

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İNDİREKT SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE
İKİ BOYUTLU POTANSİYEL DAĞILIMININ
HESAPLANMASI**

134771

Sami EKİCİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ - 2003

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İNDİREKT SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE
İKİ BOYUTLU POTANSİYEL DAĞILIMININ
HESAPLANMASI**

Sami EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Bu tez, 06/08/2003 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM

Üye:

Prof. Dr. Mehmet CEBECİ

Üye:

Yrd. Doç. Dr. Zafe AYDOĞMUŞ

Üye:

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 13/08/2003 tarih ve 203-307 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada benden hiçbir zaman yardım ve katkılarını eksik etmeyen kıymetli hocam Yrd. Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM' a, yine bana büyük yardım ve desteği olan kıymetli arkadaşım Resul ÇÖTELİ' ye ve değerli mesai arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	
İÇİNDEKİLER.....	I
ŞEKİL LİSTESİ.....	III
TABLO LİSTESİ.....	V
SİMGELER.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ	4
2.1. Sınır İntegral Denklemleri için Temel Çözüm	7
2.2. İç Nokta Formülasyonu	10
2.3. Sınır İntegral Denklemi	10
3. LAPLACE DENKLEMİ İÇİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ.....	13
3.1. Sabit Elemanlar	15
3.1.1. İntegral Denklemlerinin Ayrıştırılması	15
3.1.2. İntegrasyon Sabitlerinin Hesaplanması.....	16
3.1.3. Tekil İntegrallerin Hesaplanması	19
3.2. Lineer Eleman	20
3.2.1. İntegral Denklemlerinin Ayrıştırılması	21
3.2.2. İntegrasyon Sabitlerinin Hesaplanması	22
3.2.3. c_i Katsayısının Hesaplanması	26
3.3. Parabolik Eleman.....	27
4. İNDİREKT SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ	30
4.1. Potansiyel Teorisi.....	30
4.2. Tek Kat Formülasyonunun Türetilmesi.....	32
4.3. İç Bölge Problemleri İçin Dirichlet Sınırları	37
4.4. Dış Bölge İçin Dirichlet Problemi.....	37

4.5.	Neumann ve Karışık Problemler	38
4. 6.	Gradyant Hesabı.....	39
4.7.	Dirichlet Problemlerinde Operatör Özellikleri.....	40
4.8.	Neumann Problemlerinde Operatör Özellikleri.....	40
4.9.	Tek Kat Kaynakları ile Çoklu-Ortam Formülasyonları.....	41
4.10.	İkili Tek Kat Kaynakları ile Çoklu-Ortam Formülasyonu.....	42
5.	ÖRNEK UYGULAMA.....	43
5.1.	Düzlemsel Elektrot Sistemi	43
6.	BİLGİSAYAR PROGRAMI.....	47
6.1.	Ana Program ve Veri Yapısı.....	48
7.	UYGULAMALAR.....	52
7.1.	Çeyrek Kesitli Kablo.....	52
7.2.	Küre-Küre Elektrot Sistemi.....	54
7.3.	Küre-Düzlem Elektrot Sistemi.....	56
7.4.	Enerji Kablosu.....	58
8.	SONUÇLAR.....	61
	KAYNAKLAR.....	63
	ÖZGEÇMİŞ.....	65

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Problem bölgesi.....	7
Şekil 2.2. Üç boyutlu durum için sınır noktalarının küçük bir yarımküre ile büyütülmesi.....	11
Şekil 2.3. İki boyutlu durum için sınır noktasının bir yarımküre ile büyütülmesi.....	12
Şekil 3.1. Sınır elemanları.....	13
Şekil 3.2. Sabit eleman kullanarak sınırın ayrıştırılması.....	15
Şekil 3.3. Sabit elemanda $i \neq j$ için geometrik gösterim.....	17
Şekil 3.4. d 'nin işaretinin belirlenmesi.....	18
Şekil 3.5. Gauss alan noktalarının gösterilmesi.....	19
Şekil 3.6. İntegrasyonun uygulandığı noktadaki tekilliğin gösterilmesi.....	20
Şekil 3.7. Sınırın lineer eleman ile ayrıştırılması.....	21
Şekil 3.8. Lineer eleman için notasyon.....	21
Şekil 3.9. Sayısal Gauss integrasyonu için notasyon.....	23
Şekil 3.10. Düğüm içeren elemanlar için integrasyon.....	24
Şekil 3.11. İntegrasyon değişkeni η 'nın tanımlanması.....	25
Şekil 3.12. Parabolik elemanın gösterilişi.....	27
Şekil 3.13. Referans sistemi.....	28
Şekil 4.1. Noktasal yükler için notasyon.....	31
Şekil 4.2. Keyfi olarak seçilmiş bir yük konfigürasyonu için notasyon.....	31
Şekil 4.3. Konuda incelenen geometri düzeni.....	32
Şekil 4.4. Tekil nokta içeren bölge.....	34
Şekil 4.5. Heterojen Bir Bölge için İkili Yük Katları.....	42
Şekil 5.1. Düzlemsel elektrot sistemi ve sınır şartları.....	43
Şekil 6.1. Bilgisayar programı için makro akış diyagramı	47
Şekil 7.1. Çeyrek kablo kesiti.....	52
Şekil 7.2. Çeyrek kablo kesiti için eşpotansiyel eğriler.....	53
Şekil 7.3. Çeyrek kablo kesiti için elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	54
Şekil 7.4. Küre-Küre elektrot sistemi.....	54
Şekil 7.5. Küre-Küre elektrot sistemi için eşpotansiyel eğriler.....	55
Şekil 7.6. Küre-Küre sistemi için elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	56
Şekil 7.7. Küre-Düzlem elektrot sistemi.....	56
Şekil 7.8. Küre-Düzlem sistemi için eşpotansiyel eğriler.....	57
Şekil 7.9. Küre-Düzlem sistemi için elde edilen değerlerin karşılaştırılması.....	58

Şekil 7.10. Enerji kablosu geometrisi ve sınır şartları.....	58
Şekil 7.11. Enerji kablosunun eşpotansiyel eğrileri.....	59
Şekil 7.12. Enerji kablosu için elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	62



TABLO LİSTESİ

Tablo	Sayfa
Tablo 3.1. Verilen referans sistem için değişken değerleri.....	28
Tablo 7.1. Çeyrek kablo için elde edilen sonuçlar	53
Tablo 7.2. Küre-Küre sistemi için elde edilen sonuçlar	55
Tablo 7.3. Küre-Düzlem sistemi için elde edilen sonuçlar.....	57
Tablo 7.4. Enerji kablosu için elde edilen sonuçlar.....	59



SİMGELER

D	: Elektriksel akı yoğunluğu (C/m^2)
$\vec{E}$	: Skaler elektrik alan şiddeti (V/m)
ϵ	: Dielektrik sabiti (F/m)
u	: Potansiyel (V)
q	: Potansiyelin normale göre türevi (V)
u^*	: Laplace denkleminin temel çözümü
q^*	: Temel çözümün normale göre türevi
J	: Jacobian tanımı
σ	: Eşdeğer kaynak
∇	: Gradient operatörü
δ_i	: Dirac delta fonksiyonu
$\bar{u}$	: Sınır üzerinde bilinen potansiyel değeri
$\bar{q}$	: Sınır üzerinde bilinen potansiyelin normale göre türevi
N_1, N_2	: Lineer şekil fonksiyonları
ϕ_1, ϕ_2	: Lineer eleman interpolasyon fonksiyonları
H, G	: Etki katsayı matrisleri
x, y	: Global koordinat sistemi
ξ, η	: Lokal koordinat sistemi
B	: Problem bölgesi
∂B	: Ara kesit
S, S_1, S_2	: Sınırlar
w_i	: Ağırlık faktörü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNDİREKT SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE İKİ BOYUTLU POTANSİYEL DAĞILIMININ HESAPLANMASI

Sami EKİCİ

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı

2003, Sayfa : 65.

Bu çalışmada, İndirekt Sınır Elemanları Yöntemi kullanılarak iki boyutlu potansiyel dağılımı hesaplanmıştır. İlk olarak, sınır elemanları yönteminin literatürdeki yeri araştırılmış ve diğer sayısal yöntemlere göre üstünlükleri belirtilmiştir. İndirekt sınır elemanları yöntemi ile beraber direkt yöntemden de ayrıntılı olarak bahsedilmiştir.

Bu amaçla, bölge tipi denklem sistemleri, ağırlıklı artıklar yöntemi kullanılarak sınır integral denklemlerine dönüştürülmüştür. Sınırlara Dirichlet ve Neumann sınır şartları uygulanarak, sabit elemanlar ile bölmelenmiştir. Etki katsayıları, Gauss sayısal integrasyonu kullanılarak, matris sisteminin köşegen elemanları ise tekil integrallerin çözümüyle elde edilmiştir. Elde edilen lineer denklem sisteminin çözümüyle, eşdeğer kaynaklar bulunmuştur. Daha sonra bu kaynaklar yardımıyla sınır üzerindeki bilinmeyen potansiyel ile potansiyelin normale göre türevleri ve istenen iç noktalardaki değerler hesaplanmıştır.

Uygulama kısmında, indirekt sınır elemanları yöntemi ile potansiyel dağılımı hesabı yapabilmek için ISEY adı verilen ve MATLAB dilinde yazılan bir program ile bazı elektrot sistemleri üzerinde örnek çözümler yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik çözüm sonuçları ve ELECTRO paket programı sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Sınır elemanları yöntemi, Direkt yaklaşım, İndirekt yaklaşım, Elektrostatik alanlar, Sınır integral denklemleri

ABSTRACT

Master Thesis

THE CALCULATION OF TWO DIMENSIONAL POTENTIAL DISTRIBUTION USING THE INDIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD

Sami EKİCİ

Fırat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical Education

2003, Page: 65.

In this study, two dimensional electrostatic field distribution has been calculated using the indirect boundary element method. Firstly, boundary element method has been researched extensively and its advantages have been determined over the other methods. In addition to indirect method, the direct methods have been also described.

For this purpose, the systems of domain equation were converted to boundary integral equations using the method of weighted residuals. The boundaries were divided into constant elements applying the Dirichlet and Neumann conditions. The influence coefficients are obtained by the method of Gauss numerical integration and diagonal elements of matrix system are also obtained by the solution of single integrals. Equivalent sources are discovered by the solution of linear equation system and then unknown potential and its derivative and the values of internal points desired are calculated using this equivalent sources.

In the part of application, example solutions on the any electrode systems have been performed by a program named ISEY and written in the MATLAB software. The solutions obtained, are compared with ELECTRO software and the result of analytical solution.

Key Words : Boundary Element Method, Direct Method, Indirect Method, Electrostatic Field, Boundary Integral Equation.

1.GİRİŞ

Bilgisayarların hızının artmasıyla birlikte sınır değer problemlerinin sayısal çözüm yöntemleri ile analizi konusunda önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Bu tip fiziksel problemlerin diferansiyel denklemlerinin çözümünde kullanılan diferansiyel integrallerin analitik yolla çözümü üzerinde yapılan çalışmalar oldukça zor, hatta mümkün olmamıştır. Analitik yöntemler, karmaşık geometrili problemlerin çözümünde oldukça yetersiz kalmışlardır. Sadece basit geometrili problemler için çözüm yapılabilmiştir. Bu yüzden karmaşık geometrili problemlerin çözümü için sayısal yöntemlere hız verilmiş ve birçok sayısal yöntem geliştirilmiştir (Yıldır ve Zheng, 1995).

Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın iki yöntemden biri sonlu elemanlar yöntemi, diğeri ise sonlu farklar yöntemidir. Sonlu farklar yaklaşımı genellikle potansiyelin denk olduğu noktaların bir ağ üzerinde gösterildiği iteratif bir uygulamayı içerir. Operatör, her bir integrasyon gerekli şartları karşıladıktan sonra birbirini takip eden ağların her bir noktası için ayrıştırılır ve uygulanır (Klimpke, 1983).

Sonlu elemanlar yöntemi ise değişik bir teknik kullanır. Bu yöntemde potansiyele, belirli şartları karşılayan bir dizi fonksiyonla yaklaşılr. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri, yük dağılımını hesaplamadan önce potansiyel dağılımının çözümünü gerektirirler. Çünkü bilinmeyen potansiyel dağılımı, tüm uzay üzerindeki çözümü ve çok sayıda lineer denklem sistemini gerektirir. Her iki yöntem de geniş olarak araştırılmış ve literatürde verilmiştir. Ancak bu tip yöntemler özellikle açık alan problemleri için iyi sonuç vermezler (Raphael Reference Manual, 1998).

Sınır değer problemlerinin çözümü için kullanılan son yöntemlerden biri de sınır elemanları yöntemidir. Bu yöntem, sonlu elemanlar yöntemi ile bazı paralellikler göstermektedir. Sınır elemanları yöntemi, sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi bölge tipi yöntemlere bir alternatif olarak ortaya çıkmıştır (Brebbia, 1984). Bu yöntemin en önemli özelliği, problemin çözümü için çok küçük denklem sistemleri ve diğer yöntemlere göre çok daha az veri girişi gerektirmesidir. Yöntemin diğer önemli avantajları, elde edilen sayısal sonuçların daha fazla doğruluk göstermesi ve harcanan zamanın büyük ölçüde indirgenmesidir (Yıldır, 1987; McPhee ve diğ, 1997).

‘Sınır Elemanları’ terimi ilk olarak Southampton Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü’nde ortaya çıkmıştır (Brebbia, 1984). Bu yöntemde fiziksel büyüklükler Maxwell denklemleri yardımıyla integral formunda tanımlanır (Yıldır ve Zheng, 1995). Sınır elemanları yöntemi, problemin boyutsallığını bir derece indirgeyerek, yüzeyi sonlu elemanlar yöntemine benzer bir şekilde bir dizi fonksiyon altında eleman adı verilen küçük bölümlere ayırır. Daha

sonra bölge üzerindeki her bir eleman üzerine problemi kısmen veya tamamen karşılayan sınır şartları uygulanarak temel denklem sistemleri elde edilir.

Sınır elemanları yönteminde çözüme değişik teknikler kullanılarak gidilebilir. Bu çözüm tekniklerinden birisi akı ve potansiyel gibi fiziksel büyüklüklerin direkt çözümü biçiminde tanımlanan 'direkt yöntem', diğeri ise bu büyüklüklere bir eşdeğer kaynak bularak yaklaşan 'indirekt yöntem'dir. Direkt yöntem, integral denklemindeki bilinmeyenleri doğrudan hesaplarken, indirekt yöntem ise bilinmeyen bir eşdeğer kaynak kullanarak çözüme gider (Yıldır, 1987). İndirekt yöntemde uygun bir çözüm elde edebilmek için, öncelikle sınırların ayrıştırılması, daha sonra yaklaşık bir eşdeğer kaynağın bulunması ve integral denklem sisteminin lineer bir denklem sistemine dönüştürülmesi gerekir (Driscoll, 1999).

İndirekt yöntemde, sınır üzerindeki herhangi bir nokta için kaynağın etkisi ve konumu ile ilişkili olan bir serbest uzay Green fonksiyonu altında tanımlanan sınır şartlarını karşılamak üzere, alanı destekleyen bir eşdeğer kaynak bulunur (Yıldır, 1987). Bu eşdeğer kaynak, bölgede herhangi bir noktadaki potansiyeli hesaplamak için kullanılır. Bilinmeyen potansiyel ifadesi bulunduktan sonra akı, kapasitans, indüktans gibi büyüklükler hesaplanabilir. Kısmi diferansiyel denklem yaklaşımı üzerine kurulu bu yöntemin en büyük avantajı, problemin boyutunun bir derece indirgenmesidir (Klimpke, 1983). Yani kaynaklar sadece sınırlar üzerine ve farklı ortamların ara kesitleri üzerine yerleştirilir. Ayrıca integral operatörleri, diferansiyel operatörlerinin sahip olmadığı sınırsızlık gibi arzulanan özelliklere sahiptirler. Farklı denklemlere uygulanabilen tanımlanmış yöntemlere rağmen, bu çalışmada sadece Laplace denklemlerinin çözümü ile ilgilenilecektir.

Bu yöntemde üç farklı formülasyon kullanılabilir:

- Tek kat formülasyonu
- Çift kat formülasyonu
- Green formülü

Tek kat formülasyonu birinci tip Fredholm integralini, çift kat formülasyonu ikinci tip Fredholm integralini içerir (Klimpke, 1983; Heck, 1998; Tausch, 2002). Green formülü yaklaşımında ise birinci ve ikinci tip Fredholm integrallerinin her ikisi de kullanılır (Driscoll, 1999). Bu çalışmada tek kat kaynak formülasyonu kullanılmakla beraber çift kat formülasyonu ve Green formülünden de bahsedilecektir.

Sınır elemanları yönteminde cebirsel bir denklem sistemi ile ifade edilen farklı ortam özelliklerine sahip arakesitler, küçük sınır elemanlarına ayrıştırılarak integral denklemlerine indirgenir. Bir modeldeki ortam karakteristikleri, her bir ilgili bölge için sabit olarak alınır. Bir sınır elemanı üzerindeki alan, düğümlerdeki alan değerleri arasında bir analitik interpolasyon fonksiyonu olarak alınır (Trinitis ve diğ, 2002).

Sınır elemanları yöntemi, homojen olan bölgelere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Özellikle açık alan problemlerinde veri girişlerinin kolayca yapılabilmesi ve işlem kolaylığı yöntemi diğer yöntemlerden üstün kılmaktadır (Krauter ve diğ, 1996). Parçalı homojen yapıya sahip geometrili bölgelerin incelenmesi iki yöntemle gerçekleştirilir. İlk yöntem, birbirinden farklı ortamların arakesitleri üzerine bir tek kat kaynağının yerleştirilmesidir (Klimpke, 1983; Yıldır, 1987). Bu durumda potansiyel doğal olarak sürekli olur, fakat potansiyelin normale göre türevi, yük miktarıyla orantılı olarak bir süreksizliğe sahip olacaktır. İkinci yöntem, her bir bölgeye ait olan iki tek kat kaynağının arakesit üzerine yerleştirilmesidir. Bu yöntemin önceki yöntemlerden avantajlı yanı, kullanılan matrislerin basite indirgenebilmesidir (Klimpke, 1983). Bölge, hem potansiyelin hem de normal türevinin sürekliliğe zorlandığı birçok küçük bölgeye bölünebilir. Bu tip bir bölmeleme işlemi, çözümü zorlaştıran büyük boyutlu matrislerin basite indirgenmesini sağlayarak çözümün daha kolay hale gelmesini sağlar.

Sınır elemanları yönteminde karşılaşılan en büyük problemlerden biri, kaynak noktası ile incelenen noktaların çakışması durumunda meydana gelen Green fonksiyonu integrasyonunun tekilliğidir. İntegrasyonu düzenleyen bir fonksiyon kullanan Lean bu sorunu ortadan kaldırmıştır (Klimpke, 1983; Singh ve Tanaka, 1999). Lean'ın kullandığı yöntem bu tip problemlerin çözümünde büyük doğruluk göstermiştir.

2.SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Sınır elemanları yöntemi (BEM), sınır integral denklemlerinin çözümü için kullanılan sayısal bir tekniktir. Bu teknikte elektromanyetik olaylar integral şeklindeki Maxwell denklemleri ile matematiksel olarak tanımlanır. Malzeme ara kesitleri boyunca sınır şartlarının uygulanması, eşdeğer kaynaklar ve ara kesitlerdeki alan değişkenleri gibi bilinmeyenlerden oluşan bir integral denklem takımının elde edilmesini sağlar. Bu yöntemle sınır elemanlarının sınırları ayrıştırılabilir, elemanlar üzerindeki bilinmeyenler gösterilebilir ve lineer bir denklem sistemi elde edilebilir. Bu yolla, sınır elemanları yöntemi ile verilen bir problem çözülür. Uzayda herhangi bir noktadaki bütün alan değişkenleri, eşdeğer kaynaklar veya sınırdaki alanlar ile ilişki kurularak yapılan integrasyon ile elde edilebilir.

En sade sınır elemanları yöntemi indirekt inceleme yöntemidir (Brebbia, 1984). En basit şekilde bu yöntem Laplace denklemini bölgede sağlayan, ancak bazı bilinmeyen katsayıları olan bir çözümle başlar. Daha sonra bu katsayılar sınır şartlarının bir kısım noktalarda veya alt alanlarda yerleştirilmesiyle belirlenir. Bu yöntem, birçok uygulamada iyi sonuçlar vermektedir. Özellikle kullanılan çözümün Laplace denkleminin temel çözümü olduğu durumlarda doğrudur.

