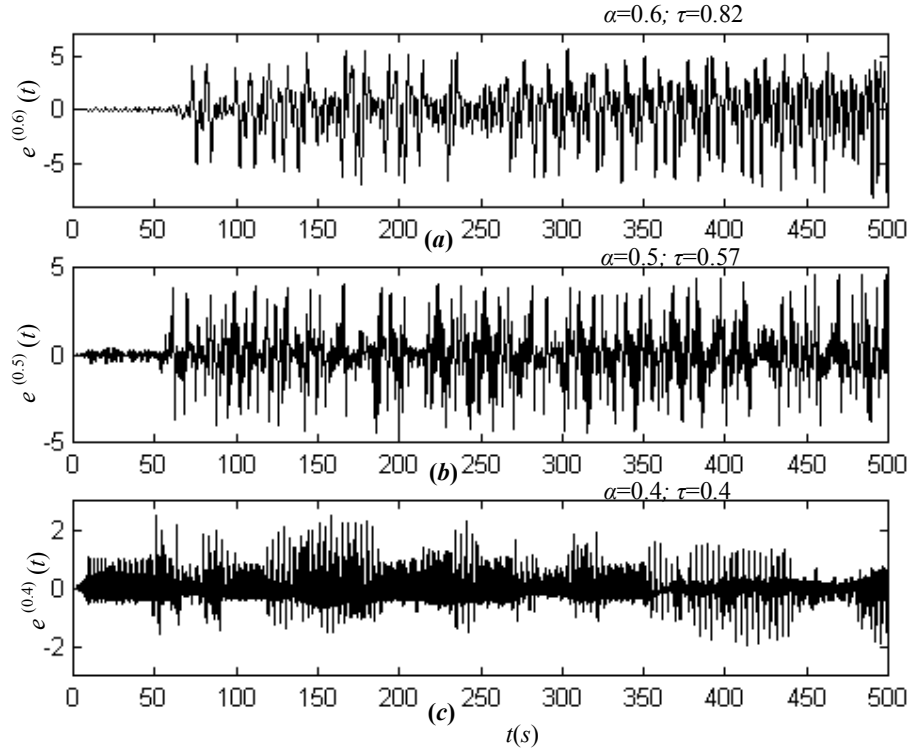
Elde edilen sonuçlara göre, kesirli sistem derecesi α azaldıkça durum değişkenin zamana göre değişim oranı artmaktadır. Birbirine yakın iki farklı başlangıç şartı için, belirli zaman aralıklarında elde edilen maksimum Lyapunov üsleri, Tablo 8.4'te verilmiştir.

Tablo 8.4. Kesir dereceli iki hücreli *GZHS*A'nın sistem derecesi α ve gecikme zamanı τ için maksimum Lyapunov üsleri

Sistem derecesi (α)	Gecikme zamanı (τ)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
0.9	0.98	0.000042
0.8	1.05	0.002400
0.7	0.93	0.000290
0.6	0.82	0.000049
0.5	0.57	0.029000
0.4	0.40	0.012700
0.3	0.30	0.091600
0.2	0.10	0.025500
0.1	0.012	0.021400

Görüldüğü gibi maksimum Lyapunov üsleri, verilen α ve τ değerlerinde pozitif değerlidir. Bu durum, kesir dereceli iki hücreli *GZHS*A'da $\alpha \geq 0.1$ (bu durumda sistemin toplam derecesi 0.2 dir) için kaosun varlığını net bir biçimde ortaya koymaktadır.

Ayrıca Şekil 8.16'da sistem derecesi $\alpha=0.6, 0.5, 0.4$ ve bu değerlere karşılık gelen gecikme zamanı $\tau=0.82, 0.57, 0.4$ değerlerinde iki farklı başlangıç şartları, $x_{01}=0.1$ ve $x_{02}=0.1001$ için iki sistem yörüngeleri arasındaki farkın zamana göre değişimi elde edilmiştir.



Şekil 8.16. Kesir dereceli iki hücreli *GZHS*A'nın a) $\alpha=0.6$, b) $\alpha=0.5$ ve c) $\alpha=0.4$ için bir birine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için oluşan yörüngeler arasındaki farkın zamana göre değişimi

Görüldüğü gibi sistem derecesi azaldıkça, birbirine çok yakın başlangıç şartlarına göre oluşan sistem yörüngelerindeki sapma çok daha kısa sürede gerçekleşmektedir.

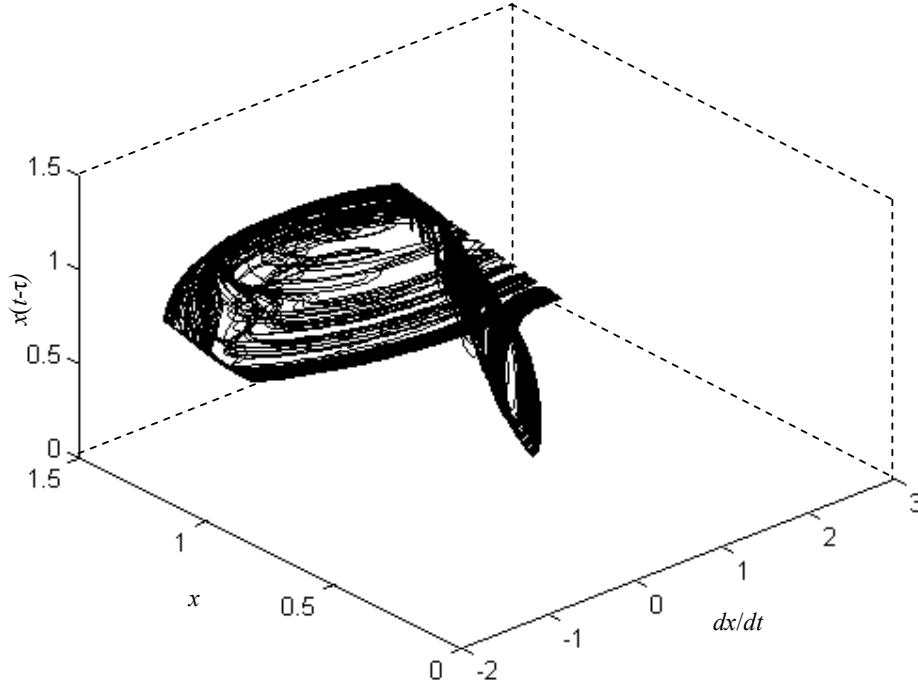
8.2.2. Kaotik Tek Hücreli Gecikme Zamanlı Hücresel Sinir Ağı ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli

Lu [94-95]'te incelenen ve kaotik davranış gösteren *GZHS*A; tek hücreli özerk bir yapıya sahiptir. Bu alt bölümde, Lu [95]'te verilen sistem ve kesir dereceli modeli incelenecektir. Lu [95]'te verilen yapı,

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + bf[x(t - \tau)] \quad (8.9.a)$$

$$f(x) = 2(|x+1| - |x-1|) - \frac{3}{2} \left(\left| x + \frac{4}{3} \right| - \left| x - \frac{4}{3} \right| \right) \quad (8.9.b)$$

ile tanımlanır. Burada; a , b sistem parametresi ve f : parçalı doğrusal yapıdaki tek simetrik bir fonksiyona karşılık gelmektedir. $a=2$, $b=3$ ve $\tau=1$ tam dereceli tek hücreli *GZHS*A'da kaotik davranış gözlenmiştir [95]. Şekil 8.17'de, bu değerler için elde edilen *GZHS*A'nın kaotik yörüngesi verilmiştir.



