

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BETA DAĞILIMI VE
ÖZELLİKLERİ

Selahattin AYDOĞDU

Yüksek Lisans Tezi

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN

TEMMUZ-2011

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BETA DAĞILIMI VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selahattin AYDOĞDU
(Enstitü No: 091133109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:14.06.2011

Tezin Savunulduğu Tarih:30.06.2011

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN(FÜ)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Muammer GÖKBULUT(FÜ)
Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR(FÜ)

TEMMUZ-2011

ÖNSÖZ

Bana araştırma olanağı sağlayan ve bu konuda çalışmaya yönlendiren, çalışmalarımın her aşamasında bana yakın ilgi ve yardımlarının esirgemeyen ve verdiği önerilerle beni yönlendiren değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN'a ve yine çalışmalarım esnasında her türlü yardımı esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bulduğum süre içerisinde bana her türlü katkıyı sağlayan Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik bölümü değerli öğretim üyeleri sayın Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK, sayın Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK ve sayın Yrd. Doç. Dr. Cemil ÇOLAK'a ve ayrıca yüksek lisans ve doktora yapmakta olan değerli arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Özellikle her zaman yanımda olup, bana maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Selahattin AYDOĞDU
ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLolar LİSTESİ	VII
SEMBOLLER LİSTESİ	VIII
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE METOT	4
2.1 Tesadüfî Değişken Kavramı	4
2.2 Dağılım Fonksiyonu	6
2.3 Beklenen Değer	7
2.4 Beta Dağılımı ve Genel Özellikleri.....	8
3. BULGULAR	14
3.1 Genelleştirilmiş Beta Dağılımı	14
3.2 Genelleştirilmiş Beta Dağılımının Özel Durumları	16
3.3 Genelleştirilmiş Beta Dağılımının Parametrelerinin Bulunması	18
3.4 Mixture GB Dağılımı.....	21
3.5 Genelleştirilmiş Beta Dağılımının Olasılık Tabloları	24
4. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	34
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ	37

ÖZET

Bu tez çalışmasında sürekli dağılım fonksiyonları arasında önemli bir yere sahip olan beta ve genelleştirilmiş beta dağılımları üzerinde durularak bu dağılımların önemli karakteristik özelliklerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Çalışmanın giriş kısmında genel olarak matematiksel istatistiğin temel konularından olan dağılımlar hakkında genel bir literatür bilgisi verilmiştir. Bu konuda yapılan çalışmalardan bahsedilerek beta dağılımının gerek matematiksel analiz ve gerekse istatistiksel analiz açısından önemi vurgulanmıştır. Bunun ardından materyal ve metot başlığı altında çalışmada kullanılan matematiksel istatistiğin önemli tanım ve sonuçları verilmiştir.

Çalışmanın ana kısmı olan bulgular başlığı altında ise genelleştirilmiş beta dağılımı ve önemli özellikleri verilmiştir. Bu bölümde genelleştirilmiş beta dağılımının özel durumları üzerinde durulmuş ve üstel dağılım ailesi içerisinde yer alan genel bir üstel dağılım fonksiyonu yapılandırılmıştır. Buna ilaveten genelleştirilmiş beta dağılımının parametrelerinin bazı sabit değerleri için olasılık tabloları elde edilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş beta dağılımının parametre değerlerinin olasılık dağılımı belirlenerek bir mixture dağılım elde edilmeye çalışılmıştır.

Sonuç ve tartışma kısmında çalışmada elde edilen bulguların matematiksel istatistik ve istatistiksel analiz içerisindeki önemi literatür bilgileri ile birleştirilerek değerlendirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Beta dağılımı, Genelleştirilmiş Beta dağılımı, Gauss Hipergeometrik fonksiyon, Olasılık tablosu, Mixtür dağılım.

SUMMARY

GENERALIZED BETA DISTRIBUTION AND ITS PROPERTIES

In this study, two important types of continuous distribution functions, the beta and the generalized beta distributions, were studied and the developments of their major characteristics properties were aimed to be improved.

A comprehensive knowledge of literature about distributions which are the fundamentals of mathematical statistics are given as an introductory to this research. By dealing with the previous studies, it was emphasized why beta distribution is so important in the sense of both mathematical and statistical analysis. And later, some important descriptions and consequences of the mathematical statistics were defined in subsequent sections.

Part of main evidence contains Generalized Beta distribution functions and its primary features were given within the findings title. The special conditions of the generalized beta and the exponential distributions functions were examined and rebuilt. Additionally, probability charts were obtained for some constant values of the generalized beta distributions parameters. The values of parameters were assumed to have a smooth distribution and a mixture distribution was thus improved by means of this approach.

Part of result and discussion contain evidences with mathematical statistic and statistical analyzes with knowledge of literature are evaluated.

Key words: Beta Distribution, Generalized Beta Distribution, Gauss Hypergeometric Function, Probability tables, Mixture Distributions.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1: $\alpha = 2$ ve $\beta = 2$ için beta fonksiyonunun grafiği	10
Şekil 2: $\alpha = 1$ ve $\beta = 3$ için beta fonksiyonunun grafiği.....	10
Şekil 3: $\alpha = 1$ ve $\beta = 5$ için beta fonksiyonunun grafiği	11
Şekil 4: $\alpha = 5$ ve $\beta = 2$ için beta fonksiyonunun grafiği	11
Şekil 5: $\alpha = 5$ ve $\beta = 5$ için beta fonksiyonunun grafiği	11

TABLolar LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1: Verilerin gözlem ve frekans değerleri.....	21
Tablo 1.2: $a=1$, $b=1$ ve $\gamma=2$ değerleri için GB dağılımı olasılık değerleri.....	24
Tablo1.3: $a=1$, $b=1$ ve $\gamma=0.5$ değerleri için GB dağılımı olasılık değerleri.....	25
Tablo1.4: $a=1$, $b=1$ ve $\gamma=1.5$ değerleri için olasılık değerleri	26
Tablo 1.5: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=0.5$ değerleri için olasılık değerleri	27
Tablo 1.6: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=1.5$ değerleri için olasılık değerleri	28
Tablo 1.7: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=2$ değerleri için olasılık değerleri.....	29
Tablo 1.8: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=3$ değerleri için olasılık değerleri.....	30
Tablo 1.9: $a=2$, $b=3$ ve $\gamma=3.5$ değerleri için olasılık değerleri	31
Tablo 1.10: $a=2$, $b=1$ ve $\gamma=3$ değerleri için olasılık değerleri	32
Tablo 1.11: $a=1$, $b=3$ ve $\gamma=2.5$ değerleri için olasılık değerleri	33

SEMBOLLER LİSTESİ

R	: Reel sayılar kümesi
EX	: X tesadüfi değişkenin beklenen değeri
$\Rightarrow$	: Düzgün yakınsama
$B(R)$	: R de Borel cebri
$\mathfrak{I}$	: olasılık ölçüsü
I_A	: A olayının indikatörü
$\sup x$	: x üst sınırlarının en küçüğü (supremum)
Ω	: Örnek uzayı
R_n	: n – boyutlu Euclid uzayı
$f(x; \alpha, \beta)$	: Beta dağılımının yoğunluk fonksiyonu
${}_2F_1(a, b; c; x)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyon
D_n	: Kolmogorov-Simirnov test istatistiği

1. GİRİŞ

Tarihi boyunca insanlık, geleceği tahmin etme uğraşı içinde olmuştur. Özellikle son yıllarda bilim ve teknoloji alanında büyük gelişmelerin yaşanması ve bilgisayar kullanımının hızla yaygınlaşması istatistiksel analiz tekniklerinin gelişmesini hızlandırmıştır. Bu analizlerde en önemli yere sahip olan istatistik tekniklerden biri olasılık dağılımlarıdır. Olasılık dağılımları bilim ve teknolojinin birçok alanında reel sistemlerin analizlerinin yapılmasında ve çalışmalarının optimize edilmesinde yaygın biçimde kullanılırlar. (Hahn ve Shapiro 1967, Bentley 1993). Reel sistemlerde olasılık dağılımları kısaca, olasılık incelemesi ve olayların olasılığının tanımlanması için kullanılan modellerdir.

Tanımlanan tesadüfi değişkenin olasılık değerlerini veya olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak, araştırmacı için oldukça önemlidir. Tesadüfi değişkenin olasılık fonksiyonunun bulunması araştırmacı için ilk basamaktır. Fakat araştırmacının yapmış olduğu deney veya gözlemler için bir olasılık fonksiyonu oluşturmaya çalışması, araştırmada önemli olan detayların gözden kaçmasına ve belki de daha önce geliştirilmiş bir olasılık fonksiyonu elde etmek için zaman ve kaynak israfına yol açacaktır. İşte bu nedenlerden dolayı, aynı özelliklere sahip tesadüfi değişkenler için genel kalıplar oluşturulmuş ve benzer türdeki tesadüfi değişkenlere uygulanmak amacıyla da bu kalıplar genelleştirilmiştir ve bu genel kalıplar, bir diğer ifadesi kuramsal dağılımlar olarak adlandırılmıştır.

