

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇOKLU SOLİTON ÇÖZÜMLERİ İÇİN
HİROTA METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra KARATAŞ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik
Danışman: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

ELAZIG – 2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇOKLU
SOLİTON ÇÖZÜMLERİ İÇİN HİROTA METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra KARATAŞ

111121114

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 13.06.2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 02.07.2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mustafa İNÇ
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Hasan BULUT
Yrd.Doç. Dr. Ünal İÇ

TEMMUZ-2013

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mustafa İNÇ'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren ve hep yanımda olan sevgili aileme ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

ESRA KARATAŞ

Elazığ-2013

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SİMGELER LİSTESİ	VII
GİRİŞ	1
1. BÖLÜM	1
1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	1
2. BÖLÜM	9
2.1. Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi	9
3. BÖLÜM	12
3.1. Hirota Bilineer Metodu	12
3.1.1. Hirota D-Operatörü	13
3.1.2. Hirota Pertürbasyon ve Multi-Soliton Çözümler	19
4. BÖLÜM	28
4.1. Sawada-Kotera Denklemi	28
4.2. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi	36
4.2.1. KdV Denklemlerinin Ailesi	37
4.2.2. (3+1) - Boyutlu KdV Denklemi	39
SONUÇ ve TARTIŞMA	48
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	55

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm olarak düzenlenmiştir.

İlk bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, soliton ve soliton etkileşimi hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Hirota Bilineer Metodu tanıtılmış ve metod matematik-fizikte önemli yer tutan lineer olmayan KdV ve KP diferansiyel denklemlerine uygulanarak bu denklemlerin multi-soliton çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Sawada-Kotera denklemi , KdV denklemleri ile ilgili açıklamalar verilmiş ve hirota metodu bu tip denklemlere uygulanarak, denklemlerin multi-soliton çözümleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Soliton, Hirota-bilineer metodu, KP denklemi, KdV denklemi, (3+1) - boyutlu KdV denklemi, Sawada - Kotera denklemi.

ABSTRACT

HIROTA METHOD FOR MULTI SOLITON SOLUTIONS OF SOME NON-LINEAR PARTIAL DIFERENTIAL EQUATIONS

This study is organized into four chapters.

In the first chapter, some basic definitions and theorems that will be used in the later sections are given.

The second chapter provides information about the interaction of solitons and soliton.

In the third chapter, Hirota bilinear method is introduced, this method is applied non-linear differential equations of KdV and KP which hold an important place in mathematical-physics and multi-soliton solutions of these equations have been obtained with Hirota bilinear method.

In the fourth chapter, explanations are given about Sawada-Kotera equation and KdV equations, Hirota bilinear method is applied this type equations and multi-soliton solutions of these equations are found.

Keywords: Soliton, Hirota-bilinear method, KP equation, KdV equation, (3+1) - dimensional KdV equation, Sawada - Kotera equation.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. SK denklemi için elde edilen 1-soliton çözümü, $k_1 = 1$	31
Şekil 4.2. SK denklemi için elde edilen 2-soliton çözümü, $k_1 = 0.5, k_2 = 1$	33
Şekil 4.3. (3+1)-KdV denklemi için elde edilen 1-soliton çözümü, $k_1 = 0.5, l_1 = -1, m_1 = 1$	41
Şekil 4.4. (3+1)-KdV denklemi için elde edilen 2-soliton çözümü, $k_1 = l_1 = 1.5, m_1 = 1, k_2 = 0.5, l_2 = 2, m_2 = 1$	44

SİMGELER LİSTESİ

L	: Lineer Operatör
L^{-1}	: İntegral Operatörü
$\sum$	: Toplam Sembolü
α	: Alpha
β	: Beta
δ	: Delta
η	: Eta
ε	: Epsilon
λ	: Lambda
τ	: Tau
Γ	: Gamma
∇	: Laplace Operatörü
D	: Hirota Operatörü

KISALTMALAR

NLS	Lineer olmayan Schrödinger denklemi,
KP	Kadomtsev-Petviashvili denklemi,
mKdV	Genişletilmiş KdV denklemi,
KdV	Korteweg-de Vries denklemi,
SK	Sawada-Kotera denklemi,
sG	Sine-Gordon denklemi,
TI	Toda lattice denklemi.

GİRİŞ

Doğadaki pek çok fiziksel olay daha iyi anlaşılması bakımından matematiksel modellerle ifade edilmiştir. Bu modeller ise adi ve kısmi diferansiyel denklem ve sistemleriyle belirtilir. Bu nedenle böyle bir modelin analitik ve yaklaşık çözümlerini bilmek modelin belirttiği fiziksel olayı daha iyi anlamak ve yorumlamak açısından önemlidir. Bu yüzden son yıllarda böyle denklem ve sistemlerin yaklaşık ve analitik çözümlerini bulmak için pek çok yöntem geliştirilmiş olup bunlardan bazıları Homotopi analiz metodu, Homotopi pertürbasyon metodu, Varyasyonel iterasyon yöntemi, Adomian ayrışım metodu, Sonlu farklar yöntemi ve çekirdek üretilen Hilbert uzay yöntemini yaklaşık çözüm yöntemleri arasında; Tanh metodu, (G'/G) -açılım yöntemi, F-açılım yöntemi, Dönüşüm yöntemi ve Hirota-bilineer yöntemini de analitik yöntemler arasında sayılabilir. Biz bu çalışmada lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çoklu soliton çözümlerini bulmak için kullanılan ve R. Hirota tarafından 1970 yıllarında ortaya konan Hirota-bilineer yöntemi yardımıyla matematiksel fiziğin önemli iki denklemi olan Sawada-Kotera ve $(3+1)$ -boyutlu KdV denklemlerinin 1-,2- ve 3- soliton çözümlerini bulacağız. Yukarıda saydığımız analitik yöntemlerden yalnız Hirota yöntemi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin multi soliton çözümlerini bulmak için kullanılmaktadır. Bu sebeple yöntem önemlidir.

1. BÖLÜM

1.1 TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

veya genel olarak

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklem, adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.2

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan denkleme kısmi türevli denklem adı verilir [2].

z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0,$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.3

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin kuvvetine denklemin derecesi denir [2].

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit yada bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y) z_x + Q(x, y) z_y + R(x, y) z = S(x, y),$$

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y).$$

Örnek 1.1.1

$$xz_x - yz_y = \sin x,$$

denklemi birinci mertebeden, birinci dereceden, lineer bir denklemdir.

Örnek 1.1.2

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z} + z^3,$$

denklemi ikinci mertebeden, ikinci dereceden, lineer olmayan bir denklemdir.

Tanım 1.1.4

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) denklem adı verilir [2]. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z) z_x + Q(x, y, z) z_y = R(x, y, z),$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y) z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y) z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

Örnek 1.1.3

$$\text{a) } z_x z_{xx} + xz z_y = \sin y$$

$$\text{b) } z_{xy} + 2\frac{\partial}{\partial x}(z_x^2 + z) - 6xz^3 \sin y = 0$$

$$\text{c) } z_y z_{xx} - 3x^3 z z_{xy} + 2z_x - x^3 y z = 0$$

denklemlerinin tümü yarı-lineer denklemlerdir.

Tanım 1.1.5

Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f 'in k . mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k -sınıfindandır denir.

Tanım 1.1.6

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;
- 2) $\Delta(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;
- 3) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

Örnek 1.1.4

a) $x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = t + 1$

b) $3xu_{xx} + 4xyu_{yy} + 5xz^3u_{zz} + 2zu_{xy} - 4u_{yz} + u^2u_x - u_y + xye^z = 0$

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

Örnek 1.1.5

$$(x^2 - 1) z_{xx} + 2yz_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0$$

denkleminin tipini belirtiniz.

Çözüm:

$$A(x, y) = x^2 - 1, B(x, y) = 2y, C(x, y) = -1$$

olduğundan $\Delta(x, y)$ fonksiyonu

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 4y^2 - 4(x^2 - 1)(-1) = 4(x^2 + y^2) - 4$$

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen denklem

$$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1, x, y \in \mathbb{R}\} \text{ bölgesinde hiperbolik;}$$

$D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ çemberi üzerinde parabolik;
 $D_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ açık diskinde eliptik tiptendir.

Örnek 1.1.6

$$x^2 z_{xx} + xy z_{xy} + y^2 z_{yy} + xz_x + yz_y + z = 0$$

denkleminin tipini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = x^2(y^2 - 4)$$

olup

$y = \pm 2$ doğruları üzerinde parabolik;

$-2 < y < 2$ şeridi içinde eliptik;

$y < -2$ bölgesi ile $y > 2$ bölgesinde hiperbolik tiptendir.

Tanım 1.1.7

f fonksiyonu $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı ve n 'inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu ve türevleri;

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

diferansiyel denkleminde yerlerine yazıldığında

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$$

ifadesi x bağımsız değişkenine göre bir özdeşlik oluyorsa, $f^{(n)}(x)$ fonksiyonuna (1.1) denkleminin tam çözümü denir [1].

Tanım 1.1.8

Bir diferansiyel denklemde keyfi sabitlere bağlı bulunan çözüme genel çözüm, keyfi sabitlere değer verilmesiyle elde edilen çözüme özel çözüm denir [1].

Tanım 1.1.9

n 'inci mertebeden bir

$$L(y) = b(x)$$

lineer diferansiyel denklemi için başlangıç değer problemi, $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x_0) = c_0, \quad y'(x_0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

şartlarına uyan çözümün bulunması olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.10

İki ya da daha yüksek mertebeden bir diferansiyel denklemin y bağımlı değişkenin (ya da onun türevlerinin) farklı noktalardaki değerini sağlayan çözümünün araştırılmasına sınır değer problemi denir [1].

Tanım 1.1.11

Bir $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında Taylor serisine açılabilirse ve x_0 'da içeren bir açık aralıktaki bütün x değerleri için bu Taylor açılımı bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ise $f(x)$ 'e $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyon denir [4].

Tanım 1.1.12

$$f'(x_0) = \lim_{\nabla x \rightarrow 0} \frac{\nabla y}{\nabla x} = \lim_{\nabla x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \nabla x) - f(x_0)}{\nabla x},$$

limiti varsa, $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında diferansiyellenebilir fonksiyon denir [4].

Tanım 1.1.13

X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler vs...) cümlesi olmak üzere X uzayının her bir elemanına Y uzayının bir elemanını karşılık getiren dönüşüme operatör denir [5].

Tanım 1.1.14

$D(T)$ tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi birer vektör uzayı olan ve her $x, y \in D(T)$, her α skaleri için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özellğine sahip olan T operatörüne lineer operatör denir [5].

Tanım 1.1.15

X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir [5].

Tanım 1.1.16

X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer olması gerekmeyen herhangi bir operatör olsun. Eğer verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - x_0\| < \delta$$

şartını sağlayan $\forall x \in D(T)$ için

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir. Eğer T ; her $x \in D(T)$ noktasında sürekli ise T operatörü süreklidir denir [5].

Tanım 1.1.17

Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden biri olan ∇ Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla U = 0,$$

şeklindeki bir denkleme de ∇ nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir.

Bu denklemde c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkeni ni göstermektedir. Ayrıca ∇U , t ye göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0,$$

formundadır. Bu tip denklemler elektro manyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve quantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını ifade eder [2].

Matematiksel fiziğin diğer bazı denklemlerini şöyle verebiliriz [3];

a) İki boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

b) Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

c) İki boyutlu Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

d) Biharmonik denklem

$$\nabla^4 u = 0,$$

e) Biharmonik dalga denklemi

$$\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

f) Telegraf denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial T} + Au = 0,$$

g) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 u + \alpha [E - V(x, y, z)] u = 0,$$

h) Klein-Gordon denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0.$$

Teorem 1.1.1**(Birinci mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi):**

$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ve $R(x, y, z)$ fonksiyonları (x_0, y_0, z_0) noktasını kapsayan bir $D \subset R^3$ bölgesinde C^1 sınıfından olsunlar ve kabul edelim ki

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0,$$

olsun. O zaman (x_0, y_0) noktasının bir U komşuluğunda, U 'nun içinde yatan $\check{C}$ eğrisinin her noktasında $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$ başlangıç şartını ve $Pz_x + Qz_y = R$ denklemini sağlayan bir tek $z = z(x, y)$ çözümü vardır [1].

Teorem 1.1.2 (Cauchy-Kowalewski teoremi):

$$Lz = A(x, y) z_{xx} + 2B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y),$$

denklemindeki katsayılar ve G fonksiyonu, xy -düzleminde, orijini kapsayan bir $\Omega \subset R^2$ bölgesinde analitik olsunlar. Ω da $C(x, y) \neq 0$ olsun. x -ekseninin Ω tarafından kapsanan parçasında tanımlanmış keyfi, analitik $h(x)$ ve $\sigma(x)$ fonksiyonları verilsin. O zaman $(0, 0)$ noktasının bir N komşuluğu vardır ve N de $Lz = G$ denkleminin bir tek analitik $z = \varphi(x, y)$ çözümü vardır, Öyle ki N komşuluğu tarafından kapsanan x -ekseni üzerinde $\varphi(x, 0) = h(x)$, $\varphi_y(x, 0) = \sigma(x)$ sağlar [1].

2. BÖLÜM

2.1 SOLİTON VE SOLİTON ETKİLEŞİMİNİN TARİHÇESİ

1834’de John Scott Russell tek dalga (solitary wave)’yı, Edinburg-Glasgow kanalında, şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgası olarak gözlemlemiştir. Bu dalgayı “büyük dalga kayması” olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844’de “Dalgalar üzerine rapor (Report on Wave)” makalesinde açıklamıştır. Bu makalede, tek dalganın periyodik bir dalga olmayıp şeklini değiştirmeyen, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş şekilde yayılan bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bunu takiben, benzer dalgaların üretilmesiyle daha yoğun çalışmalar yapılmıştır. Bu deneysel bilgilere dayalı olarak Russell, tek dalganın u hızı ve sonlu bir h derinliğindeki sıvının serbest yüzey üzerindeki maksimum genliği arasında

$$u^2 = g(h + a) \quad (2.1)$$

formunda önemli bir bağıntı bulmuştur. Burada g yerçekimi ivmesidir. Su dalgalarıyla ilgili, Airy ve Stokes’in teorilerine zıt olan bu görüşler, yani Russell’in tek dalga hakkındaki yorumu, tek dalganın varlığı ve bu dalganın bir sıvı ortamında şeklini değiştirmeden yayılmasıyla ilgili düşüncesiyle birlikte pek çok problem ortaya çıkmıştır. 1870’lere kadar bu fikirler pek kabul görmemesine rağmen, yalnız 1871’de Boussinesq [6] ve 1876’da Rayleigh [7] tarafından benimsenmiştir. Bu bilim adamları da yapışkan olmayan ve sıkıştırılamayan sıvıların hareket denklemini (2.1) formunda belirtmişlerdir. Gerçekten de onlar tek dalga profilini herhangi bir $a > 0$ için $z = \eta(x, t)$,

$\beta^2 = 3a / \{4h^2(h + a)\}$ olmak üzere;

$$\eta(x, t) = a \sec h^2 \{ \beta(x - ut) \} \quad (2.2)$$

çözümünü bulmuşlardır.