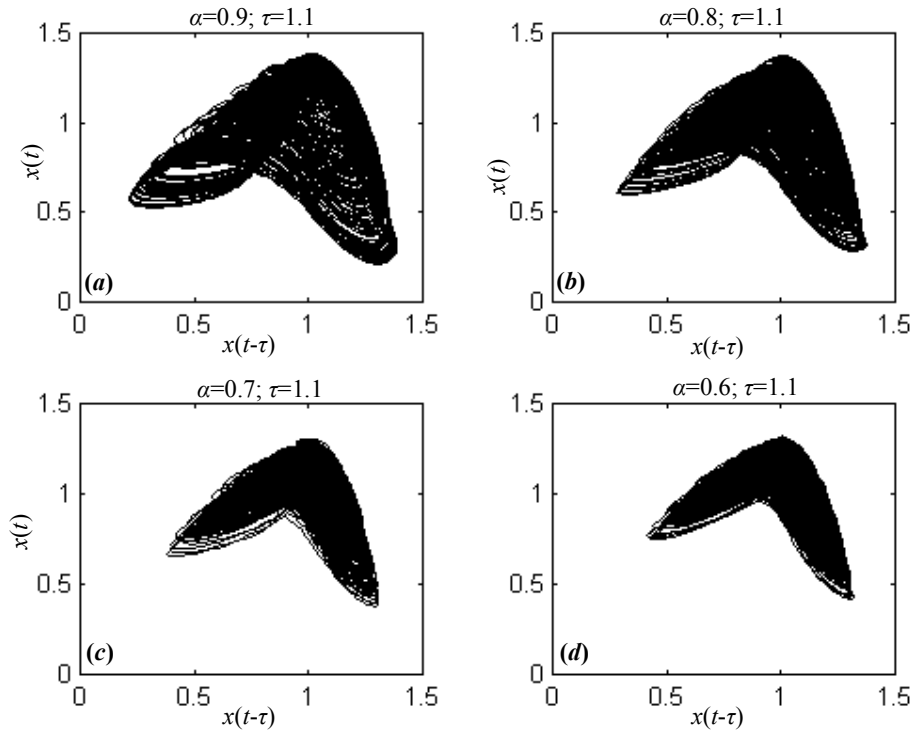
Şekil 8.17. Tam dereceli tek hücreli *GZHS*A'nın $\tau=1$ için durum uzay diyagramı

Lu [95]'te verilen tam dereceli tek hücreli özerk kaotik *GZHS*A'nın kesir dereceli modeli, Denklem (8.9.a)'dan farklı olarak kesirli α derecesi eklenerek (8.10)'daki diferansiyel denklemle tanımlanabilir.

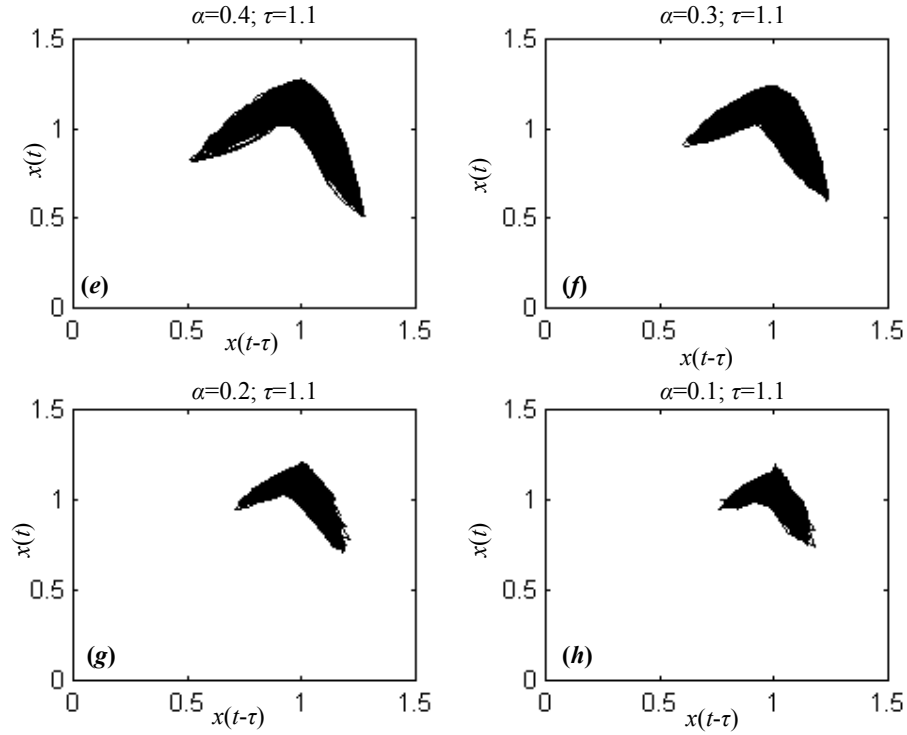
$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = -ax(t) + bf[x(t - \tau)] \quad (8.10)$$

Şekil 8.18 ve 8.19’da elde edilen simülasyon sonuçlarına göre, Denklem (8.10) ile ifade edilen kesir dereceli tek hücreli özerk *GZHS*A’da kaosu varlığı görülmektedir. Bu sonuçlar, $a=2$ ve $b=3$ olarak sabit alınması durumunda farklı α kesir derecesi ve τ gecikme zamanı değerlerine göre elde edilmiştir. Şekil 8.18 ve 8.19’da kaotik davranış gözlenen τ gecikme zamanı değerleri için sırasıyla $\alpha=0.9-0.6$ ve $\alpha=0.4-0.1$ aralıklarındaki kesir dereceli sistemin durum uzay diyagramları verilmiştir.

Dikkat edilirse kesirli sistem derecesi α azaldıkça, sistemde kaos gözlenebilmesi için gecikme zamanı τ değerinin değişmediği görülmektedir. Ayrıca iki hücreli *GZHS*A’da olduğu gibi α azaldıkça, sistemde oluşan kaotik davranışlar daha dar bir alana sıkışmaktadır.



Şekil 8.18. Tek hücreli kesir dereceli *GZHS*A’nın a) $\alpha=0.9$, b) $\alpha=0.8$, c) $\alpha=0.7$ ve d) $\alpha=0.6$ için durum uzay diyagramları

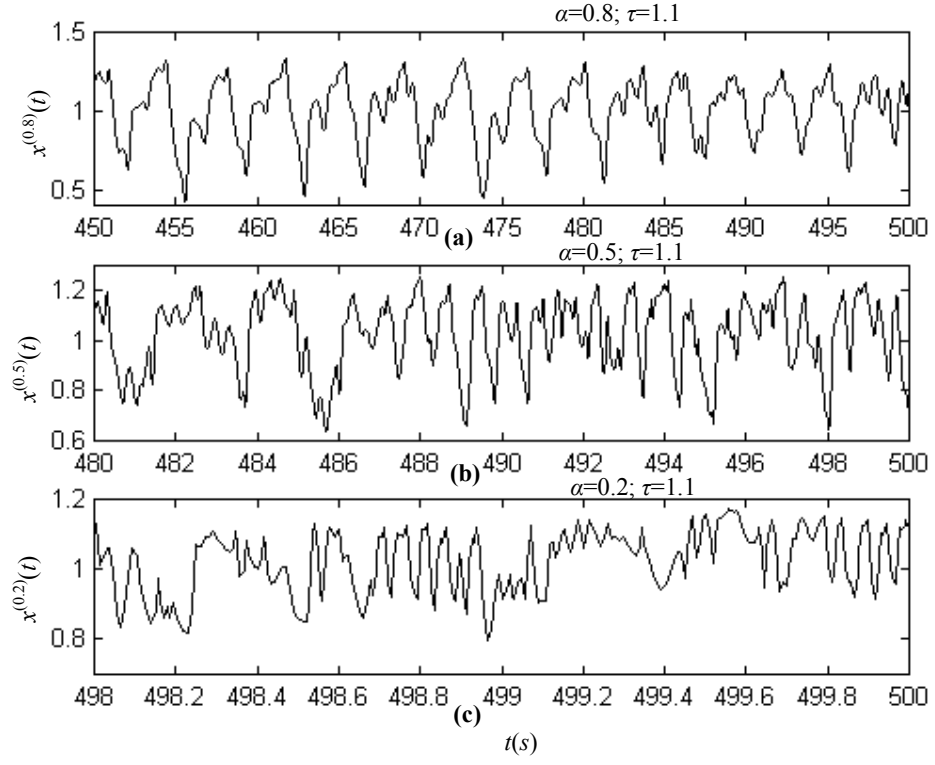


Şekil 8.19. Tek hücreli kesir dereceli *GZHS*’nın **e)** $\alpha=0.4$, **f)** $\alpha=0.3$, **g)** $\alpha=0.2$ ve **h)** $\alpha=0.1$ için durum uzay diyagramları