Bu olasılıksal dağılımlar tesadüfi değişkenlerin aldığı değerlere göre ikiye ayrılırlar. Reel sayıların alt aralıklarında değer alan tesadüfi değişkenlere sürekli tesadüfi değişkenler, belli bir alt aralıkta değil de reel sayıların sayılabilen bir alt kümesinde değer alan tesadüfi değişkenlere ise kesikli tesadüfi değişkenler denilmektedir. Tesadüfi değişkenin kesikli veya sürekli olmasına göre de dağılımlar kesikli dağılımlar ve sürekli dağılımlar olarak iki ana gruba ayrılmaktadır.

Bu çalışmada sürekli dağılımlar içerisinde önemli bir yere sahip olan beta dağılımı ailesi ve genelleştirilmiş beta (GB) dağılımı ele alınmıştır. Beta dağılımı çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Tesadüfi değişkenlerin oranları ile ilgili problemler için istatistikte kullanılan en önemli dağılımlardan birisidir. Belirli bir minimum değer ile belirli bir maksimum değer aralığı içinde sınırlanmış olayların ortaya çıkması şeklindeki

pratik sorunların modellenmesi, olasılıksal aktivite gösteren uzunlukların tahmini için, yalnızca istatistik ve olasılık teorisinde değil, matematik teorisi ve güvenilirlik uygulamalarında da önemli bir uygulama alanına sahiptir. Fizik problemlerinde, karar alma teorilerinde, bayesgil çıkarımlarında, oyun teorisinde, endüstriyel mühendislik ve mühendisliğin birçok alanında, medikal çalışmalarda, ekonometri alanında ve yöneylem araştırması gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

İlk olarak 1895 yılında Karl Pearson tarafından ortaya konulan beta fonksiyonu ve bu fonksiyonun özellikleri sonraki yıllarda bazı araştırmacılar tarafından istatistiksel anlamda incelenerek bir dağılım fonksiyonu formunda düzenlenmiştir. Beta dağılımı ve genelleştirilmiş beta dağılımıyla ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan birkaçı şöyle sıralanabilir: Johnson (1997) beta dağılımını risk analizinde kullanarak önemli bulgulara ulaşmıştır. Chia ve Hutchinson (1991) havanın günlük bulutlu olma sürelerini frekans dağılımına beta dağılımının uygun olduğunu göstermiştir. Yapılan bir başka çalışmada ise Avustralya'nın 11 bölge istasyonundan 12 ayda alınan 132 adet verinin beta dağılımına uyduğu kanıtlanmıştır. Daha sonra Sulaiman ve Ark. (1999) Malezya da havanın bulutlu olma sürelerini 10 yıllık bir periyotta ele alarak incelemişlerdir. Nicas (1994) solunum alma sürelerinin değerlerinin modellenmesinde beta dağılımının lognormal dağılımdan daha fazla esneklik gösterdiğine dikkat çekmiştir. Shivanagaraju ve ark. (1998) yatırılan prime ve emeklilik yaşına göre emekli olabilme olasılığını beta dağılımı ile modellemiştir. Oguamanam ve Ark. (1995) beta dağılımının çarpıklık katsayısını kullanarak arabalardaki vites değişikliği ile ilgili bir takım bilgileri incelemiştir. Schwarzer Czerny (1997) faz dağılımının minimize istatistiksel bir beta dağılımı olduğunu göstermiştir.

Genelleştirilmiş beta dağılımı ile ilgili olarak on beş yıllık bir çalışma geçmişi olduğunu görmekteyiz. Bu dağılımla ilgili ilk olarak çalışan araştırmacılar James B. McDonald ve Xu J. Yexiao dır (1994). Bu araştırmacıları Simon C. Parker takip etmektedir. Simon C. Parker (1998) genelleştirilmiş beta dağılımını ABD'nin gelir vergisi verilerine uygulayarak pareto dağılımından ve lognormal dağılımdan daha esnek bir yapıya sahip olduğunu göstermiştir. Michael B. Gordy (1998) ise ayrı bir genelleştirme oluşturmuştur. Sonrasında ise Saralees Nadarajah ve Samuel Kotz (2004) beta dağılımı ve hipergeometrik dağılımı kullanarak farklı bir genelleştirme oluşturmuştur. Ve son olarak J. H. Sepanski ve Lingji Kong (2007) genelleştirilmiş beta dağılımının içeriği ile ilgili olarak detaylı bir çalışma ortaya koymuştur.

Bu tez çalışmasında temel olarak genelleştirilmiş beta (GB) dağılımı ve bu dağılımın genel özellikleri ele alınmış ve Matlab paket programı kullanılarak GB dağılımının olasılık tabloları elde edilmiştir. Ayrıca GB dağılımının özel durumları olan bazı dağılımlar da oluşturulmuştur.

2. MATERYAL VE METOT

Tesadüfî değişken kavramı gerek olasılık teorisi gerekse matematiksel analizin önemli materyallerinden birisidir. Sürekli fonksiyonlar sınıfının genişletilmiş bir üst sınıfı olan ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı olarak tanımlanan tesadüfî değişkenler sınıfı örnek uzayı üzerinden reel sayılara tanımlanan ve örnek uzayı üzerinde tanımlanmış σ -cebire göre ölçülebilir bir fonksiyondur. Bu bakımdan tesadüfî değişkenler sınıfı olasılık teorisi ve matematiksel analizin en önemli ortak çalışma alanıdır. Şimdi tesadüfî değişkenlerle ilgili aşağıdaki tanım ve özellikleri verelim.

2.1 Tesadüfî Değişken Kavramı

$(\Omega, \mathfrak{F})$ ölçülebilir uzay ve $X: \Omega \rightarrow R$ olmak üzere her bir keyfi $\forall x \in R$ için

$$\{X < x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F} \quad (2.1.1)$$

özelliliği sağlıyorsa X fonksiyonuna tesadüfî değişken denir.

Fonksiyonlar teorisi bakımından tesadüfî değişken $\mathfrak{F}$ – ölçülebilir bir fonksiyondur. Bu tanıma göre bir $X: \Omega \rightarrow R$ fonksiyonun tesadüfî değişken olup olmaması $\mathfrak{F}$ σ -cebrinin seçimine ve (2.1.1) koşuluna bağlıdır. [17]

Tesadüfî değişkenin birbirine denk olacak şekilde farklı birçok tanımı yapılabilir. Bu tanımlamalardan en önemli olanı (2.1.1) eşitliği ile verilen şartın sağlanması olmakla birlikte buna denk olacak şekilde reel sayılarda alınan Borel alt kümeleri yardımıyla da tanımlama yapılabilir. $B \subset R$ Borel kümesi olmak üzere

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F} \quad (2.1.2)$$

şartı sağlanıyorsa Ω üzerinde tanımlı X fonksiyonuna tesadüfî değişken denir. Şimdi X tesadüfî değişkeninin ters görüntülerinden oluşan aşağıdaki kümeyi dikkate alalım,

$$H = \{B \subset R : X^{-1}(B) \in \mathfrak{F}\} \quad (2.1.3)$$

Ters görüntünün özelliklerinden dolayı H sınıfı reel sayılarda tanımlanan bir σ -cebridir. Bu durumda keyfi $x \in R$ için $X^{-1}(-\infty, x) \in \mathfrak{F}$ olacağından $(-\infty, x) \in H$ olmalıdır. Böylelikle $H, E = \{(-\infty, x) : x \in R\}$ sınıfını içeren bir σ -cebirdir. Borel σ -cebri E sınıfını içeren en küçük σ -cebir olduğu için $\sigma(E) \subset H$ olacaktır. Demek ki her bir Borel kümesi H sınıfının elemanıdır. Bu özellik ilk olarak:

$X, (\Omega, \mathfrak{F})$ de bir tesadüfi değişken olmak üzere keyfi $a, b \in R$ sayıları için

$$X^{-1} < a, b > \in \mathfrak{F} \quad (2.1.4)$$

olur. Burada $< a, b >$ simgesi R deki herhangi bir aralık gösterilmektedir.

İkinci olarak: $X: \Omega \rightarrow R$ tesadüfi değişken ve $g: R \rightarrow R$ Borel fonksiyonu olmak üzere $g(X)$ tesadüfi değişken olacaktır. Burada Borel fonksiyonu keyfi $c \in R$ için

$$\{x \in R : g(x) < c\} \in B(R) \quad (2.1.5)$$

özellikliğini sağlayan fonksiyondur ve $B(R)$ ile de R de Borel cebri gösterilmektedir. Fonksiyonlar teorisi bakımından Borel fonksiyonu $B(R)$ -ölçülen bir fonksiyondur. Borel fonksiyonları geniş bir sınıf oluşturmaktadır. Örneğin, sürekli, parçalı sürekli ve monoton artan fonksiyonlar dizisinin limiti Borel fonksiyonudur. Bu sonuca göre X bir tesadüfi değişken ise her bir $g: R \rightarrow R$ sürekli fonksiyonu için $g(X)$ tesadüfi değişkendir. Örneğin $|X|$, $\max(0, X)$ ve $\max(0, -X)$ fonksiyonları R de sürekli olduğundan

$$|X| = \max(-X, X), \quad X_+ = \max(0, X), \quad X_- = \max(0, -X)$$

fonksiyonları da tesadüfi değişkendir.