Bu yazarlar sadece $a < h$ olmak üzere geçerli olan $\sec h^2$ çözümünü bulmalarına rağmen, (2.2)’yi çözüm kabul eden herhangi bir diferansiyel denklem bulamamışlardır. Bununla birlikte Boussinesq, $c = \sqrt{gh}$ sığ su dalgalarının hızı olmak üzere böylesi uzun dalgalar için;

$$\eta_{tt} = c^2 \left[\eta_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxx} \right]$$

şeklinde lineer olmayan yayılma denklemini ortaya koymuştur. Bu denklem Boussinesq [6] denklemi olarak bilinir ve bunun çözümü;

$$\eta(x, t) = a \sec h^2 \left[\left(\frac{3a}{h^3} \right)^{1/2} (x \pm ut) \right]$$

şeklinde. Bu çözüm ise hem pozitif hem de negatif yönde hareket eden dalgayı gösterir.

Bu çalışmadan 60 yıl sonra, 1885’de D.J.Korteweg ve G.de. Vries [8] adındaki iki Hollandalı bilim adamı, Scott tarafından yapılan gözlemlerin bir açıklamasını veren matematiksel bir model ortaya koyarak, σ yoğunluklu bir su yüzeyi üzerinde tek yöndeki dalgaların yayılışı için

$$\eta_t = \frac{c}{h} \left[\left(\epsilon + \frac{3}{2}\eta \right) \eta_x + \frac{1}{2}\sigma \eta_{xxx} \right]$$

denklemini elde etmişlerdir. Bu denklem KdV denklemi olarak bilinir.

1955’de Fermi Pasta ve Ulam’ın [9], Los Alamos bilim laboratuvarındaki lineer olmayan kütle-yay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine raporlarıyla, KdV denkleminin tek dalgasıyla ilgili teori ve uygulamadaki gelişmeler devam etmiştir. 1914’de Debye iddia etti ki; “Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki lineer olmayan kuvvetler yüzündendir.” Bu görüş Fermi, Pasta ve Ulam’ı düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığına inandırmıştır. Fakat onların çalışmaları şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağılmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyesine geri döner. Bu gerçek Fermi, Pasta ve Ulam’ın (FPU) tekrarlanan olayı olarak bilinir.

(FPU)’nın dikkate değer bu araştırması, Martin Kruskal ve Norman Zabusky’nin [10], tekrarlamamanın nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan kütle-yay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmelerine neden olmuştur. Kruskal ve Zabusky bu tek dalgaları solitonlar olarak adlandırmışlardır.

Daha sonra, Gardner ve diğerleri [11] ve Hirota [12]–[13] herhangi bir pozitif n tam sayısı için n –soliton arasındaki ekileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [14], Hammack ve Segur [15], Weidman ve Maxworthy [16] tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bunların bu buluşları son 30 yıl boyunca yaygın, teorik, deneysel ve işlemsel çalışmalara yol açmıştır. Şimdi benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup uygulamalı matematikte ve fizikte çeşitli branşlara ayrılmıştır. Bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metod geliştirilmiştir [17]–[18]. Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle ilişkilendirilebilir.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca KdV denkleminin başka denklemler için tek dalga çözümü $\sec h^2$ fonksiyonu olmayabilir, fakat $\sec h$ veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir. Gerçekten de bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonlara sahip olmazken, KdV denklemi gibi denklemler solitonlar olan tek dalgalara sahiptirler. Soliton kavramı matematiksel fizikte yeni bir paradizim olarak şekil almıştır. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin; lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) [19]: plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgalarını temsil eder ve NLS denklemi sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Fiziksel olarak, önceki çalışmalarda bu tür solitonlara düşük frekanslı solitonlar denirdi daha sonra Makhankov yaptığı çalışmalarda bu solitonların yüksek frekanslı solitonlar olduğunu söylemiştir [20]–[21]. Bir başka önemli model denklemi de Sine-Gordon (sG) denklemdir. Bu denklemde elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. sG denklemi ise soliton, antisoliton (veya kinks, antikinks) ve aynı eksene göre simetrik solitonlara (breather solitonlara) sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalganın genliğine bağlı değildir.

3. BÖLÜM

3.1 HIROTA BİLİNEER METODU

Direkt ve ters saçılma problemlerini kullanarak Gardner, Greene, Kruskal ve Miura [22] 1967 yılında KdV denkleminin çözümü için bir metod ortaya çıkarmıştır. 1968 yılında ise Lax [23] bu sonuçları genelleştirmiştir. 1971 yılında, Ryogo Hirota solitonların çoklu çarpışmalarında KdV denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için Hirota bilineer metodu olarak adlandırılan yeni bir metodu açıklayan bir makale yayınlamıştır [24]. Makalesinde; Modified Korteweg-de Vries (mKdV) [25], sine-Gordon (sG) [26], lineer olmayan Schrödinger (NLS) [27] ve Toda Lattice (TI) [28] gibi değişik tipteki diferansiyel denklemleri ele almıştır.

Bu metottaki ilk adım; uygun bir dönüşüm kullanarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri bağımlı değişkenlerin quadratik formunda yazmaya dayanır. Bu yeni form bilineer form olarak adlandırılır. Böyle bir dönüşümü bulmak bazı denklemler için kolay olmayabilir ve bazen yeni bağımlı değişkenlere hatta bağımsız değişkenlere ihtiyaç duyulabilir. İkinci adım olarak Hirota D operatörü diye adlandırılan özel bir diferansiyel operatör tanımlanır ve bu operatör ile bilineer formdaki denklem Hirota bilineer formuna dönüştürülür. Hirota metodunun son adımında pertürbasyon metodu kullanılarak integrallenebilen denklemin multi çözümleri elde edilir.

Hirota metodu integrallenebilir sistemler ile çalışırken önemli bir role sahiptir. Çoğu denklemler (hatta integrallenemeyen bazı denklemler) bir ve iki soliton çözümlerinde otomatik olarak Hirota bilineer formuna sahiptirler. Ancak üçüncü soliton çözümü ile karşılaşıldığı zaman sınırlı bir şart ile karşılaşılır [29]. Aslında bu şart integrallenebilen bir denklemin araştırılması için yeterli değildir. Fakat o, bu amaç için güçlü bir araç olarak kullanılabilir [30]-[31]. Bu şartı aynı zamanda Hietarinta makalelerinde yeni integrallenebilen denklemleri üretmek için kullanmıştır [32]-[33].

Şimdi, Hirota bilineer metodunu tanıtalım:

$$F[u] = F(u, u_x, u_t, \dots) = 0,$$

şeklindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi göz önüne alalım. İlk olarak $F[u]$ denklemini

$$u = T[f(x, t, \dots), g(x, t, \dots)],$$

dönüşümünü kullanarak bağımlı değişkenlerin bir quadratik formuna dönüştürelim. Bu form $F[u]$ nun bilineer formu olarak adlandırılır.

Hirota metodunu etkili yapan Hirota D-Operatörünü verelim.

3.1.1 Hirota D-Operatörü

Tanım 3.1.1

$S : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ özel bir diferansiyellenebilen fonksiyon $D : S \times S \rightarrow S$ olmak üzere, Hirota D-operatörü

$$[D_x^{m_1} D_t^{m_2} \dots] \{f.g\} = [(\partial_x - \partial_{x'})^{m_1} (\partial_t - \partial_{t'})^{m_2} \dots] \quad (3.1)$$

$$f(x, t, \dots) x g(x', t', \dots) \big|_{x'=x, t'=t, \dots}$$

formunda tanımlanır, burada $m_i, i = 1, 2, \dots$ şeklindeki pozitif tamsayılar ve x, t bağımsız değişkenlerdir.

Hirota D-operatörünün çeşitli kombinasyonlarını kullanarak D-operatörünün bir polinomu olarak $F[u]$ denkleminin bilineer formunu yazmaya çalışacağız ve bu polinomu $P(D)$ olarak adlandıracğız.

Tanım 3.1.2

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, Hirota bilineer formda bazı m, r sabitleri, $P_{\alpha\beta}^\eta(D)$ lineer operatörleri ve f^i yeni bağımlı değişkenleri $\alpha, \beta = 1, \dots, m$ için

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^m P_{\alpha\beta}^\eta(D) f^\alpha f^\beta = 0, \quad \eta = 1, \dots, r \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi Hirota D-operatörünün özelliklerini, birkaç bağıntı ve öneri ile birlikte ispatlarını verelim:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x(a.b) = a_x b - a b_x, \\ D_x^2(a.b) = a_{2x} b - 2a_x b_x + a b_{2x}, \\ D_x^3(a.b) = a_{3x} b - 3a_{2x} b_x + 3a_x b_{2x} - a b_{3x}, \\ D_x^4(a.b) = a_{4x} b - 4a_{3x} b_x + 6a_{2x} b_{2x} - 4a_x b_{3x} + a b_{4x}, \\ D_x D_t(a.b) = D_x(a_t b - a b_t) = a_{xt} b - a_t b_x - a_x b_t + a b_{xt}, \\ D_x D_t(a.a) = 2(a a_{xt} - a_x a_t), \\ D^n(a.a) = 0, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Öneri 3.1.3

f ve g diferansiyellenebilen iki fonksiyon olmak üzere;

$$P(D)\{f.g\} = P(-D)\{g.f\},$$

dir [34].

İspat. $P(D) = D_x^m$ olsun. O halde D-operatörünün diğer kombinasyonları da aynı şekilde takip edilirse;

$$\begin{aligned} P(D)\{f.g\} &= D_x^m\{f.g\} \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f_x^{(m-k)} g_x^{(k)} \\ &= f_x^{(m)} g - m f_x^{(m-1)} g_x + \dots + (-1)^m f g_x^{(m)} \\ &= (-1)^m [f g_x^{(m)} - m f_x g_x^{(m-1)} + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} m f_x^{(m-1)} g_x + (-1)^m f_x^{(m)} g] \end{aligned} \tag{3.4}$$

olurki bu ifade $P(-D)\{g.f\}$ ' e eşittir. O halde

$$P(D)\{f.g\} = P(-D)\{g.f\},$$

olur.

Bağıntı 3.1.4

f diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g = 1$ ise

$$P(D)\{f.1\} = P(\partial)f, \quad P(D)\{1.f\} = P(-\partial)f,$$

şeklindedir [34].

Öneri 3.1.5

e^{Φ_1} ve e^{Φ_2} iki üstel fonksiyon, $i = 1, 2$ için $k_i, \dots, r_i, l_i$ sabitler olmak üzere

$$\Phi_i = k_i x + \dots + r_i z + l_i y$$

dir. O halde;

$$P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2}\} = P(k_1 - k_2, \dots, r_1 - r_2, l_1 - l_2)e^{\Phi_1 + \Phi_2},$$

yazılabilir [34].

İspat.

İspat için

$$P(D) = [D_x^{m_1} \dots D_z^{m_{n-1}} D_y^{m_n}],$$

operatörünü göz önüne almak yeterlidir. Burada $m_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif tamsayılar ve $x, \dots, z, y$ bağımsız değişkenlerdir. Buradan

$$\begin{aligned} P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2}\} &= [D_x^{m_1} \dots D_z^{m_{n-1}} D_y^{m_n}]\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2}\} \\ &= (l_1 - l_2)^{m_n} [D_x^{m_1} \dots D_z^{m_{n-1}}]\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2}\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$= (r_1 - r_2)^{m_{n-1}} (l_1 - l_2)^{m_n} [D_x^{m_1} \dots D_r^{m_{n-2}}]\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2}\}$$

elde edilir ve bu işleme devam edilirse sonuçta

$$\begin{aligned} P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2}\} &= (k_1 - k_2)^{m_1} \dots (r_1 - r_2)^{m_{n-1}} (l_1 - l_2)^{m_n} e^{\Phi_1 + \Phi_2} \\ &= P(k_1 - k_2, \dots, r_1 - r_2, l_1 - l_2) e^{\Phi_1 + \Phi_2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

bulunur ve ispat tamamlanır. Basitlik olması açısından

$$P(k_1 - k_2, \dots, r_1 - r_2, l_1 - l_2) e^{\Phi_1 + \Phi_2},$$

ifadesi yerine bundan sonra

$$P(p_1 - p_2)$$

notasyonu kullanılacaktır.

Bağıntı 3.1.6

Eğer α sıfırdan farklı bir sabit ise

$$P(D)\{\alpha.\alpha\} = 0,$$

dır ve öneri 3.1.5 'den

$$P(0, 0, \dots, 0) = 0,$$

yazılabilir [34].

NOT: Hirota metodunda denkleme uygulanacak dönüşüm 3 tiptir. Bunlar;

1. Rasyonel dönüşüm
2. Logaritmik dönüşüm
3. Bi-logaritmik dönüşüm

Özellikle belirtmek gerekir ki bazı denklemler için böyle bir dönüşüm bulamayabiliriz. Diğer bir gerçek bazı integrallenebilir Korteweg-de Vries (KdV), Kadomtsev-Petviashvili (KP) ve Toda lattice (TI) denklemleri tek bir lineer denkleme dönüştürülebilirken, modified Korteweg-de Vries (mKdV), sine-Gordon (sG) ve nonlinear Schrödinger (NLS) denklemleri sadece bilineer denklemlerin kombinasyonu olarak yazılabilir.