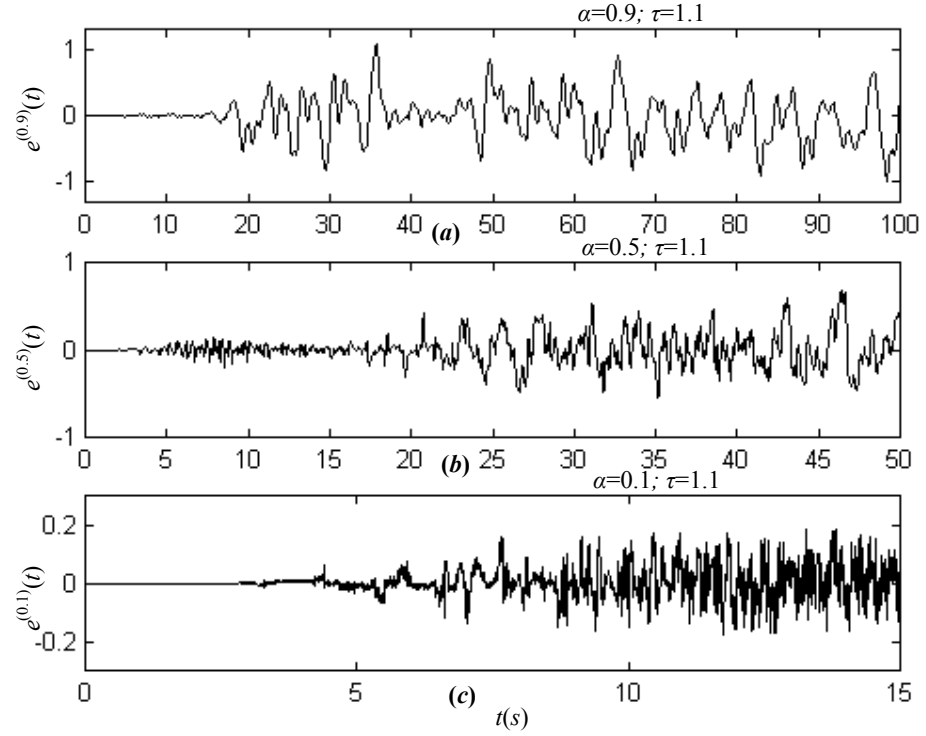
Buna ek olarak $\alpha=0.8$, 0.5 ve 0.2 kesir dereceleri için sistemi kaosa sokan τ gecikme zamanı değerlerinde, elde edilen x durum değişkeninin zamana göre değişimlerinden bir kesit Şekil 8.20’de verilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, kesirli sistem derecesi α azaldıkça durum değişkeninin zamana göre değişim oranı artmaktadır.

Ayrıca Şekil 8.21’de sistem derecesi $\alpha=0.9$, 0.5 , 0.1 ve gecikme zamanı $\tau = 1.1$ değerlerinde iki farklı başlangıç şartları, $x_{01}=0.9$ ve $x_{02}=0.9001$ için iki sistem yörüngesinin arasındaki farkın zamana göre değişimi elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlardan da görüldüğü gibi, sistem derecesi azaldıkça birbirine çok yakın başlangıç şartlarına göre oluşan sistem yörüngelerindeki sapma çok daha kısa sürede gerçekleşmektedir.

Tablo 8.5’de, $\alpha=0.9-0.1$ aralığında maksim Lyapunov üsleri belirli zaman aralıkları için elde edilmiştir. Görüldüğü gibi maksim Lyapunov üslerinin değerleri, verilen α ve τ değerlerinde pozitifdir. Bu sonuçlar, kesir dereceli tek hücreli *GZHS*’da $\alpha \geq 0.1$ için kaosu varlığını açık bir biçimde ortaya koymaktadır.



Şekil 8.20. Tek hücreli kesir dereceli *GZHS*A'nın **a)** $\alpha=0.8$, **b)** $\alpha=0.5$ ve **c)** $\alpha=0.2$ için zaman cevapları



Şekil 8.21. Kesir dereceli tek hücreli *GZHS*A'nın **a)** $\alpha=0.9$, **b)** $\alpha=0.5$ ve **c)** $\alpha=0.1$ için bir birine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için oluşan yörüngeler arasındaki farkın zamana göre değişimi

Tablo 8.5. Kesir dereceli tek hücreli *GZHS*A'nın sistem derecesi α ve gecikme zamanı τ için maksimum Lyapunov üsleri

Sistem derecesi (α)	Gecikme zamanı (τ)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
0.9	1.1	0.0016
0.8	1.1	0.0030
0.7	1.1	0.0090
0.6	1.1	0.0059
0.5	1.1	0.0101
0.4	1.1	0.0194
0.3	1.1	0.0226
0.2	1.1	0.0216
0.1	1.1	0.4769

8.2.3. Kaotik Tek Durum Değişkenli Gecikme Zamanlı Sistem ve Kaotik Kesir Dereceli Modeli

Son olarak Uçar [96-98]'de verilen, tek durum değişkenine sahip gecikme zamanlı doğrusal olmayan kaotik sistemin, kesir dereceli modeli verilecek ve bu modelde de kaosun varlığı, hangi sistem derecelerinde kaotik davranışın oluştuğu ve sistem derecesinin azalmasına bağlı olarak, sistem cevabında oluşan farklılaşma ortaya konmaya çalışılacaktır.

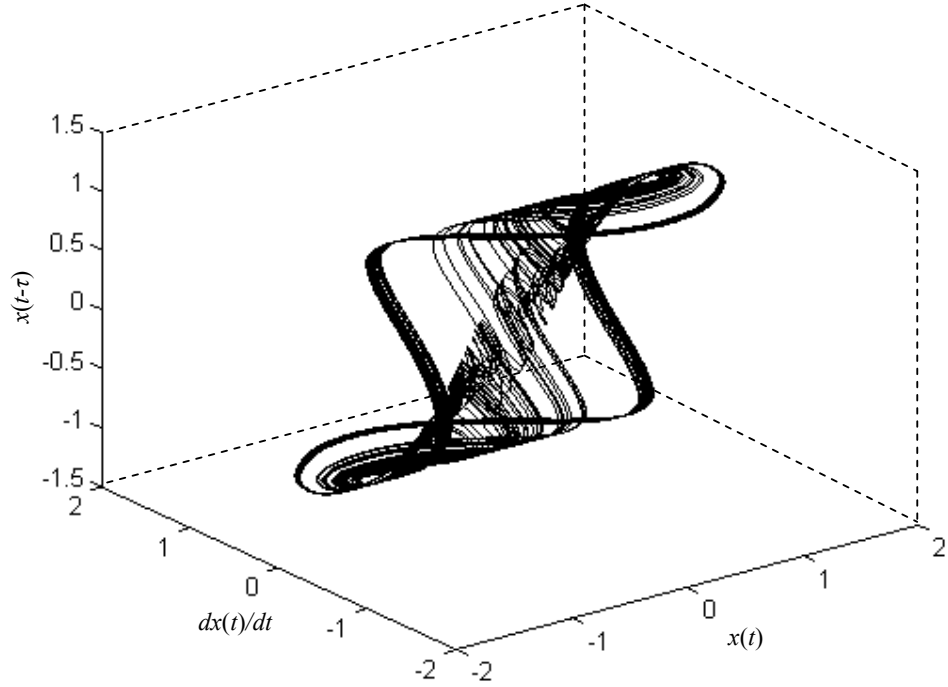
Uçar [96-98]'de verilen gecikme zamanlı doğrusal olmayan kaotik sistem, (8.11)'deki diferansiyel denklem ile tanımlanmıştır.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta x(t - \tau) - \varepsilon [x(t - \tau)]^3, \quad (t \geq t_0) \quad (8.11)$$

Burada; δ ve ε pozitif parametreler ve t_0 : başlangıç aralığıdır. τ (0'dan büyük olmak kaydıyla) tüm gecikme zamanlı sistemlerde olduğu gibi sistemde bir başlama noktasıyla o başlangıç noktasının oluşturduğu etki arasında geçen süreye karşılık gelen gecikme zamanıdır. Denklem (8.11)'de verilen sistem, kaotik bir sistemdir ve $\delta=1$, $\varepsilon=1$ ve $\tau=1.6$ için sistemde kaos gözlenmektedir [98]. Şekil 8.22'de sistemin kaotik yörüngesi elde edilmiştir.