Üçüncü olarak: $f: R_n \rightarrow R$ Borel fonksiyonu, $X_1, \dots, X_n$ ise tesadüfi değişken olsun. Bu durumda $f(X_1, \dots, X_n)$ fonksiyonu tesadüfi değişken olur. f, R_n de Borel fonksiyonu olduğundan keyfi $c \in R$ için $f^{-1}(-\infty, c)$ kümesi R_n de Borel kümesidir. Burada,

$$\{\omega : f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) < c\} = \{\omega : (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in f^{-1}(-\infty, c)\} \in \mathfrak{F}$$

Buna göre $X_1, \dots, X_n$ tesadüfi değişken ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& X_1 X_2 \cdots X_n , \\
& X_1 + X_2 + \cdots + X_n , \\
& \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}
\end{aligned}$$

fonksiyonların her birisinde tesadüfi değişken olur, sonuçlarını gerektirmektedir.[17]

2.2 Dağılım Fonksiyonu

Tesadüfi değişken kavramı pratikte yaygın olarak bir olasılık değeri eşliğinde değer alan değişken şeklinde algılandığından tesadüfi değişkenin aldığı değerlerin bir olasılık değerinin olması ve bu olasılık değerini belirleyen bir fonksiyonun olması zorunluluğu bulunmaktadır. Tesadüfi değişkenin olasılık değerlerini belirleyen fonksiyona tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonu denilmekle birlikte aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ve bu uzayda tanımlı X tesadüfi değişkeni yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyona dağılım fonksiyonu denir,

$$F(x) = F_X(x) = Pr(X \leq x), \quad x \in R \quad (2.2.1)$$

Aynı zamanda $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x)$ fonksiyonuna da $F(x)$ dağılım fonksiyonunun kuyruğu denir. Dağılım fonksiyonları tesadüfi değişkenlerin yapısına ve elde edilmesine bağlı olarak farklılık göstermektedir. Örneğin tesadüfi değişken reel sayıların sürekli bir alt aralığında değer alıyorsa sürekli dağılım fonksiyonu, sayılabilir bir alt aralığında değer alıyorsa kesikli dağılım fonksiyonu isimlerini almaktadır. Bunun yanında tesadüfi değişkenin değer kümesi hem reel sayıların sürekli bir aralığı hem de reel sayıların sayılabilir bir aralığından oluşabilir. Bu durumda dağılım fonksiyonunu sürekli veya kesikli şekilde isimlendirmek mümkün değildir. Ayrıca bir dağılım fonksiyonu farklı iki dağılım fonksiyonunun konvolüsyonu şeklinde elde edilebilir. Bu durumda ise elde edilen dağılım fonksiyonuna mixture dağılım fonksiyonu denilmektedir. Her bir tesadüfi değişkene bir dağılım fonksiyonu karşılık geleceği gibi aynı zamanda her bir dağılım fonksiyonuna da uygun bir tesadüfi değişken karşılık getirilebilmektedir.

2.3 Beklenen Değer

Bir tesadüfi değişkenin en önemli karakteristiklerinden birisi beklenen değeridir. Beklenen değer tesadüfi değişkenin ortalaması olarak da kabul edilmektedir. Bir tesadüfi değişkenin beklenen değeri her zaman var olamayabilir. Reel sayıların sayılabilen alt aralıklarında değer alan tesadüfi değişkenler için beklenen değer aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı, $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ise birbirinden farklı $x_1, x_2 \dots$ değerlerini alan tesadüfi değişken olsun. Bu tesadüfi değişken $A_n = \{X = x_n\}$ olmak üzere

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n I_{A_n}(\omega), \omega \in \Omega \quad (2.3.1)$$

Şeklinde gösterilebilir. Çünkü bu eşitliğin sol ve sağ tarafları her bir $\omega \in A_k$ için aynı bir x_k değerini almaktadır, burada I_A ile A olayın indikatörü gösterilmektedir. Aşağıdaki varsayım altında

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| Pr(X = x_n) < \infty$$

bir X tesadüfi değişkeninin beklenen değeri şu formülle hesaplanmaktadır:

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| Pr(X = x_n) \quad (2.3.2)$$

EX sayısına X' in beklenen değeri veya ortalaması veya birinci moment denir. E operatörüne ise beklenti operatörü adı verilir.

Bir tesadüfi değişkenin alabileceği değerlerin reel sayılar doğrusunda nasıl yerleştiğini karakterize etmek için çeşitli sayısal göstergeler kullanılmaktadır. EX bu göstergelerden birisidir ve X tesadüfi değişkeninin alabileceği değerler bu gösterge civarında guruplaşmaktadır.

Beklenen değer tanımı (2.3.2) serisinin mutlak yakınsak olma koşulu önemlidir. Bu koşul altında EX ortalama X tesadüfi değişkeninin değerlerinin sıralanışına bağlı değildir, çünkü (2.3.2) serisinin toplamı terimlerin keyfi yer değiştirmesi sonucu değişmez. Pozitif değerli tesadüfi değişkenin beklenen değeri pozitif terimli serinin toplamı olduğundan sonlu veya sonsuzdur. (2.3.2) serisi mutlak yakınsak olmadığı halde

EX sonlu veya sonsuz olabilir veya mevcut olmayabilir. Bu durumların her birisi için beklenen değeri mevcut değildir.[17]

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir tesadüfi değişken ve her bir X_n kesikli tesadüfi değişken olmak üzere $X_n \Rightarrow X$, $\omega \in \Omega$ düzgün yakınsaklık şartı sağlansın. Bu durumda

$$EX = \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n \quad (2.3.3)$$

limitine X tesadüfi değişkeninin beklenen değeri veya ortalaması veya 1-inci momenti denir. (2.3.3) ifadesi birbirine denk olacak şekilde farklı biçimlerde yazılabilmektedir. Örneğin reel analiz bakımından X ölçülebilen fonksiyon, EX ise X tesadüfi değişkeninin P olasılık ölçüsüne göre Ω üzerinde integralidir ve aşağıdaki integral formunda yazılabilir,

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) dP \quad (2.3.4)$$

Beklenen değeri tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonu kullanılarak Riemann-Stieltjes integrali formunda da aşağıdaki şekilde elde edilebilir,

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (2.3.5)$$

Burada F ile X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu gösterilmiştir. (2.3.5) integralinin var olabilmesi için aşağıdaki şartın sağlanması gerekmektedir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$$

2.4 Beta Dağılımı ve Genel Özellikleri

Beta dağılımı mutlak sürekli dağılım fonksiyonları ailesi içerisinde önemli bir yere sahiptir. İlk olarak 1895 yılında Karl Pearson tarafından ortaya konulan beta fonksiyonu ve bu fonksiyonun özellikleri sonraki yıllarda bazı araştırmacılar tarafından istatistiksel anlamda incelenerek bir dağılım fonksiyonu formunda düzenlenmiştir. Aşağıdaki kısımda

beta dağılımına öncülük eden beta fonksiyonunun önemli özelliklerinden birkaçını açıklayalım.

Beta fonksiyonu, $\alpha > -1, \beta > -1$ ve $[a,b]$ reel bir aralık olmak üzere aşağıdaki eşitlikle tanımlanır,

$$b(x, \alpha, \beta, a, b) = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta \quad (2.4.1)$$

Beta integrali ise

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) = \int_a^b b(x, \alpha, \beta, a, b) dx \quad (2.4.2)$$

Eşitliği ile tanımlanır. Özel olarak $[a, b] = [0, 1]$ olması durumunda beta fonksiyonu

$$b(x, \alpha, \beta) = x^\alpha (1 - x)^\beta \quad (2.4.3)$$

formuna dönüşecektir. Bu durumda ise beta integrali

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) = \int_0^1 b(x, \alpha, \beta) dx = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \quad (2.4.4)$$

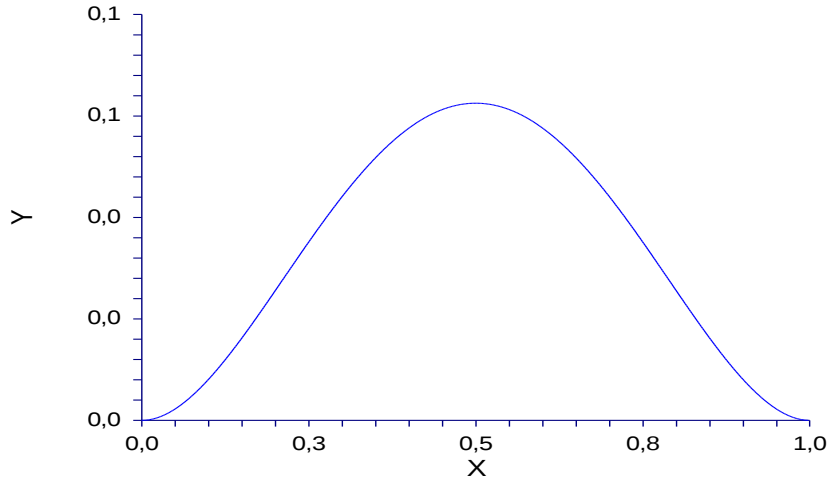
şeklinde yazabiliriz. Yukarıdaki (2.4.4) numaralı eşitlik beta integrali ile gamma integrali arasındaki bağıntıyı ortaya koymaktadır. Şöyle ki;

$u = (1 - x)^\beta, dv = x^\alpha dx$ yardımıyla kısmi integrasyon yöntemini uygularsak ve işlemi ardışık devam ettirirsek aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz,