Kolay olması nedeniyle indirekt yöntem uzun seneler kullanılmıştır. İndirekt yöntemin ağırlıklı artıklar yönteminin özel bir hali olduğunu vurgulamak gerekir.

Öte yandan direkt yöntemler, genelde Green's özdeşliğine dayanarak verilir, fakat burada olduğu gibi ağırlıklı artıklar yöntemi olarak da irdelenebilir. Bu yöntemlerin çıkış noktasını ve diğer yöntemlere nasıl bağlandıklarını anlamak için,

$$\nabla^2 u = 0 \quad B \text{ 'de,} \quad (2.1)$$

Laplace denklemini ile tanımlanan potansiyel problemini inceleyelim. Bu problem için sınır şartları ;

$$u = \bar{u} \quad S_1 \text{ 'de,}$$

$$q = \partial u / \partial n = \bar{q} \quad S_2 \text{ 'de,}$$

olsun. Burada toplam sınır $S = S_1 + S_2$ ve B problemin tanımlandığı bölgedir. Üst çizgi, bilinen sınır şartlarını göstermektedir.

Şimdi S_1 ve S_2 'nin sıfırdan farklı olduğunu kabul ettiğimiz bir ağırlıklı w fonksiyonu düşünelim. w fonksiyonu her biri keyfi olarak seçilen bir parametreyle çarpılmış ve toplanmış bir takım fonksiyondan ibarettir ve ağırlık katsayıları olarak ifade edilir. Yaklaşık fonksiyonun yerini alacak w fonksiyonu, her biri bilinmeyen bir parametreyle çarpılmış bir takım

fonskiyondan ibarettir. Bu probleme karşılık düşen ağırlıklı artıklar ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$$\int_B (\nabla^2 u) w dB = \int_{S_2} (q - \bar{q}) w dS + \int_{S_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (2.2)$$

Genellikle (ancak her zaman değil), $u = \bar{u}$ sınır şartları sonlu elemanlar yöntemi gibi yöntemlerde özdeş olarak sağlanmaktadır ve ağırlıklı w fonksiyonu u 'nun fiili artışlarına bağlıdır. Bu nedenle denk. (2.1),

$$\int_B (\nabla^2 u) \delta u dB = \int_{S_2} \bar{q} \delta u dS \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır. Diferansiyel denklemin derecesini azaltmak için denk. (2.3)'de sol tarafın kısmi integrali aşağıdaki gibi alınabilir :

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dB = \int_{S_2} \bar{q} \delta u dS \quad (2.4)$$

Denk. (2.4), hemen hemen bütün sonlu elemanlar modellerinde potansiyel problemleri için bir başlangıç ifadesidir.

Öte yandan sonlu farklar yöntemi, denk. (2.2)'nin özel bir hali olarak düşünülebilir. Bu denklemde ağırlıklı w fonksiyonu, bir Dirac fonksiyonu cinsinden yazılmış ve u 'nun türevleri sonlu farklar yönteminde olduğu gibi yaklaşık olarak bulunmuştur. Bütün sınır şartları sağlandığı takdirde, denk. (2.3),

$$\int_B (\nabla^2 u) w dB = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde veya Dirac fonksiyonu cinsinden,

$$\int_B (\nabla^2 u) \Delta_i dB = 0 \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada Δ_i sonlu fark ağının i noktasındaki Dirac fonksiyonunu göstermektedir.

$v = u$ şartlarının yalnızca S_1 'e özdeş olarak sağlandığını kabul ederek ve denk. (2.2)'nin birinci terimlerinin kısmi integralini alarak sonlu farklar genelleştirilir ve,

$$\int_B \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} dB = \int_{S_2} \bar{q} w dS \quad (2.7)$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi sonlu farklar tahminleri, fiili fark olarak düşünülebilen u ve w 'yı göstermek için kullanılabilir. Bu yöntem bazen enerji sonlu fark yöntemi olarak adlandırılır. Çünkü genellikle enerji fonksiyonuna dayanmaktadır.

w fonksiyonunun davranışını gözönüne alarak herhangi bir varsayım yapmadan, denk. (2.2)' nin kısmi integrali alınır;

$$-\int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dB = -\int_{S_2} \bar{q} w dS - \int_{S_1} q w dS + \int_{S_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (2.8)$$

elde edilir. Tekrar kısmi integral alınarak, şu ifade elde edilir;

$$\int_B (\nabla^2 w) u dB = -\int_{S_2} \bar{q} w dS - \int_{S_1} q w dS + \int_{S_2} u \frac{\partial w}{\partial n} dS + \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (2.9)$$

Başka bir ifadeyle, şimdi problemin tersi elde edilmiş oldu. ∇^2 operatörü, u yerine w üzerinde işlem görmektedir. w bir takım ağırlıklı fonksiyonları temsil ettiğinden,

$$\nabla^2 w = 0 \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. O halde denk. (2.9),

$$\int_{S_2} \bar{q} w dS + \int_{S_1} q w dS = \int_{S_2} u \frac{\partial w}{\partial n} dS + \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (2.11)$$

şekline dönüşür. Denk. (2.11) sadece sınıra uygulanmaktadır.

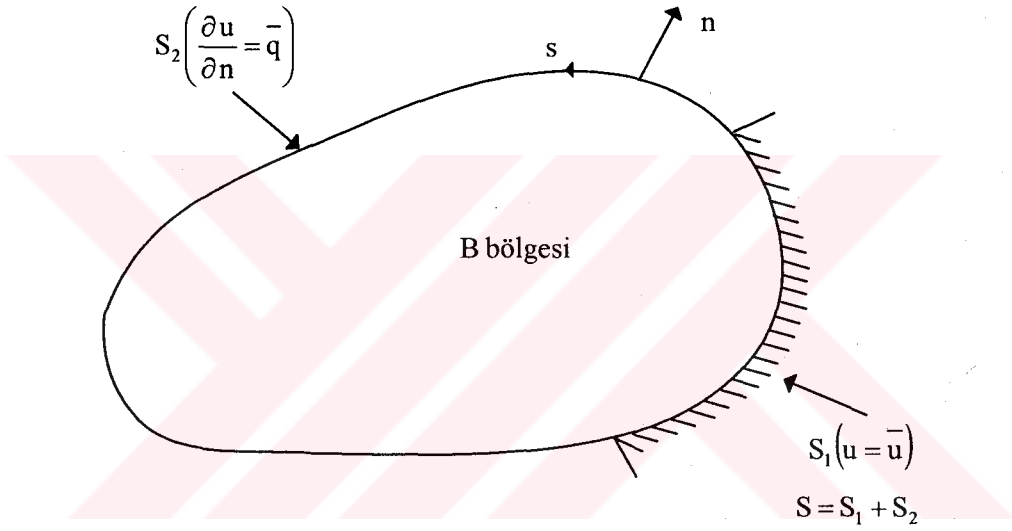
w fonksiyonu çeşitli şekillerde seçilebilir, ancak w 'nın temel çözüm olarak alınması geneldir. Bu durumda (yük yoğunluğundan dolayı) Somigliani tipi bir özdeşlik oluşturan başka bir terim ortaya çıkacaktır. Sınır elemanları yöntemi birçok imkan sunmaktadır. Sınır elemanlarını, bölge elemanlarıyla birleştirme imkanı da vardır ve bunlar arasındaki ilişkinin ağırlıklı kalanlar yöntemleriyle çok kolay bir şekilde anlaşılabilceğini belirtmek gerekir.

2.1.Sınır İntegral Denklemleri için Temel Çözüm

Sınır elemanları yöntemindeki en önemli konulardan biri sınır integral denklemleri için verilen diferansiyel denklemin temel çözümünün bulunmasıdır. Temel çözüm, kısmi diferansiyel denklemi problemin tanımlandığı B bölgesi için sağlar ve denklemi sınır integral denklemine dönüştürür. Bu durumda B bölgesi için tanımlanan problem, iki boyutlu durumdan bir boyutlu duruma dönüştürülmüş olur (Ayaz, 1998; Yıldırım, 1999).

Ağırlıklı artıklar tekniği ile sınır elemanları formülasyonunun nasıl elde edilebileceğini göstermek için aşağıda verilen Laplace denklemini sağlayan bir B bölgesindeki u potansiyel fonksiyonunu göz önünde bulundurmak gerekir :

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{B bölgesinde,} \quad (2.12)$$



Şekil 2.1. Problem bölgesi

Bu probleme ilişkin sınır şartları iki şekildedir :

- Dirichlet sınır şartı $u = \bar{u}$ S_1 sınırında,
- Neumann sınır şartı $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ S_2 sınırında,

Toplam sınır $S = S_1 + S_2$ dir.

Böylece ilk türevi B bölgesinde sürekli olan ve temel çözüm olarak adlandıracağımız u^* bir ağırlık fonksiyonu olarak tanımlanabilir (Paris ve Canas, 1997). Bu fonksiyon daha sonra elde edilecek olan temel denklemi sağlamak için kullanılacaktır. Ağırlıklı artıklar ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_B (\nabla^2 u) u^* dB = \int_{S_2} (q - \bar{q}) u^* dS - \int_{S_1} (u - \bar{u}) q^* dS \quad (2.13)$$

burada $q = \partial u / \partial n$ ve $q^* = \partial u^* / \partial n$ dir. Denk. (2.13) aşağıdaki gibi düzenlenirse,

$$- \int_B \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right) dB = - \int_{S_2} \bar{q} u^* dS - \int_{S_1} q u^* dS - \int_{S_1} u q^* dS + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS \quad (2.14)$$

denklemini elde edilir. Denk. (2.14)'ün sol tarafı tekrar düzenlenerek aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_B (\nabla^2 u^*) dB = - \int_{S_2} \bar{q} u^* dS - \int_{S_1} q u^* dS + \int_{S_2} u q^* dS + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS \quad (2.15)$$

Bu denklem, sınır elemanları yönteminin başlama noktasıdır. Bu denklem elde edildikten sonra amaç, Laplace denklemini sağlayacak bir çözüm bulmaktır. Bir 'i' noktasında bir yük olduğu varsayılarak temel denklem aşağıdaki gibi yazılır :

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (2.16)$$

Buradaki Δ_i bir Dirac delta fonksiyonudur. Bu denklemin çözümü temel çözüm olarak bilinir. Bir Dirac delta fonksiyonunun herhangi bir fonksiyonla çarpımının integrali, bu fonksiyonun 'i' noktasındaki değerine eşittir. Buradan,

$$\int_B (\nabla^2 u^* + \Delta_i) dB = \int_B \nabla^2 u^* dB + u_i \quad (2.17)$$

elde edilir. Buradaki u_i , yükün uygulandığı noktadaki bilinmeyen u fonksiyonunun değeridir. Denk. (2.16) temel çözüm tarafından sağlanıyorsa,

$$\int_B (\nabla^2 u^*) dB = -u_i \quad (2.18)$$

elde edilir.

Bu sonuç, denk. (2.15)'te yerine yazılırsa,

$$u_i + \int_{S_2} u q^* dS + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS = \int_{S_2} \bar{q} u^* dS + \int_{S_1} q u^* dS \quad (2.19)$$

ifadesi bulunur. Burada $q = \partial u / \partial n$ ve $q^* = \partial u^* / \partial n$ 'dir.

Üç boyutlu izotropik bir ortam için denk. (2.16)'nın temel çözümü,

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.20)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki 'r', delta fonksiyonunun uygulandığı nokta ile incelenen nokta arasındaki uzaklıktır. Denk. (2.16)'daki Laplace denklemi polar koordinatlarda ve simetri göz önüne alınarak üç boyutlu problemler için aşağıdaki gibi yazılır :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = -\Delta_i \quad (2.21)$$

Denk. (2.20), denk. (2.21)'de yerine konursa, r' nin sıfırdan farklı herhangi bir değer için denklemi sağladığı görülür. Eğer r mesafesi sıfıra denk olursa ($r \equiv 0$), yükün uygulandığı yerdeki noktayı çevreleyen bir küre için aşağıdaki integrasyonu uygulamak gerekir :

$$\int_B \nabla^2 u^* dB = - \int_B \Delta_i dB = -1 \quad (2.22)$$

Denk. (2.22)'nin sol tarafındaki ifadenin -1'e eşit olduğu aşağıdaki gibi kolaylıkla ispatlanabilir:

$$\int_B \nabla^2 u^* dB = \int_S \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_S \frac{\partial u^*}{\partial S} dS \quad (2.23)$$

Denk. (2.20)'deki temel çözüm, denk. (2.23)'de yerine yazılırsa,

$$\int_S \frac{\partial u^*}{\partial S} dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(-\frac{1}{r^2} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi r^2}{r^2} \right)_S = -1 \quad (2.24)$$

elde edilir. Denk. (2.24)'deki sonuçlar r' den bağımsızdır ve denklemin sol tarafı, $r \rightarrow 0$ giderken -1'e eşittir.

İki boyutlu problemlerde izotropik durum için temel çözüm aşağıdaki gibidir :

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.25)$$

2.2.İç Nokta Formülasyonu

Denk. (2.18)'de bulunan ifade, denk. (2.15)'te yerine yazılırsa,

$$-u_i = -\int_{S_1} q u^* dS - \int_{S_2} \bar{q} u^* dS + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS + \int_{S_2} \bar{q} u^* dS \quad (2.26)$$

elde edilir. Daha sonra denklem düzenlenerek,

$$u_i + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS + \int_{S_2} u q^* dS = \int_{S_1} q u^* dS + \int_{S_2} \bar{q} u^* dS \quad (2.27)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeye sınır şartları göz önüne alındığında,

$$\int_S q u^* dS = \int_{S_1} q u^* dS + \int_{S_2} \bar{q} u^* dS \quad (2.28)$$

$$\int_S u q^* dS = \int_{S_1} \bar{u} q^* dS + \int_{S_2} u q^* dS \quad (2.29)$$

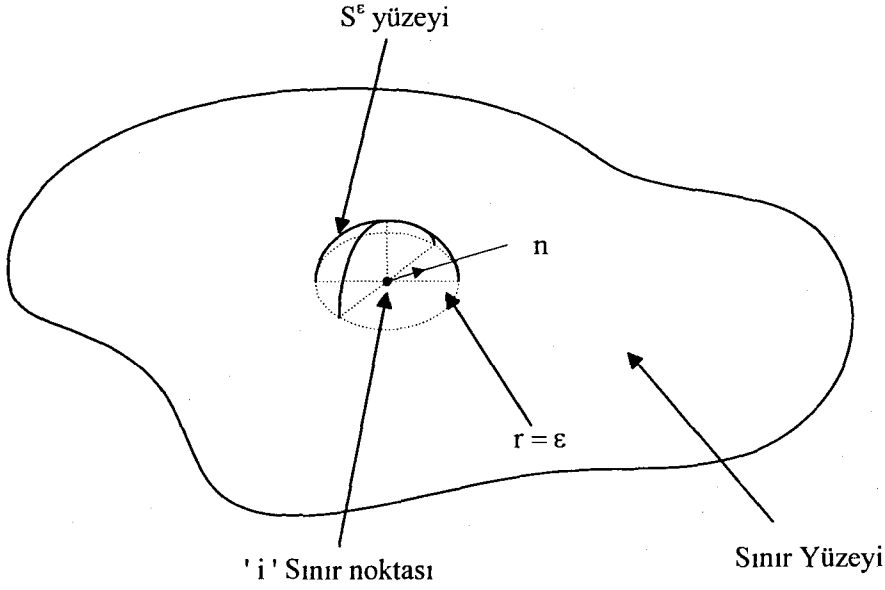
toplam sınır ifadeleri yazılır. Buradan B bölgesi içindeki herhangi bir ' i ' noktası için iç nokta formülasyonu,

$$u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (2.30)$$

şeklinde yazılır (Paris ve Canas, 1997).

2.3.Sınır İntegral Denklemleri

Denk. (2.30), bölgedeki herhangi bir nokta için geçerlidir. Fakat problemi formüle etmek için 'i' noktasını sınıra taşıyan bir sınır tekniği kullanmak gerekir. Bu işlem basit bir yöntemle yapılabilir. Şekil 2.2'de gösterildiği gibi üç boyutlu bir bölgenin sınırı üzerindeki yarım küre göz önüne alınır. Aynı yolla iki boyutlu problemler de çözülebilir (Şekil 2.2). Noktanın kürenin merkezinde olduğu varsayılır ve daha sonra kürenin yarıçapı ϵ , sıfıra götürülür. Böylece ' i ' noktası artık bir sınır noktası haline gelmiş olur. Sınırın düzgün ve noktanın S_2 sınırı üzerinde olduğu varsayılır, fakat noktanın S_1 sınırı üzerinde olması durumunda da benzer bir yaklaşım izlenir.



Şekil 2.2. Üç boyutlu durum için sınır noktalarının küçük bir yarımküre ile büyültülmesi

S_2 sınırı iki kısma bölünerek,

$$\int_{S_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{S_{(2-\epsilon)}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS + \int_{S_\epsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS \quad (2.31)$$

Denk. (2.26)'nın sağ tarafındaki ikinci integralde temel çözüm yerine yazılırsa ve $\epsilon \rightarrow 0$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_\epsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S_\epsilon} u \frac{1}{4\pi\epsilon^2} dS \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \frac{1}{2} u \right\} = -\frac{1}{2} u \quad (2.32)$$

elde edilir. Dikkat edilirse ϵ sıfıra götürüldüğünde sınırimız tekrar S_2 olur. Aynı sonuçlar düz bir sınır için iki boyutlu problemler için de elde edilebilir. Aynı şekilde denk. (2.30)'un sağ tarafı içinde yapılırsa,

$$\int_S q u^* dS$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_\varepsilon} q \frac{1}{4\pi\varepsilon} \right\} = 0$$

olur ve denk. (2.27), denk. (2.19)'da yerine yazılarak sınırdaki bir nokta için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{1}{2}u_i + \int_{S_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS + \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{S_2} \bar{q} u^* dS + \int_{S_1} q u^* dS \quad (2.33)$$

Eğer S_2 sınırı yerine S_1 sınırı üzerindeki bir nokta göz önüne alınırsa yine aynı sonuçlar elde edilir. Denk. (2.28) aşağıdaki gibi düzenlenerek,

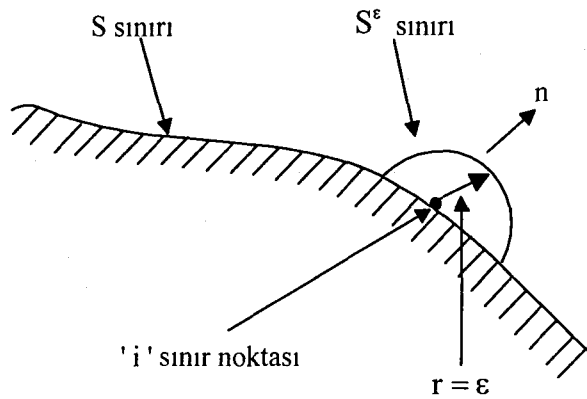
$$\frac{1}{2}u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (2.34)$$

elde edilir. Burada $S = S_1 + S_2$ ve S_1 sınırında $u = \bar{u}$, S_2 sınırında ise $\frac{\partial u}{\partial n} = q = \bar{q}$ olduğu kabul edilir.

Düzgün sınırlar için elde edilen denk. (2.34) daha genel bir ifadeyle aşağıdaki sınır integral denklemine dönüştürülür.