KdV diferansiyel denklemleri için genellikle logaritmik dönüşümler kullanılır. Bu dönüşüm ise

$$u = 2\alpha(\ln f)_{nx}$$

formülü ile belirlenir. Şimdi α ve n 'in neye göre belirlendiğine bakalım:

Bunun için

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.7)$$

KdV denklemini göz önüne alalım. Öncelikle

$$u = 2\alpha \ln f,$$

dönüşümünü kullanarak u_t, u_x, u_{xxx} ifadelerini bulup bu ifadeleri denklemde yerlerine yazarsak

$$\frac{2\alpha(f_{xxx} + 12\alpha(\ln f)f_x + f_t)}{f} - \frac{6\alpha f_{xx}f_x}{f^2} + \frac{4\alpha f_x^3}{f^3} = 0, \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada $\ln f$ ifadesi bulunduğundan çözüme gidemeyiz. O halde bir sonraki logaritmik dönüşüm olan

$$u = 2\alpha(\ln f)_x$$

dönüşümünü denkleme uygulayalım. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{2\alpha(f_{xxxx} + f_{tx})}{f} - \frac{2\alpha(-12\alpha f_{xx}f_x + 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2 + f_x f_t)}{f^2} \\ & + \frac{24\alpha f_x^2(-\alpha f_x + f_{xx})}{f^3} - \frac{12\alpha f_x^4}{f^4} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

bulunurki burada D-Operatörünün özellikleri kullanılırsa $2\alpha(f_{xxxx} + f_{tx})$ ifadesinden

$$P(D)f.f = \alpha(D_x^4 + D_x D_t)f.f$$

yazılabilir. Şu halde

$$\frac{12f_{xx}\alpha(-2\alpha f_x + f_{xx})}{f^2} - \frac{24\alpha f_x^2(-\alpha f_x + f_{xx})}{f^3} + \frac{12\alpha f_x^4}{f^4} = 0, \quad (3.10)$$

olmalıdır bu ise sadece α nın sıfır olması ile sağlanır, halbuki α sıfırdan farklı olmalıdır.

Bu nedenle diğer bir

$$u = 2\alpha(\ln f)_{xx}$$

dönüşümünü kullanalım. Gerekli işlemler yapılsa,

$$\begin{aligned} & \frac{2\alpha(f_{xxxx} + f_{tx})}{f} - \frac{2\alpha(-12\alpha f_{xxx}f_{xx} + f_{xx}f_t + 5f_{xxx}f_x + 10f_{xxx}f_{xx})}{f^2} \\ & - \frac{2f_x f_{tx}}{f^2} - \frac{4f_x\alpha(18\alpha f_{xx}^2 + 6f_{xxx}f_x - 15f_{xx}^2 - 10f_{xxx}f_x - f_x f_t)}{f^3} \\ & + \frac{120\alpha f_{xx}f_x^3(\alpha - 1)}{f^4} - \frac{48\alpha f_x^5(\alpha - 1)}{f^5} = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. $2\alpha(f_{xxxx} + f_{tx})$ ifadesinin x e göre integralinin alınmasıyla

$$P(D)f.f = \alpha(D_x^4 + D_x D_t)f.f$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{-24\alpha f_{xxx}f_{xx}(\alpha - 1)}{f^2} + \frac{24f_x\alpha(\alpha - 1)(3f_{xx}^2 + f_{xxx}f_x)}{f^3} \\ & - \frac{120\alpha f_{xx}f_x^3(\alpha - 1)}{f^4} + \frac{48\alpha f_x^5(\alpha - 1)}{f^5} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

bulunur. O halde $\alpha = 1$ için denklemin çözümü elde edilebilir ve KdV denklemi için uygulanacak dönüşüm

$$u = 2(\ln f)_{xx}$$

şeklinde belirlenir.

Şimdi Hirota D-operatörünün herhangi bir lineer olmayan diferansiyel denkleme nasıl uygulandığına bakalım.

Örnek 3.1

$$u_t + 3(u_x)^2 + u_{xxx} = 0, \quad (3.13)$$

şeklindeki KdV denklemini göz önüne alalım. Verilen denkleme

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial \ln f(x, t)}{\partial x} = 2 \frac{f_x}{f}, \quad (3.14)$$

dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{cases} u_x = 2 \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}, & u_t = 2 \frac{f_{xt}f - f_x f_t}{f^2}, \\ u_{xxx} = 2 \left[\frac{f_{4x}}{f} - 4 \frac{f_x f_{3x}}{f^2} - 3 \frac{f_{xx}^2}{f^2} + 12 \frac{f_x^2 f_{2x}}{f^3} - 6 \frac{f_x^4}{f^4} \right], \end{cases} \quad (3.15)$$

ifadeleri denklemden yerlerine yazılırsa

$$f_{xt}f - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + f_{xxxx}f - 4f_x f_{xxx} = 0, \quad (3.16)$$

KdV denkleminin bilineer formu elde edilir.

$$\begin{cases} D_x^4 \{f \cdot f\} = 2(3f_{xx}^2 + f_{xxxx}f - 4f_x f_{xxx}) = 0, \\ D_x D_t \{f \cdot f\} = 2(f_{xt}f - f_x f_t) = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

olduğundan bu denklemin Hirota bilineer formu

$$P(D)\{f \cdot f\} = (D_x^4 + D_x D_t)\{f \cdot f\} = 0,$$

şeklindedir.

Örnek 3.2

Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0, \quad (3.18)$$

olarak verilsin. KP denklemi için uygulanacak dönüşüm

$$u(x, t, y) = -2\partial_x^2 \log f, \quad (3.19)$$

olsun. Gerekli türevler alınıp işlemler yapılırsa, KP denkleminin bilineer formu

$$f f_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + f f_{xxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{yy}f - 3f_y^2 = 0, \quad (3.20)$$

olarak elde edilir ve

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x D_t \{f.f\} = 2\{f_{xt}f - f_t f_x\} = 0, \\ D_x^4 \{f.f\} = 2\{f_{xxxx}f + 3f_{xx}^2 - 4f_x f_{xxx}\} = 0, \\ D_y^2 \{f.f\} = 2\{f_{yy}f - f_y^2\} = 0, \end{array} \right. \quad (3.21)$$

ifadelerinden faydalanılarak KP denkleminin Hirota bilineer formunun

$$(D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2)\{f.f\} = 0, \quad (3.22)$$

olduğu görülür.

3.1.2 Hirota Pertürbasyon ve Multi-Soliton Çözümler

Hirota bilineer formu

$$P(D)\{f.f\} = 0,$$

olan $F[u] = 0$ formundaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. $F[u] = 0$ denkleminin Hirota bilineer formunu kullanarak çözümlerini bulmaya ilişkin adımları verelim. Bunun için

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$$

şeklindeki pertürbasyon açılımını kullanacağız. Burada f_0 bir sabit, $f_m, m = 1, 2, \dots$ olmak üzere $x, t, \dots$ ye bağlı fonksiyonlar ve ε pertürbasyon parametresi denilen bir sabittir. Genellikle $f_0 = 1$ olarak alınır. Buradan $f.f$ çarpımı

$$\begin{aligned} f.f &= 1.1 + \varepsilon(f_1.1 + 1.f_1) + \varepsilon^2(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) \\ &+ \varepsilon^3(f_3.1 + f_2.f_1 + f_1.f_2 + 1.f_3) + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

olarak yazılır. $P(D)\{f.f\} = 0$ olduğundan (3.23) ifadesine $P(D)$ polinomunu uygularsak;

$$\begin{aligned} P(D)\{f.f\} &= P(D)\{1.1\} + \varepsilon P(D)\{f_1.1 + 1.f_1\} + \varepsilon^2 P(D)\{f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2\} \\ &+ \varepsilon^3 P(D)\{f_3.1 + f_2.f_1 + f_1.f_2 + 1.f_3\} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

bulunur. Burada $\varepsilon^m, m = 0, 1, 2, \dots$ katsayılarını sıfıra eşitlersek ε^0 katsayısı sıfır olur. ε^1 katsayısından

$$P(D)\{f_1.1 + 1.f_1\} = 2P(\partial)f_1 = 0,$$

yazılabilir.

Bu denklemin bir çözümü üstel fonksiyondur. Hirota bilineer metodu uygulanırken f_1 üstel fonksiyon olarak alınır ve bu nedenle diğer f_i ler de üstel fonksiyonlar olarak gelir. Hirota bilineer metodunun etkinliği bu noktada ortaya çıkar. Üstel fonksiyonların bir polinomu olarak f i yazabileceğimizden dolayı f_j bütün $j \geq s+1$ olmak üzere $F[u] = 0$ denkleminin s-soliton çözümünü verir.

Teorem 3.1.7

$F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin,

$$u = T[f(x, t, \dots, y)],$$

dönüşümü ile Hirota bilineer formu

$$P(D)\{f.f\} = 0,$$

şeklinde yazılabilir. $k_1, w_1, \dots, l_1$ sabit

$$\Phi_1 = k_1x + w_1t + \dots + l_1y$$

ve

$$P(k_1, w_1, \dots, l_1) = P(p_1) = 0,$$

olmak üzere denklemin 1-soliton çözümü

$$u = T[f(x, t, \dots, y)] = T[1 + e^{\Phi_1}], \quad (3.25)$$

şeklindedir [34].

İspat.

$F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin 1-soliton çözümü

$$\Phi_i = k_ix + w_it + \dots + l_iy$$

olmak üzere

$$f = 1 + \varepsilon f_1,$$

dir ve $j \geq 2$ için $f_j = 0$ dir. ε^0 katsayısından

$$P(D)\{1.1\} = P(0, 0, \dots, 0)\{1\},$$

şeklindedir ve Bağntı 3.1.6 'dan dolayı yok sayılır. ε^1 katsayısından

$$\begin{aligned} P(D)\{1.f_1 + f_1.1\} &= P(-\partial)f_1 + P(\partial)f_1 \\ &= 2P(\partial)e^{\Phi_1} \end{aligned} \tag{3.26}$$

olarak elde edilir ve bu denklem sıfıra eşittir. Öneri 3.1.5 kullanılırsa

$$P(k_1, w_1, \dots, l_1) = P(p_1) = 0,$$

olur. Bu ilişki Dispersion relation (dağılım ilişkisi) olarak adlandırılır. f_2 sıfır olduğundan ε^2 katsayısı

$$\begin{aligned} P(D)\{1.f_2 + f_2.1\} + P(D)\{1.1\} &= P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_1}\} \\ &= P(p_1 - p_1)e^{2\Phi_1} \end{aligned} \tag{3.27}$$

ve bunun da sıfır olduğu görülmektedir. Genelliği bozmadan $\varepsilon = 1$ alabiliriz. Bu nedenle

$$f = 1 + e^{\Phi_1},$$

ve $F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin 1-soliton çözümü

$$u = T[f(x, t, \dots)] = T[1 + e^{\Phi_1}],$$

$k_1, w_1, \dots, l_1$ sabitler olmak üzere

$$\Phi_1 = k_1x + w_1t + \dots + l_1y,$$

ve

$$P(p_1) = 0 ,$$

ile birlikte (3.25) biçimindedir.

Teorem 3.1.8

$F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin,

$$u = T[f(x, t, \dots, y)]$$

dönüşümü ile Hirota bilineer formu $P(D)\{f.f\} = 0$ şeklinde yazılabilir. $k_i, w_i, \dots, l_i$ sabitler

$$\Phi_i = k_ix + w_it + \dots + l_iy$$

$$P(k_i, w_i, \dots, l_i) = P(p_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

ve

$$A(1, 2) = -\frac{P(p_1 - p_2)}{P(p_1 + p_2)},$$

olmak üzere bu denklemin 2-soliton çözümü

$$u = T[f(x, t, \dots, y)] = T[1 + e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + A(1, 2)e^{\Phi_1 + \Phi_2}], \quad (3.28)$$

şeklindedir [34].

İspat.

$F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin 2-soliton çözümü

$$\Phi_i = k_i x + w_i t + \dots + l_i y + \alpha_i$$

olmak üzere,

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2,$$

şeklindedir. $j \geq 3$ için $f_j = 0$ dir. ε^0 katsayısından

$$P(D)\{1.1\} = P(0, 0, \dots, 0)\{1\} = 0,$$

bulunur. ε^1 katsayısından

$$P(D)\{f_1.1 + 1.f_1\} = 2P(\partial)\{e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2}\} = 0,$$

$i = 1, 2$ için $P(p_i) = 0$ dir. ε^2 katsayısından

$$\begin{aligned} P(D)\{1.f_2 + f_2.1\} + P(D)\{f_1.f_1\} &= 2P(\partial)f_2 + P(D)\{(e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2}).(e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2})\} \\ &= 2P(\partial)f_2 + 2P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2}\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$= 2P(\partial)f_2 + 2P(p_1 - p_2)e^{\Phi_1 + \Phi_2} = 0$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$f_2 = A(1, 2)e^{\Phi_1 + \Phi_2},$$

olduğu görülür. f_2 yi üstteki denklemde yerine yazarsak

$$A(1, 2) = -\frac{P(p_1 - p_2)}{P(p_1 + p_2)},$$

şeklinde bulunur. $f_3 = 0$ olduğundan dolayı ε^3 ün katsayısı

$$\begin{aligned}
-P(D)\{f_1.f_2 + f_2.f_1\} &= A(1,2)[P(D)\{(e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2}).(e^{\Phi_1+\Phi_2})\} \\
&\quad + P(D)\{e^{\Phi_1+\Phi_2}.(e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2})\}] \\
&= A(1,2)[P(D)\{(e^{\Phi_1}).(e^{\Phi_1+\Phi_2})\} + P(D)\{(e^{\Phi_2}).(e^{\Phi_1+\Phi_2})\}] \\
&= A(1,2)[P(p_2)e^{2\Phi_1+\Phi_2} + P(p_1)e^{\Phi_1+2\Phi_2}]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

bulunur. Buradan ise $i = 1, 2$ için $P(p_i) = 0$ olur. Bununla birlikte

$$f = 1 + e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + A(1,2)e^{\Phi_1+\Phi_2},$$

ve $F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin 2-soliton çözümü

$$u = T[f(x, t, \dots)] = T[1 + e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + A(1,2)e^{\Phi_1+\Phi_2}],$$

$k_i, w_i, \dots, l_i$ sabitler olmak üzere

$$\Phi_i = k_i x + w_i t + \dots + l_i y$$

$$P(k_i, w_i, \dots, l_i) = P(p_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

ve

$$A(1,2) = -\frac{P(p_1 - p_2)}{P(p_1 + p_2)},$$

ile (3.28) biçimindedir.