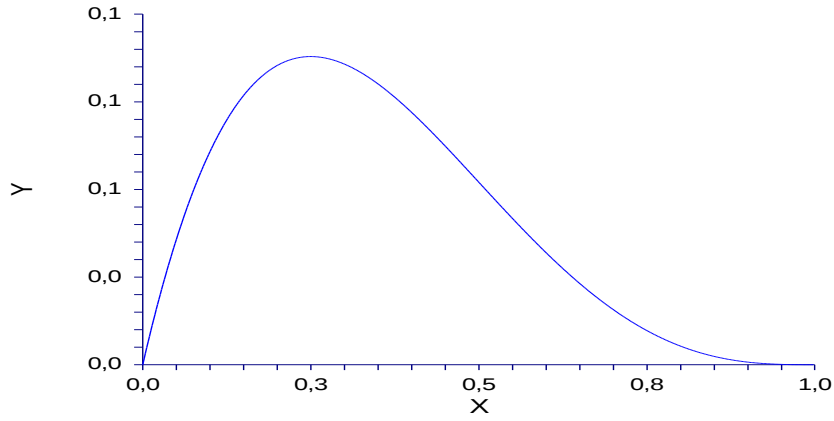
$$\begin{aligned} B(\alpha + 1, \beta + 1) &= \frac{\beta}{\alpha + 1} B(\alpha + 2, \beta) \\ &= \frac{\beta(\beta - 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} B(\alpha + 3, \beta - 1) \\ &\vdots \\ &= \frac{\beta(\beta - 1) \dots 2.1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}.$$

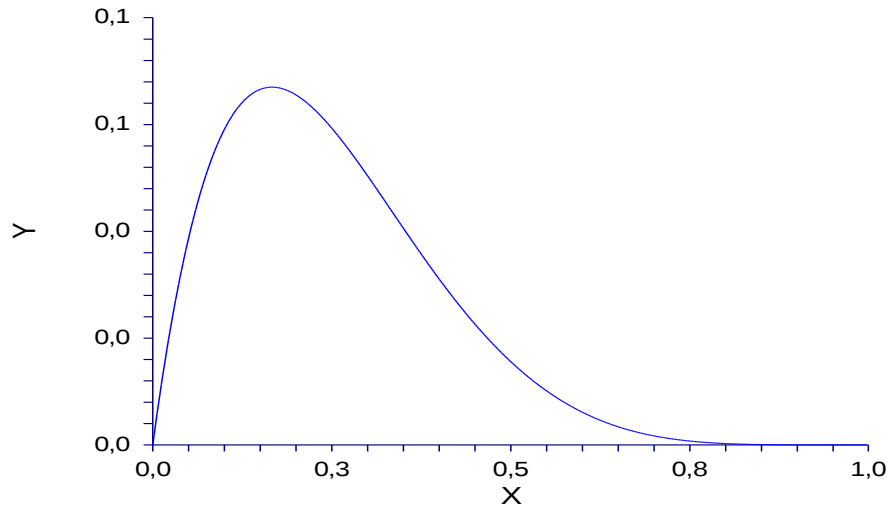
Beta fonksiyonunun α ve β sabitlerinin bazı sayısal değerlerine karşılık gelen grafiklerini inceleyelim.



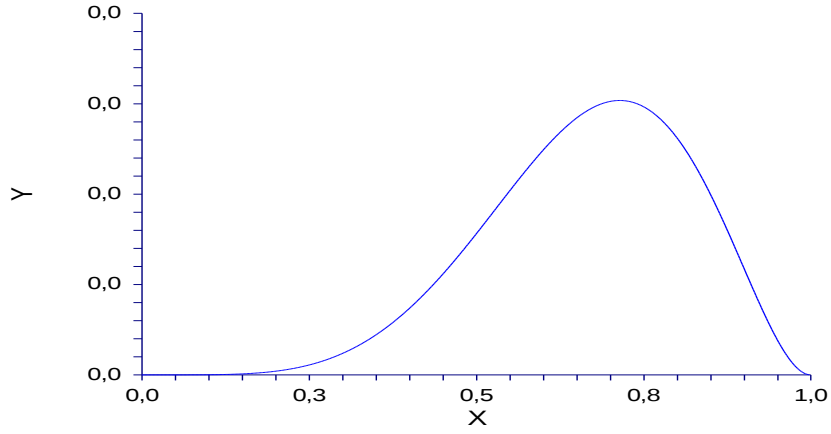
Şekil 1: $\alpha=2$ ve $\beta=2$ için beta fonksiyonunun grafiği



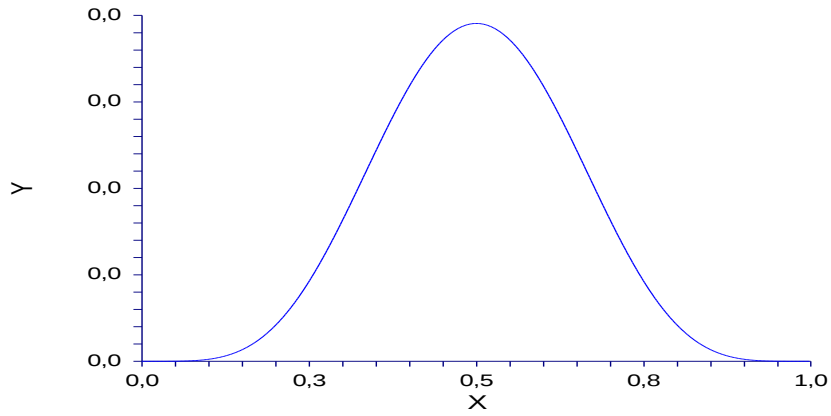
Şekil 2: $\alpha=1$ ve $\beta=3$ için beta fonksiyonunun grafiği



Şekil 3: $\alpha= 1$ ve $\beta= 5$ için beta fonksiyonunun grafiği



Şekil 4: $\alpha= 5$ ve $\beta= 2$ için beta fonksiyonunun grafiği



Şekil 5: $\alpha= 5$ ve $\beta= 5$ için beta fonksiyonunun grafiği

Beta dağılımına sahip X tesadüfî değişkeninin yoğunluk fonksiyonu, beta fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} b(x, \alpha - 1, \beta - 1)$$

burada $0 \leq x \leq 1$, $\alpha, \beta > 0$ alınmalıdır. Beta dağılımı başta endüstriyel mühendislik ve yöneylem araştırması olmak üzere birçok alanlarda kullanılabilmektedir. Belirli bir minimum değer ile belirli bir maksimum değer aralığı içinde sınırlanmış olayların ortaya çıkması şeklindeki pratik sorunların modellenmesi ve CPM tipi proje idaresi ve kontrolü kuramında, olasılıksal aktivite gösteren uzunluklarının tahmini için de kullanılmaktadır.

Beta dağılımın belirli karakteristikleri, beklenen değeri, varyansı ve sıfıra göre k -inci momenti ile $(k - 1)$ -inci momenti arasındaki recurrent ilişki aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$\begin{aligned} EX &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ VarX &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\ EX^k &= \frac{\alpha + k - 1}{\alpha + \beta + k - 1} EX^{k-1} \end{aligned}$$

$X_1, \dots, X_n$, α ve β parametrelerine sahip beta dağılımından seçilen örnek birimleri olmak üzere örneklem ortalaması ve varyansı sırasıyla,

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

olmak üzere α ve β parametrelerinin moment tahmin edicileri sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\hat{\alpha} = \bar{X} \left[\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{s^2} - 1 \right]$$

$$\hat{\beta} = \left[\frac{(1 - \bar{X})\hat{\alpha}}{\bar{X}} \right]$$

3. BULGULAR

3.1 Genelleştirilmiş Beta Dağılımı

Beta dağılımı sürekli dağılım fonksiyonları ailesi içerisinde diğer dağılım fonksiyonlarından daha esnek bir yapıya sahip olması reel uygulamalarda daha pratik olarak kullanılabilme avantajını kazandırmaktadır. α ve β parametrelerinin farklı seçimleriyle beta fonksiyonunun grafiğinin esnek bir şekilde değişim göstermesi ikinci bölümde yer alan grafiklerde incelenmiştir. Bunun yanı sıra son yıllardaki araştırmalarda bu esnekliğin daha fazla sağlanabilmesi için beta dağılımı üzerinde bir takım genelleştirmelere gidilerek farklı fonksiyonel formlarda dağılım fonksiyonları elde edilmiştir. Bu genelleştirmelerde aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan Gauss hipergeometrik fonksiyonun kullanılması oldukça önemlidir.