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (2.35)$$

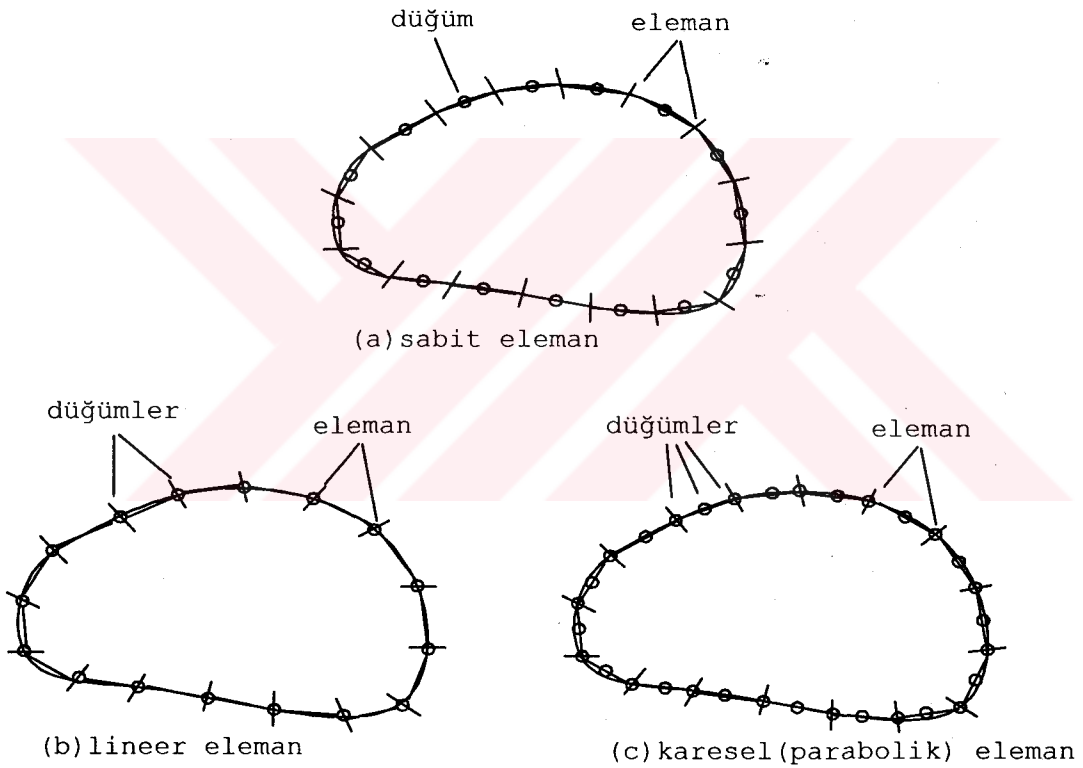
İki boyutlu problemlerde temel çözüm bulunurken üç boyutlu problemlerdeki gibi bir yol izlenir.



Şekil 2.3. İki boyutlu durum için sınır noktasının bir yarım daire ile büyütülmesi

3.LAPLACE DENKLEMİ İÇİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

$\nabla^2 u = 0$ Laplace denkleminden elde edilen denk.(2.35)' deki sınır integral denkleminin ayrıştırılarak sınır bilinmeyenlerinin bulunabilmesi için iki boyutlu problem, N sayıda parçaya bölünür ve bu parçaların her birine 'eleman' adı verilir. Sınır elemanları yönteminde sabit eleman, lineer eleman, karesel ve daha yüksek dereceli eleman (parabolik ve kübik) olmak üzere üç tip sınır elemanı kullanılır (Paris ve Canas, 1997). Bilinmeyenlerin bulunduğu noktalara ise 'düğüm' adı verilir Bu düğüm noktaları sabit elemanlı durumda, elemanın orta noktasına (Şekil 3.1.a), lineer elemanlı durumda elemanın uç noktalarına (Şekil 3.1.b) ve karesel elemanlı durumda ise lineer elemanlı duruma ilave olarak elemanın ortasına düğüm koyarak yapılır (Yıldırım, 1999).



Şekil 3.1. Sınır elemanları

Sınır elemanları yöntemi, üzerinde elemanlar bulunan sınırların ayrıştırılmasından meydana gelmektedir. Geometrideki genişleme fonksiyonları ve çözüm denklemleri bir elemandan esas elemana kadar açıkça belirtilir. Genişleme fonksiyonu katsayıları, normalde eleman üzerindeki düğümler üzerinde tanımlanır. Her fonksiyon daha sonra özel genişleme fonksiyonları ile ilişkilendirilir.

Geometrinin modellenmesi için ise, farklı integrasyon fonksiyonları kullanılır. Kullanılan en yaygın teknik, bir polinom olan fonksiyonun her bir elemana uygulanmasıdır.

Bu çalışmada, geometrinin modellenmesi ve genişleme fonksiyonları için Lagrangian şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Lagrange şekil fonksiyonları, değerleri ξ lokal koordinatlarında $[0,1]$ aralığında alınan α_i polinomlarıdır. Bu polinom;

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \text{ düğümünde;} \\ 0 & \text{diğer bütün düğümlerde;} \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu Lagrange şekil fonksiyonları düzensiz olarak alınabilmelerine rağmen, lineer eleman için ($i = 2$), parabolik elemanda ise ($i = 3$) ile sınırlandırılmıştır. Lineer şekil fonksiyonları:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1+\xi}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{1-\xi}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde dir. Parabolik şekil fonksiyonları ise:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \\ \alpha_2 &= 1-\xi^2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

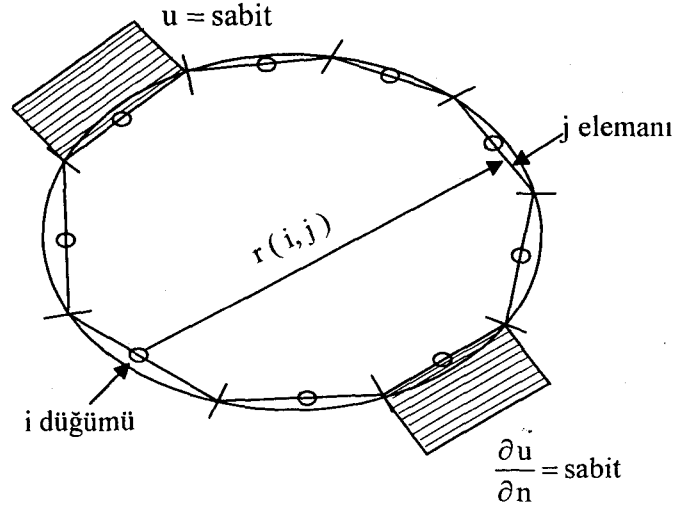
şeklinde yazılır. Herbir eleman için parametrik olarak belirtilen pozisyonlar kartezyen koordinatlarda:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(\xi) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(\xi) y_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

olur. Buradaki x_i ve y_i , düğüm koordinatlarıdır.

3.1.Sabit Elemanlar

Bu tip elemanda, integral denklemindeki potansiyel ile potansiyelin normale göre türevi gibi değişkenlerin eleman boyunca sabit olduğu varsayılır.



Şekil 3.2. Sabit eleman kullanarak sınırın ayrıştırılması

3.1.1.İntegral Denklemlerinin Ayrıştırılması

Elemanların merkezleri genellikle sınır integral denkleminin uygulama noktası olarak alınır. Bu tip elemanlarda kullanılan fonksiyonun sabit değeri elemanların orta noktasında alınır. Uygulama noktasının elemanın orta noktasında alınmasının bir sonucu olarak düğümlerdeki sınır daima düzdür ve u_i 'nin çarpanı daima $\frac{1}{2}$ 'dir. Elemanın orta noktasındaki sınır integral denklemini aşağıdaki gibi yazılır :

$$\frac{1}{2} u_i + \int_{S_j} u q^* dS = \int_{S_j} q u^* dS \quad (3.5)$$

Denk. (3.5), bir 'i' noktasına uygulanırsa her bir S_j elemanı boyunca u ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ 'nin sabit elemanlı durum için çözümü,

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_{S_j} q^* dS = \sum_{j=1}^N q_j \int_{S_j} u^* dS \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Denk. (3.6)'da u ve q değerleri, her eleman üzerinde sabit olduğundan dolayı integral dışına alınmıştır ve bu değerler 'j' elemanı için, u_j ve q_j olarak ifade edilmiştir. Uygulama noktası 'i' ye bağlı olarak integral denklemi,

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (3.7)$$

olarak yazılır. Bu formülasyon direkt yöntem içindir. İndirekt yöntem ile ilgili formülasyonlar, bundan sonraki bölümde verilecektir. Burada u_j , 'j' düğümündeki potansiyeli ve $q_j = \frac{\partial u_j}{\partial n}$ ise 'j' düğümündeki potansiyelin normale göre türevini temsil eder. Buradan,

$$H_{ij} = \int_{S_j} q^*_{ij} dS_j + \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

yazılır. δ_{ij} sabit bir terim olup $i = j$ ise 1'e, $i \neq j$ ise sıfıra eşittir ve,

$$G_{ij} = \int_{S_j} u^*_{ij} dS_j$$

olarak yazılır.

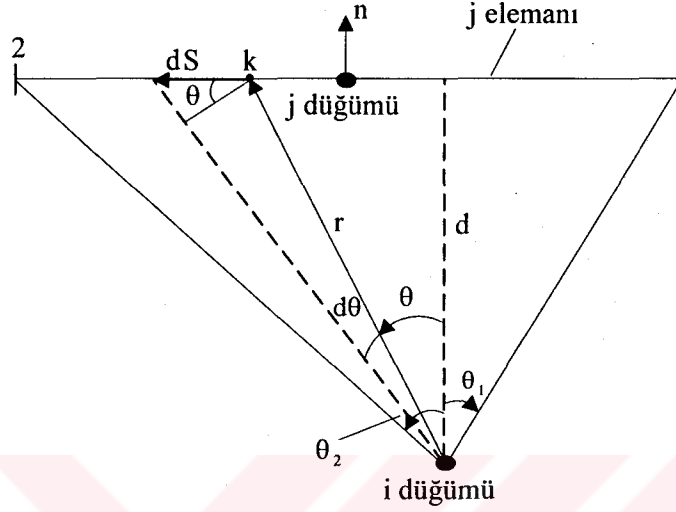
Denk. (3.7)'yi çözebilmek için, sınır elemanları yönteminde genellikle integrasyon sabitleri (etki katsayıları) olarak adlandırılan H_{ij} ve G_{ij} terimlerinin bilinmesi gerekir. Bu integrasyon sabitleri sınır şartlarından bağımsızdır. Bu terimler sadece kesin bir bölge üzerindeki sınırların ayrıştırılmasına bağlıdır (Paris ve Canas).

3.1.2.İntegrasyon Sabitlerinin Hesaplanması

'i' düğümünün integrasyonun yapıldığı S_j sınırı üzerinde olması ya da olmamasına göre iki genel durum vardır. Bu durumlardan birincisi 'i' düğümünün eleman üzerinde olmadığı durumdur. Bu durumda ihtiyaç duyulan sayısal veya analitik uygulamaların yapılmasında herhangi bir zorluk yoktur. H_{ij} ve G_{ij} integrasyon sabitlerinin analitik çözümlerini elde etmek için Şekil 3.3 göz önünde bulundurulur. Uygulama noktası 'i' düğümü ve 'j' elemanının konumuna ilişkin iki boyutlu problemlerde H_{ij} ve G_{ij} 'nin açık denklemleri şu şekildedir:

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dS_j \quad (3.8)$$

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_j} \ln \frac{1}{r} dS_j \quad (3.9)$$



Şekil 3.3. Sabit elemanda $i \neq j$ için geometrik gösterim

Şekil 3.3’de tanımlanan notasyona bağlı olarak,

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} (k) = -\frac{1}{r} \left(\frac{d}{r} \right) = -\frac{d}{r^2} \quad (3.10)$$

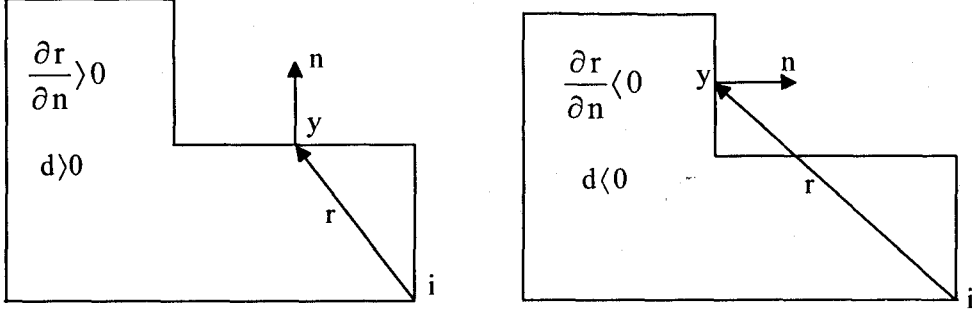
Şekil 3.4’te gösterilen iki farklı duruma göre n normalinin yönü ve r ’nin türevinin işareti göz önünde bulundurularak d tanımlanır. Buna ek olarak yukarıdaki şekilde,

$$ds = \frac{r d\theta}{\cos \theta} = \frac{r^2 d\theta}{d} \quad (3.11)$$

olduğu görülür. Bu ifade denk. (3.8)’de yerine yazılarak,

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_j} -\frac{d}{r^2} \frac{r^2 d\theta}{d} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} \quad (3.12)$$

Şekil 3.3'te saat ibrelerinin tersi yönündeki açılar pozitif, saat ibreleri yönündeki açılar ise negatif olarak alınır. Buna göre θ_1 açısı negatif, θ_2 açısı ise pozitifdir. Buna göre d'nin işareti Şekil 3.4'te gösterildiği gibidir;



Şekil 3.4. d'nin işaretinin belirlenmesi

Denk. (3.9) tekrar yazılarak,

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_j} \ln \left| \frac{\cos \theta}{d} \right| \frac{dd\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{d}{2\pi} \left\{ \ln \left| \frac{\cos \theta}{d} \right| \tan \theta + \tan \theta - \theta \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (3.13)$$

Bu integrasyonu sayısal olarak iki boyutlu problemlerde yapmak için aşağıdaki gibi bir Gauss prosedürü kullanılabilir,

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^M w_i F(\xi_i) \quad (3.14)$$

Burada M, integrali hesaplamak için kullanılan noktaların sayısını gösterir. ξ_i ve w_i ise sırasıyla 'i' noktasındaki değişkenin iç ve ağırlık pozisyonunu temsil eder.

İntegrasyon sabitlerinin sayısal olarak hesaplanmasına ilişkin formülasyon aşağıdaki gibidir:

$$H_{ij} = \sum_{i=1}^M -\frac{1}{2\pi r_i^2} dw_i \frac{\ell_j}{2} \quad (3.15)$$

$$G_{ij} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_i} \right) w_i \frac{\ell_j}{2} \quad (3.16)$$

Buradaki r_i , 'i' Gauss noktasına bağlı olarak değişen 'r' değeridir.

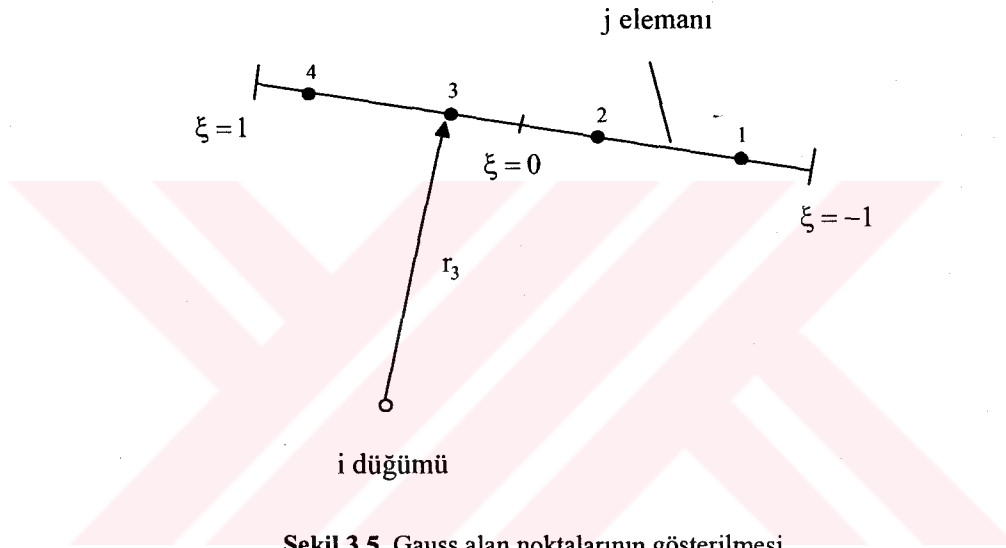
Gauss noktalarının durumu $M = 4$ için Şekil 3.5'te gösterilmiştir. Bu dört integrasyon noktası için apsisler;

$$\xi_1 = -0.86113631; \quad \xi_2 = -0.33998104; \quad \xi_3 = -\xi_2; \quad \xi_4 = -\xi_1$$

ve ağırlık fonksiyonları ise;

$$w_1 = 0.34785485; \quad w_2 = 0.65214515; \quad w_3 = w_2; \quad w_4 = w_1$$

olarak verilir. Sayısal integrasyonların kullanılması, analitik integrasyonlara göre daha az işlem gerektirir ve elde edilen sonuç ise analitik çözüm ile aynıdır.



Şekil 3.5. Gauss alan noktalarının gösterilmesi

3.1.3. Tekil İntegrallerin Hesaplanması

Buraya kadar uygulama noktasının (i düğümü), eleman üzerinde olmadığı göz önünde bulundurulmuştur. Uygulama noktasının eleman üzerinde olması durumunda ($i = j$) ise özel bir integrasyon yöntemi kullanmak gerekir.

$$H_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} dS + \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

daha sonra bu integrasyonda aşağıdaki düzenlemeler yapılarak,

$$H_{ii} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_i/2}^{-\varepsilon} -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} dS + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\ell_i/2} -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \right] + \frac{1}{2}$$

Sabit eleman durumunda H_{ii} katsayısı analitik olarak hesaplanabilir. Yukarıdaki denklemde de görüldüğü gibi kaynak noktasına olan r uzaklığı ile n normali birbirine daima dik olduğundan dolayı H_{ii} terimleri sıfır olur ve,

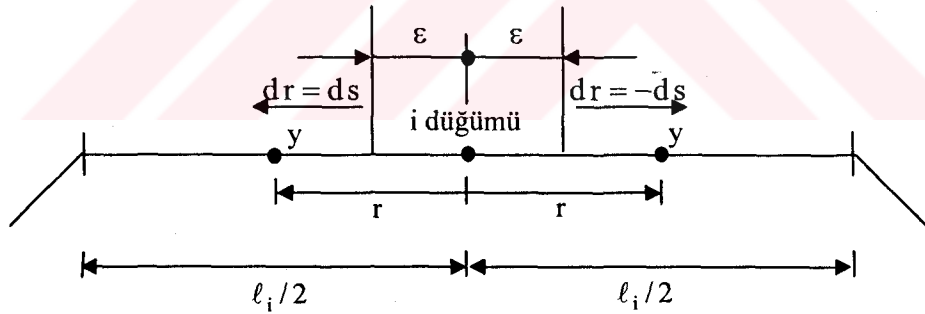
$$H_{ii} = \frac{1}{2} \quad (3.18)$$

elde edilir. Ayrıca sabit bir potansiyel uygulayarak H_{ii} değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^N H_{ij} \quad i \neq j \quad (3.19)$$

G_{ii} 'nin hesaplanması Şekil 3.6'da gösterilen geometriye göre yapılır.

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_i} \ln \frac{1}{r} dS = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_i/2}^0 \ln \frac{1}{r} dS + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell_i/2} \ln \frac{1}{r} dS = \frac{1}{\pi} \int_0^{\ell_i/2} \ln \frac{1}{r} dr$$



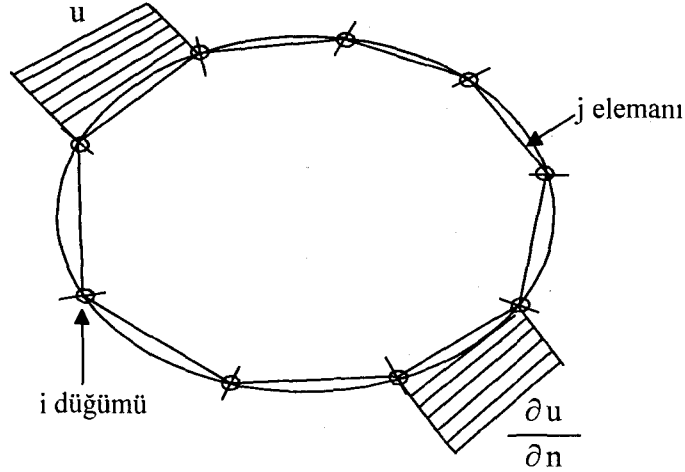
Şekil 3.6. İntegrasyonun uygulandığı noktadaki tekilliğin gösterilmesi

Bu zayıf bir tekillik şekli olmasına rağmen yine de problem sonuçlarının doğruluğu için aşağıdaki gibi bir integrasyon kullanarak tekilliğin giderilmesi gerekir. Bu amaçla $\varepsilon \rightarrow 0$ götürülerek tekil integral ifadesi elde edilir ($\varepsilon \ln \varepsilon = 0$).

$$G_{ii} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\ell_i/2} \ln r dr = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [r \ln(r) - r]_{\varepsilon}^{\ell_i/2} = \frac{\ell_i}{2\pi} \left(1 + \ln \frac{2}{\ell_i} \right) \quad (3.20)$$

3.2. Lineer Eleman

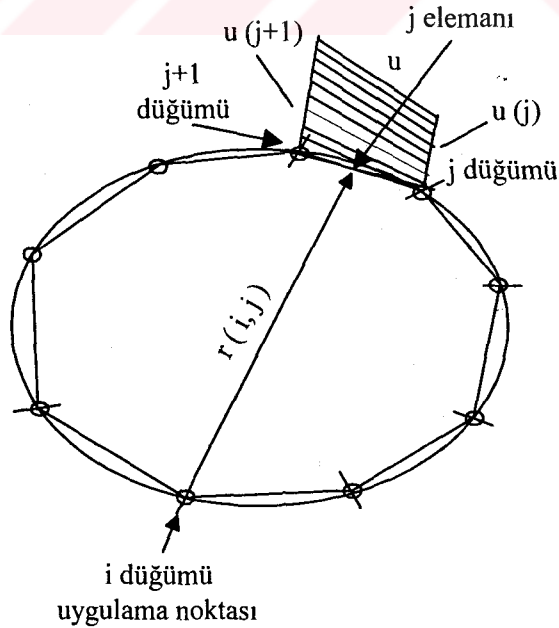
Bu tip elemanda integral denkleminin değişkenleri, potansiyel ve onun türevinin eleman boyunca lineer bir değişim gösterdiği varsayılır. Lineer değişim, Şekil 3.7’de gösterildiği gibi elemanların uç noktalarına yerleştirilen düğüm noktalarındaki fonksiyonlarla ifade edilir.