Teorem 3.1.9

$F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin,

$$u = T[f(x, t, \dots, y)],$$

dönüşümü ile Hirota bilineer formu $P(D)\{f.f\} = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu denklemin 3-soliton çözümü $i = 1, 2, 3$ için $P(p_i) = 0$ ve σ_i tamsayı olmak üzere

$$\sum_{\sigma_i=\pm 1} P(\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) P(\sigma_1 p_1 - \sigma_2 p_2) \tag{3.31}$$

$$P(\sigma_2 p_2 - \sigma_3 p_3) P(\sigma_3 p_3 - \sigma_1 p_1) = 0$$

formundadır. O halde 3-soliton çözümü

$$u = T[f(x, t, \dots, y)]$$

$$\begin{aligned} u = T[(1 + e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + e^{\Phi_3} + A(1, 2)e^{\Phi_1 + \Phi_2} \\ + A(1, 3)e^{\Phi_1 + \Phi_3} + A(2, 3)e^{\Phi_2 + \Phi_3} + Be^{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3})] \end{aligned} \quad (3.32)$$

biçimindedir. Burada

$$\Phi_i = k_i x + w_i t + \dots + l_i y, i = 1, 2, 3$$

$$A(i, j) = -\frac{P(p_i - p_j)}{P(p_i + p_j)} \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ve } i < j$$

ve

$$B = A(1, 2)A(1, 3)A(2, 3),$$

şeklindedir [34].

İspat.

$F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin 3-soliton çözümü

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3,$$

dir. Burada $i = 1, 2, 3$ için

$$\Phi_i = k_i x + w_i t + \dots + l_i y$$

olmak üzere

$$f_1 = e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + e^{\Phi_3},$$

dür ve $j \geq 4$ için $f_j = 0$ dir. ε^0 katsayısı

$$P(D)\{1.1\} = P(0, 0, \dots, 0)\{1\} = 0,$$

ve ε^1 katsayısı

$$\begin{aligned} P(D)\{1.f_1 + f_1.1\} &= 2P(\partial)\{e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + e^{\Phi_3}\} \\ &= 2[P(\partial)e^{\Phi_1} + P(\partial)e^{\Phi_2} + P(\partial)e^{\Phi_3}] = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

olup $i = 1, 2, 3$ için $P(p_i) = 0$ dir. ε^2 katsayısı

$$-2P(\partial)f_2 = P(D)\{f_1.f_1\}, \quad (3.34)$$

olduğundan

$$f_1.f_1 = e^{\Phi_1}.e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2}.e^{\Phi_2} + e^{\Phi_3}.e^{\Phi_3} + \sum_{\substack{i,j=1,2,3 \\ i \neq j}} e^{\Phi_i+\Phi_j}$$

olur ki bu ifade (3.34) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-2P(\partial)f_2 = 2[P(p_1 - p_2)e^{\Phi_1+\Phi_2} + P(p_1 - p_3)e^{\Phi_1+\Phi_3} + P(p_2 - p_3)e^{\Phi_2+\Phi_3}], \quad (3.35)$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$f_2 = A(1, 2)e^{\Phi_1+\Phi_2} + A(1, 3)e^{\Phi_1+\Phi_3} + A(2, 3)e^{\Phi_2+\Phi_3}, \quad (3.36)$$

formundadır. f_2 üstteki denklemden kullanılırsa,

$$A(i, j) = -\frac{P(p_i - p_j)}{P(p_i + p_j)} \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ve } i < j$$

olarak bulunur. ε^3 katsayısı

$$\begin{aligned} -2P(\partial)f_3 &= P(D)\{f_1.f_2 + f_2.f_1\} \\ &= 2P(D)\{f_1.f_2\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} P(D)\{f_1.f_2\} &= A(1, 2)P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_1+\Phi_2} + e^{\Phi_2}.e^{\Phi_1+\Phi_2} + e^{\Phi_3}.e^{\Phi_1+\Phi_2}\} \\ &\quad + A(1, 3)P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_1+\Phi_3} + e^{\Phi_2}.e^{\Phi_1+\Phi_3} + e^{\Phi_3}.e^{\Phi_1+\Phi_3}\} \\ &\quad + A(2, 3)P(D)\{e^{\Phi_1}.e^{\Phi_2+\Phi_3} + e^{\Phi_2}.e^{\Phi_2+\Phi_3} + e^{\Phi_3}.e^{\Phi_2+\Phi_3}\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} -P(\partial)f_3 &= e^{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3}A(1, 2)P(p_3 - p_1 - p_2) \\ &\quad + A(1, 3)P(p_2 - p_1 - p_3) + A(2, 3)P(p_1 - p_2 - p_3) \end{aligned} \quad (3.39)$$

dir.

$$f_3 = Be^{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3}, \quad (3.40)$$

olduğundan B üstteki denklemden aşağıdaki formda bulunur.

$$B = -\frac{A(1,2)P(p_3 - p_1 - p_2) + A(1,3)P(p_2 - p_1 - p_3) + A(2,3)P(p_1 - p_2 - p_3)}{P(p_1 + p_2 + p_3)}. \quad (3.41)$$

$f_4 = 0$ olduğundan ε^3 ün katsayısı

$$P(D)\{f_1 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_1 + f_2 f_2\} = 2P(D)\{f_1 \cdot f_3\} + P(D)\{f_2 \cdot f_2\} = 0, \quad (3.42)$$

biçimindedir. Burada

$$P(D)\{f_1 \cdot f_3\} \quad , \quad P(D)\{f_2 \cdot f_2\}$$

terimleri basit olarak

$$P(D)\{f_1 \cdot f_3\} = B[P(p_2 + p_3)e^{2\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} + P(p_1 + p_3)e^{\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3} + P(p_1 + p_2)^{\Phi_1 + \Phi_2 + 2\Phi_3}], \quad (3.43)$$

ve

$$\begin{aligned} P(D)\{f_2 \cdot f_2\} &= 2[A(1,2)A(1,3)P(p_2 - p_3)e^{2\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} \\ &\quad + A(1,2)A(2,3)P(p_1 - p_3)e^{\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3} \\ &\quad + A(1,3)A(2,3)P(p_1 - p_2)e^{\Phi_1 + \Phi_2 + 2\Phi_3}], \end{aligned} \quad (3.44)$$

şeklindedir. Bu ifadeler (3.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &e^{2\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3}[BP(p_2 + p_3) + A(1,2)A(1,3)P(p_2 - p_3)] \\ &+ e^{\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3}[BP(p_1 + p_3) + A(1,2)A(2,3)P(p_1 - p_3)] \\ &+ e^{\Phi_1 + \Phi_2 + 2\Phi_3}[BP(p_1 + p_2) + A(1,3)A(2,3)P(p_1 - p_2)] = 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. Üstteki denklemde üstel terimlerin katsayıları göz ardı edilirse

$$B = A(1,2)A(1,3)A(2,3)$$

olarak bulunur. O halde $F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin 3-soliton çözümü

$$\begin{aligned} u &= T[(1 + 1 + e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + e^{\Phi_3} + A(1,2)e^{\Phi_1 + \Phi_2} \\ &\quad + A(1,3)e^{\Phi_1 + \Phi_3} + A(2,3)e^{\Phi_2 + \Phi_3} + Be^{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3})], \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada

$$\Phi_i = k_i x + w_i t + \dots + l_i y, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$A(i, j) = -\frac{P(p_i - p_j)}{P(p_i + p_j)} \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ve } i < j,$$

ve

$$B = A(1, 2)A(1, 3)A(2, 3),$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.10

$F[u] = 0$ diferansiyel denkleminin, N-soliton çözümü

$$A(i_1, \dots, i_m) = \Pi_{l < j}^{(m)} A(l, j), \quad (3.46)$$

olmak üzere

$$f(x, t) = 1 + \sum_{m=1}^N \sum_{N C_m} A(i_1, \dots, i_m) \exp(\Phi_{i_1} + \dots + \Phi_{i_m}), \quad (3.47)$$

biçiminde ifade edilir [34]. Burada (m) , $(l < j)$ olacak şekildeki m elemanlarının mümkün olan bütün kombinasyonlarının çarpımı, $N C_m$, N den başlayarak m elemanlarının mümkün olan bütün kombinasyonlarının toplamını göstermektedir.

4. BÖLÜM

Bu bölümde daha önceki bölümde izah edilen Hirota bi-lineer metodu yardımıyla matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden olan Sawada-Kotera ve (3+1)-boyutlu KdV denklemlerinin multi soliton çözümlerini bulacağız.

4.1. Sawada-Kotera Denklemi

Sawada ve Kotera [35], Schrödinger denklemini invers skatter metodu ile çözerken

$$u_t - 10u u_{xxx} - 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x + u_{5x} = 0, \quad (4.1)$$

şeklindeki beşinci basamaktan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini elde ettiler. Daha sonra (4.1) denklemine

$$u = \xi_x, \quad \xi = -2 \frac{\psi_x}{\psi}, \quad (4.2)$$

formundaki Miura ve Cole-Hopf dönüşümlerini, sırasıyla, uygulayarak bütün iyi bilinen ve tek yönlü lineer olmayan dalgaları temsil eden

$$u_t + 45u^2 u_x - 15u u_{xxx} - 15u_x u_{xx} + u_{5x} = 0, \quad (4.3)$$

Sawada-Kotera (SK) denklemini buldular. (4.3) SK denklemi ve farklı formları pek çok yazar tarafından analitik ve sayısal yöntemler kullanılarak çözülmüştür. Bu çalışmalardan bazıları şöyledir: Shi ve Li [36] yeni bir test fonksiyonu yardımıyla

$$u_t = (u_{xxx} + 5u u_{xx} + \frac{5}{3}u^3 u_{xy})_x - 5 \int u_{yy} dx + 5u u_y + 5u_x \int u_y dx, \quad (4.4)$$

(2+1)-boyutlu SK denkleminin bazı yeni dalga çözümünü buldular. Ma ve Geng [37]

$$5\partial_x^{-1} u_{tt} + 5u_{xxt} - 15u u_t - 15u_x \partial_x^{-1} u_t - 45u^2 u_x + 15u_x u_{xx} + 15u u_{xxx} - u_{5x} = 0, \quad (4.5)$$

şeklindeki çift yönlü SK denkleminin rasyonel, periyodik ve soliton çözümlerini Darboux ve Backlund dönüşümleri yardımıyla elde ettiler.

$$5u_{tt} + 5u_{xxx} - 15u_x u_{xt} - 15u_{xx} u_t - 45(u_x)^2 u_{xx} + 15u_{xx} u_{3x} + 15u_x u_{4x} - u_{6x} = 0, \quad (4.6)$$

altıncı basamaktan SK denkleminin N-soliton çözümü Hirota bilineer metodu yardımıyla Wazwaz [38] tarafından bulundu. Zhang, Wei ve Hou [39] genelleştirilmiş F-açılım metodu yardımıyla

$$u_t + a(3u^2 + u_{xx})_x + b(15u^3 + 15u u_{xx} + u_{4x})_x = 0, \quad (4.7)$$

KdV-SK denkleminin jakobi eliptik, trigonometrik fonksiyon ve soliton çözümlerini elde ettiler. Liu ve Dai [40] Hirota metodu yardımıyla beşinci basamaktan SK denkleminin periyodik iki soliton ve singüler periyodik soliton çözümlerini oluşturdular. Ruan ve Li [41], (2+1)-boyutlu SK denkleminin cebirsel ve y-periyodik çözümleri arasındaki etkileşimi açıkladılar. Liu ve Zhu [42] değişken katsayılı SK denkleminin genişletilmiş dönüşüm metodu yardımıyla Jakobi eliptik ve hiperbolik fonksiyon çözümlerini elde ettiler. Chen ve Xie [43], auto-Backlund dönüşümü yardımıyla değişken katsayılı ve zayıf-tip stokastik SK denklemlerinin soliton çözümlerini ortaya koydular. Xu, Chen ve Chen [44], (2+1)-boyutlu SK denkleminin (4.4) yeni çoklu soliton çözümlerini bulmak için Hirota metodu ve yeni deneme fonksiyonu kullandılar. Behzadi [45] iteratif metodu yardımıyla başlangıç şartlı SK denkleminin (4.3) Adomian ayrışım, homotopi pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon yöntemleri yardımıyla yaklaşık çözümlerini buldu. Dinarvard ve diğer. [46] homotopi analiz metoduyla SK denkleminin sayısal çözümlerini elde ettiler. Ayrıca, çözüm serisinin hangi değerler için yakınsak olduğunu gösterdiler.