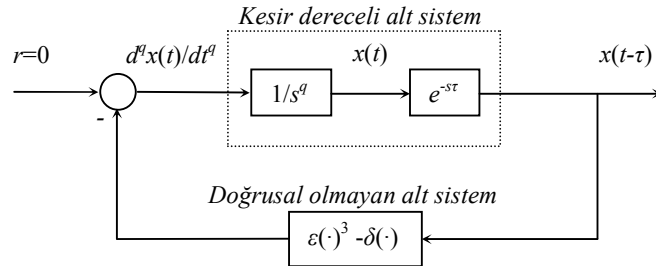
Denklem (8.11)'de verilen sistemin kesir dereceli modeli ise (8.12)'deki biçimdedir.

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \delta x(t - \tau) - \varepsilon [x(t - \tau)]^3 \quad (8.12)$$



Şekil 8.22. Denklem (8.11)'de tanımlı tam dereceli sistemde $\delta=1$, $\varepsilon=1$ ve $\tau=1.6$ için elde edilen kaotik çekici

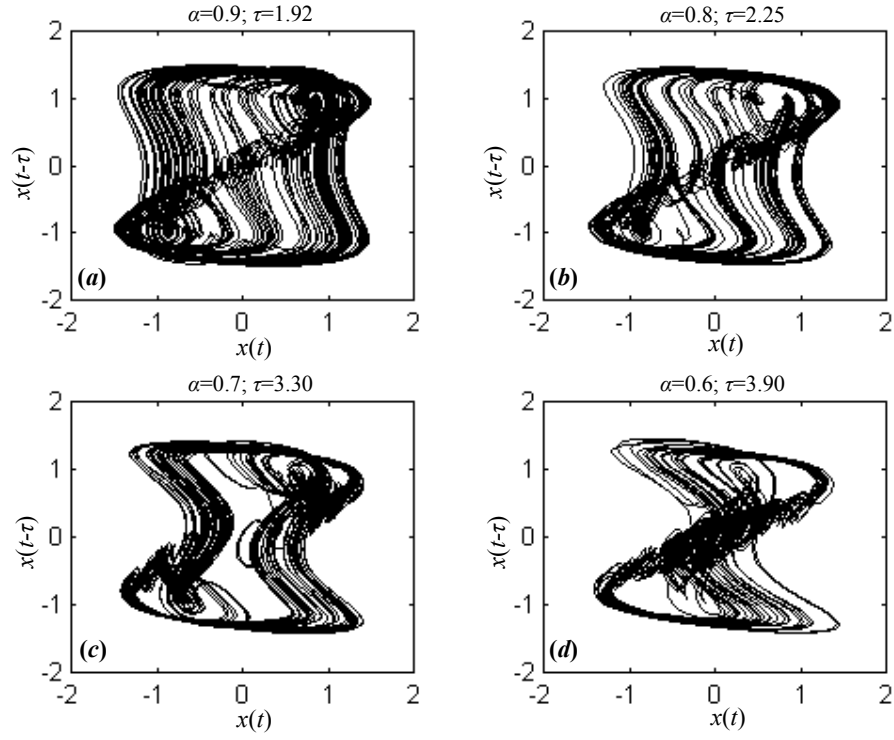
Şekil 8.23'te, Denklem (8.12)'de verilen kesir dereceli gecikme zamanlı diferansiyel denklemin blok diyagramı görülmektedir.



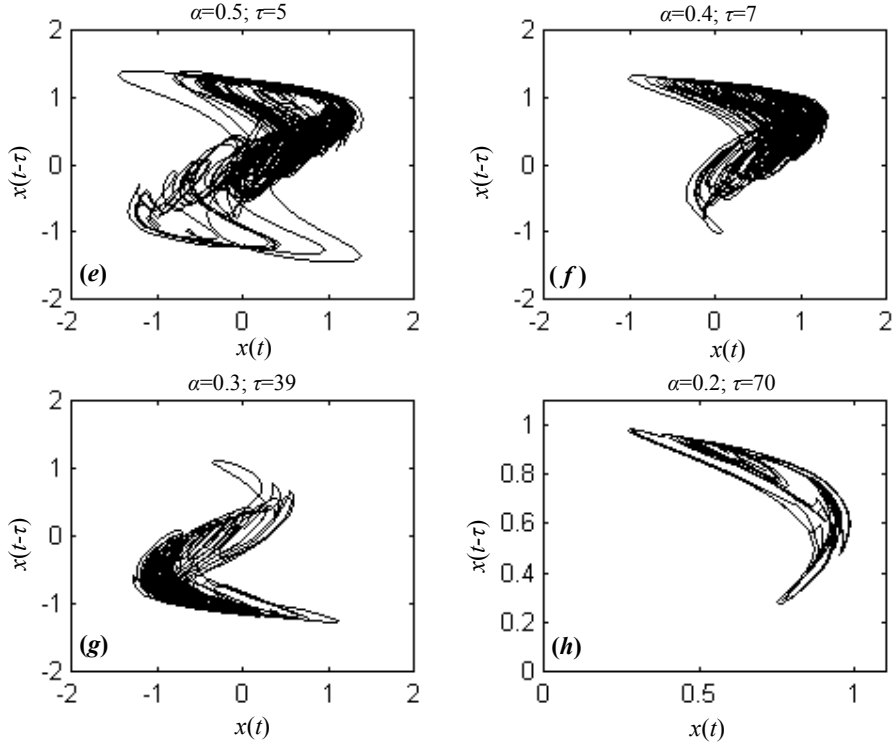
Şekil 8.23. Denklem (8.12)'de verilen kesir dereceli sistemin blok diyagramı

Dikkat edilirse, Uçar [98]'de verilen blok diyagramından tek farkı kesir dereceli integral operatörüdür. Böylece Denklem (8.11), sistem derecesi birden küçük tek durum değişkeni olan gecikme elemanlı bir yapıya dönüşmüştür.

Denklem (8.12)'deki sistemde, kaotik davranışları incelemek için tüm simülasyonlarda $\varepsilon=1$ ve $\delta=1$ sabit değerler alınacaktır. Şekil 8.24 ve 8.25'te, $x_0=0.1$ başlangıç şartı için sırasıyla $\alpha=0.9-0.6$ ve $\alpha=0.5-0.2$ aralığında oluşan kaotik yörüngeler verilmiştir.



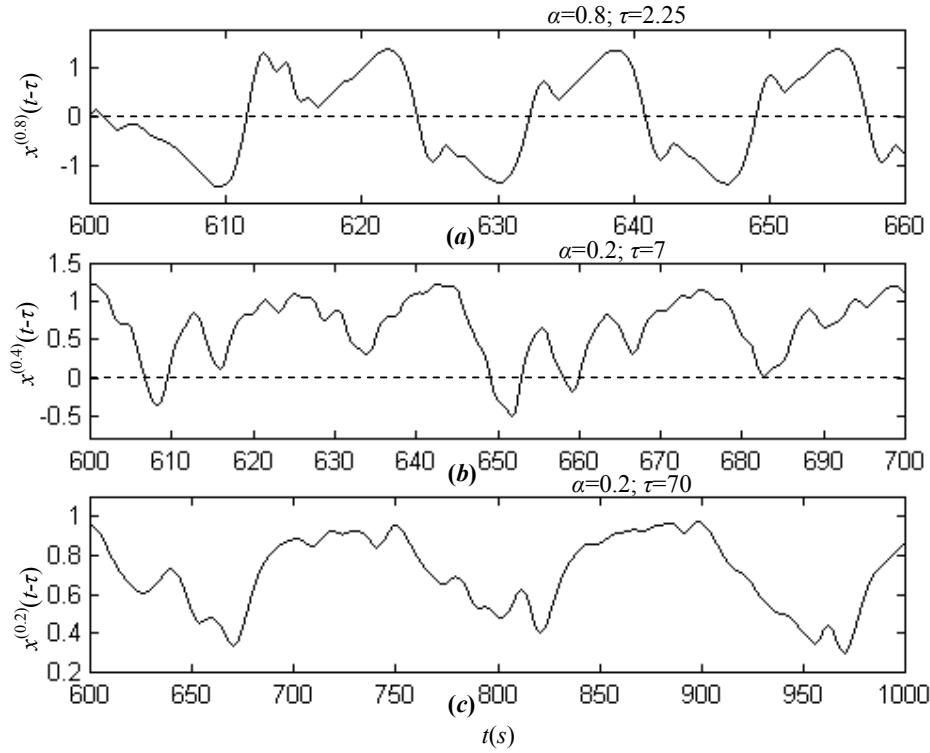
Şekil 8.24. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelde **a)** $\alpha=0.9$ ve $\tau=1.92$, **b)** $\alpha=0.8$ ve $\tau=2.25$, **c)** $\alpha=0.7$ ve $\tau=3.30$, **d)** $\alpha=0.6$ ve $\tau=3.90$ için oluşan kaotik çekiciler



Şekil 8.25. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelde **e)** $\alpha=0.5$ ve $\tau=5$, **f)** $\alpha=0.4$ ve $\tau=7$, **g)** $\alpha=0.3$ ve $\tau=39$, **h)** $\alpha=0.2$ ve $\tau=70$ için oluşan kaotik çekiciler

Şekil 8.24 ve 8.25 incelendiğinde, α sistem derecesi azaldıkça incelenen diğer gecikme zamanlı sistemlerde olduğu gibi kaotik yörüngeler daha dar bir alana sıkışmaktadır.