Şekil 3.7. Sınırın lineer elemanlar ile ayrıştırılması

3.2.1. İntegral Denklemlerinin Ayrıştırılması

Lineer elemanda uygulama noktaları, düğümlerin çakıştığı noktalara yani elemanların uç noktalarına yerleştirilir. Şekil 3.8’de sınırları ayrıştırılmış bir problem için notasyon gösterilmiştir.



Şekil 3.8. Lineer eleman için notasyon

Yukarıdaki notasyona göre, j elemanı j ve $j+1$ düğümleri arasına yerleştirilir. S_j sınırı N sayıda elemana ayrıştırıldıktan sonra,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{S_j} u q^* dS = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} q u^* dS \quad (3.21)$$

ifadesi elde edilir. Burada, sabit elemanlı durumdan farklı olarak u ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ ifadeleri eleman

boyunca lineer olarak değiştiklerinden integral dışına alınamazlar. Bunun için değişkenler lokal koordinatlarda,

$$u(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

yazılır ve denk. (3.22) ve (3.23), denk. (3.21)'de yerine yazılırsa ve dS lokal koordinatlarda ifade edilirse,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{S_j} [\phi_1 u_1 + \phi_2 u_2] q^* \frac{\ell_j}{2} d\xi = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} [\phi_1 q_1 + \phi_2 q_2] u^* \frac{\ell_j}{2} d\xi \quad (3.24)$$

elde edilir. İntegrasyonları tüm eleman boyunca $(-1, +1)$ aralığında normalize etmek için lokal koordinat sistemi kullanılır ve denklem sistemi genişletilir. Denk. (3.24)'ü aşağıdaki gibi kısaltmak mümkündür:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N (H_1 u_1 + H_2 u_2) = \sum_{j=1}^N (G_1 q_1 + G_2 q_2) \quad (3.25)$$

Burada,

$$H_{1,2} = \int_{S_j} \phi_{1,2} q^* \frac{\ell_j}{2} d\xi \quad (3.26)$$

ve

$$G_{1,2} = \int_{S_j} \phi_{1,2} u^* \frac{\ell_j}{2} d\xi \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda ' i ' düğümündeki potansiyel ve onun türevi alındığı zaman her bir ' j ' elemanına ilişkin dört integrasyon sabiti elde edilmiş olur.

3.2.2.İntegrasyon Sabitlerinin Hesaplanması

Önceki bölümde bahsedilen integrasyon sabitlerinin hesaplanmasında iki durum söz konusudur. Bunlardan birincisi :

➤ Uygulama noktası incelenen eleman üzerinde değilse;

Eğer integral denklemlerinin uygulandığı ' i ' düğüm noktası, integrasyonların yapıldığı ' j ' elemanı üzerinde değilse ($i \neq j$), aşağıdaki Gauss alan formülleri kullanılır.

$$H_1 = \frac{1}{8\pi} \ell_j \sum_{k=1}^M (\xi_k - 1) \frac{d}{r_k} w_k$$

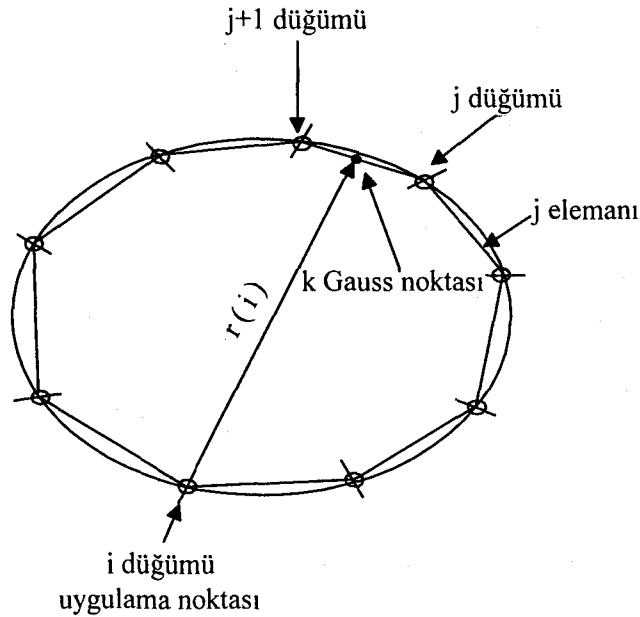
$$H_2 = -\frac{1}{8\pi} \ell_j \sum_{k=1}^M (\xi_k + 1) \frac{d}{r_k} w_k$$

(3.28)

$$G_1 = -\frac{1}{8\pi} \ell_j \sum_{k=1}^M (\xi_k - 1) \ln \frac{1}{r_k} w_k$$

$$G_2 = \frac{1}{8\pi} \ell_j \sum_{k=1}^M (\xi_k + 1) \ln \frac{1}{r_k} w_k$$

Buradaki değişkenler, Şekil 3.9'da görüldüğü gibidir.



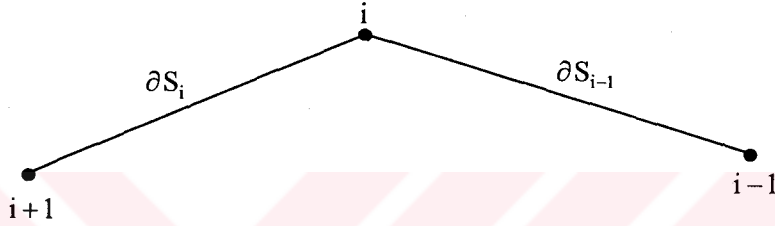
Şekil 3.9. Sayısal Gauss integrasyonu için notasyon

Denk. (3.28)'deki M sayısı integrasyonu alınan toplam Gauss noktalarının sayısını gösterir. Düzenli bir ayrıştırma için başlangıçta dört tane Gauss noktası seçilmiştir. Gauss integrasyon noktalarının sayısı duruma göre azaltılabilir veya arttırılabilir.

Uygulama noktası ' i 'nin ' j ' elemanına çok yakın olması durumunda önemli hatalar meydana gelebilir. Bu hataları ortadan kaldırmak için bazı özel sayısal ve analitik çözüm yöntemlerini kullanmak gerekir.

➤ Uygulama noktası eleman üzerinde ise;

Eğer ' i ' uygulama noktası ' j ' elemanının başlangıç veya son noktasında ise, analitik bir integrasyon kullanmak gerekir. Bu durum Şekil 3.10'da görüldüğü gibidir :



Şekil 3.10. Düğüm içeren elemanlar için integrasyon

Burada $H_{1,2}(i,i)$ ve $H_{1,2}(i,i-1)$ 'in hesaplanması birbirinden farklı yollarla yapılır. İlk olarak $H_{1,2}(i,i)$ hesaplanacak olursa,

$$H_{1,2}(i,i) = \int_{\partial S_i} \phi_{1,2} q^*(\xi) d\xi \quad (3.29)$$

ve bu durumda q^* ,

$$q^*(\xi) = -\frac{1}{2\pi r(\xi)} \frac{\partial r(\xi)}{\partial n(\xi)} \quad (3.30)$$

olur. Daha sonra integral aşağıdaki gibi alınır,

$$H_{1,2}(i,i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+2\varepsilon/\ell_i}^1 \phi_{1,2} \left(-\frac{1}{2\pi r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\ell_i}{2} d\xi \quad (3.31)$$

yazılır. Burada r ve n , integrasyon aralığında birbirlerine daima dik oldukları için,

$$H_{1,2}(i,i) = A_{1,2}(i,i-1) = 0 \quad (3.32)$$

olur. B sabitlerinin hesaplanması da aşağıdaki gibidir;

$$G_1(i,i) = \int_{\partial S_i} \phi_1(\xi) u^*(\xi) \frac{\ell_i}{2} d\xi = - \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{1}{2} (\xi-1) \frac{\ell_i}{2} d\xi \quad (3.33)$$

Bu integralde r ve ξ olmak üzere iki değişken vardır. İntegrasyonu basitleştirmek için aşağıdaki gibi yeni bir η değişkeni kullanılır.

$\eta = 0$ i düğümünde,

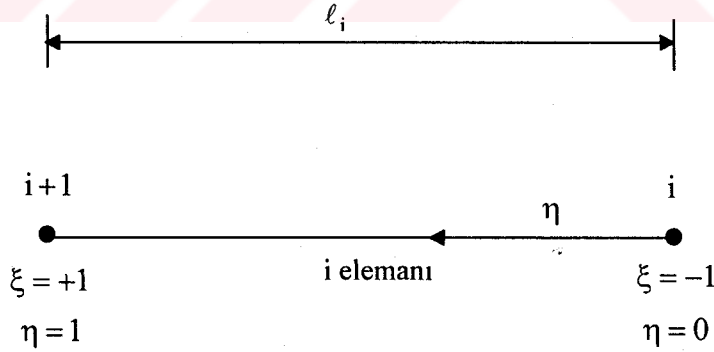
$\eta = 1$ $i+1$ düğümünde.

Böylece Şekil 3.11' e göre,

$$\xi = 2\eta - 1: \quad d\xi = 2d\eta$$

$$\phi_1 = 1 - \eta; \quad r = \ell_i \eta$$

yazılır.



Şekil 3.11. İntegrasyon değişkeni η 'nın tanımlanması

Yapılan değişken değiştirme işlemi, $B_1(i,i)$ ifadesi için yeniden yazılırsa,

$$G_1(i,i) = \int_{\partial S_i} \frac{1}{2\pi} (1-\eta) \ln\left(\frac{1}{\ell_i \eta}\right) \ell_i d\xi \quad (3.34)$$

elde edilir. Bu integral zayıf bir tekillik içerir ve aşağıdaki gibi elde edilebilir;

$$G_1(i,i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{2\pi} (1-\eta) \ln\left(\frac{1}{\ell_i \eta}\right) \ell_i d\eta = \frac{\ell_i}{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\ell_i} \right) \quad (3.35)$$

benzer şekilde,

$$G_2(i,i) = \int_{\partial S_i} \phi_2(\xi) q^*(\xi) \frac{\ell_i}{2} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{1}{2} (\xi+1) \frac{\ell_i}{2} d\xi \quad (3.36)$$

ve η değişkeni kullanılarak ($\phi_2 = \eta$),

$$G_2(i,i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{2\pi} \eta \ln\left(\frac{1}{\ell_i \eta}\right) \ell_i d\eta = \frac{\ell_i}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\ell_i} \right) \quad (3.37)$$

elde edilir ve $i-1$ elemanı için yazılacak integrasyonlar, i elemanı için elde edilen ifadeler kullanılarak kolayca bulunabilir;

$$G_1(i,i-1) = \int_{i-1}^i \phi_1 u^* dS = \int_i^{i-1} \phi_1 u^* dr = B_2(i,i) = \frac{\ell_{i-1}}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\ell_{i-1}} \right) \quad (3.38)$$

$$G_2(i,i-1) = \int_{i-1}^i \phi_2 u^* dS = \int_i^{i-1} \phi_2 u^* dr = B_1(i,i) = \frac{\ell_{i-1}}{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\ell_{i-1}} \right) \quad (3.39)$$

3.2.3. c_i Katsayısının Hesaplanması

Sabit elemanlı durumda c_i katsayısı bilinen bir değerdir ve düzgün bir sınır için $\frac{1}{2}$ olarak alınır. Eğer ' i ' noktasındaki sınır düzgün değilse $c_i = \frac{1}{2}$ değeri geçerli değildir ve c_i değerinin

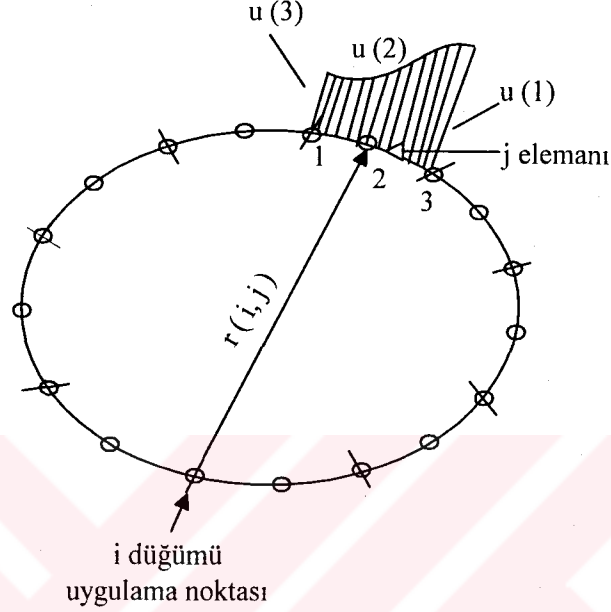
bulunması için, $c_i = \frac{\theta}{2\pi}$ denkleminin uygulanması gerekir.

Diğer bir yöntem ise, H matrisinin köşegen terimlerinin hesaplanmasıdır.

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^N H_{ij} \quad j \neq i \quad (3.40)$$

3.3.Parabolik Eleman

Rastgele seçilmiş geometriler için parabolik elemanların kullanılması daha uygundur (Paris ve Canas, 1997). Bu eleman tipinde potansiyel ve onun normal türevinin eleman boyunca parabolik bir değişime sahip olduğu varsayılır. Parabolik elemanda düğümler, eleman boyunca biri elemanın orta noktasına ve diğer ikisi de elemanın uç noktalarına yerleştirilir. Bu Şekil 3.12' de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.12. Parabolik elemanın gösterilişi

Yukarıda verilen şekle göre, u ve q değerleri ξ homojen koordinatlarında interpolasyon fonksiyonlarına bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

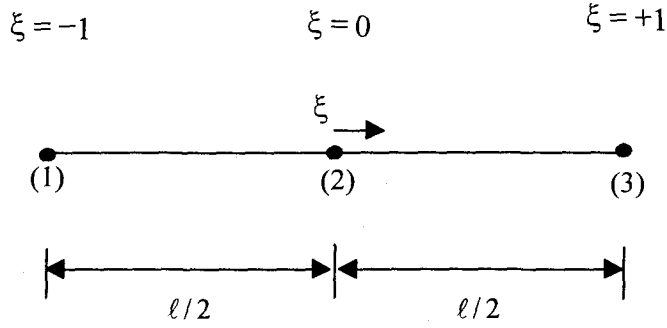
Burada interpolasyon fonksiyonları ise,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\phi_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad (3.46)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$$

olarak yazılır. Şekil 3.13’de parabolik eleman için bir referans sistemi görülmektedir:



Şekil 3.13. Referans sistemi

Bu referans sistem için değişken değerleri ise aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.1. Verilen referans sistem için değişken değerleri

Düğüm	ξ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
1	-1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	+1	0	0	1

Parabolik eleman boyunca alınan integraller, lineer eleman için hesaplanan integrallere benzer. Ancak burada üç bilinmeyen düğüm değeri vardır. H matrisinin katsayıları için integraller göz önüne alınırsa,

$$\int_{\partial S_j} u q^* dS = \int_{\partial S_j} [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] q^* dS \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [h_{ij}^1 \ h_{ij}^2 \ h_{ij}^3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

yazılır. Burada etki integralleri şu şekilde yazılabilir:

$$h_{ij}^1 = \int_{\partial S_j} \phi_1 q^* dS$$

$$h_{ij}^2 = \int_{\partial S_j} \phi_2 q^* dS \quad (3.48)$$

$$h_{ij}^3 = \int_{\partial S_j} \phi_3 q^* dS$$

ϕ_i fonksiyonları ξ ' ye bağılı olarak ifade edildiğinden dolayı, denk. (3.48)'deki terimlerin hesaplanabilmesi için bir Jacobian kullanımı gerekir, fakat integraller S 'nin fonksiyonları olduğu için integral sınırı değişmez. $|G|$ bir Jacobian olmak üzere, parabolik bir eleman için dönüşüm yapılırsa,

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi = |G| d\xi \quad (3.49)$$

elde edilir. Buradan,

$$h_{ij}^k = \int_{\partial S_j} \phi_k q^* dS = \int_{-1}^{+1} \phi_k q^* |G| d\xi \quad (3.50)$$

olur. Bu formülü analitik olarak integre etmek çok zordur ve bütün durumlarda sayısal integrasyon kullanmak gerekir. Denk. (3.49)'daki $|G|$ Jacobianının değerlerini hesaplamak için ξ ' ye bağılı olarak x ve y koordinatlarının değişiminin bilinmesi gerekir. Elemanın geometrik şeklinin tanımlanması, u ve q değişkenlerini tanımlamak için kullanılan parabolik interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak yapılabilir :

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \quad (3.51)$$

$$y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3$$

Burada indisler düğüm numarasını gösterir. Bu genellikle sonlu elemanlar analizinde kullanılan eşparametrel elemanlara benzer bir kavramdır (Yıldırım, 1999).

4. İNDİREKT SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Sınır elemanları yöntemi, elektrostatik alan çözümleri için kullanılan yaygın bir tekniktir. Elektrik potansiyel dağılımı, Poisson veya Laplace denkleminin çözümüyle bulunur (Bachtold ve Korvink, 1997). Direkt yöntem, bilinmeyenler için bir integral denklem sistemini direkt olarak çözerken, indirekt yöntem bilinmeyen bir eşdeğer kaynak ile çözüme gider. İndirekt sınır elemanları yönteminde, sınır üzerindeki herhangi bir nokta için, kaynağın etkisi ve konumu ile ilişkili olan bir Green fonksiyonu altında sınır şartları tanımlanarak alanı destekleyen bir eşdeğer kaynak bulunur. Bu eşdeğer kaynak bulunduktan sonra sınır üzerindeki bilinmeyen potansiyel ve potansiyelin normal türevleri hesaplanabilir. Green fonksiyonunun kullanımı, bir sonlu eleman ağının veya sonlu farklar ızgaralarının kullanımı ihtiyacını ortadan kaldırır.

4.1. Potansiyel Teorisi

Bu bölümde, skaler elektrostatik alanlar için bazı temel denklemler verilmiştir. Bazı kaynaklar nedeniyle elektrostatik alanlar için skaler potansiyelin çözümüne ihtiyaç duyulur. Skaler elektrostatik alanı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\vec{E} = -\nabla u \quad (4.1)$$

İki boyutlu alanlarda, uzaydaki bir nokta kaynak için elektrik alanı sadece yarıçap yönünde bir bileşene sahiptir:

$$\vec{E} = \frac{-q}{2\pi K r'} \hat{r}' = -\frac{\partial u}{\partial r'} \quad (4.2)$$

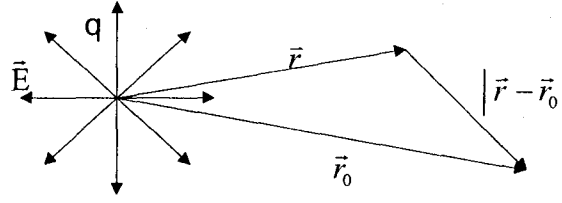
Şekil 4.1'de gösterildiği gibi, referans geriliminin ve $\vec{r}$ incelenen noktasının lokalize edilmesi için $\vec{r}_0$ üzerinde bir nokta seçerek $\vec{r}$ ve $\vec{r}_0$ vektörlerinin uçları birleştirilir. Buradan,

$$u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0) = \frac{-q}{2\pi K} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'} = \frac{-q}{2\pi K} (\ln|\vec{r}| - \ln|\vec{r}_0|) \quad (4.3)$$

eşitliği sağlanır. Referans potansiyeli, isteğe bağlı olarak $u(\vec{r}_0) = 0$ seçilebilir. Bu durumda,

$$u(\vec{r}) = \frac{-q}{2\pi K} (\ln|\vec{r}| - \ln|\vec{r}_0|) \quad (4.4)$$

elde edilir.