Şimdi, (4.3) ile verilen SK denklemine

$$u(x, t) = -2(\ln f)_{xx}, \quad (4.8)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = -2\left(\frac{f_{3x}}{f} - 3\frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^3}{f^3}\right), \\ u_t = -2\left(\frac{f_{xxt}}{f} - \frac{f_{2x} f_t}{f^2} - 2\frac{f_x f_{xt}}{f^2} + 2\frac{f_x^2 f_t}{f^3}\right), \\ u_{xxx} = -2\left(\frac{f_{5x}}{f} - 5\frac{f_x f_{4x}}{f^2} - 10\frac{f_{2x} f_{3x}}{f^2} + 20\frac{f_x^2 f_{3x}}{f^3} + 30\frac{f_x f_{2x}^2}{f^3} - 60\frac{f_x^3 f_{2x}}{f^4} + 24\frac{f_x^5}{f^5}\right), \\ u_{5x} = -2\left(\frac{f_{7x}}{f} - 7\frac{f_x f_{6x}}{f^2} - 21\frac{f_{2x} f_{5x}}{f^2} + 42\frac{f_x^2 f_{5x}}{f^3} - 35\frac{f_{3x} f_{4x}}{f^2} + 210\frac{f_x f_{2x} f_{4x}}{f^3} \right. \\ \left. - 210\frac{f_x^3 f_{4x}}{f^4} + 140\frac{f_x f_{3x}^2}{f^3} + 210\frac{f_{2x}^2 f_{3x}}{f^3} - 1260\frac{f_x^2 f_{2x} f_{3x}}{f^4} + 840\frac{f_x^4 f_{3x}}{f^5} - 630\frac{f_x f_{2x}^3}{f^4} \right. \\ \left. + 2520\frac{f_x f_{2x}^3}{f^4} + 2520\frac{f_x^3 f_{2x}^2}{f^5} - 2520\frac{f_x^5 f_{2x}}{f^6} + 720\frac{f_x^7}{f^7}\right), \end{array} \right. \quad (4.9)$$

kısmi türevleri elde edilir. Bu ifadeler (4.3) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$-f_{xt}f + f_x f_t - f_{6x}f + 6f_{5x}f_x - 15f_{4x}f_{2x} + 20f_{3x}f_{3x} - 15f_{2x}f_{4x} + 6f_x f_{5x} - f f_{6x} = 0, \quad (4.10)$$

SK denkleminin bilineer formu bulunur. Hirota D lineer operatörünün özelliklerinden

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x D_t \{f \cdot f\} = f_{xt} f - f_x f_t, \\ D_x^6 \{f \cdot f\} = f_{6x} f - 6f_{5x} f_x + 15f_{4x} f_{2x} - 20f_{3x} f_{3x} + 15f_{2x} f_{4x} - 6f_x f_{5x} + f f_{6x}, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

dir. O halde bu denklemin (4.10) denkleminin Hirota bilineer formu ise

$$P(D)\{f \cdot f\} = \left\{ \frac{(-D_x D_t - D_x^6)}{f^2} (f \cdot f) \right\}_x = 0, \quad (4.12)$$

olur. $f(x, t)$ fonksiyonu ε küçük bir parametre olmak üzere,

$$f(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x, t), \quad (4.13)$$

biçimindeki pertürbasyon açılımına sahiptir. N-Soliton çözümü için

$$f_1 = \sum_{i=1}^N \exp(\Phi_i), \quad (4.14)$$

olur ki burada

$$\Phi_i = k_i x + w_i t, \quad (4.15)$$

dir.

$$w_i = -k_i^5, \quad (4.16)$$

olarak bulunan ifade (4.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\Phi_i = k_i x - k_i^5 t, \quad (4.17)$$

şeklinde elde edilir. Buradan $N = 1$ için

$$f_1 = \exp(\Phi_1) = \exp(k_1 x - k_1^5 t), \quad (4.18)$$

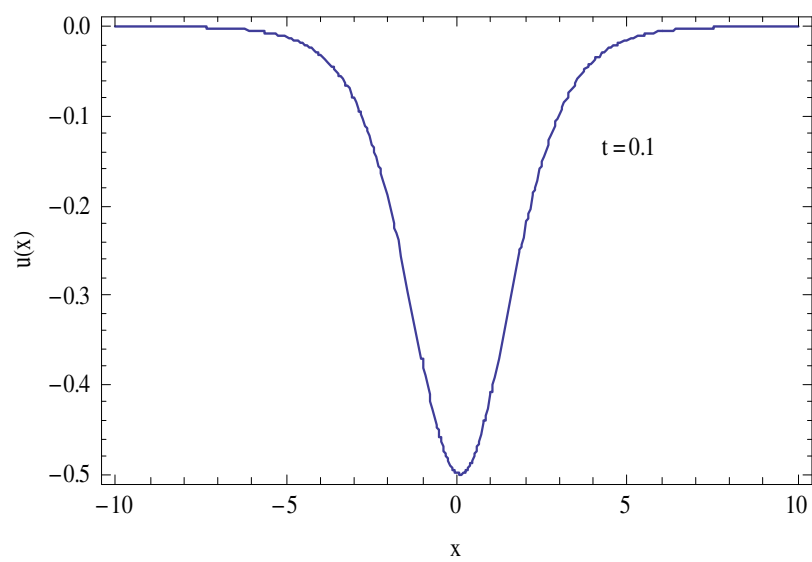
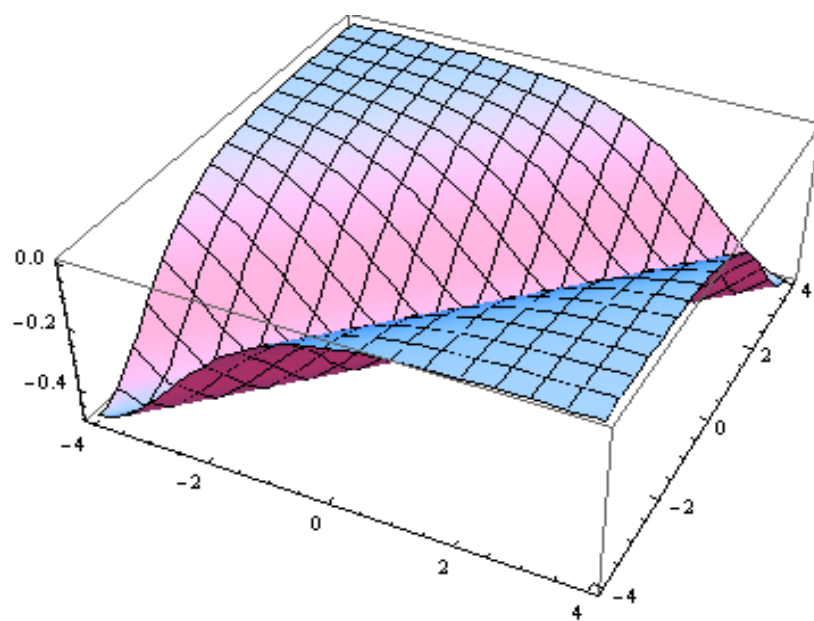
bulunur. O halde;

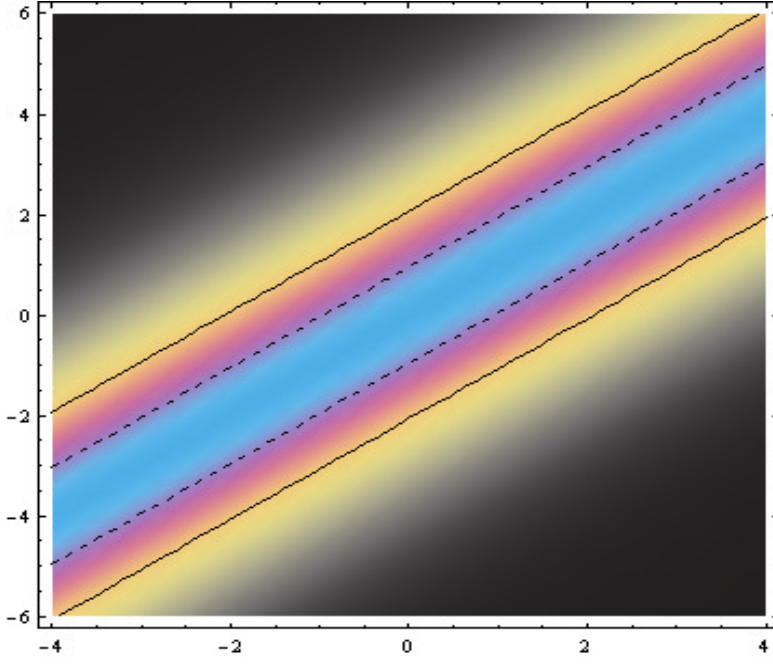
$$f = 1 + \exp(\Phi_1) = 1 + \exp(k_1 x - k_1^5 t), \quad (4.19)$$

olur. Böylece (4.3) denkleminin 1-soliton çözümü

$$u(x, t) = -2 \frac{k_1^2 \exp(k_1 x - k_1^5 t)}{[1 + \exp(k_1 x - k_1^5 t)]^2}, \quad (4.20)$$

olarak elde edilir.





Şekil 4.1. SK denklemi için elde edilen 1-soliton çözümü, $k_1 = 1$.

2-soliton çözümü için; (4.14) 'de $N = 2$ alırsak

$$f_1 = \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2), \quad (4.21)$$

olur.

$$f_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq N} A(i, j) \exp(\Phi_i + \Phi_j), \quad (4.22)$$

biçimindedir ki burada

$$A(i, j) = -\frac{P(k_i - k_j)^2}{P(k_i + k_j)^2}, \quad 1 \leq i < j \leq 2, \quad (4.23)$$

dir. O halde

$$f = 1 + \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2) + A(1, 2) \exp(\Phi_1 + \Phi_2), \quad (4.24)$$

ve

$$A(1, 2) = -\frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6}, \quad (4.25)$$

olmak üzere;

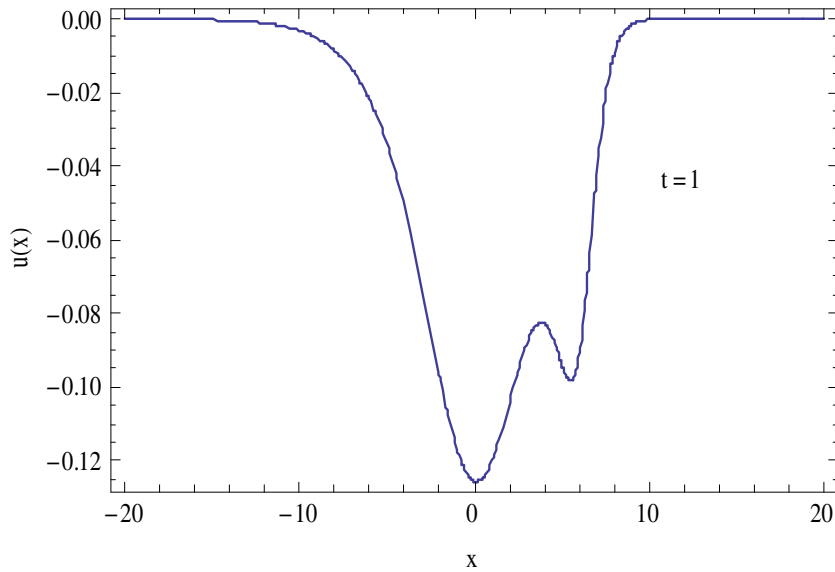
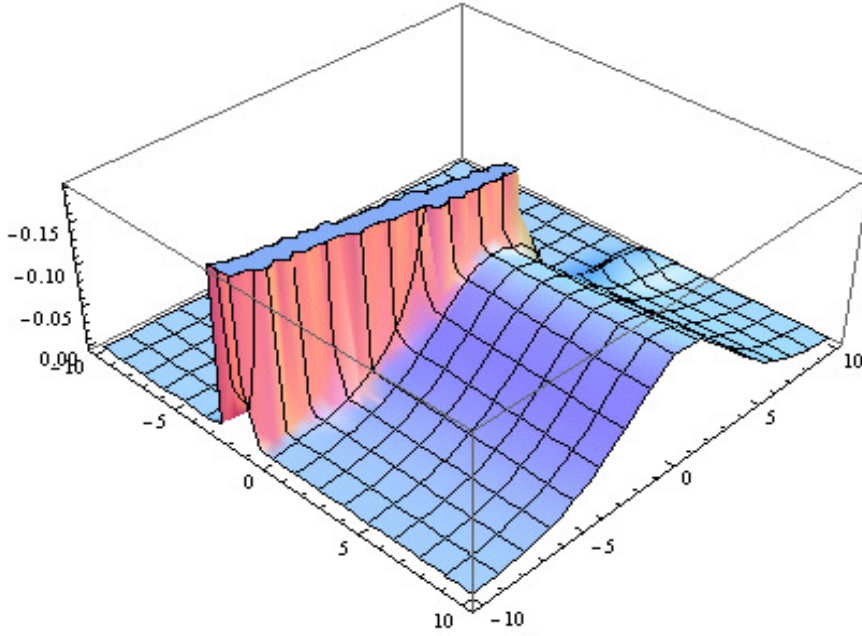
$$f = 1 + e^{k_1 x - k_1^5 t} + e^{k_2 x - k_2^5 t} \quad (4.26)$$

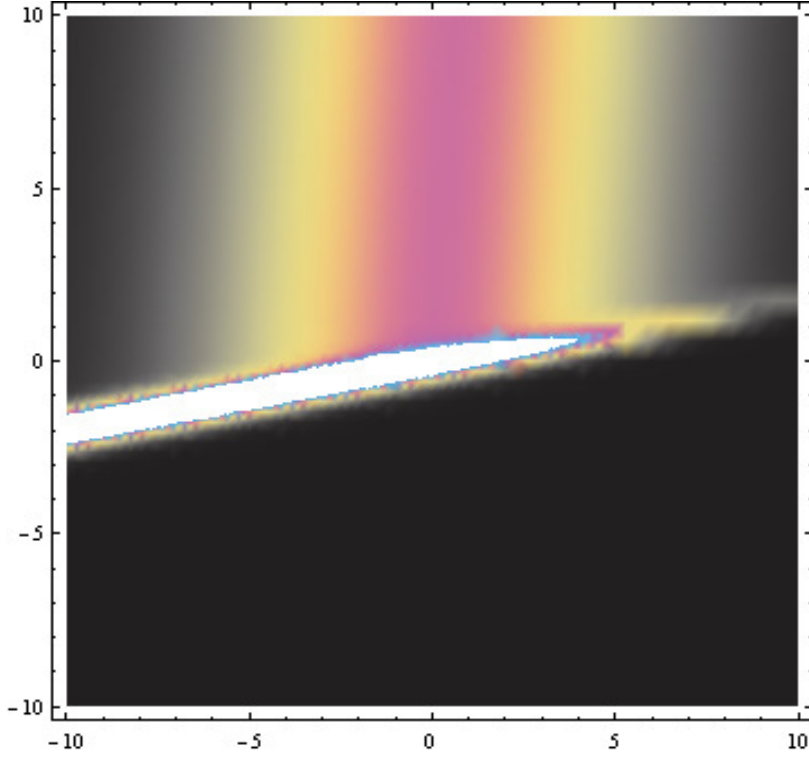
$$- \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6} e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^5 + k_2^5)t},$$

olarak bulunur. Bu ifade (4.8) 'de yerine yazılırsa

$$u(x, t) = -2 \frac{\left\{ \begin{array}{l} k_1^2 e^{k_1 x - k_1^5 t} + k_2^2 e^{k_2 x - k_2^5 t} \\ - \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6} \\ (k_1 + k_2)^2 e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^5 + k_2^5)t} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} [1 + e^{k_1 x - k_1^5 t} + e^{k_2 x - k_2^5 t} \\ - \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6} \\ e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^5 + k_2^5)t}]^2 \end{array} \right\}} \quad (4.27)$$

(4.3) SK denkleminin 2-soliton çözümü elde edilir.





Şekil 4.2. SK denklemleri için elde edilen 2-soliton çözümü, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1$.