$(z)_k$ aşağıdaki eşitlikteki gibi olmak üzere,

$$(z)_k = z(z+1) \dots (z+k-1) \quad (3.1.1)$$

$$= \frac{(z-1+k)!}{(z-1)!} \quad (3.1.2)$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k x^k}{(c)_k k!} \quad (3.1.3)$$

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k x^k}{(d)_k (e)_k k!} \quad (3.1.4)$$

eşitlikleri ile tanımlanmaktadır. Burada $(0)_k = 1$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durumda genelleştirilmiş beta değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \frac{bB(a,b)}{(a+b)B(a,b+\gamma)} x^{a+b} {}_2F_1(1-\gamma, a; a+b+1; x) \quad (3.1.5)$$

ve yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{bB(a,b)}{B(a,b+\gamma)} x^{a+b-1} {}_2F_1(1-\gamma, a; a+b; x) \quad (3.1.6)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Burada $0 < x < 1$ ve $a > 0, b > 0, \gamma > 0$ olmalıdır. Yukarıda (3.1.5) formunda ifade edilen GB dağılım fonksiyonu Prudnikov tarafından elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş beta dağılımının orjine göre n -inci momenti ise

$$E(X^n) = \frac{bB(a,b)}{(n+a+b)B(a,b+\gamma)} {}_3F_2(1-\gamma, a, n+a+b; a+b, n+a+b+1; 1) \quad (3.1.7)$$

şeklinde olur. Ayrıca $h(x) = f(x)/\{1 - f(x)\}$ Hazard fonksiyonu

$$h(x) = \frac{b(a+b)B(a,b)x^{a+b-1} {}_2F_1(1-\gamma, a; a+b; x)}{(a+b)B(a,b+\gamma) - bB(a,b)x^{a+b} {}_2F_1(1-\gamma, a; a+b+1; x)} \quad (3.1.8)$$

şeklinde elde edilir.[4]

Yukarıda (3.1.5) eşitliği ile verilen dağılım fonksiyonunda hipergeometrik fonksiyon ve beta fonksiyonu açık olarak yazılacak olursa GB dağılımının aşağıdaki sonsuz toplam şeklinde yazılan dağılım fonksiyonu elde edilir,

$$F(x) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_k (a)_k x^{a+b+k}}{(a+b)_k (a+b+k)k!}, \quad 0 < x < 1 \quad (3.1.9)$$

Burada $\Gamma(a)$ ile gamma fonksiyonu gösterilmektedir. (3.1.5) ve (3.1.9) ifadelerinin eşitliklerinden aşağıdaki önemli sonuç elde edilir,

$$(a+b)(a+b+1)_k = (a+b)_k (a+b+k) \quad (3.1.10)$$

Bu eşitlik tümevarım yardımı ile de kolaylıkla gösterilebilir. Aynı zamanda GB dağılımının yoğunluk fonksiyonu açık formda aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$f(x) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_k (a)_k x^{a+b+k-1}}{(a+b)_k k!}, \quad 0 < x < 1$$

Şimdi GB dağılımının bazı özel durumlarını inceleyelim.

3.2 Genelleştirilmiş Beta Dağılımının Özel Durumları

GB dağılımı a, b, γ olmak üzere üç parametreden oluşmaktadır. Bu bölümde GB dağılımının bu parametrelerinin bazı sayısal değerlerine karşılık dağılımın alacağı şekilleri inceleyelim.

1. GB dağılımının parametrelerini $a + b = 1$ ve $\gamma = 1$ alalım. Bu durumda (3.1.10) eşitliği ile verilen GB dağılımının dağılım fonksiyonunda yer alan hipergeometrik fonksiyon sonsuz toplam yerine, $(0)_k = 1$ olacağından, tek terimden oluşacaktır. Aynı zamanda

$$\frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)} = 1, \quad a + b = 1, \quad \gamma = 1$$

olacağından (3.1.9) ifadesindeki GB dağılım fonksiyonu

$$F(x) = x, \quad 0 < x < 1$$

düzgün dağılım fonksiyonuna dönüşecektir.

2. GB dağılım fonksiyonunda aşağıdaki dönüşüm yapıldığında

$$x = 1 - e^{-u}, \quad 0 < u < \infty$$

GB dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekle dönüşür,

$$F(u) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_k (a)_k (1-e^{-u})^{a+b+k}}{(a+b)_k (a+b+k)k!} \quad (3.2.1)$$

Yukarıdaki eşitlikte yazılan $F(u)$ genelleştirilmiş bir üstel dağılım fonksiyonudur. Üstel dağılım ailesi içerisinde birçok genelleştirilmiş formlar mevcut olmakla birlikte (3.2.1) eşitliği ile belirtilen genelleştirme de üstel dağılım ailesi içerisinde önemli bir yere sahip olacaktır. Bu dağılım fonksiyonunda $a + b = 1$ ve $\gamma = 1$ olarak alındığında

$$F(u) = 1 - e^{-u}, \quad 0 < u < \infty$$

$\lambda = 1$ parametrelili üstel dağılım fonksiyonu elde edilir. (3.2.1) eşitliği ile ifade edilen dağılım fonksiyonu aşağıdaki forma rahatlıkla dönüştürülebilir,

$$F(u) = C \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sum_{j=0}^{a+b+k} \binom{a+b+k}{j} (-1)^{a+b+k-j} e^{-(a+b+k-j)u}$$

Burada C ve C_k aşağıdaki eşitliklerdeki gibidir,

$$C = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)}$$

$$C_k = \frac{(1-\gamma)_k (a)_k}{(a+b)_k (a+b+k)k!}$$

3. GB dağılımının beklenen değeri $\gamma = 1$ için,

$$EX = \frac{a+b}{a+b+1}$$

$\gamma = 2$ için,

$$EX = \frac{1}{b+1} \left\{ 1 - \frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+2)} \right\}$$

$\gamma = 3$ için

$$EX = \frac{(a+b+2)(a+b)}{(b+2)(b+1)} \left\{ 1 - \frac{2a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+2)} + \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+3)} \right\}$$

şeklini alır. GB dağılımının n -inci momenti tüm $\gamma > 0$ için aşağıdaki formda olacaktır,

$$EX^n = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}{(a+b+1)\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_k (a)_k (n+a+b)_k}{(a+b)_k (n+a+b+1)_k k!}$$

4. Dağılım fonksiyonu özelliğinden aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_k (a)_k}{(a+b)_k (a+b+k)k!} = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}$$

5. GB dağılım fonksiyonunun özelliğinden her bir $a > 0$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$1 + \frac{ax}{1!} + \frac{a(a+1)x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)x^3}{3!} + \dots = (1-x)^{-a}$$

3.3 Genelleştirilmiş Beta Dağılımının Parametrelerinin Bulunması

GB dağılımı parametrelerin sayısal değerlerine göre esnek bir dağılım fonksiyonu grafiği sergilemektedir. Bu özelliğinden dolayı birçok deneysel veriye uyum sağlar. Ancak deneysel bir veri alındığında bu veriye uyum gösteren GB dağılımının parametreleri nasıl bulunabilir? Bu problemin çözümü uygulamalı istatistikte oldukça önemlidir. Büyük sayılar yasasına göre belli bir büyüklükte gözlem sayısı elde edildiğinde verinin dağılımının normal dağılıma yaklaştığı bilinmektedir. Ancak bu yaklaşmanın ölçüsü yine de belli bir hata payını oluşturmakta veya küçük çaplı gözlemler için veri normal dağılıma uymamaktadır. Bu tipli problemlerde GB dağılımı oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Matlab bilgisayar programı kullanılarak Kolmogorov-Smirnov testi yardımıyla GB dağılımının veriye uygun parametrelerinin bulunması sağlanmıştır.

Komogorov-Simirnov test istatistiği

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \quad (3.3.1)$$

şeklindedir. Burada F_n deneysel dağılım fonksiyonu, F teorik dağılım fonksiyonu, n ise örneklem hacmini gösterir. Kolmogorov teoremine göre F için $\sqrt{n}D_n$ 'nin limit dağılımı

$$K(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(\sqrt{n}D_n < t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 t^2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

şeklindedir. Kolmogorov'un bu teoremi (3.3.1) eşitliği ile gösterilen limit dağılımının bulunması açısından oldukça önemlidir. Böylelikle örneklem hacmi n büyük ise, o zaman deneysel dağılım fonksiyonu $F_n(x)$ her bir $x \in R$ için teorik dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'e çok yakın olur ve buna göre bilinmeyen $F(x)$ için tahmin edici kabul edilebilir.

Kolmogorov–Simirnov (KS) testinin akış algoritması aşağıdaki gibi olur.

a) Örneklem değerlerine dayanarak D_n istatistiği hesaplanır.

b) $0 < a < 1$ anlamlılık düzeyi seçilir ve $K(t)$ fonksiyonunun tablosundan $1 - K(t) = a$ denklemini sağlayan $t = t_{kr}(n, a)$ kritik değeri bulunur.

c) $H_0: F(x) = F$ hipotezi $D_n > t_{kr}$ ise ret, aksi halde kabul edilir.

Görüldüğü gibi KS testi bir teorik dağılımın örneklem dağılımına ne derece iyi uyduğunu belirlemektedir. Dolayısıyla bu test teorik ve deneysel dağılımlar arasındaki uyum derecesini açıklamaktadır. Şimdi KS testi ile ilgili bazı önemli noktaları ele alalım.[17]

(i) (3.3.1)'deki test istatistiği

$$D_n = \sup\{|F_n(x_k) - F(x_k)|, |F_n(x_k + 0) - F(x_k + 0)| : k = 1, 2, \dots, n\}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu gösterimden görülüyor ki D_n test istatistiğinin hesabını yaparken $|F_n(x_k) - F(x_k)|$ mutlak değerinin tüm x tesadüfi değişkenleri için değil, $2n$ sayıda x_k tesadüfi değişkenleri için hesaplamak yeterlidir. $K(t)$ dağılımı değer tablosundan yararlanarak a 'nın aşağıda gösterilen değerleri için $1 - K(t) = a$ denklemini sağlayan $t = t_{kr}(n, a)$ kritik değeri verilmiştir.

$$a = 0.01 \Rightarrow t_a = 1.63\sqrt{n}$$

$$a = 0.05 \Rightarrow t_a = 1.36\sqrt{n}$$

$$a = 0.1 \Rightarrow t_a = 1.22\sqrt{n}$$

(ii) Ki-kare testi $n \geq 50$ için uygulanabildiği halde, KS testi için bu sayının $n \leq 20$ olması yeterlidir. Böylelikle ki-kare testi küçük hacimli örneklem için uygulanmadığı halde KS testi uygulanabilir. KS testi her bir örneklem değerini ele aldığından ki-kare testinin aksine örneklem aralıklara göre gruplaşmasından doğan bilgi kaybına yol açmaz.