Şekil 4.1. Noktasal yükler için notasyon

Eğer ortam lineer ve izotropik (eş yönlü) ise veya birden çok kaynak var ise, süper pozisyon teoreminden,

$$u(\vec{r}) = - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{2\pi K} \left(\ln|\vec{r}_i| - \ln|\vec{r}_0| \right) \quad (4.5)$$

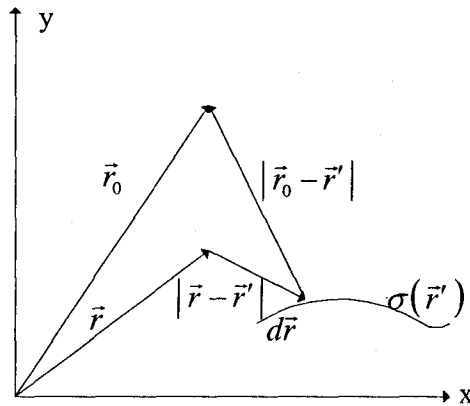
elde edilir. Buradaki $\vec{r}_i$, $\vec{r}$ konum vektörü ile q_i yükünü birleştiren vektördür. Sürekli bir kaynak yoğunluk dağılımı için Şekil 2.2'dekinden daha genel bir notasyon kullanılır. Bu durumda potansiyel;

$$u(\vec{r}) = - \frac{1}{2\pi K} \int_{\partial B} \sigma(\vec{r}') \left[\ln|\vec{r} - \vec{r}'| - \ln|\vec{r}_0 - \vec{r}'| \right] d\vec{r}' \quad (4.6)$$

Eğer $\vec{r}_0$ kaynaklar arasındaki mesafeden çok daha büyük seçilirse, $|\vec{r}_0 - \vec{r}'|$ mesafesi bir sabite yaklaşır. Denklem (4.6) tekrar yazılarak $\ln|\vec{r}_0 - \vec{r}'|$ yerine $\ln(k)$ yazılırsa,

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi K} \int_{\partial B} \ln \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.7)$$

elde edilir.



Şekil 4.2. Keyfi olarak seçilmiş bir yük konfigürasyonu için notasyon

Notasyonu kolaylaştırmak için $K = 1/2\pi$ yazılması durumunda,

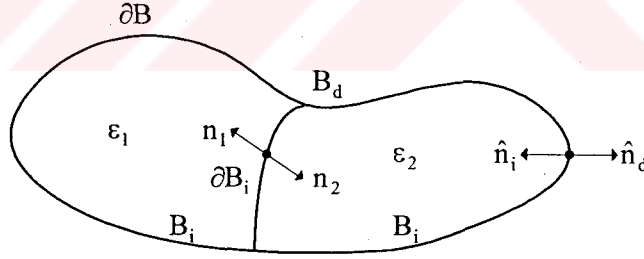
$$u(\vec{r}) = \int_{\partial B} \ln \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.8)$$

olur.

$\ln(k/|\vec{r} - \vec{r}'|)$ terimi iki boyutlu problemler için serbest uzay Green fonksiyonudur (Yıldır, 1987; Krauter ve diğ, 1996; Wagner ve diğ, 1993; Lopez, 1997; Raphael Reference Manual, 1998). Potansiyel, denk. (4.8)'de verilen kaynak konfigrasyonundan bölgedeki herhangi bir yer için hesaplanabilir. Bununla birlikte pratik problemlerin çoğunda kaynak bilinmez, ancak potansiyel ve normal türevi sınırlar üzerinde açıkça belirtilir. Bu durumda alanı destekleyen bir eşdeğer kaynak bulunmaya çalışılır. Bu, sınır şartlarının fiziksel olarak arakesit üzerindeki kaynak dağılımına eşit olduğu anlamına gelir. Herhangi bir yerde hesaplanabilen potansiyelden bir tek kat kaynağı ile sınır şartları, formülasyondaki yerlerine konularak Laplace denkleminin çözümü yapılabilir.

4.2. Tek Kat Formülasyonunun Türetilmesi

Bu bölümde rastgele seçilen bir geometri için tek kat formülasyonu (Klimpke, 1983; Heck, 2002) gösterilecektir. İncelenecek geometri Şekil 4.3'te gösterilmiştir. Buradaki $\hat{n}_i$ ve $\hat{n}_d$ sırasıyla iç ve dış normalleri, B_i ve B_d iç ve dış bölgeyi, ∂B ise sınırı temsil etmektedir.



Şekil 4.3. Konuda incelenen geometri düzeni

$\hat{n}_1$ ve $\hat{n}_2$ iç nokta normalleri, ∂B_i ise arakesit sınırıdır. Green fonksiyonunun türevi için kullanılan notasyon şu şekildedir:

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_i} = H_i(\vec{r}, \vec{r}') \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_i} = q_i(\vec{r}, \vec{r}')$$

Potansiyelin normale göre türevi,

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_i} = q_i \text{ (Bölge içinde); } \quad \frac{\partial u_d}{\partial n_d} = q_d \text{ (Bölge dışında)} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır.

Her bir harmonik fonksiyon bir potansiyel ifadesi olarak gösterildiği gibi, her bir potansiyel ifadesi de aynı zamanda bir harmonik fonksiyondur. Potansiyel teorisi aynı zamanda bir Laplace denkleminin çözümünü içerir. Laplace denkleminde elde edilen tek kat formülasyonunun türevi Green teoremi yaklaşımını içerir:

$$\int_B \left(u \nabla^2 G - G \nabla^2 u \right) ds = \int_{\partial B} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dr' \quad (4.11)$$

Potansiyel $u(\vec{r})$ ve serbest uzay Green fonksiyonu için,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \ln \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.12)$$

yazılabilir. Serbest uzay Green fonksiyonu fiziksel düşünceden türetilmiştir. Fakat sadece radyal bir bileşene sahip bir çözümle de potansiyel denkleminin çözümü yapılabilir (Klimpke, 1983).

$$\nabla^2 \ln \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \quad (\vec{r} \neq \vec{r}') \text{ için} \quad (4.13)$$

ve böylece,

$$\int_B \int_B \nabla^2 \ln \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds = \int_B \int_B u \nabla^2 G ds = 0 \quad (4.14)$$

yazılır. Bir noktadaki herhangi bir u düzenli fonksiyonu Rieman integralinin değerini etkilemez (Klimpke 1983). Eğer u fonksiyonu düzenli ise,

$$\nabla^2 u = 0 \quad (4.15)$$

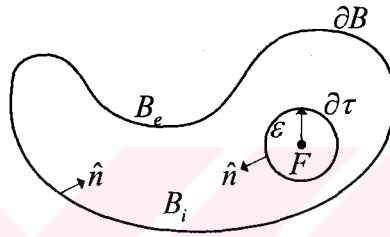
ve

$$- \int_B \int_B G \nabla^2 u ds = 0 \quad (4.16)$$

olur. Denk. (4.11)' in sol tarafına, denk. (4.14) ve denk.(4.16)'nın yerine yazılmasıyla bu kısım sıfıra indirgenmiş olur. Ayrıca denk. (4.11)'in sağ tarafındaki tekiliğin de ortadan kaldırılması gerekir.

B_i bölgesi üzerindeki tekil bir $\vec{r}$ noktasında lokalize edilmiş ve yarıçapı ε olan bir çembere τ dersek (Şekil 4.4) den. (4.11) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B} [u(\vec{r}') G_i(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') q_i(\vec{r}')] dr' \\ & + \int_{\partial \tau} [u(\vec{r}') G_i(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') q_i(\vec{r}')] dr' = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$



Şekil 4.4. Tekil nokta içeren bölge

$\partial \tau$ sınırı üzerindeki $\hat{n}$, sadece radyal bir bileşene sahiptir ve $|\vec{r} - \vec{r}'| = \varepsilon$ eşitliği vardır. Böylece,

$$H_i(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\partial \ln(k/|\vec{r} - \vec{r}'|)}{\partial n'_i} = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{\varepsilon} \quad (4.18)$$

yazılır. Bu sonuçlar denk. (4.17)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B} [u(\vec{r}') H_i(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') q_i(\vec{r}')] dr' \\ & + \int_{\partial \tau} \left[-\frac{u(\vec{r}')}{\varepsilon} - \ln \frac{k}{\varepsilon} q_i(\vec{r}') \right] dr' = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

olur. Denk. (4.19)'un son terimi, yarıçapı ε olan bir çember için yazılmıştır. Buradaki dr' yerine $\varepsilon d\theta$ yazılarak,

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\tau} \left[-\frac{u(\tilde{r}')}{\varepsilon} - \ln \frac{k}{\varepsilon} q_i(\tilde{r}') \right] \varepsilon d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-u(\tilde{r}') - \varepsilon \ln \varepsilon q_i(\tilde{r}') \right] d\theta
\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Yarıçap $\varepsilon \rightarrow 0$ götürülürse bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left[-u(\tilde{r}') - \varepsilon \ln \varepsilon q_i(\tilde{r}') \right] d\theta = -2\pi u(\tilde{r}) \tag{4.21}$$

olur. Burada $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğu için $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$ olmuştur. Denk. (4.19) böylece aşağıdaki gibi indirgenmiştir:

$$\int_{\partial B} \left[u(\tilde{r}') H_i(\tilde{r}, \tilde{r}') - G(\tilde{r}, \tilde{r}') q_i(\tilde{r}') \right] d\tilde{r}' = -2\pi \theta(\tilde{r}) \tag{4.22}$$

Eğer incelenen $\tilde{r}$ noktası B_d bölgesi üzerinde bulunursa, G ve u , B_d bölgesinin her yerinde harmoniktir. Böylece denk. (4.11) aşağıdaki gibi indirgenir:

$$\int_{\partial B} \left[u(\tilde{r}') H_i(\tilde{r}, \tilde{r}') - G(\tilde{r}, \tilde{r}') q_i(\tilde{r}') \right] d\tilde{r}' = 0 \tag{4.23}$$

Eğer $\tilde{r}$, ∂B sınırı üzerinde olursa denk. (4.11) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_{\partial B} \left[u(\tilde{r}') H_i(\tilde{r}, \tilde{r}') - G(\tilde{r}, \tilde{r}') q_i(\tilde{r}') \right] d\tilde{r}' = -\pi \theta(\tilde{r}) \tag{4.24}$$

Burada $\tilde{r}$ noktası yarıçapı ε olan bir τ çemberi ile çevrelenmiştir. Çemberin B_i bölgesi içindeki kısmı τ_i , B_d bölgesi içerisindeki kısmı ise τ_d ile gösterilmiş ve yarıçap sıfıra götürülmüştür ($\varepsilon \rightarrow 0$). Bu durum denk. (4.20)'deki duruma benzerdir ve integral sadece B_i bölgesindeki çemberin τ_i kısmı için alınmıştır. Benzer sonuçlar düzenli bir dış harmonik fonksiyon için de tanımlanabilir.

Buraya kadar olan kısım özetlenirse,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \left[u(\tilde{r}') H_i(\tilde{r}, \tilde{r}') - G(\tilde{r}, \tilde{r}') q_i(\tilde{r}') \right] d\tilde{r}' = \begin{cases} -u_i & \tilde{r} \in B_i \\ 0 & \tilde{r} \in B_d \end{cases}$$

(4.25)

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \left[u_d(\vec{r}') H_i(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \left(\frac{\partial u_d(\vec{r}')}{\partial n_i} \right) \right] d\vec{r}' = \begin{cases} -u_i & \vec{r} \in B_i \\ 0 & \vec{r} \in B_d \end{cases}$$

olur.

Denk. (4.25)'deki iç ve dış bölge integralleri toplanarak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \left[(u_i(\vec{r}') - u_d(\vec{r}')) H_i(\vec{r}, \vec{r}') - \left(q_i(\vec{r}') - \frac{\partial u_d(\vec{r}')}{\partial n_i} \right) G(\vec{r}, \vec{r}') \right] d\vec{r}' \\ & = \begin{cases} -u_i & \vec{r} \in B_i \\ -u_d & \vec{r} \in B_d \end{cases} \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. İç bölge problemleri için $u_d(\vec{r})$ 'nin seçimi keyfidir. Benzer şekilde dış bölge problemlerinde de $u_i(\vec{r})$ 'nin seçimi isteğe bağlıdır. Örneğin, sınır şartları belirtilmiş kapalı bir eğri için, iç bölgedeki çözüm dış bölgedeki potansiyel değerinden bağımsızdır. Aynı şekilde dış bölgedeki çözüm de iç bölgedeki çözümden bağımsızdır.

Eş zamanlı iç ve dış sınır değer problemleri için $u_i(\vec{r}) = u_d(\vec{r})$ eşitliği vardır. Bu durumda denk. (4.26) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} (q_d(\vec{r}') - q_i(\vec{r}')) G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' = u(\vec{r}) \quad \vec{r} \in B_i, B_d, \partial B \quad (4.27)$$

Normal gradyanttaki yük,

$$\sigma(\vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} [q_d(\vec{r}') - q_i(\vec{r}')] \quad (4.28)$$

ve denk. (4.28), denk. (4.27)'de yerine yazılarak,

$$\int_{\partial B} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' = u(\vec{r}) \quad \vec{r} \in B_i, B_d, \partial B \quad (4.29)$$

potansiyel ifadesi elde edilir (Klimpke, 1983; Wagner, 1993 ve diğ; Ye ve diğ, 2001). Potansiyel ifadesi elde edildikten sonra diğer fonksiyonların çözümü kolaylıkla yapılabilir (Lahiri ve Chakravorti, 2002). Buradaki “ σ ” yüzey yük yoğunluğu olarak bilinen eşdeğer kaynaktır (Yıldır, 1987; Krauter ve diğ, 1996; Stella, 1997). Bu sonuç denk. (4.8) ile aynıdır. Bu denklem, zayıf bir tekillikçe sahip birinci tip Fredholm denklemidir.

4.3. İç Bölge Problemleri İçin Dirichlet Sınırları

Dirichlet sınırları için aşağıda verilen potansiyel denkleminin (Krauter ve diğ, 1996; Stella, 1997) çözümünü bulmak gerekir:

$$\int_{\partial B} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' = u(\vec{r}) \quad \vec{r} \in B_i \quad (4.30)$$

Buradaki $G(\vec{r}, \vec{r}')$ ifadesi, birinci tip Fredholm integralinin çekirdeğidir.

4.4. Dış Bölge İçin Dirichlet Problemi

Dış bölge problemleri için benzersizlik ispatları, iç bölge problemleri ile hemen hemen aynıdır. Çok boyutlu problemlerin aksine $\vec{r} \rightarrow \infty$ için Green fonksiyonunun sıfıra yaklaştığı yerde iki boyutlu dış potansiyel problemleri logaritmik bir davranışa sahiptirler. Yani $\vec{r} \rightarrow \infty$ olduğu için, $\ln|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$ olur. Bununla birlikte $\vec{r} \rightarrow \infty$ olduğu için $u \rightarrow c$ olur. Kabul edilebilir bir çözüm elde etmek için sınır ayrışımı:

$$u(\vec{r}) = \int_{\partial B} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' + c \quad \vec{r} \in B_d \quad (4.31)$$

yazılır. Buradaki “c” sabit bir elemandır (Yıldır, 1987). Ayrıca eğer toplam yük sonsuzda sıfıra eşit ise logaritmik potansiyel sonsuzda düzenlidir. Böylece $\vec{r} \rightarrow \infty$ için integral:

$$\int_{\partial B} \sigma(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \quad (4.32)$$

olur ve bu durumda,

$$\int_{\partial B} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada $\vec{r} \rightarrow \infty$ için $|\vec{r}|^{-1}$ dizisine sahiptir. Denk. (2.40)'dan $\vec{r} \rightarrow \infty$ için, $u(\vec{r}) \rightarrow |\vec{r}|^{-1} + c$ ve bu durumda $u(\vec{r}) = 0$ olur. Aynı yöntemle iç bölge problemleri de çözülebilir.

4.5. Neumann ve Karışık Problemler

Normal türevi sınır üzerinde belirtilen problemler için tek kat formülasyonu kullanılır:

$$u(\vec{r}) = \int_{\partial B} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.34)$$

Bu formülasyonu ayrıştırarak,

$$q_i(\vec{r}) = \int_{\partial B} H_i(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \vec{r} \in B_i \quad (4.35)$$

elde edilir ve $\vec{r}$ sınır üzerinde bulunduğu zaman $\pi u(\vec{r})$ kadar bir sıçrama süreksizliği görülür (Klimpke, 1983; Yıldır, 1987). Bu durum denk. (4.22) ve denk. (4.26) arasında görüldüğü gibidir. Böylece sınır üzerindeki normal gradyant,

$$q_i(\vec{r}) = \int_{\partial B} H_i(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' + \pi u(\vec{r}) \quad \vec{r} \in \partial B \quad (4.36)$$

elde edilir. Denk. (4.35) ve denk. (4.36) iç bölge için yazılmalarına rağmen, iç normal ile dış normal yer değiştirilmek suretiyle dış bölge formülasyonu da yazılabilir.

İç bölge problemlerinde, formülasyona denk. (4.36)'daki gibi bir sabitin ilave edilmesi nadiren görülür. Bu daha çok Laplace denklemlerinin direkt çözümünde kullanılır. Ayrıca, bir çözümün elde edilebilmesi için:

$$\int_{\partial B} u_i(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \quad (4.37)$$

şartının sağlanması gerekir. Bu, kapalı bir alanda toplam giriş akısının toplam çıkış akısına eşit olduğu, basit bir Gauss şartıdır.

Dış bölge problemleri için sonsuzdaki şartlar, Dirichlet formülasyonuna göre oldukça farklıdır. Neumann değerlerinin tanımlandığı ∂B_1 yayını içine alan bir çember ∂B_2 olsun. Bu durumda çevreleyen akı yoğunluğu,

$$\int_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int_{\partial B_2} \frac{\partial u}{\partial r} r d\theta = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_2} \frac{\partial u}{\partial r} r d\theta \quad (4.38)$$

olur. Denk. (4.38)'deki son integral genelde yok olmadığı için, Neumann problemlerindeki akı yoğunluğu da sonsuzda sıfır olmaz ve belli bir değere sahiptir.

4. 6. Gradyant Hesabı

Kısmi diferansiyel denklem formülasyonunun en önemli avantajlarından biri, potansiyel gradyantının direkt olarak hesaplanabilmesidir (Klimpke, 1987; Stella, 1997; Heck, 2002). Örneğin, sonlu farklar yönteminde potansiyel gradyantının hesaplanması potansiyel hesabından oldukça farklı biçimde yapılır. Hesaplamalar farklı düğüm değerleri üzerinde yapılır ve bu da sonucu verimsiz kılar. Sonlu elemanlar yönteminde ise gradyant, şekil fonksiyonları ayrıştırılarak bulunur. Bu yöntemler ile hesaplama yapılırken bazı problemlerle karşılaşılır. Tek kat formülasyonunda ise öncelikle eşdeğer yükler tanımlanır ve daha sonra herhangi bir yerdeki potansiyel gradyanti kolay ve doğru bir şekilde hesaplanabilir. Çözüm, integral içerisindeki Green fonksiyonunu ayrıştırmak suretiyle gerçekleştirilir. Kartezyen koordinatlardaki potansiyel gradyanti;

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} \quad (4.39)$$

yazılır. Burada,

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial y} = \int_{\partial B} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial y} \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.40)$$

eşitliği vardır ve $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ yazılarak,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \ln k - \ln \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right]^{1/2} \quad (4.41)$$

ve

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x} = \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \quad (4.42)$$

Denk. (4.40)'dan,

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial x} = \int_{\partial B} \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.43)$$

yazılır.

Benzer olarak denk. (4.41)'den,

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial y} = \int_{\partial B} \frac{(y' - y)}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \sigma(\vec{r}') dr' \quad (4.44)$$

yazılır. Denk. (4.35) ve denk. (4.36)'de görüldüğü gibi $\vec{r} = \vec{r}'$ olması durumunda potansiyel gradyanında bir sıçrama süreksizliği görülür. Bu durumda denk. (4.43) ve denk. (4.44) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial x} = \int_{\partial B} \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \sigma(\vec{r}') dr' + \pi \sigma(\vec{r}) x'(\vec{r}) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial y} = \int_{\partial B} \frac{(y' - y)}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \sigma(\vec{r}') dr' + \pi \sigma(\vec{r}) y'(\vec{r}) \quad (4.46)$$

Buradaki x' ve y' , ∂B sınırı üzerindeki $\vec{r}$ normalinin kosinüsüdür. İncelenen noktanın ∂B sınırı üzerinde olduğu durumdaki bu kosinüs değeri bir bilgisayar programı yardımıyla bulunabilir. Sınır üzerinde olmayan noktalar için integral düzenlidir.