$N = 3$ için

$$f_1 = \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2) + \exp(\Phi_3), \quad (4.28)$$

$$f_2 = A(1, 2) \exp(\Phi_1 + \Phi_2) + A(2, 3) \exp(\Phi_2 + \Phi_3) \quad (4.29)$$

$$+ A(1, 3) \exp(\Phi_1 + \Phi_3),$$

olup

$$f(x, t) = 1 + \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2) + \exp(\Phi_3) \quad (4.30)$$

$$+ A(1, 2) \exp(\Phi_1 + \Phi_2) + A(2, 3) \exp(\Phi_2 + \Phi_3)$$

$$+ A(1, 3) \exp(\Phi_1 + \Phi_3) + f_3(x, t),$$

şeklindedir. Burada

$$f_3 = B(1, 2, 3) \exp(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3),$$

$$\begin{aligned}
B(1, 2, 3) &= A(1, 2)A(1, 3)A(2, 3) \\
&= -\frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6} \\
&\quad -\frac{(k_1 - k_3)(w_1 - w_3) + (k_1 - k_3)^6}{(k_1 + k_3)(w_1 + w_3) + (k_1 + k_3)^6} \\
&\quad -\frac{(k_2 - k_3)(w_2 - w_3) + (k_2 - k_3)^6}{(k_2 + k_3)(w_2 + w_3) + (k_2 + k_3)^6},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

olduğundan 3-soliton çözümü için, $1 \leq i < j \leq 3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= 1 + e^{k_1 x - k_1^5 t} + e^{k_2 x - k_2^5 t} + e^{k_3 x - k_3^5 t} \\
&\quad - \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6} e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^5 + k_2^5)t} \\
&\quad - \frac{(k_2 - k_3)(w_2 - w_3) + (k_2 - k_3)^6}{(k_2 + k_3)(w_2 + w_3) + (k_2 + k_3)^6} e^{(k_2 + k_3)x - (k_2^5 + k_3^5)t} \\
&\quad - \frac{(k_1 - k_3)(w_1 - w_3) + (k_1 - k_3)^6}{(k_1 + k_3)(w_1 + w_3) + (k_1 + k_3)^6} e^{(k_1 + k_3)x - (k_1^5 + k_3^5)t} \\
&\quad - \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6} \\
&\quad - \frac{(k_1 - k_3)(w_1 - w_3) + (k_1 - k_3)^6}{(k_1 + k_3)(w_1 + w_3) + (k_1 + k_3)^6} \\
&\quad - \frac{(k_2 - k_3)(w_2 - w_3) + (k_2 - k_3)^6}{(k_2 + k_3)(w_2 + w_3) + (k_2 + k_3)^6} e^{(k_1 + k_2 + k_3)x - (k_1^5 + k_2^5 + k_3^5)t},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

formundadır. Bu ifade (4.8) 'de yerine yazılırsa (4.3) SK denkleminin 3-soliton çözümü elde edilir.

4.2. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemleri

Bağımsız dalgalar (solitary waves) ilk defa 1834 yılında durgun bir teknenin ön tarafından kopan yuvarlak, düzgün ve oldukça belirgin bir su kütesinin şeklinde bir değişiklik ve hızında en ufak bir azalma olmaksızın yaklaşık 3 kilometrelik bir kanal boyunca ilerlediğinin Scott RUSSEL [47] tarafından gözlenmesi ile kayda geçmiştir. Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle yine Scott RUSSEL tarafından bu dalgalara "Bağımsız dalgalar" adı verilmiştir. 1847 yılında Stokes [48] ve 1872 yılında Boussinesq [6] gibi bir çok matematikçi kısaca bu konudan bahsetmiş olsa da sığ sulardeki bağımsız dalgaların profilini gözlemleyen Scott RUSSEL'den sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında Korteweg-de Vries'e aittir. Korteweg-de Vries [8] sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair günümüzde oldukça ilgi çeken denklemi bulmuşlardır.

l : kanalın derinliği

$l + \eta$: (η küçük olmak üzere) yüzeyin dipten itibaren yüksekliği

α : sıvının düzgün hareketi ile ilgili küçük bir sabit

σ : $\frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ (bir parametre)

T : Yüzey gerilimi

g : yerçekim ivmesi

ρ : sıvının yoğunluğu

olmak üzere dalganın hareketi ile ilgili kısmi diferansiyel denklem

$$\eta_\tau = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right], \quad (4.33)$$

biçimindedir.

$$\eta = \beta \alpha u, \quad \xi = -\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{\sigma}} x, \quad \tau = \sqrt{\frac{2g\mu\alpha^3}{\sigma l}} t, \quad (4.34)$$

dönüşümleri ile bu denklem,

$$u_\tau + u_\xi + \epsilon u u_\xi + \mu u_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (4.35)$$

halini alır. Burada,

$$\epsilon = \frac{3}{2} \beta,$$

ve μ bilinen bir parametredir. Bu denklemde

$$x = \xi - \tau,$$

dönüşümü yapılır ve τ yerine t yazılırsa

$$u_t + \epsilon u u_x + \mu u_{xxx} = 0,$$

denklemini elde edilir [49].

KdV denklemi inverse scattering yöntemiyle [11] analitik olarak çözülebilir olmasına rağmen bu yöntemin zamandan bağımsız Schrödinger denklemine bağlı olarak sadece birkaç özel potansiyel için sonuç veriyor olması sebebiyle nümerik çözümleri önemini korumaktadır. KdV denkleminin nümerik çözümünü ilk olarak Zabusky ve Kruskal [10] sonlu farklar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Yaptıkları çalışmada bağımsız dalga'nın etkileşiminin özellikleri ortaya konulmuştur. Zabusky ve Kruskal ikinci bir dalgayla karşılaştığında geçiş aşaması hariç, şeklini koruyarak düzgün ilerleyen dalgalar için soliton kavramını tanımlamışlardır. Sonlu elemanlar yöntemini ise ilk olarak uygulayan Wahibin olmuştur [50]. Trial ve test fonksiyonlarını aynı seçerek uyguladığı dissipative Galerkin yönteminde kullandığı üç veya daha yüksek dereceli polinomlardan elde edilen düzgün spline fonksiyonlar olup aralıklar aynı h uzunluğunda seçilmiştir. Bu yöntemin nümerik hesapları Alexander ve Morris [51] tarafından 0 ile 1 aralığında seçilen dissipation katsayıları ile kübik spline fonksiyonları kullanılarak yapılmıştır.

KdV denklemi çok farklı fiziksel sistemlerde ortaya çıktığından önemli bir nonlinear kısmi diferansiyel denklemdir.

4.2.1. KdV Denklemlerinin Ailesi

1. 3. Mertebeden KdV Denklemleri

$$u_t + p(u) u_x + u_{xxx} = 0, \tag{4.36}$$

denklemini 3.mertebeden KdV denklemi adı verilir. Burada $u(x, t)$, x uzay ve t zaman değişkeninin bir fonksiyonudur. Nonlinear $p(u)$ terimi aşağıdaki şekillerde karşımıza çıkar.

$$p(u) = \begin{cases} au, \\ au^2, \\ au^n, \\ u_x, \\ au^n - bu^{2n}, \end{cases}$$

a) (4.36) denkleminde $p(u) = \pm 6u$ olarak alırsak

$$u_t \pm 6u u_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.37)$$

standart KdV denkleminde elde edilir. Burada ± 6 tam integrallenebilme için uygun bir faktördür. Yani KdV denkleminin N - soliton çözümleri vardır.

b) (4.36) denkleminde $p(u) = 6u^2$ olarak alırsak

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.38)$$

mKdV denkleminde elde edilir. mKdV denkleminde tam olarak integrallenebilir bir denklemdir. Bu denklem elektrik devrelerinde ve çok bileşenli plazmalarda görülür. Bu denklem rasyonel fonksiyon formunda cebirsel soliton çözümler vermektedir [52]. Cebirsel solitonların kararlılık ve kararsızlık koşullarını içeren bir çok çalışma mevcuttur [53] -[54] .

c) (4.36) denkleminde $p(u) = au^n$ alırsak

$$u_t + au^n u_x + u_{xxx} = 0, \quad n \geq 3 \quad (4.39)$$

genelleştirilmiş KdV denkleminde (gKdV) elde edilir [55].

d) (4.36) denkleminde $p(u) = u_x$ alırsak

$$u_t + (u_x)^2 + u_{xxx} = 0, \quad (4.40)$$

potansiyel KdV denkleminde elde edilir.

e) (4.36) denkleminde $p(u) = au^n - bu^{2n}$ alırsak

$$u_t + (au^n - bu^{2n})u_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.41)$$

iki nonlineer kuvvete sahip gKdV denkleminde elde bulunur. Bu denklem uzun akustik tipli nonlineer dalgaların bir ilerlemesini tanımlar [56]. $n = 1$ için bu denklem çok iyi bilinen Gardner denkleminde yani KdV-mKdV denklemlerinin birleşimi olarak da adlandırılır [57].

2. 5. Mertebeden KdV Denkleminde

En çok bilinen 5. mertebeden KdV denkleminde α, β, γ sıfır olmayan reel parametreler olmak üzere,

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u_{xxx} + u_{5x} = 0, \quad (4.42)$$

şeklinde. $u(x, t)$ yeterince düzgün bir fonksiyondur. Çünkü α, β, γ keyfi ve farklı değerler alır. Bu da KdV denkleminin karakterini değiştirir. KdV denkleminin birçok formunu bu parametreler değiştirilerek elde edilebilir. Lax denklemi [23], Kaup-Kupershmidt denklemi [58]-[59] Sawada Kotera denklemi [35] ve Ito denklemi [60] bu parametreler değiştirilerek oluşturulabilir.

3. Yüksek Mertebeden KdV Denklemleri

$$u_t + 6u u_x + u_{3x} - u_{5x} + \alpha u_{7x} = 0, \quad (4.43)$$

$$u_t + 6u u_x + u_{3x} - u_{5x} + \alpha u_{7x} + \beta u_{9x} = 0, \quad (4.44)$$

denklemleri sırasıyla 7. ve 9. mertebeden KdV denklemleri olarak bilinir. Bu denklemlerin birçok korunum kanunu mevcuttur. Bunların bir çoğu u ve u nun türevlerine bağlı polinomlardır [61]-[62].

4.2.2. (3+1)-Boyutlu KdV Denklemi

Wazwaz [63] tarafından

$$u_t + 6u u_y + u_{xy} + u_{xxxxz} + 60u_x^2 u_z + 10u_{xxx} u_z + 20u_x u_{xxz} = 0, \quad (4.45)$$

şeklindeki (3+1) - boyutlu KdV denkleminin Hirota bilineer metodu ile bir ve iki soliton çözümleri elde edildi.

Wang, Dai ve Liang [64], (4.45) formundaki (3+1) - boyutlu KdV denklemi için

$$f(x, y, t) = e^{\xi_1} + \delta_1 \cos(\xi_2) + \delta_2 \cosh(\xi_3) + \delta_3 e^{-\xi_1}$$

yeni tip çözüm fonksiyonu oluşturmuşlardır.

(2+1) - boyutlu aşağıdaki KdV denklemlerinin çoklu soliton ve singüler çözümleri Wazwaz [65] tarafından bulundu.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = -(u_{xx} - 2u^3)_x - \frac{3}{2}(u u_y + u_x \partial_x^{-1} u_y), \\ u_t = \frac{1}{2}(u_{xx} - 2u^3)_x + \frac{3}{2}(u u_y - \frac{1}{4} \partial_x^{-1} u_{yy}), \\ u_t = -\frac{1}{4}(u_{xx} - 2u^3)_x - \frac{3}{4}(\frac{1}{4} \partial_x^{-1} u_{yy} + u_x \partial_x^{-1} u_y), \\ u_t = 2(u_{xx} - 2u^3)_x + \frac{3}{4}(6 u u_y - \partial_x^{-1} u_{yy} + 2u_x \partial_x^{-1} u_y), \end{array} \right. \quad (4.46)$$

burada ∂_x^{-1} türevi ∂_x 'in tersi olup

$$(\partial_x^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

dir.

Şimdi, (4.45) ile verilen (3+1) - boyutlu KdV denklemine

$$u(x, t) = \frac{\partial \ln f(x, t)}{\partial x} = \frac{f_x}{f}, \quad (4.47)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}, \quad u_t = \frac{f_{xt}f - f_x f_t}{f^2}, \\ \\ u_y = \frac{f_{xy}f - f_x f_y}{f^2}, \quad u_z = \frac{f_{xz}f - f_x f_z}{f^2}, \\ \\ u_{xx} = \frac{f_{3x}}{f} - 3\frac{f_x f_{2x}}{f^2} + 2\frac{f_x^3}{f^3}, \\ \\ u_{xxx} = \frac{f_{4x}}{f} - 4\frac{f_x f_{3x}}{f^2} - 3\frac{f_{2x}^2}{f^2} + 12\frac{f_x^2 f_{2x}}{f^3} - 6\frac{f_x^4}{f^4}, \\ \\ u_{xxy} = \frac{f_{3xy}}{f} - \frac{f_y f_{3x}}{f^2} - 3\frac{f_{xy} f_{2x}}{f^2} - 3\frac{f_x f_{2xy}}{f^2} + 6\frac{f_x f_y f_{2x}}{f^3} + 6\frac{f_x^2 f_{xy}}{f^3} - 6\frac{f_x^3 f_y}{f^4}, \\ \\ u_{xxz} = \frac{f_{3xz}}{f} - \frac{f_z f_{3x}}{f^2} - 3\frac{f_{xz} f_{2x}}{f^2} - 3\frac{f_x f_{2xz}}{f^2} + 6\frac{f_x f_z f_{2x}}{f^3} + 6\frac{f_x^2 f_{xz}}{f^3} - 6\frac{f_x^3 f_z}{f^4}, \\ \\ u_{4x} = \frac{f_{5x}}{f} - 5\frac{f_x f_{4x}}{f^2} - 10\frac{f_{2x} f_{3x}}{f^2} + 20\frac{f_x^2 f_{3x}}{f^3} + 30\frac{f_x f_{2x}^2}{f^3} - 60\frac{f_x^3 f_{2x}}{f^4} + 24\frac{f_x^5}{f^5}, \\ \\ u_{4xz} = \frac{f_{5xz}}{f} - \frac{f_{5x} f_z}{f^2} - 5\frac{f_{xz} f_{4x}}{f^2} - 5\frac{f_x f_{4xz}}{f^2} - 10\frac{f_{2xz} f_{3x}}{f^2} + 10\frac{f_x f_z f_{4x}}{f^3} - 10\frac{f_{2x} f_{3xz}}{f^2} \\ + 20\frac{f_{2x} f_z f_{3x}}{f^3} + 40\frac{f_x f_{xz} f_{3x}}{f^3} + 20\frac{f_x^2 f_{3xz}}{f^3} + 30\frac{f_{2x}^2 f_{xz}}{f^3} + 60\frac{f_x f_{2xz} f_{2x}}{f^3} - 90\frac{f_x f_z f_{2x}^2}{f^4} \\ - 60\frac{f_x^2 f_z f_{3x}}{f^4} - 180\frac{f_x^2 f_{xz} f_{2x}}{f^4} - 60\frac{f_x^3 f_{2xz}}{f^4} + 240\frac{f_{2x} f_z f_{3x}^2}{f^5} + 120\frac{f_x^4 f_{xz}}{f^5} - 120\frac{f_x^5 f_z}{f^6}, \end{array} \right. \quad (4.48)$$

kısmi türevleri elde edilir. Bu ifadeler (4.45) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & f_{xt}f - f_x f_t + f_{3xy}f + 3f_{2x}f_{xy} - 3f_x f_{2xy} - f_{3x}f_y \\ & + f_{5xz}f - f_{5x}f_z + 5f_{xz}f_{4x} - 5f_x f_{4xz} - 10f_{2xz}f_{3x} + 10f_{2x}f_{3xz} = 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