Şekil 8.26'da $x_0=0.1$ başlangıç şartında, sistem derecesi $\alpha=0.8, 0.4, 0.2$ için zaman cevaplarından bir kesit görülmektedir. Benzer şekilde, α sistem derecesi azaldıkça kaotik sistemin zamana göre değişim oranı azalmaktadır.



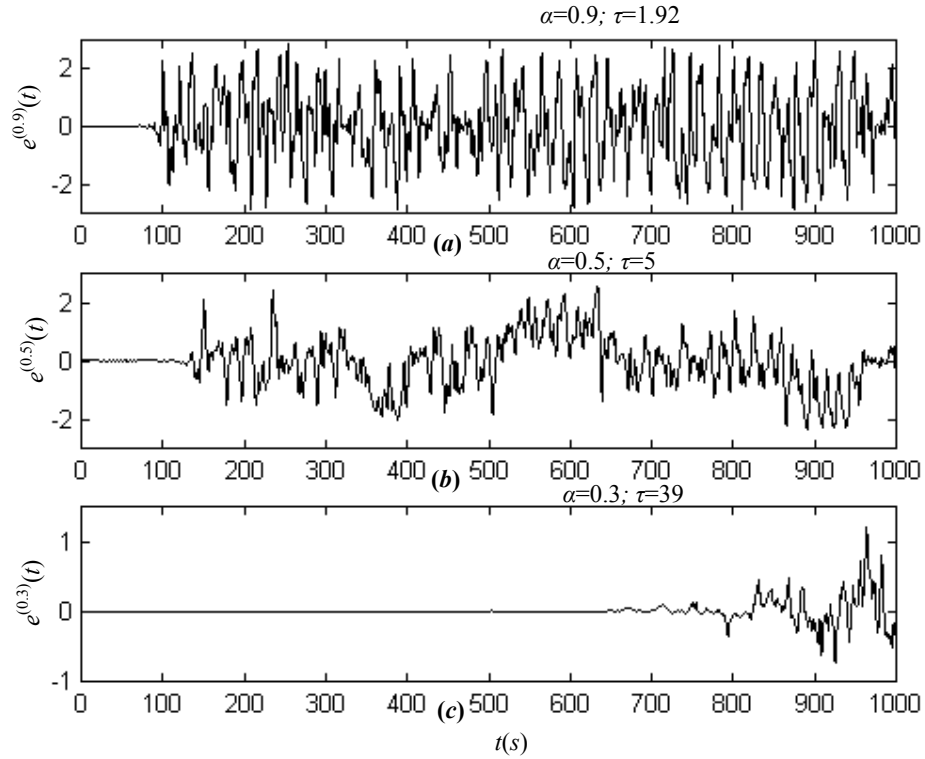
Şekil 8.26. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelin a) $\alpha=0.8$ ve $\tau=2.25$, b) $\alpha=0.4$ ve $\tau=7$, c) $\alpha=0.2$ ve $\tau=70$ için zaman cevapları

Tablo 8.6'da, kaos gözlenen sistem dereceleri ve gecikme zamanı değerleri için hesaplanan maksimum Lyapunov üsleri gösterilmektedir. Elde edilen sonuçlarda, maksimum Lyapunov üslerinin hepsi pozitif olduğundan dolayı, kesir dereceli bu sistemde $\alpha \geq 0.2$ için kaosu varlığı açık bir şekilde ortaya konmaktadır.

Bu sistem için son olarak, Şekil 2.27'de $\alpha=0.9, 0.5, 0.3$ için iki farklı başlangıç şartları, $x_{01}=0.1$ ve $x_{02}=0.1 \pm 0.0001$ için iki sistem yörüngesinin arasındaki farkın zamana göre değişimi elde edilmiştir.

Tablo 8.6. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelin sistem derecesi α ve gecikme zamanı τ için maksimum Lyapunov üsleri

Sistem derecesi (α)	Gecikme zamanı (τ)	Maksimum Lyapunov Üsleri ($\lambda_{\max}$)
0.9	1.92	0.0049
0.8	2.25	0.0018
0.7	3.30	0.0243
0.6	3.90	0.0010
0.5	5.00	0.0017
0.4	7.00	0.0002
0.3	39.00	0.0006
0.2	70.00	0.0023



Şekil 8.27. Denklem (8.12)'de tanımlanan kesir dereceli modelin **a)** $\alpha=0.9$ ve $\tau=1.92$, **b)** $\alpha=0.5$ ve $\tau=5$, **c)** $\alpha=0.3$ ve $\tau=39$ için bir birine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için oluşan yörüngeler arasındaki farkın zamana göre değişimi

Dikkat edilirse, kesir dereceli sistemin derecesi α azaldıkça sistemde kaotik davranışın oluşması için τ gecikme zamanının artması gerekmektedir. Buna ek olarak, incelenen kesir dereceli sistemin derecesi azaldıkça, birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için sistem yörüngelerinin güzergahlarındaki ciddi ayrışma, uzun bir sürede gerçekleşmektedir. Bu sürenin $\alpha=0.9$, 0.5 ve 0.3 için, sırasıyla yaklaşık olarak 70, 130 ve

650 s olduğu gör÷lmektedir. Şekil 8.27'den, aynı zamanda kesir dereceli üç farklı sistemin başlangıç şartına hassas bağı olduğu gör÷lmektedir. Bu durum, aslında doğadaki bazı kaotik sistemlerin, derecesi çok küçük olan kesir dereceli gecikme zamanlı doğrusal olmayan yapılar olabileceğı yada bu sistemlerin kesir dereceli modelleme ile daha iyi tanımlanabileceğı konusunda bir fikir verebilir. Özellikle yakın iki farklı başlangıç şartı için sistem yörüngelerinin, uzun bir süre birbirine çok yakın bir değışim gösterdikten sonra farklılaşarak ayrışan kaotik sistemler buna örnek olabilir.

9. SONUÇLAR

300 yıldan fazla bir süre önce ortaya atılan kesir dereceli hesaplama, günümüzde birçok alanda hak ettiği yeri almaya başlamıştır. Bu tez çalışmasında öncelikle; kesir dereceli hesaplama, kesir dereceli sistemler, kesir dereceli kontrol yapıları, doğrusal olmayan sistemler ve dinamikleri, kaotik sistemler ve kaos kontrol konuları incelendi. Ayrıca tezde; kesir dereceli PI^α kontrolörün doğrusal olmayan sistemler ve dinamikleri üzerine etkileri irdelendi ve yeni kesir dereceli gecikme zamanlı kaotik sistemlerin varlığı simülasyon sonuçlarıyla ortaya kondu. Bu genel değerlendirmeler çerçevesinde, tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

- Bazı doğrusal olmayan sistemlerin kontrolünde, tam dereceli PI kontrolör yerine kesir dereceli PI^α kontrolör kullanıldığında, tam dereceli kontrolör parametrelerinin sistemi kararsızlaştırdığı değerlerde, α integratör derecesine göre sistem $LÇ$ davranış gösterebilmektedir. Sabit kontrolör parametrelerinde, $LÇ$ 'nin olduğu α değerinin tespiti için GAI kullanılmıştır. GAI ile α aralığı tespit edildiği gibi oluşacak olan osilasyonların frekansı ve genliği de hesaplanabilmektedir. Bu sonuçlar, benzetim sonuçları ile kıyaslandığında, GAI 'nin kesir dereceli doğrusal olmayan sistemlerin analizinde etkin bir araç olabileceği gösterilmiştir. Bununla birlikte, doğrusal olmayan sistem üzerinde tam dereceli PI kontrolöre göre kesir dereceli PI^α kontrolörün, farklı bir dinamik oluşturduğu ve sistemi kararsızlıktan kurtardığı gösterilmiştir. Böylece bu etkinin, sistem üzerinde daha esnek bir müdahale oluşturma imkanı sunduğu gösterilmiştir.