4.7. Dirichlet Problemlerinde Operatör Özellikleri

Dirichlet problemlerinin bilinmeyenleri için tanımlanan değerler sınır üzerinde verilmiştir ve problemin çözümü için birinci tip Fredholm integrali kullanılmıştır. Eşdeğer kaynak için,

$$u(\vec{r}) = \int_{\partial B} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dr' \quad (4.47)$$

denklemini yazılır.

4.8. Neumann Problemlerinde Operatör Özellikleri

Neumann problemlerinin çözümü için ikinci tip Fredholm integralinin çözümüne ihtiyaç duyulur. Bu denklem,

$$q_i(\vec{r}) = \int_{\partial B} H_i(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') dr' + \pi u(\vec{r}) \quad (4.48)$$

şeklinde yazılır ve bu durumda operatör genelde öz-eşlenik değildir:

$$G'(\vec{r}, \vec{r}') \neq H(\vec{r}, \vec{r}') \quad (4.49)$$

4.9. Tek Kat Kaynakları ile Çoklu-Ortam Formülasyonları

Bir bölge heterojen olsa bile sınırları bölmelendirilmemiş farklı ortamlar üzerinde ek bir integrasyon ile integral denklem yöntemleri uygulanabilir. İncelenen heterojen bölge, sınırları üzerinde bir eşdeğer yük bulunan başka bir heterojen bölgeyle yer değiştirilir. Dielektriklerin potansiyele olan etkileri, dielektrik sınırlar üzerine yerleştirilen hayali yükler ile hesaplanabilir (Klimpke, 1983).

Tam olarak homojen olmayan bir bölge için integral yöntemleri, ek bir kaynak integrasyonu ile uygulanabilir. Homojen olmayan ortam, yapay bir yüzey yük yoğunluğu içeren homojen ortamlarla yer değiştirilebilir. Arakesit elemanları, her yeri homojen olmayan bölge üzerinde lokalize edilmek zorundadır.

Arakesit şartları uygulanarak hesaplanırsa,

$$\varepsilon_1 q_1(\vec{r})|_{\partial B_1} + \varepsilon_2 q_2(\vec{r})|_{\partial B_1} = 0 \quad (4.50)$$

olur. Potansiyelin sürekliliği uygulanarak,

$$u_1(\vec{r})|_{\partial B_1} = u_2(\vec{r})|_{\partial B_1} \quad (4.51)$$

yazılabilir. Bu eşitliklerden yararlanarak;

$$\varepsilon_1 q_1(\vec{r}) = \varepsilon_1 \int_{\partial B \cup \partial B_1} \sigma(\vec{r}') H_1(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' + \varepsilon_1 \pi \sigma(\vec{r}) \quad (4.52)$$

$$\varepsilon_2 q_2(\vec{r}) = \varepsilon_2 \int_{\partial B \cup \partial B_1} \sigma(\vec{r}') H_2(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' + \varepsilon_2 \pi \sigma(\vec{r}) \quad (4.53)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial n_2} \quad (4.54)$$

yazılır.

Bu sonuçlardan yararlanarak denk. (4.50) aşağıdaki gibi yazılır:

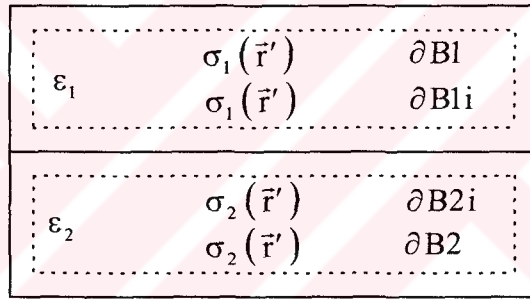
$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_{\partial B \cup \partial B_1} \sigma(\vec{r}') H_1(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sigma(\vec{r}) = 0 \quad (4.55)$$

Böylece arakesit üzerindeki eşdeğer yükü saptamak için ikinci tip Fredholm integrali elde edilmiş olur.

4.10. İkili Tek Kat Kaynakları ile Çoklu-Ortam Formülasyonu

Bu bölümde arakesit üzerinde iki yük kaynağı bulunması durumu gösterilmiştir. Bu yükler Şekil 4.5’de gösterilen birinci bölgeye ilişkin σ_1 ve ikinci bölgeye ilişkin σ_2 yükleridir. Bu yöntem, farklı yük yoğunluklarına sahip iki bölge için temel integral denklemlerinin yazılmasına imkan sağlar. Bu yöntemin fiziksel temelleri, tek kat formülasyonundan çok farklıdır. Tek kat formülasyonunda, heterojen bölge ile üzerinde hayali bir yük olduğu varsayılan homojen bölge yer değiştirilmiştir. İkili tek kat formülasyonunda (Heck, 2002; Tausch, 2002) ise temel esas, sınır şartları değiştirilebildiği için bir eşdeğer kaynak ile alt bölgelerin farklı ortama sahip birer bölge olarak düşünülmesinden ibarettir.

Bir alt bölgedeki potansiyeli tanımlamak için sınır şartlarının bilinmesi gerekir. Alt bölgenin arakesiti üzerindeki sınır şartları bilinmediği için problem ilk bakışta tanımlanamaz gibi görülebilir. Bu yüzden bu tip problemlerin tanımlanması biraz daha güçtür. Bu tip problemlerde potansiyel bölgeden bölgeye süreklidir ve potansiyel gradyanları ortam özelliklerindeki farklılıklarla ifade edilir. Bu arakesit şartları, Dirichlet ve Neumann sınırları için bir eşdeğer kaynak ile yer değiştirilir.



Şekil 4.5. Heterojen Bir Bölge için İkili Yük Katları

Bununla birlikte basit tek kat formülasyonunun tersine potansiyelin sürekliliğinin yanında gradyanın süreksizliği de uygulanmalıdır. Arakesit üzerindeki potansiyelin sürekliliği,

$$\int_{\partial B1 \cup \partial B1i} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_1(\vec{r}') d\vec{r}' - \int_{\partial B2 \cup \partial B2i} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_2(\vec{r}') d\vec{r}' = 0 \quad (4.56)$$

olur. Normal gradyanın süreksizliği ise,

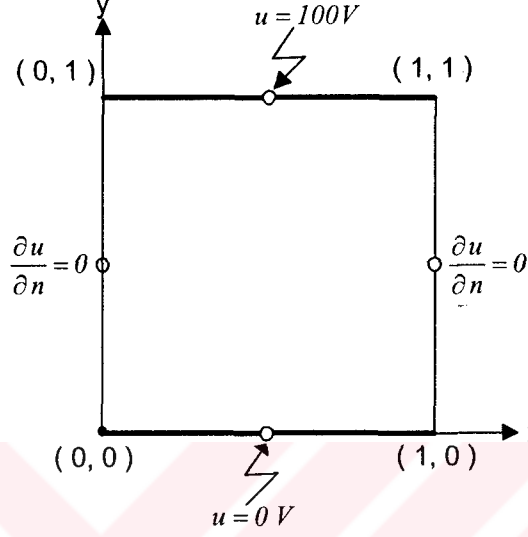
$$\epsilon_1 \int_{\partial B1 \cup \partial B1i} H_1(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_1(\vec{r}') d\vec{r}' + \epsilon_1 \pi \sigma_1(\vec{r}) + \epsilon_2 \int_{\partial B2 \cup \partial B2i} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_2(\vec{r}') d\vec{r}' = 0 \quad (4.57)$$

şeklinde ifade edilir.

5. ÖRNEK UYGULAMA

5.1. Düzlemsel Elektrot Sistemi

Bu bölümde basit bir düzlemsel elektrot sistemi incelenmiştir. Problemin çözümü sabit eleman ile yapılmıştır. İncelenecek geometri ve sınır şartları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:



Şekil 5.1. Düzlemsel elektrot sistemi ve sınır şartları

Dirichlet sınırı için denk. (4.47) tekrar yazılarak;

$$\int_{\partial B} G(\vec{r} - \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\vec{r}' = u(\vec{r}) \quad (5.1)$$

olur. Buradaki eşdeğer yükün bulunabilmesi için G etki katsayılarının bilinmesi gerekir. Denk.(5.1)'deki $G(\vec{r}, \vec{r}')$ etki integralini hesaplamak için aşağıdaki formülasyon kullanılır :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \int_{\partial B} u(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (5.2)$$

Potansiyel $u(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin temel çözümüne u^* dersek;

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5.3)$$

ve sınır integralini hesaplamak amacıyla bir ∂B sınır parçası için:

$$dr' = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi \quad (5.4)$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü yapılabilir ve;

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \text{ ve } \frac{dy}{d\xi} = \frac{y_2 - y_1}{2} \quad (5.5)$$

yazılabilir. Burada, x ve y elemanın koordinatlarıdır. Denk. (5.5), denk. (5.4)'te yerine yazılırsa;

$$dr' = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} \cdot d\xi \quad (5.6)$$

elde edilir. Denk. (5.3) ve (5.6), denk. (5.2)'de yerine yazılırsa;

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \int_{\partial B} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr' \quad (5.7)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr' \quad (5.8)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \frac{l_j}{2} \int_{-1}^{+1} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi \quad (5.9)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{l_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (5.10)$$

ifadesi elde edilir.

Buradaki l_j eleman boyu, w_k ise ağırlık katsayılarıdır. Aynı işlemler $H(\vec{r}, \vec{r}')$ için de yazılabilir:

$$H(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \quad (5.11)$$

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus $\vec{r} = \vec{r}'$ olduğu durumda, incelenen nokta ile etkisi incelenen noktanın çakışması durumunda görülen tekil integrallerdir. Bu özel durum sabit eleman için analitik yolla aşağıdaki formülasyonla hesaplanabilir:

$$G(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{1}{\pi} |l_j| \left\{ \ln \left(\frac{1}{|l_j|} + 1 \right) \right\} \quad (5.12)$$

$$\text{Aynı şekilde } \vec{r} = \vec{r}' \text{ olması durumunda; } H(\vec{r}, \vec{r}) = - \sum_{\vec{r}'}^N H(\vec{r}, \vec{r}') \quad (5.13)$$

olur. Denk. (4.47) ve (5.2) matris şeklinde yazılırsa,

$$\begin{aligned} G\sigma &= u \\ H\sigma &= q \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} 0.269 & 0.053 & -0.006 & 0.053 \\ 0.053 & 0.2695 & 0.053 & -0.006 \\ -0.006 & 0.053 & 0.2695 & 0.053 \\ 0.053 & -0.006 & 0.053 & 0.2695 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 100 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} 0.500 & -0.176 & -0.147 & -0.176 \\ -0.176 & 0.500 & -0.176 & -0.147 \\ -0.147 & -0.176 & 0.500 & -0.176 \\ -0.176 & -0.147 & -0.176 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

denk. (5.16) ve denk. (5.18) düzenlenerek,

$$\begin{bmatrix} 0.269 & 0.053 & -0.006 & 0.053 \\ -0.176 & 0.500 & -0.176 & -0.147 \\ -0.006 & 0.053 & 0.269 & 0.053 \\ -0.176 & -0.147 & -0.176 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

elde edilir. Denk. (5.19) çözüldükten sonra,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 \\ \sigma_1 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46.1993 \\ 135.1842 \\ 316.5678 \\ 135.1842 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

ve

$$\begin{bmatrix} 0.500 & -0.176 & -0.147 & -0.176 \\ 0.053 & 0.269 & 0.053 & -0.006 \\ -0.147 & -0.176 & 0.500 & -0.176 \\ 0.053 & -0.006 & 0.053 & 0.269 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Denk. (5.21) çözüldükten sonra bilinmeyen u ve q değerleri,

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -117.4366 \\ 50.000 \\ 117.4366 \\ 50.000 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

olarak bulunur. Bu sonuçlar, $u_2 = u_4 = 50 \text{ V}$ ve $q_1 = -q_3 = -100 \text{ V}$ olan analitik sonuçlara oldukça yakındır. Sınırlar üzerindeki bilinmeyenler bulunduktan sonra, herhangi bir iç noktadaki bilinmeyen potansiyel ve potansiyelin normale göre türevleri iç nokta formülasyonu ile hesaplanabilir:

$$[G_{sj}] [\sigma_j] = u_i \quad (5.23)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0893 & 0.0893 & 0.0893 & 0.0893 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -46.1993 \\ 135.1842 \\ 316.5678 \\ 135.1842 \end{bmatrix} = u_i \quad (5.24)$$

$$u_i = 48.2878 \text{ V} \quad (5.25)$$

elde edilir. Örnekte incelenen iç noktada analitik sonuç 50 V olarak hesaplanmıştır. Bu değer indirekt yöntemle elde edilen sonuca çok yakındır.

6.BİLGİSAYAR PROGRAMI

Bu bölümde, sabit elemanlar kullanılarak elektrostatik potansiyel problemlerinin çözümü için MATLAB’da bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu bilgisayar programı, ISEY olarak isimlendirilmiştir.

Program, sonlu eleman programlarına göre daha az adım gerektirir. Sadece sınırdaki düğümlere ihtiyaç olduğundan bilinmeyenlerin sayısı da çok azdır. Şekil 6.1’de yöntemin uygulanış adımları gösterilmiştir. Sınır elemanları için sadece adımların sayısının azaltılması değil, aynı zamanda veri girişi de çok daha kolaydır. İç sonuçlar sadece istenen noktalarda hesaplanır ve sonlu elemanlardaki gibi bölgenin her tarafında hesaplanmaz.



Şekil 6.1. Bilgisayar programı için makro akış diyagramı

6.1. Ana Program ve Veri Yapısı

Sınır elemanları için makro akış diyagramı yukarıdaki şekilde gösterilmiştir. Ana program denklem sisteminin boyutlarını (veya sınır düğümlerini) tanımlar. Burada ilk olarak problem bölgesinin kaç tane elemana bölüneceği belirtilir ve daha sonra kullanılacak elemanların başlangıç ve son noktalarının x-y iki boyutlu koordinat sistemindeki değerleri ve hesaplanacak iç nokta sayısı ile koordinatları girilir.

```
clear
clc
% sınır elemanı sayısı
N=26;
% sınır elemanlarının koordinatları

x=[0.2 0.4 0.396 0.386 0.369 0.346 0.317 0.282 0.243 0.2 0.153
    0.103 0.052 0 0 0.026 0.051 0.076 0.1 0.121 0.141 0.158 0.173
    0.184 0.193 0.198 0.15 0.16 0.17 0.18 0.19 0.20 0.21 0.22 0.23
    0.24 0.25 ];
y=[0 0 0.052 0.103 0.153 0.2 0.243 0.282 0.317 0.346 0.369 0.386
    0.396 0.4 0.2 0.198 0.193 0.184 0.173 0.158 0.141 0.121 0.1
    0.076 0.051 0.026 0.15 0.16 0.17 0.18 0.19 0.20 0.21 0.22 0.23
    0.24 0.25 ];

% iç nokta sayısı
NI=11;
```

Bu veri girişinden sonra Gauss noktaları için apsiler ve katsayıları girilir.

```
% integrasyon noktaları

E=[-0.86113631,-0.33998104,0.33998104,0.86113631];
W=[0.347854845,0.65214515,0.65214515,0.34785485];
```

Bir sonraki adımda ise potansiyel sınır şartları belirtilir.

```
% sınır şartları
for i=1:N+NI
    KOD(i)=0;
end

% Potansiyel sınır şartlarının tanımlanması
KOD(2)=1; V(2)=0;
KOD(3)=1; V(3)=0;
KOD(4)=1; V(4)=0;
KOD(5)=1; V(5)=0;
KOD(6)=1; V(6)=0;
KOD(7)=1; V(7)=0;
KOD(8)=1; V(8)=0;
KOD(9)=1; V(9)=0;
KOD(10)=1; V(10)=0;
KOD(11)=1; V(11)=0;
KOD(12)=1; V(12)=0;
KOD(13)=1; V(13)=0;
KOD(15)=1; V(15)=100;
KOD(16)=1; V(16)=100;
KOD(17)=1; V(17)=100;
```

```

KOD(18)=1; V(18)=100;
KOD(19)=1; V(19)=100;
KOD(20)=1; V(20)=100;
KOD(21)=1; V(21)=100;
KOD(22)=1; V(22)=100;
KOD(23)=1; V(23)=100;
KOD(24)=1; V(24)=100;
KOD(25)=1; V(25)=100;
KOD(26)=1; V(26)=100;

```

```

for i=1:N+NI
    if KOD(i)==1;
        U(i)=V(i);
    else
        Q(i)=0;
    end
end

```

Sınır integrasyonunun yapılacağı elemanlar arasındaki bağıntılar ve düğüm noktalarının koordinatları hesaplanır.

```

% eleman bağlantılarının belirlenmesi
for k=1:N
    inc(k,1)=k;
    inc(k,2)=k+1;
    if k==N
        inc(k,2)=1;
    end
end
% sınır düğümleri üzerindeki döngü
for i=1:N+NI;
% incelenen sınır düğümünün koordinatları
    if i<=N
        n1 = inc(i,1);
        n2 = inc(i,2);
        xs(i) = (x(n2)+x(n1))/2;
        ys(i) = (y(n2)+y(n1))/2;
        xm = xs(i);
        ym = ys(i);
    else
% iç noktaların koordinatları
        xm = x(i);
        ym = y(i);
    end
% matrislerin sıfırlanması
    for j=1:N;
        A(i,j)=0;
        B(i,j)=0;
        H(i,j)=0;
        G(i,j)=0;
    end
    HH(i)=0;
    GG(i)=0;
    X(i)=0;

```

Daha sonra sınır elemanları üzerindeki döngüler oluşturularak sayısal integrasyon noktaları hesaplanır.

```

% sınır elemanları üzerindeki döngü
for j=1:N;
    n1=inc(j,1);
    n2=inc(j,2);
    x1 = x(n1);
    x2 = x(n2);
    y1 = y(n1);
    y2 = y(n2);
    Dx = x2-x1;
    Dy = y2-y1;
% eleman uzunluklarının hesaplanması
lj(j)=sqrt(Dx^2+Dy^2);
% sınır elemanları üzerindeki sayısal integrasyon
for k=1:4;
% sayısal integrasyon noktalarının hesaplanması
    xx = x1 + Dx*(1+E(k))*0.5;
    yy = y1 + Dy*(1+E(k))*0.5;
    R=sqrt((xm-xx)^2+(ym-yy)^2);

```

Sonraki adımda H_{ij} ve G_{ij} etki katsayıları hesaplanarak matrisleri oluşturulur. İntegrasyonda kullanılacak etki katsayı matrislerinin köşegen elemanlarının bulunması için tekil integrallerin hesaplanması gerekir.

```

% etki matrislerinin hesaplanması
H(i,j) = H(i,j) - ((xm-xx)*(y1-y2)+(ym-yy)*(x2-x1))*W(k)/(R^2*4*pi);
G(i,j) = G(i,j)+lj(j)*log(1/R)*W(k)/(4*pi);
end
% tekil integrallerin hesaplanması
HH(i) = HH(i)-H(i,j);
G(i,i) =lj(j)*(1+log(2/lj(j)))/(2*pi);

```

Etki matrislerinin oluşturulmasından sonra, sınır şartlarına göre denklem sistemi düzenlenir.

```

% sınır şartlarının uygulanması
% KOD(j)=0 ise Q bilinendir, KOD(j)=1 ise U bilinendir
if KOD(i)==0
    A(i,j)=H(i,j);
    B(i,j)=G(i,j);
    X(i)=Q(i);
else
    A(i,j)=G(i,j);
    B(i,j)=H(i,j);
    X(i)=U(i);
end
end
if KOD(i)==0
    A(i,i)=HH(i);
    B(i,i)=G(i,i);
end
if KOD(i)==1
    B(i,i)=HH(i);
end
end
end

```

Problem bölgesindeki bilinmeyen u ve q değerlerinin hesaplanabilmesi için gerekli olan σ eşdeğer yük kaynakları hesaplanır. Eşdeğer kaynaklar bulunduktan sonra bilinmeyen değerler (potansiyel ve normale göre türevleri) kolaylıkla hesaplanabilir. -

```
% eşdeğer kaynakların bulunması
K=inv(A)*X';
% sınır bilinmeyenlerinin hesaplanması
S=B*K;
% sınır değerlerinin atanması
for i=1:N;
    if KOD(i)==0
        U(i) = S(i);
    else
        Q(i) = S(i);
    end
end
```

Daha sonra, istenen iç noktalardaki bilinmeyen u ve q değerleri hesaplanır.

```
% iç noktalardaki potansiyellerin hesaplanması
for i=N+1:N+NI;
    U(i)=0;
    for j=1:N;
        U(i) = U(i)+K(j)*G(i,j);
        Q(i) = Q(i)+K(j)*H(i,j);
    end
end
```

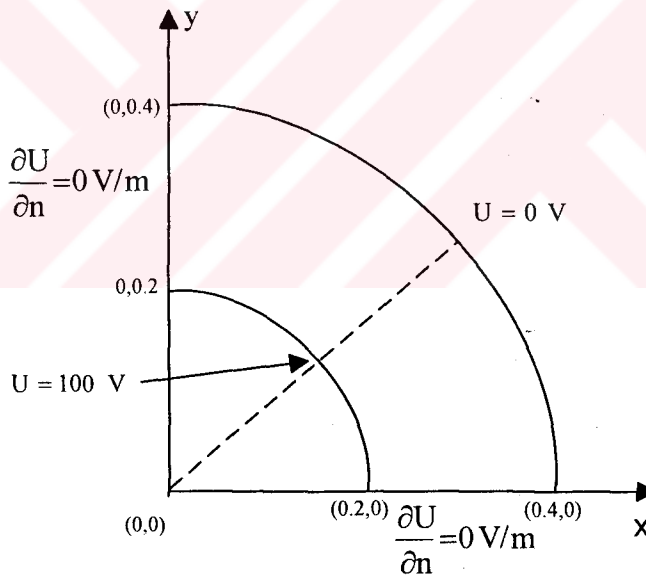
7. UYGULAMALAR

Bu bölümde, indirekt sınır elemanları yöntemiyle bazı basit geometriler için yapılan uygulamalar gösterilmiştir. Problem çözümü için bir MATLAB’da bir program yazılmış ve elde edilen sonuçlar ELECTRO paket programı ve analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar kullanılarak eşpotansiyel eğriler çizdirilmiştir.