Bu bilgiler doğrultusunda KS testinin ki-kare testinden daha kuvvetli olduğunu söylenilebilir.[17]

GB dağılımının parametrelerinin hesaplanmasında KS testi kullanılırken aşağıda Matlab paket programı kullanılarak yazılan şemada seçilen güven seviyesine göre test istatistiğinin kritik değeri, elde edilen deneysel dağılım fonksiyonu değerleri ve GB dağılımının parametrelere göre dağılım fonksiyonu değerlerinin hesaplanabilmesi için GB dağılımının tanım aralığına uyarlanmış veri değerleri girilerek program çalıştırılmaktadır.

Hazırlanan program aşağıdaki gibidir,

```
clear all; close all; clc;

E=0.1;

a=4*rand(1,1); b=4*rand(1,1);  $\gamma$  =4*rand(1,1);

x=[0 0.22 0.463 0.481 0.55 0.703 0.74 0.796 0.907 0.926 1];

S=[0 0.042 0.125 0.208 0.416 0.541 0.583 0.708 0.833 0.916 1];

for c=0:10
    c=c+1;
    f=((gamma(b+1)*gamma( $\gamma$  +a+b))/(gamma(b+  $\gamma$ )*gamma(b+a+1)))*(x(c)^(a+b));
    A(c)=f*(hypergeom([1-  $\gamma$ ,a],a+b+1,x(c)));
    M(c)=abs(S(c)-A(c));
end
M=max(M);
while M>E
    a=4*rand(1,1); b=4*rand(1,1);  $\gamma$  =4*rand(1,1);
    x=[0 0.22 0.463 0.481 0.55 0.703 0.74 0.796 0.907 0.926 1];
    S=[0 0.042 0.125 0.208 0.416 0.541 0.583 0.708 0.833 0.916 1];

    for c=0:10
        c=c+1;
        f=((gamma(b+1)*gamma( $\gamma$  +a+b))/(gamma(b+  $\gamma$ )*gamma(b+a+1)))*(x(c)^(a+b));
        A(c)=f*(hypergeom([1-  $\gamma$ ,a],a+b+1,x(c)));
        M(c)=abs(S(c)-A(c));
    end
    M=max(M);
```

end

M

Yukarıdaki programda girilen veriler ve gözlenme frekansları aşağıdaki tabloda olduğu gibidir,

Tablo 1.1: Verilerin gözlem ve frekans değerleri

Sıra no:	Gözlem Değeri	Gözlem Frekansı
1	1.2	1
2	2.5	2
3	2.6	2
4	3	5
5	3.8	3
6	4	1
7	4.3	3
8	4.9	3
9	5	2
10	5.4	2
		Toplam Gözlem = 24

Tablodaki verilerden gözlem sayısı $n = 24$, anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.1$ ve KS tablo değeri $0.1(0.242)$ alınarak işlem yapılmıştır. [19] Hazırlanan program çalıştırılarak $a = 2.9448$, $b = 0.4237$ ve $\gamma = 2.7262$ olarak bulunmuştur. Sonuç olarak tablodaki gözlenen veriler a , b ve γ parametreleri sırasıyla 2.9448 ; 0.4237 ; 2.7262 olan GB dağılımına uymaktadır.

3.4 Mixture GB Dağılımı

Parametreye sahip teorik bir dağılım fonksiyonunun bir parametresinin değişim aralığına göre dağılımı belirlenerek, belirlenen dağılım fonksiyonunun üzerinden Stieltjes integrali alınarak elde edilen yeni dağılıma bu iki dağılımın karışımı veya mixture dağılımı

denilmektedir. Bu tipli dağılımlar istatistik dağılımları içerisinde oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Mixture dağılım fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle tanımlanmaktadır,

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \alpha) dH(\alpha)$$

Burada $H(\alpha)$ ile α parametresinin dağılımı gösterilmektedir.

Çalışmanın bu bölümünde GB dağılımının γ parametresinin olasılık dağılımı keyfi seçilerek mixture dağılımı elde edilecektir. γ parametresi $\gamma = 1$ ve $\gamma = 2$ değerlerini aşağıdaki olasılıklarla alsın,

$$\Pr(\gamma = 1) = 1/2$$

$$\Pr(\gamma = 2) = 1/2$$

Bu durumda GB dağılımın seçilen bu olasılık dağılımına göre Stieltjes integrali

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+\gamma)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_k (a)_k x^{a+b+k}}{(a+b)_k (a+b+k)!} dH(\gamma)$$

şeklinde olup bu integralin hesaplanmış şekli aşağıdaki gibi elde edilir,

$$G(x) = \frac{x^{a+b}}{2} + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2(b+1)} \left\{ \frac{x^{a+b}}{a+b} - \frac{a x^{a+b+1}}{(a+b)(a+b+1)} \right\}$$

elde edilen yukarıdaki mixture dağılım fonksiyonunda γ parametresinin etkisi seçilen dağılım yoluyla kaldırılmıştır. Şimdi γ parametresinin $\gamma = 1/2$ ve $\gamma = 1$ değerlerini alma olasılıkları aşağıdaki gibi olsun,

$$\Pr(\gamma = 1/2) = 1/2$$

$$\Pr(\gamma = 1) = 1/2$$

Bu durumda GB dağılımın seçilen bu olasılık dağılımına göre Stieltjes integrali aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$G(x) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+1/2)}{2\Gamma(a+b)\Gamma(b+1/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k (a)_k x^{a+b+k}}{(a+b)_k (a+b+k)k!} + \frac{1}{2}$$

Şimdi yukarıda elde edilen mixture dağılımın bir sonucu olan aşağıdaki teoremi ifade edelim,

Teorem: π sayısı hipergeometrik fonksiyon türünden aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$\pi = 4 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (a)_k}{(a+b)_k (a+b+k)k!} \right\}^{-1}$$

İspat: Dağılım fonksiyonu özelliğinden yukarıda elde edilen mixture dağılımda $x = 1$ alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (a)_k}{(a+b)_k (a+b+k)k!} = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b+1/2)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+1/2)}$$

Bu eşitlikte $a = 1/2$ ve $b = 1/2$ alındığında

$$\frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+1/2)\Gamma(1+1/2)} = \frac{4}{\pi}$$

eşitliğinden istenen sonuç elde edilir.

3.5 Genelleştirilmiş Beta Dağılımının Olasılık Tabloları

Tablo 1.2: $a=1$, $b=1$ ve $\gamma=2$ değerleri için GB dağılımı olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0001495	0.000596	0.0013365	0.002368	0.0036875	0.005292	0.0071785	0.009344	0.0117855
0.1	0.0145	0.0174845	0.020736	0.0242515	0.028028	0.0320625	0.036352	0.0408935	0.045684	0.0507205
0.2	0.056	0.0615195	0.067276	0.0732665	0.079488	0.0859375	0.092612	0.0995085	0.106624	0.113956
0.3	0.1215	0.129255	0.137216	0.145382	0.153748	0.162313	0.171072	0.180024	0.189164	0.198491
0.4	0.208	0.21769	0.227556	0.237597	0.247808	0.258188	0.268732	0.279439	0.290304	0.301326
0.5	0.3125	0.323825	0.335296	0.346912	0.358668	0.370563	0.382592	0.394754	0.407044	0.419461
0.6	0.432	0.44466	0.457436	0.470327	0.483328	0.496438	0.509652	0.522969	0.536384	0.549895
0.7	0.5635	0.577195	0.590976	0.604842	0.618788	0.632813	0.646912	0.661084	0.675324	0.689631
0.8	0.704	0.71843	0.732916	0.747457	0.762048	0.776688	0.791372	0.806098	0.820864	0.835666
0.9	0.8505	0.865364	0.880256	0.895172	0.910108	0.925062	0.940032	0.955014	0.970004	1

Tablo1.3: $a=1$, $b=1$ ve $\gamma=0.5$ değerleri için GB dağılımı olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0000751255	0.000301008	0.000678414	0.00120812	0.00189093	0.00272763	0.00371904	0.004866	0.00616935
0.1	0.00762994	0.00924864	0.0110263	0.012964	0.0150624	0.0173226	0.0197954	0.022332	0.0250832	0.028
0.2	0.0310835	0.0343347	0.0377547	0.0413445	0.0451053	0.0490381	0.0531441	0.0574245	0.0618805	0.0665133
0.3	0.071324	0.0763141	0.0814847	0.0868373	0.0923731	0.0980935	0.104	0.110094	0.116377	0.12285
0.4	0.129516	0.136375	0.14343	0.150681	0.158131	0.165782	0.173635	0.181692	0.189955	0.198426
0.5	0.207107	0.216	0.225108	0.234432	0.243974	0.253738	0.263726	0.27394	0.284382	0.295056
0.6	0.305964	0.31711	0.328495	0.340124	0.352	0.364126	0.376505	0.389141	0.402039	0.415201
0.7	0.428634	0.44234	0.456324	0.470592	0.485149	0.5	0.515151	0.530608	0.546378	0.562468
0.8	0.578885	0.595638	0.612735	0.630186	0.648	0.66619	0.684766	0.703744	0.723138	0.742966
0.9	0.763246	0.784	0.805255	0.827041	0.839394	0.872361	0.896	0.920392	0.945657	1