- Kontrolsüz olarak sadece asimptotik kararlı davranış gösteren doğrusal olmayan bir sistem, PI kontrollü geri beslemeli sistemde kararsız $LÇ$ 'den kaynaklanan gizli osilasyonların oluşabilmesi söz konusudur. Eğer tam dereceli PI kontrolör yerine, kesir dereceli PI^α kontrolör seçilirse, α integral derecesi azaldıkça $LÇ$ yörüngesi genişlemektedir. Bu durum, osilasyonların genliğinin arttığı anlamına gelmektedir. Aynı zamanda $LÇ$ osilasyonun frekansı da, α integral derecesinin azalmasına bağlı olarak artmaktadır. Ayrıca α integral derecesi sistemin davranışında oluşan kararsız $LÇ$ 'yi ortadan kaldırmamakla veya kararlı hale getirmemekle birlikte sistemin davranışını belirleyen

başlangıç değerlerini değiştirmiştir. α integral derecesi azaldıkça, sistem cevabını belirleyen başlangıç değerlerinin arttığı görülmüştür. Kesir dereceli sistemde, GAI analizi ile $LÇ$ 'nin kararlılığı ve kabul edilebilir bir hatayla osilasyon karakteristikleri tespit edilebilmiştir.

- Kaos oluşması olanaksız, doğrusal kısmı ikinci dereceden olan Lur'e tipi bir sistem, tam dereceli PI kontrolör ile kontrol edilmek istendiğinde, sistemde, kontrolör parametrelerine göre kaotik davranış gözlenebilmektedir. Bahsedilen kaotik sistemde tam dereceli PI kontrolör yerine kesir dereceli PI^α kontrolör kullanıldığında integratör derecesi α 'ya göre sistemde kaosun oluşmayacağı gösterilmiştir. Buna ek olarak, doğrusal olmayan sistem dinamiği üzerine kesir dereceli PI^α kontrolörün kontrol parametrelerinin yanı sıra, kesirli integrator derecesi α 'nın 3. boyut olarak bir etkisi söz konusudur. Bu sayede, doğrusal olmayan kaotik bir sistem üzerine daha esnek bir müdahale söz konusu olmaktadır. Bu durum, bu tez çalışmasında incelenen yapıdaki kaotik sistemlerin, kesir dereceli kontrolöre ait integratör derecesi α ile kontrol edilebileceğini göstermiştir. Ayrıca, sisteme ait benzetim sonuçları ve Genesio-Tesi varsayımı ile elde edilen sonuçlar arasında bir yakınlık vardır. Bu durum göstermektedir ki, kaos kestirimi için önerilen Genesio-Tesi varsayımı, istenilen sistem cevabının elde edilmesi amacıyla kesir dereceli kontrolörlerin tasarımında ve kesir dereceli kaotik sistemlerin parametre kestiriminde de etkin bir araç olarak kullanılabilir.

- Kaotik davranışlar gözlenen iki hücreli $GZHS$ 'nin kesir dereceli modelinde, belirli τ gecikme zamanı değerlerinde, $0.1 \leq \alpha < 1$ aralığı için kaosun varlığı simülasyon sonuçları ve maksimum Lyapunov üsleriyle ortaya kondu. Elde edilen simülasyon sonuçlarından; kesirli sistem derecesi α azaldıkça, sistemde kaotik davranışların gözlemlendiği gecikme zamanı τ değerinin de azaldığı ve sistemde oluşan kaotik davranışların daha dar bir alana sıkıştığı görüldü. Ayrıca, α azaldıkça durum değişkenin zamana göre değişim oranının arttığı gözlemlendi. Sistem derecesi azaldıkça birbirine çok yakın başlangıç şartlarına göre oluşan sistem yörüngelerindeki sapma çok daha kısa sürede gerçekleşmektedir.

- Kaotik davranışlar gözlenen tek hücreli *GZHS*A'nın kesir dereceli modelinde, belirli τ gecikme zamanı değerlerinde, $\alpha \geq 0.1$ sistem derecesi için kaosu varlığı simülasyon sonuçları ve maksimum Lyapunov üsleriyle gösterilmiştir. Kesirli sistem derecesi α azaldıkça, sistemde kaos gözlenebilmesi için gecikme zamanı τ değerinin değişmediği görülmektedir. Ayrıca, iki hücreli *GZHS*A'da olduğu gibi α azaldıkça, sistemde oluşan kaotik davranışlar daha dar bir alana sıkışmaktadır. Elde edilen sonuçlara göre, kesirli sistem derecesi α azaldıkça durum değişkenin zamana göre değişim oranı artmaktadır. Elde edilen simülasyon sonuçlarına göre, sistem derecesi azaldıkça birbirine çok yakın başlangıç şartlarına göre oluşan sistem yörüngelerindeki sapma çok daha kısa sürede gerçekleşmektedir.

- Tek durum değişkenine sahip özerk gecikme zamanlı doğrusal olmayan sistemin kesir dereceli modelinde, belirli τ gecikme zamanı değerlerinde, sistemin $\alpha \geq 0.2$ dereceleri için kaotik davranış sergilediği nümerik simülasyonlarla ve maksimum Lyapunov üsleriyle gösterildi. Ayrıca sabit sistem parametrelerinde, α sistem derecesi azaldıkça kaotik davranışın görülebilmesi için τ gecikme zamanı değerinin artması gerektiği ve sistem yörüngesinin birbirine çok yakın iki farklı başlangıç şartı için ayrışma süresinin uzadığı gösterilmiştir. Elde edilen sisteme ait durum uzay gösterimleri, α sistem derecesi azaldıkça kaotik yörüngelerin diğer gecikme zamanlı sistemlerde olduğu gibi daha dar bir alana sıkışmakta olduğunu göstermiştir. İncelenen diğer gecikme zamanlı kesir dereceli sistemlerin aksine, bu sistemde, α sistem derecesi azaldıkça kaotik sistemin zamana göre değişim oranı azalmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Ma, C.**, 2004. Introduction of Fractional Order Control and Its Applications Motion Control, *Doktora Tezi*, The University of Tokyo.
- [2] **Oldham, K. and Spainer, J.**, 1974. Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, New York: Academic Press.
- [3] **Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B. and Nanot, F.M.**, 2000. Frequency-Band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis, IEEE Trans CAS-I, **47**,25-39.
- [4] **Tustin, A., Allason, J.T., Layton, J.M. and Jakeways, R.J.**, 1958. The Design of Systems for Automatic Control of the Position of Massive Object. Proc. Inst. Electr. Eng. **105(C-1)**, 1-57.
- [5] **Manabe, S.**, 1961.The Non-integer Integral and its Application to Control Systems, ETJ of Japan, **6/3-4**, 83-87.
- [6] **Manabe, S.**, 1963. The System Design by the Use of a Model Consisting of a Saturation and Noninteger Integral, ETJ of Japan, **8/3-4**, 47-150.
- [7] **Axtell, M. and Bise M. E.**, 1990. Fractional Calculus Applications in Control Systems, IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conference, USA, **2**, 563-566.
- [8] **Dorcak, L.**, 1994. Numerical Models for The Simulation of The Fractional-Order Control Systems, Slovak Academy of Sciences Institute of Experimental Physics, **3(2)**, 8-17.
- [9] **Podlubny, I.**, 1994. Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers, Slovak Academy of Sciences Institute of Experimental Physics, **4(2)**, 28-34.
- [10] **Petras, I.**, 1999. The Fractional- Order Controllers: Methods for their Synthesis and Application, J. Electrical Engineering, **50(9-10)**, 284-288.
- [11] **Dorcak, L., Petras, I. and Kostial, I.**, 2000. Modelling and Analysis of Fractional-Order Regulated Systems in the State Space, Proceedings of the ICC'2000, 185-188.
- [12] **Petras, I., Dorcak, L., O'Leary, P., Vinagre, B. M. and Podlubny, I.**, 2000. The Modelling and Analysis of Fractional-Order Control Systems in Frequency Domain, Proceedings of the ICC'2000, 261-264.
- [13] **Dorcak L., Petras I.,Kostial I. and Terpak J.**, 2001. State Space Controller Design for the Fractional-Order Regulated System, Proceedings of the ICC'2001, 15-20.