ELECTRO paket programı, iki boyutlu elektrostatik alan analizi yapan “Integrated Engineering Software” yazılımıdır ve indirekt sınır elemanları yöntemini kullanmaktadır (Integrated Engineering Software Inc., 1997).

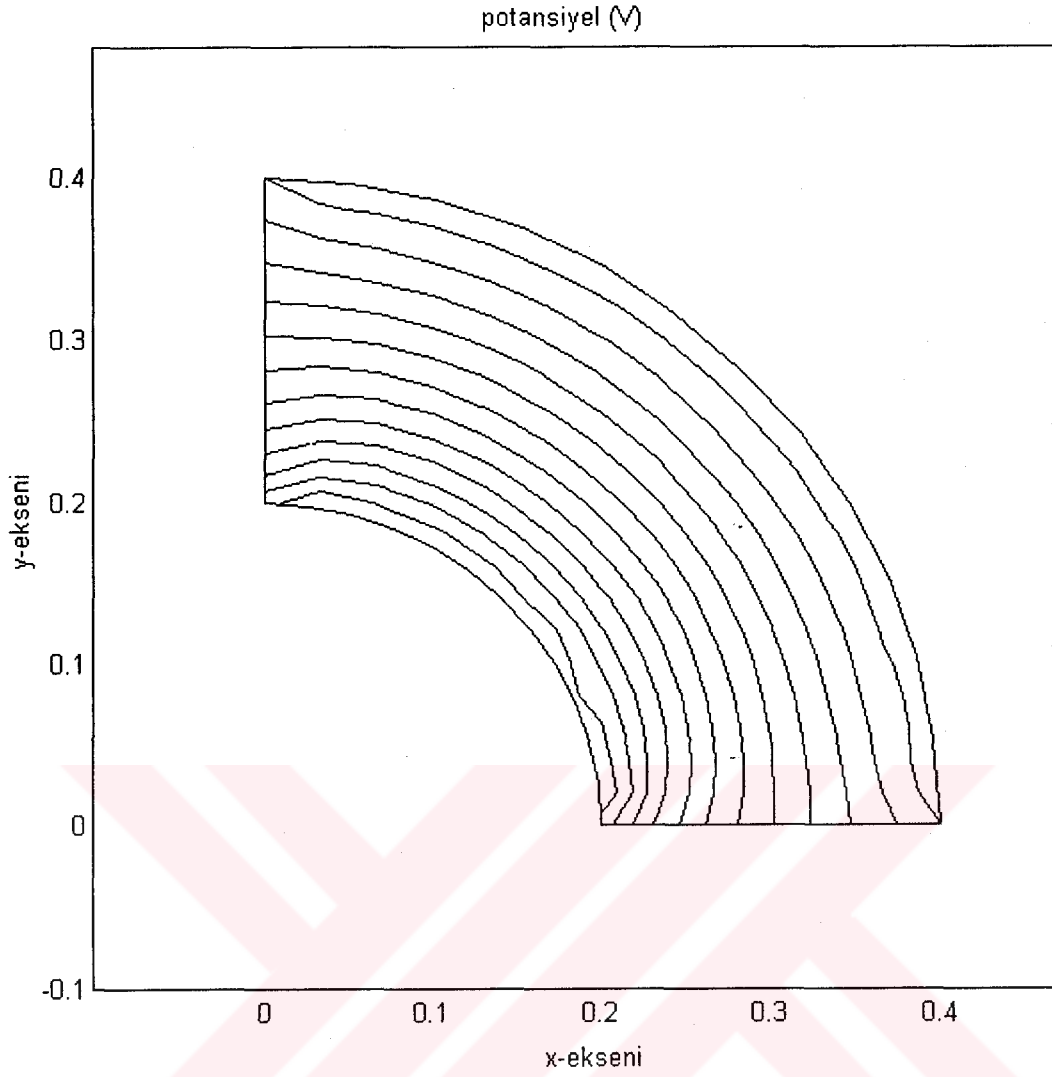
7.1. Çeyrek Kesitli Kablo

Şekil 7.1.'de gösterildiği gibi bir çeyrek kablo geometrisi tanımlanmış önce 26 eleman ile bölmelenmiş ve daha sonra eleman sayısı 148'e çıkarılmıştır. Verilen sınır şartları ile 11 iç nokta için bilinmeyen potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar ELECTRO paket programı ve analitik çözümler ile karşılaştırılmış ve eşpotansiyel eğrileri gösterilmiştir.



Şekil 7.1. Çeyrek kablo kesiti

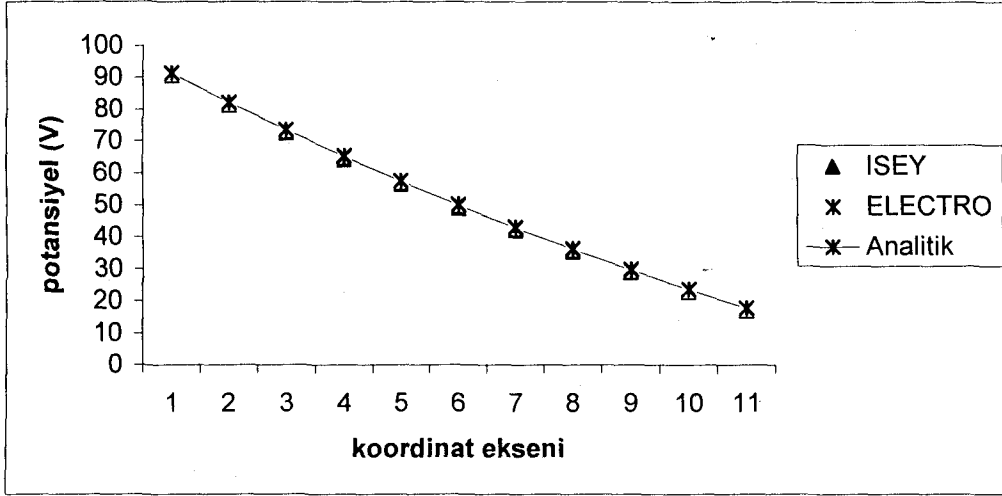
**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**



Şekil 7.2. Çeyrek kablo kesiti için eşpotansiyel eğriler

Tablo 7.1. Çeyrek kablo için elde edilen sonuçlar

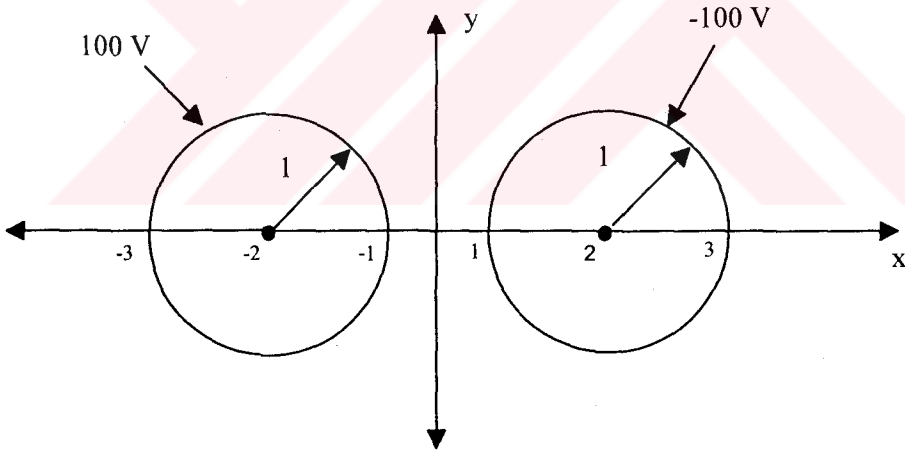
x	y	Analitik Çözüm	ELECTRO (V)	ISEY(V)		ISEY(V)	
				26 eleman	% Hata	148 eleman	% Hata
0.15	0.15	91.5	91.541	90.664	0.91	91.343	0.17
0.16	0.16	82.19	82.266	81.290	1.09	81.865	0.40
0.17	0.17	73.4	73.548	72.503	1.22	72.986	0.57
0.18	0.18	65.2	65.321	64.235	1.41	64.646	0.85
0.19	0.19	57.4	57.531	56.431	1.68	56.791	1.06
0.2	0.2	50.0	50.134	49.045	1.90	49.372	1.26
0.21	0.21	42.9	43.090	42.035	2.02	42.347	1.30
0.22	0.22	36.2	36.369	35.363	2.32	35.676	1.46
0.23	0.23	29.8	29.942	28.998	2.71	29.325	1.61
0.24	0.24	23.6	23.784	22.909	2.96	23.263	1.44
0.25	0.25	17.8	17.876	17.071	4.09	17.464	1.91



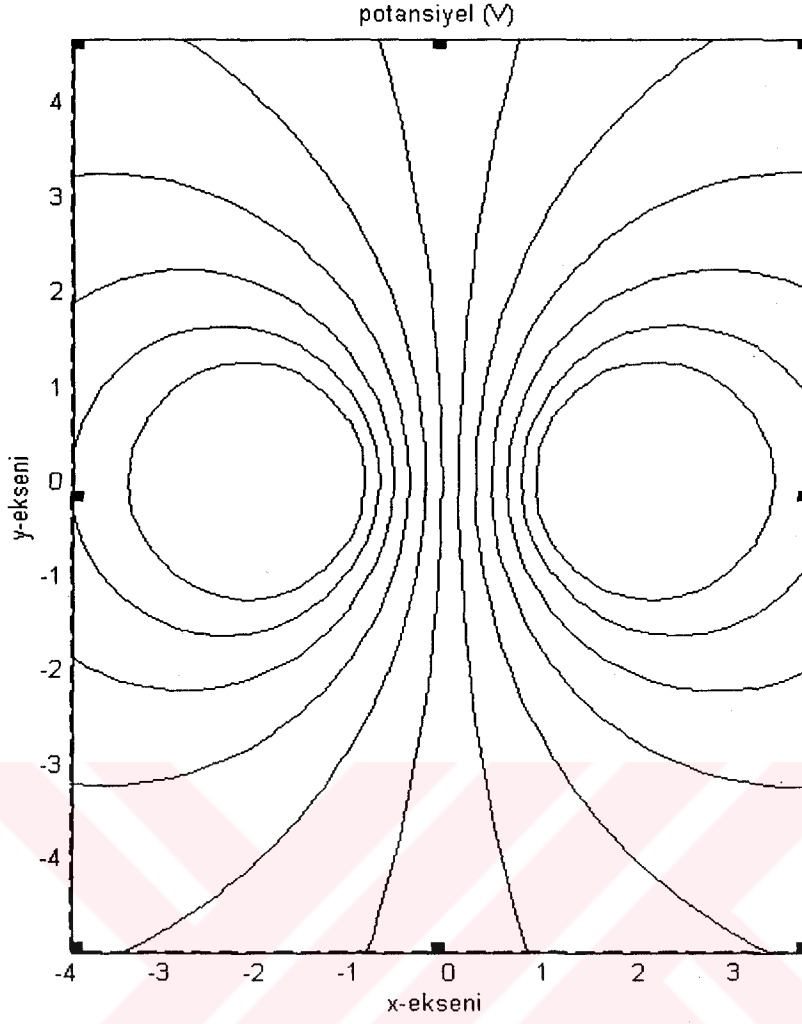
Şekil 7.3. Çeyrek kablo kesiti için elde edilen sonuçların karşılaştırılması

7.2. Küre-Küre Elektrot Sistemi

Uygulamada, her biri 24 eleman ile bölmelenmiş toplam 48 elemanlı bir problemin çözümü yapılacaktır :



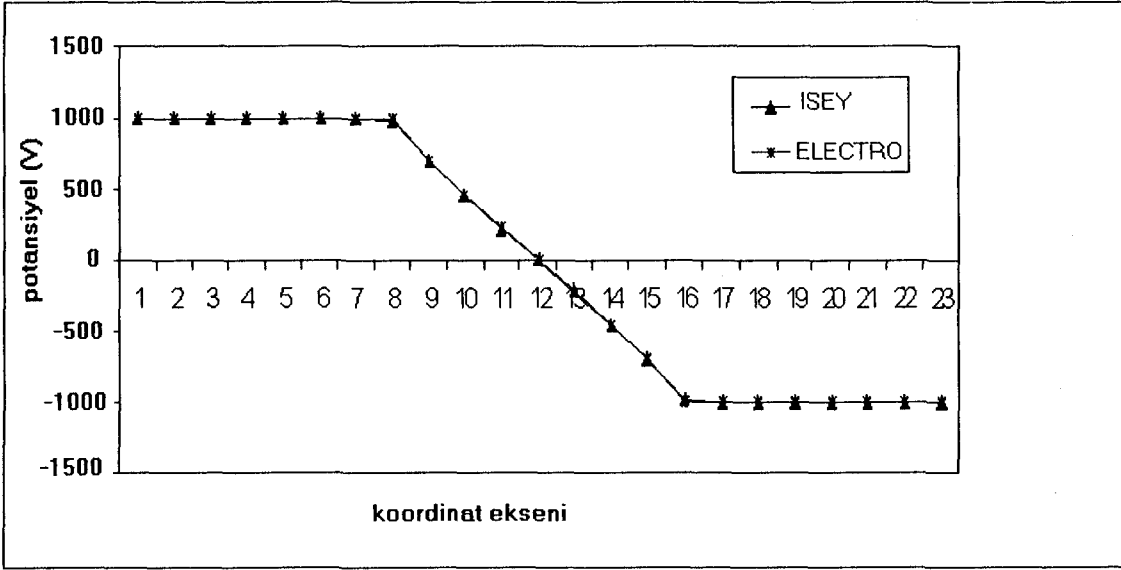
Şekil 7.4. Küre-Küre elektrot sistemi



Şekil 7.5. Küre-Küre elektrot sistemi için eşpotansiyel eğriler

Tablo 7.2. Küre-Küre sistemi için elde edilen sonuçlar

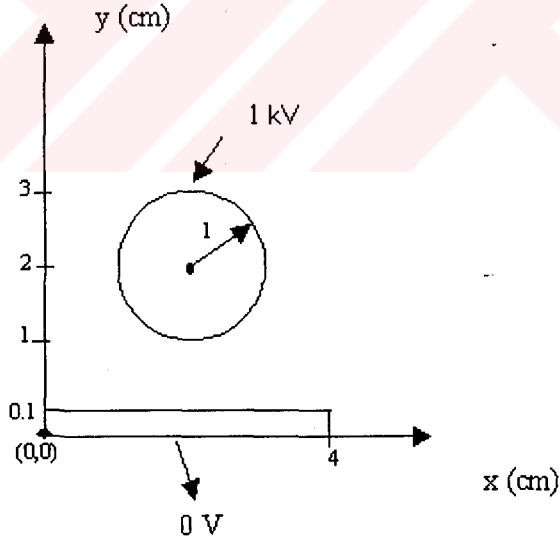
x	y	Analitik	ELECTRO (V)	ISEY (V)
0	0	-	24.099	25.011
0.1	0.1	-	30.811	31.574
0.2	0.2	-	51.300	51.493
0.3	0.3	-	88.246	87.060
-0.1	-0.1	-	30.811	31.559
-0.2	-0.2	-	51.300	51.465
-0.3	-0.3	-	88.247	87.033
0.1	-0.1	-	05.509	06.127
0.2	-0.2	-	-28.550	-27.682
0.3	-0.3	-	-83.056	-81.047
-0.1	0.1	-	29.299	30.785
-0.2	0.2	-	22.910	24.763
-0.3	0.3	-	05.701	06.964



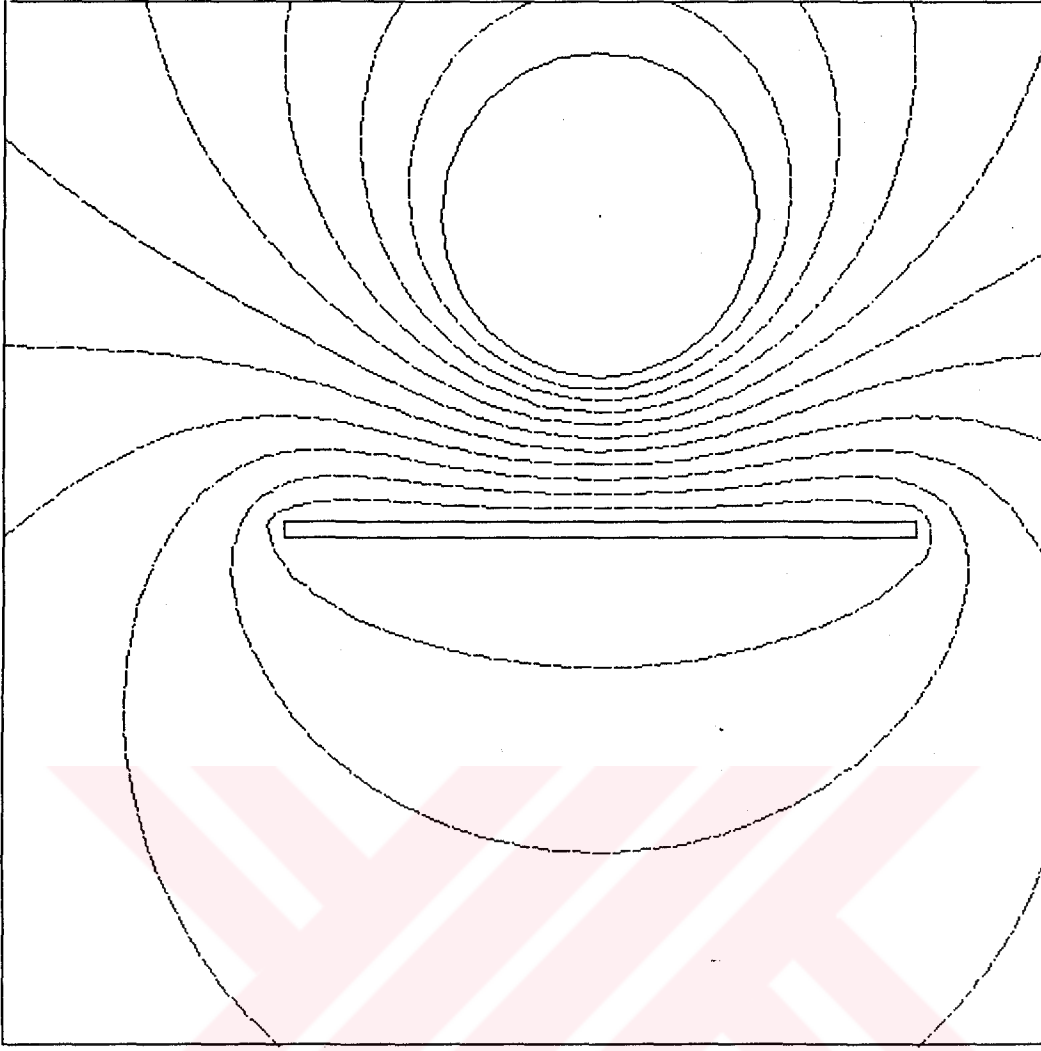
Şekil 7.6. Küre-Küre sistemi için elde edilen sonuçların karşılaştırılması