(3+1) - boyutlu KdV denkleminin bilineer formu bulunur. Hirota D lineer operatörünün özelliğinden (4.49) denkleminin Hirota bilineer formu ise

$$P(D)\{f.f\} = (D_x D_t + D_x^3 D_y + D_x^6 D_z)\{f.f\} = 0, \quad (4.50)$$

olur. $f(x, t)$ fonksiyonu ε küçük bir parametre olmak üzere

$$f(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x, t),$$

biçimindeki pertürbasyon açılımına sahiptir. N-Soliton çözümü için

$$\Phi_i = k_i x + w_i t + l_i y + m_i z, \quad (4.51)$$

dir.

$$w_i = -(k_i^5 m_i + k_i^2 l_i), \quad (4.52)$$

olarak bulunan ifade (4.51) denkleminde yerine yazılırsa

$$\Phi_i = k_i x - (k_i^5 m_i + k_i^2 l_i) t + l_i y + m_i z, \quad (4.53)$$

elde edilir. Buradan $N = 1$ için

$$f_1 = \exp(\Phi_1) = \exp(k_1 x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1) t + l_1 y + m_1 z), \quad (4.54)$$

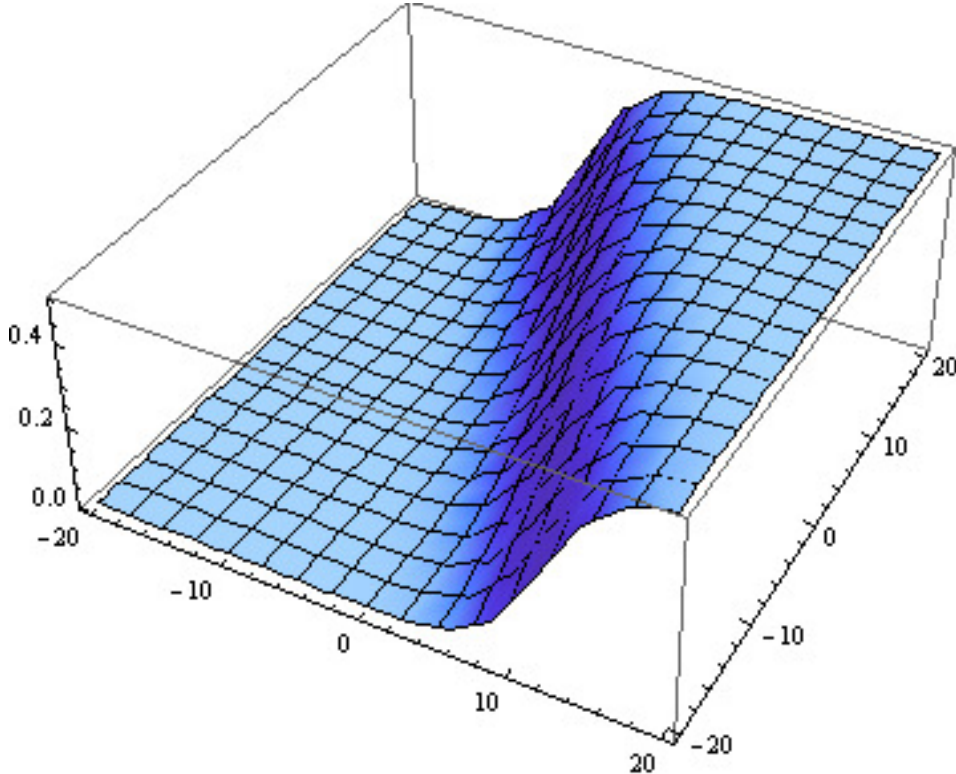
bulunur. O halde (4.54) ifadesini (4.13) 'de yerine yazarsak

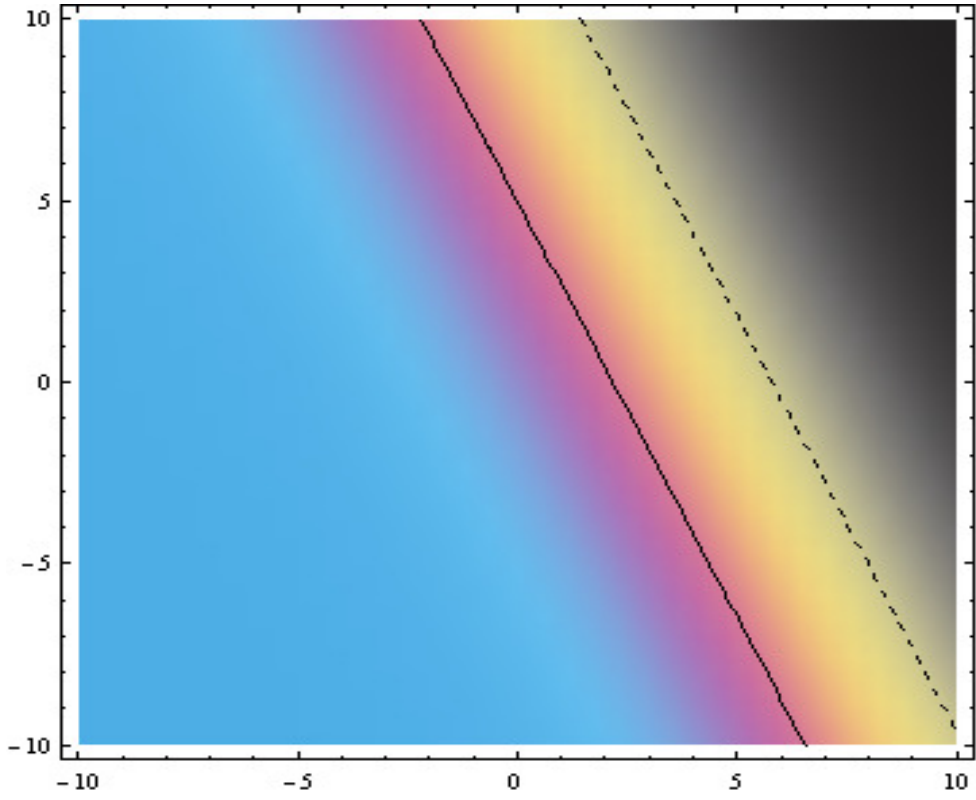
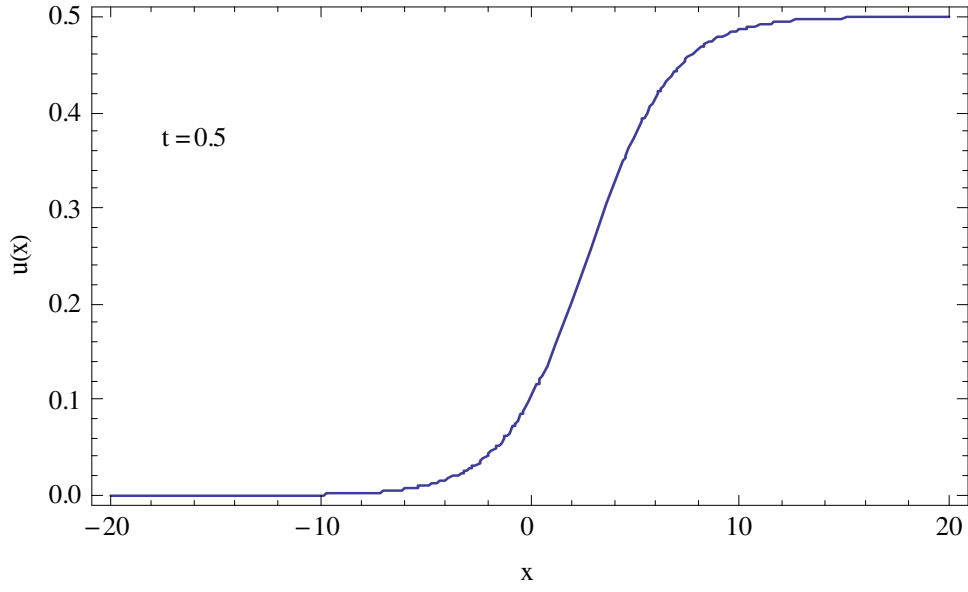
$$f = 1 + \exp(\Phi_1) = 1 + \exp(k_1 x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1) t + l_1 y + m_1 z), \quad (4.55)$$

elde edilir. Böylece (4.45) denkleminin 1-soliton çözümü

$$u(x, t) = \frac{k_1 \exp[k_1 x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1) t + l_1 y + m_1 z]}{1 + \exp[k_1 x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1) t + l_1 y + m_1 z]}, \quad (4.56)$$

olur.





Şekil 4.3. (3+1)-KdV denklemi için elde edilen 1-soliton çözümü,

$$k_1 = 0.5, l_1 = -1, m_1 = 1.$$

(3+1) - boyutlu KdV denkleminin 2-soliton çözüm için (4.14) ifadesinde $N = 2$ olarak alırsak

$$f_1 = \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2),$$

olur ve

$$f_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq N} A(i, j) \exp(\Phi_i + \Phi_j),$$

biçimindedir. Burada

$$A(1, 2) = -\frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6(m_1 - m_2) + (k_1 - k_2)^3(l_1 - l_2)}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6(m_1 + m_2) + (k_1 + k_2)^3(l_1 + l_2)}, \quad (4.57)$$

dir.

$$f = 1 + \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2) + A(1, 2) \exp(\Phi_1 + \Phi_2),$$

olduğundan,

$$f = 1 + e^{k_1 x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1) t + l_1 y + m_1 z} + e^{k_2 x - (k_2^5 m_2 + k_2^2 l_2) t + l_2 y + m_2 z} - \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6(m_1 - m_2) + (k_1 - k_2)^3(l_1 - l_2)}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6(m_1 + m_2) + (k_1 + k_2)^3(l_1 + l_2)} e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1 + k_2^5 m_2 + k_2^2 l_2) t + (l_1 + l_2)y + (m_1 + m_2)z}, \quad (4.58)$$

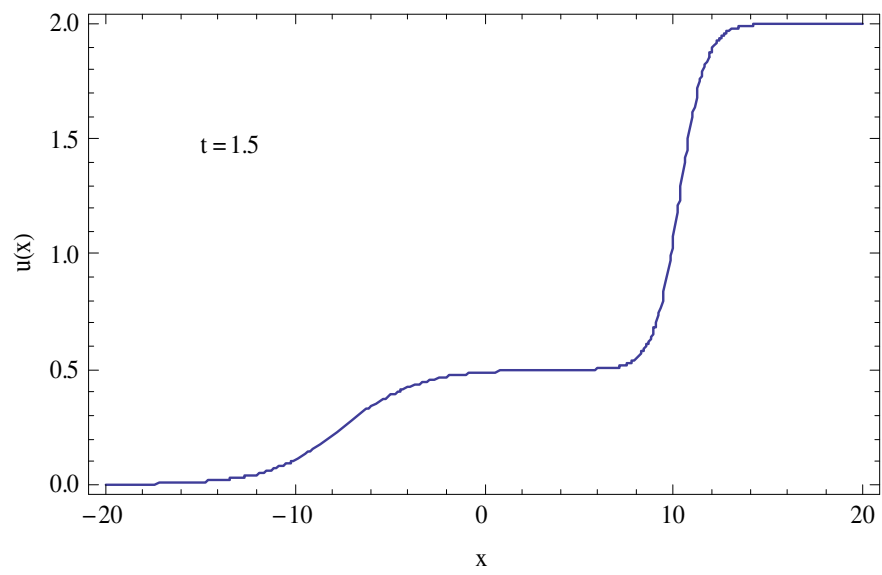
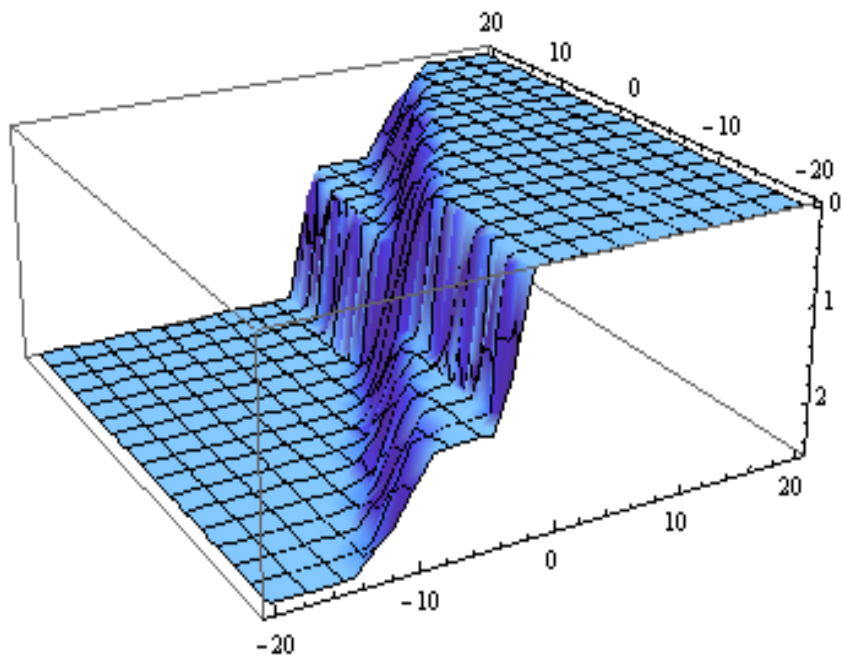
olarak yazılır. Bu ifade (4.47) 'de yerine yazılırsa ve