- [14] **Vinagre, B. M., I. Petras, Podlubny, I. and Chen, Y. Q.,** 2002. Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control, *Nonlinear Dynamics*, **29(1-4)**, 269-279.
- [15] **Manabe, S.,** 2002. A Suggestion of Fractional-Order Controller for Flexible Spacecraft Attitude Control, *Nonlinear Dynamics*, **29(1-4)**, 251-268.
- [16] **Hartley T. T. and Lorenzo C.F.,** 2002. Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order System, *Nonlinear Dynamics*, **29(1-4)**, 201-233.
- [17] **Hartley, T. T. and Lorenzo, C.F.,** 2004. A Frequency-Domain Approach to Optimal Fractional-Order Damping, *Nonlinear Dynamics*, **38(1-2)**, 69-84.
- [18] **Poinot, T. and Trigeassou, J. C.,** 2004. Identification of Fractional Systems Using an Output-Error Technique, *Nonlinear Dynamics*, **38(1-2)**, 133-154.
- [19] **Valerio, D. and Sa da Costa, J.,** 2005. Time-Domain Implementation of Fractional Order Controllers, *IEE Proc-D*, **152(5)**, 539-552.
- [20] **Ladaci, S. and Charef, A.,** 2006. On Fractional Adaptive Control, *Nonlinear Dynamics*, **43(4)**, 365-378.
- [21] **Chen, Y. Q., Ahn, H. S. and Podlubny, I.,** 2006. Robust Stability Check of Fractional Order Linear Time Invariant Systems with Interval Uncertainties, *Signal Processing*, **86(10)**, 2611-2618.
- [22] **Chen, Y. Q., Ahn, H. S. and Xue D.,** 2006. Robust Controllability of Interval Fractional Order Linear Time Invariant Systems, *Signal Processing*, **86(10)**, 2794-2802.
- [23] **Li, W.,** 2007. Design and Implement of Neural Network Based Fractional-Order Controller, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [24] **Özdemir, N., Agrawal, O. P., İskender, B. B. and Karadeniz, D.,** 2009. Fractional Optimal Control of a 2-Dimensional Distributed System Using Eigenfunctions, *Nonlinear Dynamics*, **55(3)**, 251-260.
- [25] **Podlubny, I., Dorcak, L. and Kostial, I.,** 1997. On Fractional Derivatives, Fractional-Order Dynamic System and $PI^\lambda D^\mu$ -Controllers, Proc. 36th Conference on Decision&Control, California, USA, 4985-4990.
- [26] **Podlubny, I.,** 1999. Fractional-Order Systems and $PI^\lambda D^\mu$ -Controllers, *IEEE Trans. Automatic Control*, **44(1)**, 208-214.
- [27] **Ma, C. and Hori, Y.,** 2004. Fractional Order Control and Its Application of $PI^r D$ Controller for Robust Two-Inertia Speed Control, *IPEMC* 3, 1477 – 1482.

- [28] **Monje C. A., Calderon A. J., Vinagre B. M., Chen Y. and Feliu V.,** 2004. On Fractional PI^λ Controllers: Some Tuning Rules for Robustness to Plant Uncertainties, *Nonlinear Dynamics*, **38(1-2)**, 369-381.
- [29] **Cao J. Y., Liang J. and Cao B.G.,** 2005. Optimization of Fractional Order PID Controllers Based on Genetic Algorithms, *Proc. 4th Int. Conference on Machine Learning and Cybernetics, Guangzhou, China*, **9**, 5686-5689.
- [30] **Zong, K., Li, S. and Lin, X.,** 2007. The Application of Fractional-Order PI Control Algorithm to the PMSM Speed-Adjusting System, *Advanced Intelligent Computing Theories and Applications*, Springer-Verlag, 660-669.
- [31] **Hamamci, S. E.,** 2008. Stabilization Using Fractional-Order PI and PID Controllers, *Nonlinear Dynamics*, **51(1-2)**, 329-343.
- [32] **Barbosa, R. S., Silva, M. F. and Machado, J. A. T.,** 2009. Tuning and Application of Integer and Fractional Order PID Controllers, *Intelligent Engineering Systems and Computational Cybernetics*, Springer Netherlands, 245-255.
- [33] **Silva, M. F., Machado, J. A. T. and Lopes, A. M.,** 2004. Fractional Order Control of a Hexapod Robot, *Nonlinear Dynamics*, **38**, 417-433.
- [34] **Barbosa, R.S., Machado, J. A. T. and Galhano, A. M.,** 2007. Performance of Fractional PID Algorithms Controlling Nonlinear Systems with Saturation and Backlash Phenomena, *J. Vibration and Control*, **13(9-10)**, 1407-1418.
- [35] **Delavari, H., Ghaderi, R., Ranjbar, A. and Momani, S.,** 2008. Fractional Order Controller for Two-degree of Freedom Polar Robot, *Int. Workshop New Trends in Science and Technology*, Ankara, Turkey.
- [36] **Jesus, I. S., Machado, J. A. T. and Barbosa, R. S.,** 2008. Fractional Order Nonlinear Control of Heat System, *3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Ankara, Turkey.
- [37] **Baker, G. L. and Gollub, J. P.,** 1990. *Chaotic Dynamics an Introduction*, Cambridge University Press.
- [38] **Moon, F. C.,** 1992. *Chaotic and Fractal dynamics*, New York: John Wiley.
- [39] **Ott, E.,** 1993. *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [40] **Strogatz, S. H.,** 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Pub., Cambridge.
- [41] **Hilborn, R. C.,** 2000. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford Univ. Press, New York.
- [42] **Scheweppe, F. C.,** 1977. *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice Hall Inc..
- [43] **Slotine, J. J. E. and Li, W.,** 1991. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall Int. Inc..

- [44] **Scott, A. C.**, 2007. The Nonlinear Universe: Chaos, Emergence, Life, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [45] **Sparrow, C.**, 1982. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [46] **Kapitaniak, T.**, 1996. Controlling Chaos: Theoretical and Practical Methods in Nonlinear Dynamics, Academic Press Inc. San Diego.
- [47] **Larson, L. E., Tsimring, L. S. and Liu, J. M., (Editors)**, 2006. Digital Communications Using Chaos and Nonlinear Dynamics, Springer New York.
- [48] **Hartley, T. T., Lorenzo, C. F. and Qammer, H. K.**, 1995. Chaos in a Fractional Order Chua's System, IEEE Trans CAS-I, **42**, 485-490.
- [49] **Arena, P., Fortuna, L. and Porto, D.**, 2000. Chaotic Behavior in Noninteger-Order Cellular Neural Networks, Phys Rev E, **61**, 776-781.
- [50] **Ahmad, W. M. and Sprott, J. C.**, 2003. Chaos in Fractional-Order Autonomous Nonlinear Systems, Chaos, Solitons and Fractals, **16**, 339-351.
- [51] **Li, C. and Chen, G.**, 2004. Chaos and Hyperchaos in the Fractional-Order Rössler Equations, Physica A, **341**, 55-61.
- [52] **Li, C. and Peng, G.**, 2004. Chaos in Chen's System with a Fractional Order, Chaos, Solitons and Fractals, **22**, 443-450.
- [53] **Li, C. and Chen, G.**, 2004. Chaos in the Fractional-Order Chen System and its Control, Chaos, Solitons and Fractals, **22**, 549-554.
- [54] **Lu, J. G. and Chen, G.**, 2006. A Note on the Fractional-Order Chen System, Chaos, Solitons and Fractals, **27**, 985-988.
- [55] **Sheu, L. J., Chen H. K., Chen J. H. and Tam L. M.**, 2007. Chaos in a New System with Fractional Order, Chaos, Solitons and Fractals, **31**, 1203-1212.
- [56] **Podlubny, I.**, 1999. Fractional Differential Equations, New York: Academic Pres.
- [57] **Hilfer, R., (Editor)**, 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics, New Jersey: World Scientific.
- [58] **Kreyszin, E.**, 1999. Advanced Engineering Mathematics, John Wiley: Singapore.
- [59] **Diethelm, K. and Ford, N. J.**, 2002. Analysis of Fractional Differential Equations, J. Math. Anal., **265**, 229-248.