7.3. Küre-Düzlem Elektrot Sistemi

Burada bir küre ve düzlemden oluşan bir geometri bölgesi tanımlanmıştır. Düzlem 4 eleman ile bölmelenmiştir. Küre ise 1 cm yarıçapındadır ve 24 eleman ile bölmelenmiştir. Geometri ve sınır şartları aşağıda gösterildiği gibidir :



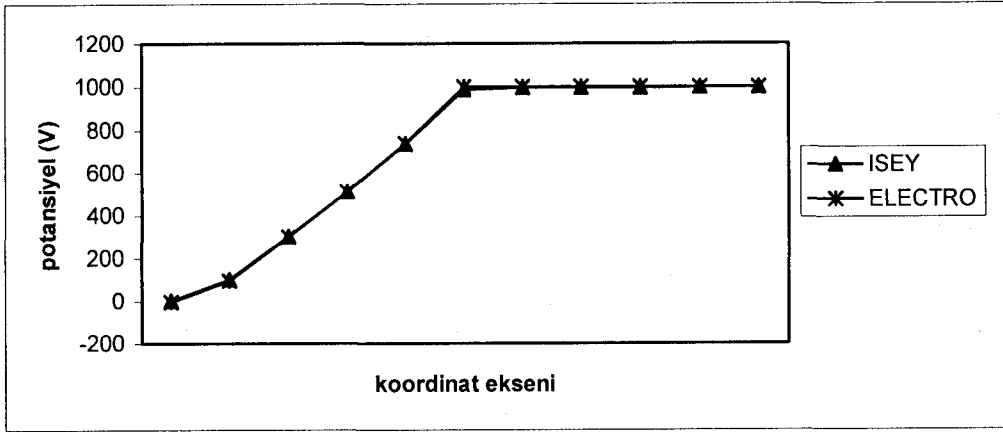
Şekil 7.7. Küre-Düzlem elektrot sistemi



Şekil 7.8. Küre-Düzlem sistemi için eşpotansiyel eğriler

Tablo 7.3. Küre-Düzlem sistemi için elde edilen sonuçlar

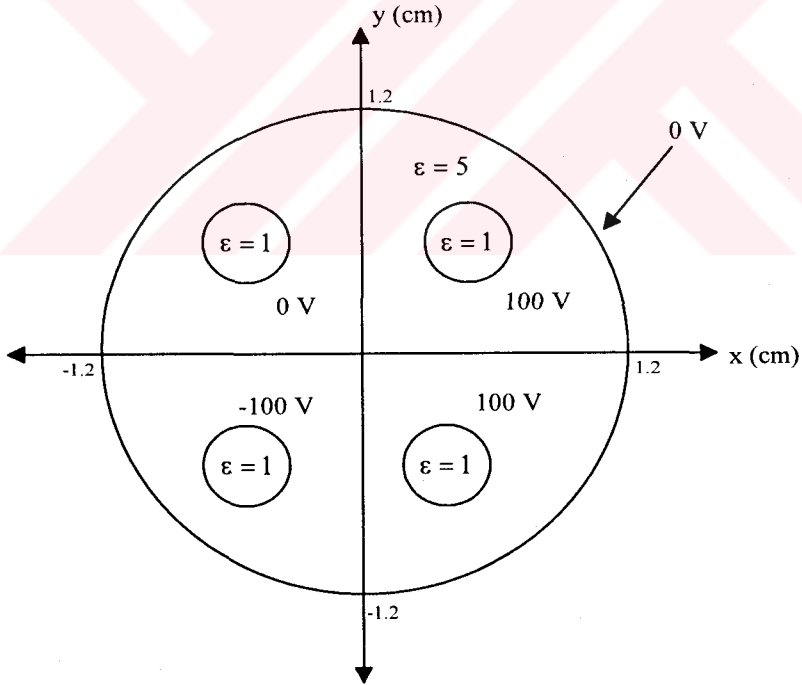
x	y	Analitik	ELECTRO (V)	ISEY(V)
2	0.0	-	-3.7	3.6
2	0.2	-	96.301	102.4
2	0.4	-	299.55	302.5
2	0.6	-	510.74	510.8
2	0.8	-	739.43	735.6
2	1.0	-	1000	990.0
2	1.2	-	999.99	998.4
2	1.4	-	1000	998.8
2	1.6	-	1000	998.1
2	1.8	-	1000	998.4
2	2.0	-	1000	998.7



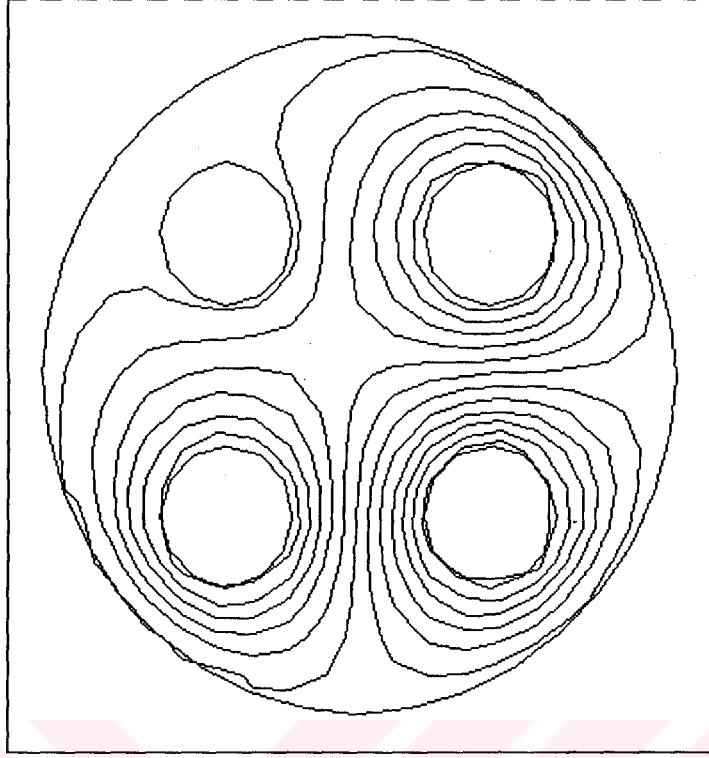
Şekil 7.9. Küre-Düzlem sistemi için elde edilen sonuçların karşılaştırılması

7.4. Enerji Kablosu

Bu uygulamada, bir enerji kablosu kesiti problem bölgesi olarak seçilmiştir. Problemin dış sınırı 36 eleman ile bölmelenmiştir. İçteki dört eşit geometri ise 12' şer eleman ile bölmelenmiş ve toplam eleman sayısı 84 olarak belirlenmiştir. Problem geometrisi ve uygulanan sınır şartları aşağıda gösterildiği gibidir.



Şekil 7.10. Enerji kablosu geometrisi ve sınır şartları

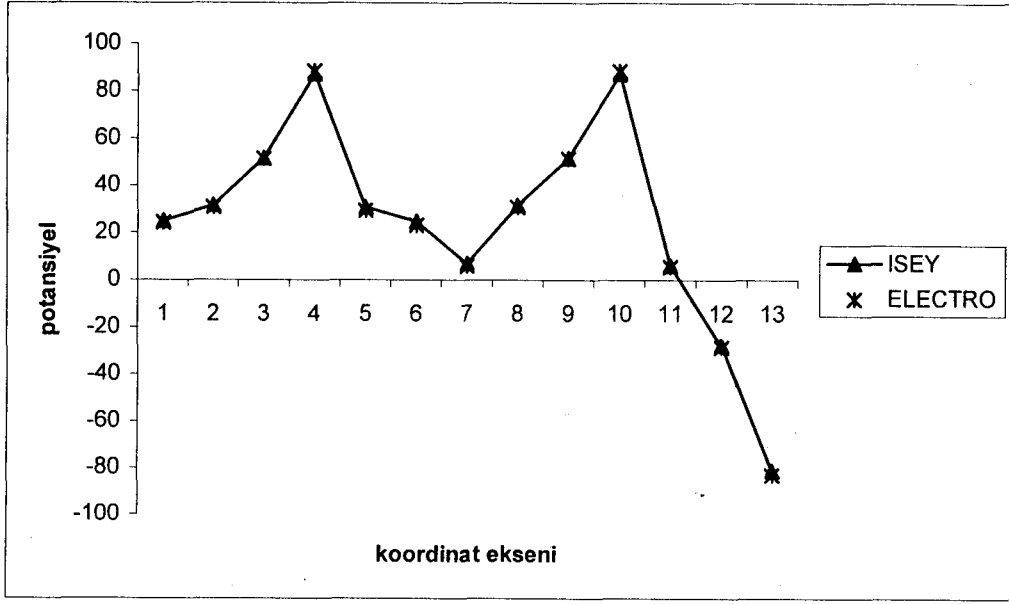


Şekil 7.11. Enerji kablosunun eşpotansiyel eğrileri

Tablo 7.4. Enerji kablosu için elde edilen sonuçlar

x	y	Analitik Çözüm	ELECTRO (V)	ISEY (V)
0	0	-	24.099	25.011
0.1	0.1	-	30.811	31.574
0.2	0.2	-	51.300	51.493
0.3	0.3	-	88.246	87.060
-0.1	-0.1	-	30.811	31.559
-0.2	-0.2	-	51.300	51.465
-0.3	-0.3	-	88.247	87.033
0.1	-0.1	-	5.509	6.127
0.2	-0.2	-	-28.550	-27.682
0.3	-0.3	-	-83.056	-81.047
-0.1	0.1	-	29.299	30.785
-0.2	0.2	-	22.910	24.763
-0.3	0.3	-	5.701	6.964

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**



Şekil 7.12. Enerji kablosu için elde edilen sonuçların karşılaştırılması

8. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Sınır Elemanları Yöntemi'nin temel formülasyonları gösterilerek MATLAB programlama dilinde bir program yazılmış ve bazı basit geometrilere uygulanmıştır. Çalışmanın esas amacı, indirekt sınır elemanları yaklaşımının elektrostatik alan problemlerinin hesaplanmasında kullanılmasıdır. Bu amaçla indirekt yaklaşım uygulamalarına geçmeden genel olarak sınır elemanları yönteminin elektrostatik alan problemlerine nasıl uygulandığı hakkında bilgiler verilmiş ve ayrıntılı olarak diğer bir sınır elemanları yaklaşımı olan direkt yöntemden de bahsedilmiştir.

Çalışmada, sınır elemanları yönteminin elektrostatik alan problemlerinin hesaplanmasında kullanıcıya büyük avantajlar sunduğu ve tatmin edici sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Yöntemin en büyük avantajı, özellikle açık alan problemlerinde sonsuz bir bölge için hesaplamaların kolayca yapılabilmesidir. Bunu sağlayan, problem bölgesinin boyutsallığının bir derece indirgenmesi ve iki boyutlu problemler için integrasyonun sadece sınırdaki yapılmasıdır. Buna göre, problemi çözmek için sadece sınırı bölmek yeterli olmaktadır. Bu nedenle, problem çözümü için kullanılan veri girişi ve işlem basamakları da oldukça azalmaktadır. Bu da kullanıcıya verileri saklama ve zaman açısından büyük bir kazanç sağlamaktadır.

İndirekt yöntem, direkt yöntemden farklı olarak bilinmeyen potansiyel ve onun normal türevinin direkt olarak değil de bir eşdeğer kaynak bulunmak suretiyle çözülmesidir. Problemin çözülmesi için gerekli olan temel çözüm ve etki katsayı matrislerinin bulunması, direkt yöntemde olduğu gibidir. Sınırdaki bilinmeyenlerin hesaplanabilmesi için öncelikle bir eşdeğer kaynağın bulunması gereklidir. Bilinmeyen eşdeğer kaynak bulunduktan sonra, sınırdaki bilinmeyenler ve dolayısıyla değeri bilinmeyen herhangi bir iç nokta için çözümün bulunması oldukça kolaydır ve bu çalışmada elde edilen sonuçlar göstermiştir ki, indirekt yöntem elektrostatik alan problemlerinin çözümünde oldukça etkili bir yaklaşım tekniğidir.

Yöntem, hem homojen hem de homojen olmayan basit geometrilere uygulanmış ve oldukça tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar, analitik sonuçlar ve ELECTRO paket programı sonuçları ile karşılaştırılmış, grafik ve tablolar halinde gösterilmiştir. Ayrıca hazırlanan bilgisayar programı 'ISEY' ile hesaplanan potansiyel değerleri için eşpotansiyel eğriler çizdirilmiştir.

Örnek uygulama bölümünde, ilk olarak düzlemsel bir elektrot sistemi ele alınmıştır. Öncelikle problem geometrisi ve sınır şartları gösterilmiş ve daha sonra problemin indirekt yaklaşımla çözülmesine ilişkin temel denklemler yazılmıştır. Problem, bilgisayar programı kullanmadan çözülmüştür. Bunun amacı, indirekt yaklaşımın probleme uygulanışının daha açık

bir şekilde görülebilesidir. Bilinmeyen eşdeğer kaynağın bulunabilmesi için gerekli olan etki matrisleri hesaplanmış ve bu matrisler açıkça gösterilmiştir. Ayrıca uygulama noktası ile incelenen noktanın çakışması durumunda görülen tekil matris değerlerinin bulunması gösterilmiştir. Etki matrisleri ve uygulanan sınır şartları yardımıyla bilinmeyen eşdeğer yükler bulunmuştur. Ve bu bilinmeyen eşdeğer yükler bulunduktan sonra bilinmeyen potansiyel ifadeleri hesaplanmıştır.

Bu basit örnek ile yöntemin uygulanışı adım adım gösterildikten sonra, uygulama bölümünde başka geometriler ele alınmış ve bu geometrilerin çözümünde yazılan bilgisayar programı ISEY kullanılmıştır. Kullanılan ilk geometri çeyrek kablo kesitidir. Silindir kesiti ilk olarak toplam 26 eleman ile bölmelenmiştir. Daha sonra eleman sayısının çözüme etkisini incelemek amacıyla eleman sayısı artırılarak 148'e çıkarılmıştır. Verilen geometri ile birlikte uygulanan sınır şartları da gösterilmiştir. Bilgisayar programı ISEY ile elde edilen sonuçlar, grafik ve tablo halinde, analitik çözüm ve ELECTRO paket programı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. ISEY ile elde edilen sonuçlarda, eleman sayısının artırılması durumunda % hata oranının daha az olduğu, yani sonuçların analitik çözüme daha yakın olduğu görülmüştür. Daha sonra yazılan bilgisayar programı ile elde edilen eşpotansiyel eğriler gösterilmiştir.

İncelenen ikinci geometri küre-küre sistemidir. Bu geometride sistemindeki her bir küre 24 eleman ile bölmelenmiştir. Geometride kullanılan toplam eleman sayısı 48 dir. Yine bu geometri için de problem bölgesi tanımlanmış ve sınır şartları uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar ışığında, ELECTRO paket programı ile karşılaştırma yapılmış ve oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir. Yine bu geometri için de eşpotansiyel eğriler çizdirilmiştir.

İncelenen üçüncü geometri, küre-düzlem sistemidir. Bu geometri sistemi ise 0.1 cm kalınlığında bir düzlem ve 1 cm yarıçapında bir küreden oluşmaktadır. Bu geometride, düzlem toplam 4 eleman ve küre ise toplam 24 eleman ile bölmelenmiştir. Yine bu geometri için de diğer geometrilerde olduğu gibi yapılan karşılaştırmalar grafik ve tablolar halinde gösterilmiş ve eşpotansiyel eğrileri çizdirilmiştir.

Bu çalışmada incelenen son geometri ise enerji kablosu kesitidir. Dış sınırdaki 36 ve içteki her bir küre sınırında ise 12' şer eleman olmak üzere toplam 84 eleman kullanılmıştır. Geometri ve uygulanan sınır şartları gösterildikten sonra elde edilen sonuçlar ELECTRO paket programı ile karşılaştırılmış ve eşpotansiyel eğrileri çizdirilmiştir.

Sonuç olarak, incelenen geometriler için elde edilen sonuçlar ve yapılan karşılaştırmalar ışığında, indirekt yöntemin homojen ve homojen olmayan bölgelere rahatlıkla uygulanabildiği ve sonuçların oldukça tatmin edici olduğu görülmüştür. Bu yaklaşım tekniği sadece sabit eleman kullanılarak uygulanmıştır. Lineer ve parabolik elemanlar kullanarak çözüm yapıldığında daha hassas sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Ayaz, H.D., 1998, Statik Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemiyle Hesabı, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 85s.
- Bachtold, M., Korvink, J.G., 1997, An Error Indicator and Automatic Adaptive Meshing for Electrostatic Boundary Element Simulations, IEEE Transactions On Computer-Aided Design Of Integrated Circuits And Systems, 16, No. 12, 1439-1446.
- Brebbia, C.A., 1984, The Boundary Element Method For Engineers, Pentech Pres, London, 189p.
- Driscoll, T.C., 1999, A Nonoverlapping Domain Decomposition Method For Symm's Equation For Conformal Mapping, 1999 Society for Industrial and Applied Mathematics, 36, No. 3, 922-934.
- Heck, B., 2002, Integral Equation Methods in Physical Geodesy, Springer 2002, 197-206.
- Klimpke, B.W., 1983, A Two-Dimensional, Multi-Media Boundary Element Method, Master Thesis, The University of Manitoba, Canada, 79p.
- Krauter, B., Xia, Y., Dengi, A., Lawrence T., Pileggi, A., 1996, Sparse Image Method for BEM Capacitance Extraction, Proceedings of the Design Automation Conference, 357-362.
- Lahiri, A., Chakravorti S., 2002, Australasian Universities Power Engineering Conference (AUPEC), Melbourne, Australia, 54-56.
- McPhee, A.J., Klimpke, B., MacGregor, S.J., 1997, Use of The Boundary Element Method For Pulsed Power Electromagnetic Field Designs, 11th IEEE International Pulsed Power Conference, Baltimore, Maryland.
- Paris, F., Canas, J., 1997, Boundary Element Method Fundamentals and Applications, Oxford University Press, New York, Oxford, Tokyo, 183p.
- Raphael Interconnect Analysis Program Reference Manual Version 4.2, 1998, Avant! Corporation, TCAD Business Unit Fremont, California, 288p.
- Singh, K.M., and Tanaka, M., 1999, Analytical Evaluation of Weakly Singular Integrals for Helmholtz Equation, Transactions of JSCES, Paper No. 19990021.
- Stella, A., Analysis of The DAΦNE Beam Position Monitor With A Boundary Element Method, 1997, INFN - LNF, Accelerator Division, CD-10.
- Tausch, J., 2002, A Variable Order Wavelet Method for the Sparse Representation of Layer Potentials in the Non-Standard Form SMU Mathematics Preprint.
- Trinitis, C., Schulz, M. And Karl, W., 2002, Boosting the Performance of Electromagnetic Simulations on a PC-Cluster, 2002 International Conference on Parallel Computing in Electrical Engineering (PARELEC 2002), Warsaw, Poland.

- Ye, K.R., Zhou, W.M., Chen, Y.Z., Yang, Y., Yuan, R.X., Tang, S.H., Liu, Z.P., Xiong, W., Sun, Y., 2001, The Beam Instrumentation of SSRF, Proceedings of the Second Asian Particle Accelerator Conference, Beijing, China.
- Yıldır, Y.B., 1987, Computer-Aided Field Analysis of High Voltage Apparatus Using The Boundary Element Method, Proceedings of The International Coil Winding Conference, Rosemont, Illinois.
- Yıldır, Y.B., and Zheng, D., 1995, Simulation of Polyphase Induction Machines: Frequency Domain Boundary Element Method, International Aegean Conference on Electrical Machines and Power Electronics (ACEMP), Kusadasi, Turkey.
- Yıldırım, S., 1999, Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 85s.
- Wagner, K.C., Reindl, L., and Manner, O., 1993, Surface Wave To Bulk Wave Conversion In Saw-Reflectors On Strong Coupling Substrates, IEEE Ultrasonics.

ÖZGEÇMİŞ

Sami EKİCİ, 1979 yılında Elazığ' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Elazığ'da tamamladıktan sonra 1996-2000 yılları arasında, Fırat Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi Bölümü'nde lisans eğitimini tamamladı. Mezun olduktan sonra 2000 yılında Elazığ-Maden ilçesi Çok Programlı Lisesi'nde 1 yıl süreyle Elektrik Öğretmenliği yaptı. Yine 2000 yılında F.Ü. Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen devam etmektedir.

Arş. Gör. Sami EKİCİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