Tablo1.4: a=1, b=1 ve $\gamma=1.5$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.000124791	0.000498329	0.0011935	0.0019866	0.00309879	0.00445466	0.0060529	0.00789224	0.00997137
0.1	0.012289	0.0148438	0.0176344	0.0206595	0.0239179	0.0274081	0.0311287	0.0350785	0.0392561	0.04366
0.2	0.0482889	0.0531415	0.0582162	0.0635118	0.0690267	0.0747595	0.0807089	0.0868733	0.0932513	0.0998415
0.3	0.106642	0.113652	0.12087	0.128294	0.135924	0.143754	0.151787	0.16002	0.168451	0.17708
0.4	0.185903	0.19492	0.20413	0.213529	0.223118	0.232892	0.242854	0.252999	0.263325	0.273832
0.5	0.284518	0.29538	0.306417	0.317628	0.329009	0.340561	0.35228	0.364165	0.376214	0.388424
0.6	0.400795	0.413324	0.426009	0.438849	0.45184	0.464981	0.478271	0.491706	0.505284	0.519004
0.7	0.532863	0.546859	0.56099	0.575253	0.589646	0.604167	0.618812	0.63358	0.648468	0.663473
0.8	0.678592	0.693824	0.709164	0.724611	0.74016	0.755809	0.771556	0.787396	0.803326	0.819302
0.9	0.835442	0.85162	0.867873	0.884198	0.900588	0.917039	0.933547	0.950104	0.966704	1

Tablo 1.5: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=0.5$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0000000073063	0.000000117137	0.000000594209	0.00000188183	0.00000460174	0.00000956603	0.0000177591	0.0000303594	0.0000487321
0.1	0.0000744324	0.000109208	0.000155002	0.000213954	0.000288401	0.000380886	0.000494153	0.000631151	0.000795043	0.0009892
0.2	0.00121721	0.00148287	0.00179021	0.00214348	0.00254715	0.00300592	0.00352473	0.00410874	0.00476337	0.00549426
0.3	0.00630733	0.00720871	0.00820482	0.0093023	0.0105081	0.0118294	0.0132736	0.0148485	0.0165622	0.0184228
0.4	0.020439	0.0226198	0.0249742	0.0275117	0.0302423	0.033176	0.0363232	0.0396948	0.0433018	0.04715559
0.5	0.0512686	0.0556524	0.0603197	0.0652835	0.070557	0.0761541	0.0820889	0.0883759	0.0950302	0.102067
0.6	0.109503	0.117353	0.125635	0.134367	0.143565	0.153248	0.163436	0.174148	0.185404	0.197205
0.7	0.209631	0.222646	0.236291	0.250591	0.265569	0.28125	0.297661	0.314827	0.332777	0.35154
0.8	0.371144	0.391621	0.413002	0.43532	0.458611	0.48291	0.508155	0.534685	0.562241	0.590966
0.9	0.620907	0.652112	0.684631	0.718521	0.755384	0.790653	0.82903	0.869051	0.910807	1

Tablo 1.6: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=1.5$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0000000130987	0.000000209158	0.00000105672	0.00000333298	0.00000817057	0.0000168043	0.000031068	0.000052891	0.0000845452
0.1	0.000128591	0.000187875	0.000265527	0.000364952	0.000489835	0.000644129	0.000832058	0.00105811	0.00132703	0.00164383
0.2	0.00201377	0.00244236	0.00293535	0.00349875	0.0041388	0.00486196	0.00567495	0.00658469	0.00779835	0.0087233
0.3	0.00996712	0.0113376	0.0128428	0.0144909	0.0162903	0.0182497	0.0203777	0.0226834	0.025176	0.0278648
0.4	0.0307593	0.0338691	0.0372042	0.0407745	0.0445901	0.0486615	0.0529989	0.057613	0.0625146	0.0667143
0.5	0.0732233	0.0790526	0.0852133	0.0917168	0.0985745	0.105798	0.113398	0.121388	0.129778	0.138581
0.6	0.147808	0.157471	0.167582	0.178154	0.189198	0.200726	0.212751	0.225284	0.238338	0.251925
0.7	0.266057	0.280746	0.296004	0.311843	0.328275	0.345312	0.362967	0.381249	0.400173	0.419748
0.8	0.439986	0.460899	0.482498	0.504794	0.527799	0.55152	0.575971	0.601161	0.627101	0.653799
0.9	0.681266	0.709511	0.738542	0.768367	0.798996	0.830434	0.86269	0.895769	0.929677	1

Tablo 1.7: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=2$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0000000166	0.000000264533	0.0000013338	0.0000041984	0.0000102083	0.0000210816	0.0000388962	0.0000660821	0.000105413
0.1	0.00016	0.00023328	0.000329011	0.000451264	0.000604412	0.000793125	0.00102236	0.00129736	0.00162363	0.00200694
0.2	0.00245333	0.00296908	0.00356069	0.00423493	0.00499876	0.00585938	0.00682417	0.00790076	0.00909691	0.0104206
0.3	0.01188	0.0134834	0.0152393	0.0171563	0.0192432	0.021509	0.0239625	0.0266131	0.0294699	0.0325424
0.4	0.03584	0.0393723	0.0431489	0.0471795	0.0514739	0.0560419	0.0608934	0.0660383	0.0714867	0.0772483
0.5	0.0833333	0.0897517	0.0965133	0.103628	0.1111107	0.118958	0.127193	0.135821	0.144851	0.154294
0.6	0.16416	0.174458	0.185197	0.196387	0.208037	0.220158	0.232757	0.245844	0.259427	0.273517
0.7	0.28812	0.303246	0.318903	0.335099	0.351842	0.369141	0.387001	0.405432	0.424439	0.444031
0.8	0.464213	0.484993	0.506376	0.528369	0.550978	0.574207	0.598062	0.622549	0.647671	0.673433
0.9	0.69984	0.726895	0.754601	0.782961	0.811979	0.841656	0.871996	0.902999	0.934666	1

Tablo 1.8: $a=2$, $b=2$ ve $\gamma=3$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0000000248005	0.000000393632	0.00000197676	0.00000619725	0.00000150078	0.0000308681	0.0000567224	0.0000959775	0.000152481
0.1	0.0002305	0.000334701	0.000470127	0.00064218	0.0008566	0.00111945	0.00143707	0.00181612	0.00226349	0.00278633
0.2	0.003392	0.00408809	0.00488236	0.00578277	0.00679743	0.00793457	0.00920258	0.01061	0.0121653	0.0138772
0.3	0.0157545	0.0178059	0.0200404	0.0224667	0.0250937	0.0279304	0.0309856	0.0342681	0.0377868	0.0415506
0.4	0.045568	0.0498478	0.0543987	0.0592229	0.0643473	0.0697619	0.075481	0.0815126	0.0878649	0.0945456
0.5	0.101563	0.108923	0.116635	0.124705	0.133141	0.141949	0.151137	0.16071	0.170675	0.181039
0.6	0.191808	0.202987	0.214582	0.226598	0.239042	0.251917	0.265229	0.278982	0.293181	0.307831
0.7	0.322935	0.338496	0.35452	0.371009	0.387966	0.405396	0.423299	0.44168	0.460541	0.479884
0.8	0.499712	0.520026	0.540828	0.56212	0.583904	0.60618	0.62895	0.65215	0.675977	0.700235
0.9	0.724991	0.750244	0.775997	0.802248	0.828999	0.85625	0.884	0.91225	0.941	1

Tablo 1.9: $a=2$, $b=3$ ve $\gamma=3.5$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.00000000241725	0.0000000076703	0.0000000577647	0.0000000241387	0.000000730488	0.00000180245	0.00000386308	0.00000746832	0.0000133447
0.1	0.0000224085	0.0000357838	0.0000548191	0.0000811034	0.00011648	0.000163062	0.000223241	0.000299701	0.000395431	0.00051373
0.2	0.000658216	0.000832838	0.00104188	0.00128996	0.00158205	0.00192347	0.00231988	0.00277733	0.00330219	0.0039012
0.3	0.00458148	0.0053505	0.00621607	0.00718638	0.00826997	0.00947573	0.0108129	0.0122911	0.0139203	0.0157107
0.4	0.017673	0.0198181	0.0221572	0.0247021	0.0274643	0.0304568	0.0336914	0.0371811	0.0409391	0.0449788
0.5	0.0493137	0.0539579	0.0589255	0.0642309	0.0698889	0.0759143	0.0823222	0.0891281	0.963476	0.103996
0.6	0.11209	0.120646	0.129679	0.139206	0.149244	0.15981	0.17092	0.182592	0.194844	0.207691
0.7	0.221152	0.235245	0.249987	0.265395	0.281488	0.298284	0.3158	0.334055	0.353067	0.372853
0.8	0.393433	0.414825	0.437046	0.460116	0.484052	0.508874	0.534599	0.561246	0.588834	0.617381
0.9	0.646905	0.677425	0.708961	0.741599	0.77515	0.80984	0.84562	0.882507	0.920521	1