- [60] **Diethelm, K., Ford, N. J. and Freed, A. D.,** 2002. A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations, *Nonlinear Dynamics*, **29**, 3-22.
- [61] **Aoun, M., Malti, R., Levron, F. and Oustaloup, A.,** 2004. Numerical Simulations Fractional Systems: An Overview of Existing Methods and Improvements, *Nonlinear Dynamics*, **38**, 117-131.
- [62] **Charef, A., Sun, H. H., Tsao, Y. Y. and Onaral, B.,** 1992. Fractal System as Represented by Singularity Function, *IEEE Trans. Automatic Control*, **37(9)**, 1465-1470.
- [63] **Sun, H., Abdelwahab, A. and Onaral B.,** 1992. Linear Approximation of Transfer Function with a Pole of Fractional Power, *IEEE Trans. Automatic Control*, **29(5)**, 1465-1470.
- [64] **Oustaloup, A., Sabatier, J. and Moreau, X.,** 1998. From Fractal Robustness to the *CRONE* Approach, *ESAIM: Proc.*, **5**, 177-192.
- [65] **Aström, K. J. and Hägglund, T.,** 1995. *PID* Controllers, The International Society for Measurement and Control.
- [66] **Petrás, I.,** 1998. Control Quality Enhancement by Fractional Order Controllers, *Acta Montanistica Slovaca*, **3(2)**, 143-148.
- [67] **Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A.,** 1985. Determining Lyapunov Exponents from Time Series, *Physica D*, **16**, 285-317.
- [68] **Rosenstein, M. T., Collins, J. J. and De Luca, C. J.,** 1993. A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets, *Physica D*, **65**, 117-134.
- [69] **Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B.,** 2001. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley.
- [70] **Liebovitch, L.S.,** 1998. *Fractals and Chaos Simplified for the Life Sciences*, Oxford University Press: New York.
- [71] **Yang, T., Chua, L. O.,** 1996. Secure Communication via Chaotic Parameter Modulation, *IEEE Trans. CAS-I*, **43(9)**, 817-819.
- [72] **Bai, E. W., Lonngren, K. E., Uçar, A.,** 2005. Secure Communication via Multiple Parameter Modulation in a Delayed Chaotic System, *Chaos, Solitons and Fractals* **23**, 1071-1076.
- [73] **Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J. A.,** 1990. Controlling Chaos, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1196-1199.

- [74] **Li, Z., Halang, W. A. and Chen G., (Editors)**, 2006. Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [75] **Pyragas, K.**, 1992. Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback, Phys. Lett. A, 170, 421-428.
- [76] **Piccardi, C.**, 1994. Bifurcations of Limit Cycles in Periodically Forced Nonlinear Systems: The Harmonic Balance Approach, IEEE Trans. CAS-I, **41(4)**, 315-320.
- [77] **Bonani, F. and Gilli, M.**, 1999. Analysis of Stability and Bifurcations of Limit Cycles in Chua's Circuit Through the Harmonic-Balance Approach, IEEE Trans. CAS-I, **46(8)**, 881-890.
- [78] **Genesio, R. and Tesi, A.**, 1991. Chaos Prediction in Nonlinear Feedback Systems, IEE Proc-D, **138(4)**, 313-320.
- [79] **Genesio, R., Tesi, A. and Villoresi, F.**, 1993. A Frequency Approach for Analyzing and Controlling Chaos in Nonlinear Circuits, IEEE Trans. CAS-I, **40(11)**, 819-828.
- [80] **Çelik, V.**, 2004. Geri Beslemeli Kontrol Sistemlerinde Kaotik Davranışların Tahmin Edilmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, Fırat Üniversitesi- Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [81] **Gibson, J. E.**, 1963. Nonlinear Automatic Control. McGraw-Hill, New York.
- [82] **Uçar, A. ve Çelik, V.**, 2004. *PI* Kontrollü Doğrusal Olmayan Sistemlerde Osilasyon, Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, **5(1)**, 183-189.
- [83] **Çelik, V. ve Demir, Y.**, 2007. Kesir Dereceli PI^k Kontrolörün Doğrusal Olmayan Sistem Dinamiği Üzerine Etkileri, Endüstri&Otomasyon, **129**, 30-34.
- [84] **Çelik, V. and Demir, Y.**, 2010. Effects on the Chaotic System of Fractional Order PI^α Controller, Nonlinear Dynamics, **59(1-2)**, 143-159.
- [85] **Capponetto R., Fortuna L., Lavorgna M. and Porto D.**, 2000. Design of a Chaotic Generator Using Two Cells Having Non-Integer Order, ISCAS, 233-236, Switzerland.
- [86] **Ahmad W. M.**, 2005. Generation and Control of Multi-Scroll Chaotic Attractors in Fractional Order Systems, Chaos, Solitons and Fractals, **25**, 727-735.
- [87] **Lu, J. G.**, 2005. Chaotic Dynamics and Synchronization of Fractional-Order Arneodo's Systems, Chaos, Solitons and Fractals, **26(4)**, 1125-1133.
- [88] **Ahmad, W. M.**, 2005. Hyperchaos in Fractional Order Nonlinear Systems, Chaos, Solitons and Fractals, **26(5)**, 1459-1465.

- [89] **Lu, J. G.**, 2006. Chaotic Dynamics of the Fractional-Order Lü system and its Synchronization, *Physics Letters A*, **354(4-5)**, 305-311.
- [90] **Ge, Z. M. and Zhang, A. R.**, 2007. Chaos in a Modified Van der Pol System and in its Fractional Order Systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, **32(5)**, 1791-1822.
- [91] **Wang, D. P. and Yu, J. B.**, 2008. Chaos in the Fractional Order Logistic Delay System, *J. Electronic Science and Technology of China*, **6(3)**, 225-229.
- [92] **Zhu, H., Zhou, S. and Zhang, W.**, 2008. Chaos and Synchronization of Time-Delayed Fractional Neuron Network System, 9. *Int. Conf. for Young Computer Scientist*, 2937-2941.
- [93] **Gilli, M.**, 1993. Strange Attractors in Delayed Cellular Neural Networks, *IEEE Trans. CAS-I*, **40**, 849-853.
- [94] **Lu, H. and He, Z.**, 1996. Chaotic Behavior in First-Order Autonomous Continuous-Time System with Delay, *IEEE Trans. CAS-I*, **43**, 700-702.
- [95] **Lu, H., He Y. and He, Z.**, 1998. A Chaos Generator: Analysis of Complex Dynamics of a Cell Equation in Delayed Cellular Neural Networks, *IEEE Trans. CAS-I*, **45**, 187-181.
- [96] **Ucar, A. and Bishop, S. R.**, 2001. Chaotic Behaviour in a Nonlinear Delay System, *Int. J. Nonlinear Sci. and Num. Sim.*, **2**, 289-294.
- [97] **Uçar, A.**, 2002. A Prototype Model for Chaos Studies, *Int J. Eng. Sci.*, **40**, 251-258.
- [98] **Uçar, A.**, 2003. On the Chaotic Behavior of a Prototype Delayed Dynamical System, *Chaos, Solitons and Fractals*, **16**, 187-194.
- [99] **Çelik, V. and Demir, Y.**, 2009. Chaotic Fractional Order Delayed Cellular Neural Network, *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications* (Baleanu, D., Ziya G.B. and Machado, J.A.T.(Editors)), Springer.

ÖZGEÇMİŞ

1976-Elazığ doğumlu olan Vedat ÇELİK ilk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 1993'te girdiği Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden 1997'de mezun oldu. 1998 yılı başında Fransa'da “Matematik Eğitimi” alanında lisans üstü eğitim almak üzere Milli Eğitim Bakanlığının resmi burslu öğrencisi olarak Ankara Fransız Kültür merkezinde Fransızca dil eğitimi aldı.1999'da Fransa'da, ENS-Cachan / Paris, “Bilimlerin ve Teknolojinin Yayılması ve Öğretimi” programında lisans üstü eğitimine başladı. 2000 yılı sonunda ailevi nedenlerden dolayı eğitimini bırakmak zorunda kaldı. 2001 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Ana Bilim dalında yüksek lisans yapma hakkı kazandı ve aynı yılın sonunda Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde araştırma görevliliğine başladı. 2004 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı ve aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Ana Bilim dalında doktora eğitimine başladı. 2008 yılı içerisinde Fırat Üniversitesindeki görevinden ayrıldı ve Enerji ve Tabii Kaynaklar Bakanlığında mühendis olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.