Tablo 1.10: $a=2$, $b=1$ ve $\gamma=3$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0000033001	0.0000261365	0.0000873243	0.000204902	0.000396146	0.000677578	0.00106498	0.00157341	0.0022172
0.1	0.00301	0.00396404	0.00509368	0.00640843	0.00791992	0.00963844	0.0115807	0.0137346	0.0161298	0.0187669
0.2	0.0216533	0.0247957	0.0282002	0.0318723	0.0358171	0.0400391	0.0445423	0.0493302	0.0544058	0.0597717
0.3	0.06543	0.0713822	0.0776296	0.0841728	0.0910123	0.098148	0.105597	0.113306	0.121326	0.129638
0.4	0.13824	0.14713	0.156306	0.165574	0.175502	0.185515	0.195801	0.206355	0.217173	0.228251
0.5	0.239583	0.251166	0.262993	0.27506	0.287361	0.299891	0.312643	0.325613	0.338792	0.352177
0.6	0.36576	0.379535	0.393495	0.407635	0.421947	0.436425	0.451062	0.465852	0.480787	0.495862
0.7	0.51107	0.526404	0.541857	0.557822	0.573095	0.588867	0.604733	0.620687	0.636722	0.652833
0.8	0.669013	0.685258	0.701561	0.717917	0.734321	0.750768	0.767253	0.783772	0.800312	0.816895
0.9	0.83349	0.850103	0.866732	0.883372	0.900021	0.916677	0.933337	0.950001	0.966667	1

Tablo 1.11: $a=1$, $b=3$ ve $\gamma=2.5$ değerleri için olasılık değerleri

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0000000137088	0.000000218682	0.00000110375	0.0000034779	0.00000846538	0.0000175009	0.0000323245	0.0000549774	0.0000877964
0.1	0.00013341	0.000194732	0.000274959	0.000377565	0.000506296	0.000665165	0.00085845	0.00109068	0.00136666	0.00169141
0.2	0.00207023	0.00250864	0.00301239	0.00358749	0.00424015	0.00497681	0.00580414	0.0067291	0.00775851	0.008899992
0.3	0.0101608	0.0115487	0.0130716	0.0147376	0.0165549	0.018532	0.0206774	0.023	0.0255087	0.0282127
0.4	0.031121	0.0342436	0.0375897	0.041169	0.0449815	0.0490673	0.0534065	0.0580194	0.0629164	0.0681081
0.5	0.0736053	0.0794136	0.0855594	0.0920377	0.0988656	0.106054	0.113615	0.121558	0.129897	0.138642
0.6	0.147806	0.1574	0.167435	0.177925	0.188881	0.200315	0.21224	0.224667	0.237609	0.251079
0.7	0.265089	0.279651	0.294778	0.310482	0.326777	0.343676	0.361189	0.379332	0.398116	0.417554
0.8	0.43766	0.458446	0.479925	0.50211	0.525014	0.548651	0.573033	0.598173	0.624085	0.650782
0.9	0.678277	0.706582	0.735712	0.765679	0.796496	0.828177	0.860135	0.894183	0.928535	1

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Uygulamalı istatistikte yapılan birçok çalışmanın temelinde incelemelerden elde edilen reel verilerin dağılımının belirlenebilmesi problemi yatmaktadır. Bu problemin çözümü herhangi bir incelemede toplanan verilerin daha sağlıklı bir şekilde değerlendirilebilmesini ve istatistiksel sonuçların daha sağlıklı ve anlamlı olmasını sağlayacaktır. Özellikle bir verinin teorik bir dağılıma yüksek güvenle uymasının tespit edilmesi elde edilecek olan olasılıksal değerlerin daha doğru olmasını dolayısıyla güven bölgelerinin ve yapılacak olan hipotez testlerinin daha sağlıklı sonuç vermesini sağlar.

Yapılan reel uygulamalara dikkat edildiğinde genellikle ekonomik ve endüstriyel verilerde, verinin dağılımının belirlenmesi problemi günümüzde hala önemini büyük ölçüde korumaktadır. Bu alanlarda elde edilen verilerin hassasiyeti önemli olduğundan elde edilen verilerin teorik bir dağılıma uyumunun sağlanması yüksek güvenle olmalıdır. Bunun yanı sıra elde edilen verilerin azlığı da verinin teorik bir dağılıma uygunluğunun tespit edilebilmesini güçleştirmektedir. Büyük sayılar kanunu veri sayısının belli bir büyüklüğün üstünde olması durumunda normal dağılıma uygunluğunu garanti etmektedir. Ancak bu uyumun yüksek güven seviyesinde olmasını garanti edememektedir.

Tüm bunlardan dolayı çok parametrelili esnek yapıya sahip olan teorik dağılımlar ve bazı dağılımların genelleştirilmiş durumları ortaya çıkmıştır. Bu tipli dağılımların içerisinde en önemli olanlarından birisi de GB dağılımıdır. GB dağılımı zaten esnek bir yapıya sahip olan beta dağılımının bir genelleştirilmesi olduğundan genelleştirilmiş dağılımlar içerisinde daha fazla esnek bir yapıya sahip olan önemli bir dağılımdır. Yapılan bu çalışma GB dağılımının bu özelliğini açıkça vurgulaması açısından önemlidir. Çalışmada Kolmogorov-Smirnov testi kullanılarak GB dağılımının veriye uygun parametrelerinin bulunması yöntemi bu konuda büyük kolaylık sağlamaktadır.

Buna ilaveten bazı hipotez testlerinde test istatistiğinin belirlenmesi problemi de günümüzde gerek uygulamalı gerekse teorik istatistiğin halen önemli bir konusudur. GB dağılımının uygun parametrelerinin bulunması yöntemi test istatistiğinin aldığı değerlere göre dağılımının belirlenmesi problemine de çözüm sağlayabilecektir. Sonuç olarak yüksek güven seviyesinde dağılımı bilinen her türlü istatistiksel bilgi uygulama açısından oldukça önemlidir.

KAYNAKLAR

- [1] **Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (Eds.)** (1964) "Handbook of Mathematical Functions, Applied Mathematics Series", Vol. 55. National Bureau of Standards, US Department of Commerce, Washington, DC.
- [2] **Barlow, R.E. and Proschan, F.** (1975) "Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models". New York: Rinehart and Winston
- [3] **Cramer, H.** (1946) "Mathematical Methods of Statistics" *Princeton University Press*: New Jersey
- [4] **Nadarajah, S. and Kotz, S.** (2005) "A Generalized Beta Distribution II" The George Washington University, Washington, D.C
- [5] **Gupta, A. K. and Nadarajah S.** (2004) "Handbook of Beta Distribution and Its Applications" New York: *Marcel Dekker*
- [6] **Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.** (2000) "Table of Integrals, series, and products" San Diego: *Academic Press*.
- [7] **Olkin I., and Liu R.,** 2002 "A Bivariate Beta Distribution" Department of Statistics, Stanford University, *statistic & probability Letters*, Elsevier
- [8] **Tarone, R.E.** (1979) "Testing the goodness of fit of the binomial distribution", *Biometrika*
- [9] **Tong, Y.L.,** (1980) "Probability Inequalities in Multivariate Distributions". *Academic Press*, New York.
- [10] **Aytaç, M.,** (2004) "Matematiksel İstatistik" Ezgi Kitabevi, Bursa
- [11] **Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N.** (1995) "Continuous Univariate Distributions" volume 2. New York: *John Wiley and Sons*.
- [12] **Gordy, M.B.** April 8 (1988) "A generalization of generalized beta distributions" *Board of Governors of the Federal Reserve System, USA*
- [13] **Sepanski, J. H. And Kong, L.** (2007) "A Family of Generalized Beta Distributions for Income" *Huanghe Road Dalian, Liaoning, China*
- [14] **Parker, C. S.** (1988) "The generalized beta as a model for the distribution of earnings", *economics letters*, Elsevier
- [15] **Krishnamoorthy, K.** (2006) "Handbook of Statistical Distributions with Applications", University of Louisiana at Lafayette, Taylor & Francis Group, LLC, U.S.A.

- [16] **Kotz, S. and Dorp, J.R.** (2004) “Beyond Beta Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications”, World Scientific, The George Washington University, USA
- [17] **Shahbazov, A.** (2005) “Olasılık Teorisine Giriş”, Birsen Yayınevi, İstanbul
- [18] **Evans, M., Hastings, N. and Peacock, B.** (1993) “Statistical Distribution Second Edition” A Wiley-Interscience Publication *JOHN WILEY & SONS, INC.*
- [19] **Gangam, H.** (1989) “parametrik olmayan istatistiksel teknikler” G.Ü. Teknik eğitim fakültesi matbası, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ'da doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik bölümünü kazandı. Dört yıllık lisans öğreniminden sonra yine aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik anabilim dalında yüksek lisans yapmaya hak kazandı. 2010 yılında Tunceli Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Ekonometri Bölümüne araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen aynı yerde çalışmaya devam etmekte.