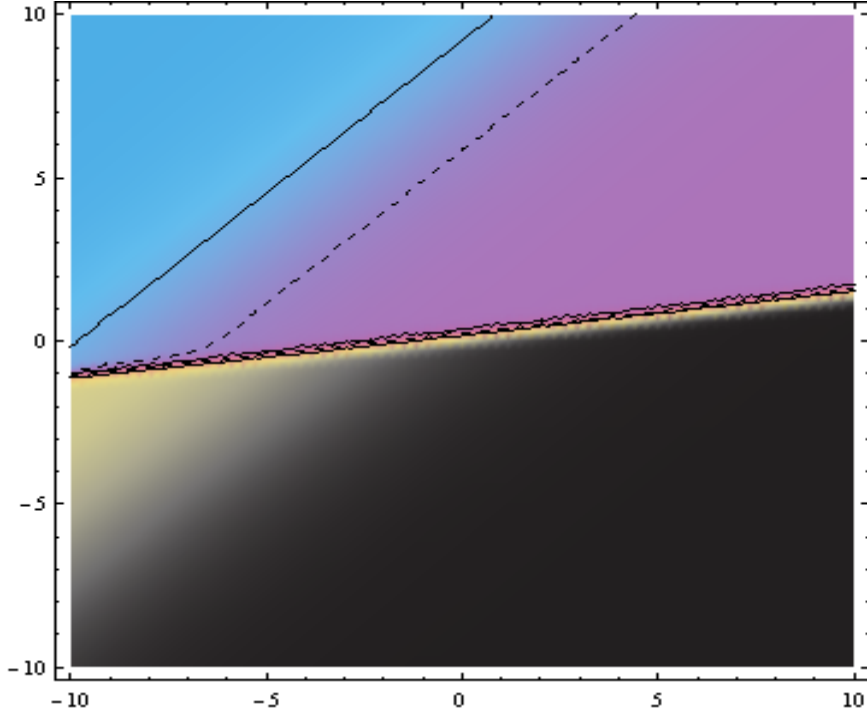
$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = k_i x - (k_i^5 m_i + k_i^2 l_i) t + l_i y + m_i z \quad i = 1, 2. \\ y = \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6(m_1 - m_2) + (k_1 - k_2)^3(l_1 - l_2)}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6(m_1 + m_2) + (k_1 + k_2)^3(l_1 + l_2)}, \\ t = (k_1 + k_2)x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1 + k_2^5 m_2 + k_2^2 l_2) t + (l_1 + l_2)y + (m_1 + m_2)z, \end{array} \right. \quad (4.59)$$

olarak alınrsa (4.45) (3+1) - boyutlu KdV denkleminin

$$u(x, t) = \frac{k_1 e^{x_1} + k_2 e^{x_2} - y(k_1 + k_2)e^t}{1 + e^{x_1} + e^{x_2} - y e^t}, \quad (4.60)$$

2-soliton çözümü elde edilir.





Şekil 4.4. (3+1)-KdV denklemi için elde edilen 2-soliton çözümü,

$$k_1 = l_1 = 1.5, m_1 = 1, k_2 = 0.5, l_2 = 2, m_2 = 1.$$

$N = 3$ için

$$f_1 = \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2) + \exp(\Phi_3),$$

$$f_2 = A(1, 2) \exp(\Phi_1 + \Phi_2) + A(2, 3) \exp(\Phi_2 + \Phi_3)$$

$$+ A(1, 3) \exp(\Phi_1 + \Phi_3)$$

olup

$$f(x, t) = 1 + \exp(\Phi_1) + \exp(\Phi_2) + \exp(\Phi_3)$$

$$+ A(1, 2) \exp(\Phi_1 + \Phi_2) + A(2, 3) \exp(\Phi_2 + \Phi_3)$$

$$+ A(1, 3) \exp(\Phi_1 + \Phi_3) + f_3(x, t)$$

şeklindedir. Burada

$$f_3 = B(1, 2, 3) \exp(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3),$$

$$B(1, 2, 3) = A(1, 2)A(1, 3)A(2, 3)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6(m_1 - m_2) + (k_1 - k_2)^3(l_1 - l_2)}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6(m_1 + m_2) + (k_1 + k_2)^3(l_1 + l_2)} \\
&\quad (4.61) \\
&\quad \frac{(k_1 - k_3)(w_1 - w_3) + (k_1 - k_3)^6(m_1 - m_3) + (k_1 - k_3)^3(l_1 - l_3)}{(k_1 + k_3)(w_1 + w_3) + (k_1 + k_3)^6(m_1 + m_3) + (k_1 + k_3)^3(l_1 + l_3)} \\
&\quad \frac{(k_2 - k_3)(w_2 - w_3) + (k_2 - k_3)^6(m_2 - m_3) + (k_2 - k_3)^3(l_2 - l_3)}{(k_2 + k_3)(w_2 + w_3) + (k_2 + k_3)^6(m_2 + m_3) + (k_2 + k_3)^3(l_2 + l_3)},
\end{aligned}$$

olduğundan 3-soliton çözümü için, $1 \leq i < j \leq 3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= 1 + e^{k_1 x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1) t + l_1 y + m_1 z} \\
&\quad + e^{k_2 x - (k_2^5 m_2 + k_2^2 l_2) t + l_2 y + m_2 z} + e^{k_3 x - (k_3^5 m_3 + k_3^2 l_3) t + l_3 y + m_3 z} \\
&\quad - \frac{(k_1 - k_2)(w_1 - w_2) + (k_1 - k_2)^6(m_1 - m_2) + (k_1 - k_2)^3(l_1 - l_2)}{(k_1 + k_2)(w_1 + w_2) + (k_1 + k_2)^6(m_1 + m_2) + (k_1 + k_2)^3(l_1 + l_2)} \\
&\quad e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1 + k_2^5 m_2 + k_2^2 l_2) t + (l_1 + l_2)y + (m_1 + m_2)z} \\
&\quad - \frac{(k_2 - k_3)(w_2 - w_3) + (k_2 - k_3)^6(m_2 - m_3) + (k_2 - k_3)^3(l_2 - l_3)}{(k_2 + k_3)(w_2 + w_3) + (k_2 + k_3)^6(m_2 + m_3) + (k_2 + k_3)^3(l_2 + l_3)} \\
&\quad e^{(k_2 + k_3)x - (k_2^5 m_2 + k_2^2 l_2 + k_3^5 m_3 + k_3^2 l_3) t + (l_2 + l_3)y + (m_2 + m_3)z} \\
&\quad - \frac{(k_1 - k_3)(w_1 - w_3) + (k_1 - k_3)^6(m_1 - m_3) + (k_1 - k_3)^3(l_1 - l_3)}{(k_1 + k_3)(w_1 + w_3) + (k_1 + k_3)^6(m_1 + m_3) + (k_1 + k_3)^3(l_1 + l_3)} \\
&\quad e^{(k_1 + k_3)x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1 + k_3^5 m_3 + k_3^2 l_3) t + (l_1 + l_3)y + (m_1 + m_3)z}
\end{aligned}$$

$$\frac{(k_1-k_2)(w_1-w_2) + (k_1-k_2)^6(m_1-m_2) + (k_1-k_2)^3(l_1-l_2)}{(k_1+k_2)(w_1+w_2) + (k_1+k_2)^6(m_1+m_2) + (k_1+k_2)^3(l_1+l_2)}$$

$$\frac{(k_1-k_3)(w_1-w_3) + (k_1-k_3)^6(m_1-m_3) + (k_1-k_3)^3(l_1-l_3)}{(k_1+k_3)(w_1+w_3) + (k_1+k_3)^6(m_1+m_3) + (k_1+k_3)^3(l_1+l_3)}$$

$$\frac{(k_2-k_3)(w_2-w_3) + (k_2-k_3)^6(m_2-m_3) + (k_2-k_3)^3(l_2-l_3)}{(k_2+k_3)(w_2+w_3) + (k_2+k_3)^6(m_2+m_3) + (k_2+k_3)^3(l_2+l_3)}$$

$$e^{(k_1+k_2+k_3)x - (k_1^5 m_1 + k_1^2 l_1 + k_2^5 m_2 + k_2^2 l_2 + k_3^5 m_3 + k_3^2 l_3) t + (l_1 + l_2 + l_3) y + (m_1 + m_2 + m_3) z},$$

formundadır. Bu ifade (4.47) 'de yazılırsa (4.45) (3+1) - boyutlu KdV denkleminin 3-soliton çözümü elde edilir.

SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada soliton teorisinin önemli denklemlerinden olan ve lineer olmayan dalgaları temsil etmek için kullanılan SK denklemi ile sığ sulardaki dalgaları temsil etmek için kullanılan $(3+1)$ -boyutlu KdV denkleminin Hirota-bilineer metodu yardımıyla 1-,2- ve 3-soliton çözümlerini bulduk. SK denkleminin 1- ve 2- soliton çözümlerini Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 ile $(3+1)$ -boyutlu KdV denkleminin 1- ve 2- soliton çözümlerini ise Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 ile gösterdik. Bu çözümler sayesinde bu denklemlerin temsil ettiği karmaşık olayları daha iyi anlamak mümkün olabilir. Hirota bilineer metodu, Hirota [24] tarafından matematiksel fiziğin lineer olmayan kısmi türevli denklemlerinin multi soliton çözümlerini bulmak için kullanılmaktadır. Son zamanlarda bu tür diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok yöntem geliştirilmiş olup multi soliton çözümlerini bulmak için çok az yöntem bulunmaktadır. Bu nedenle önemli ve teorik bir yöntemdir. İleriki çalışmalarımızda, Hirota yöntemiyle üstel açılım yöntemini birleştirerek bazı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin multi soliton çözümlerini bulmak istiyoruz.

KAYNAKLAR

- [1] **Yaşar İ. B.**, 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [2] **Koca K.**, 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [3] **Pala Y.**, 2006. Modern Fizik Uygulamaları, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [4] **Kolmogoro A.N., Fomin S.V.**, 1972. Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions, Moscow, Russia, 327p.
- [5] **Çakar Ö.**, 2010. Fonksiyonel Analize Giriş I, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [6] **Boussinesq J.**, 1871. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire Comptes Rendus, **72**, 755-759.
- [7] **Rayleigh L.**, 1876. On waves, Phil. Mag. **1**, 257-279
- [8] **Korteweg D.J., de Vries G.**, 1895. On the change of from of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, Phil. Mag., **39**, 422-443.
- [9] **Fermi E., Pasta J., Ulam S.**, 1955. Studies of nonlinear problems, Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A.C. Newell) Amer. Math. Soc., **15** (1974), 143-156.
- [10] **Zabusky N.J., Kruskal M.D.**, 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., **15**, 240-243.
- [11] **Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.**, 1974. Korteweg-de Vries equation and generalizations, Methods for exact solution, Comm. Pure Appl. Math., **27**, 9-133.
- [12] **Hirota R.**, 1971. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett. **27**, 1192-1194.
- [13] **Hirota R.**, 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, J. Math. Phys. **14**, 805-809.
- [14] **Zabusky N.J., Galvin C.J.**, 1971. Shallow water waves, the KdV equation and solitons, J.Fluid Mech. **47**, 811-824.

- [15] **Hammack J.L., Segur H.**, 1974. The Korteweg-de Vries equation and water waves, J. Fluid Mech. **65**, 289-314.
- [16] **Weidman P.D., Maxworthy T.**, 1978. Experiments on strong interactions between solitary waves, J. Fluid Mech. **85**, 417-431.
- [17] **Hirota R.**, 1980. Direct Methods in Soliton Theory, Solitons, Springer, Berlin.
- [18] **Ablowitz M., Segur H.**, 1981. Solitons and Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia.
- [19] **Öziş T., Yıldırım A.**, 2008. Reliable analysis for obtaining exact solutions of non-linear Schrödinger (NLS) equation, Chaos , Solitons and Fractals **38**, 209-212.
- [20] **Makhankov V.G., Fedyanin V. K.**, 1978. Soliton-like solution of the S3-equation pertubed by resonance interaction, Physics Letters A **68**, 169-171.
- [21] **Makhankov V.G.**, 1978. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems), Physics Reports **35**, 1-128.L.
- [22] **Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.**, 1967. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett., **19**, 1095-1097.
- [23] **Lax P.D.**, 1968. Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves, Commun. Pure Appl. Math. **21**, 467-490.
- [24] **Hirota R.**, 1971. Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett. **27**, 1192.
- [25] **Hirota R.**, 1972. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, J. Phys. Soc. Japan, **33**, 1456.
- [26] **Hirota R.**, 1972. Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons, J. Phys. Soc. Japan, **33**, 1459.
- [27] **Hirota R.**, 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, J. Math. Phys, **14**,805-809.
- [28] **Hirota R.**,1973. Exact N-soliton solution of a nonlinear lumped network equation, J. Phys. Soc. Japan, **35**, 286-288.

- [29] **Hietarinta J.**, 1991. Searching for integrable PDE's by testing Hirota's three-soliton condition, Proceeding of the 1991 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC'91", Stephen M. Watt, (Association for computing Machinery), 295-300.
- [30] **Hietarinta J.**, 1987. A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: *I*. KdV -type bilinear equations, J. Math. Phys. **28**, 1732-1742.
- [31] **Hietarinta J.**, 1987. A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: *II*. mKdV -type bilinear equations, J. Math. Phys. **28**, 2094-2101.
- [32] **Hietarinta J.**, 1987. A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: *III*. sine-Gordon-type bilinear equations, J. Math. Phys. **28**, 2586-2592.
- [33] **Hietarinta J.**, 1988. A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: *IV*. Complex bilinear equations, J. Math. Phys. **29**, 628-635.
- [34] **Pekcan A.**, 2005. The Hirota direkt metodu, Master of Science, Bilkent Üniversitesi, Ankara.
- [35] **Sawada K., Kotera T.**, 1974. A method for finding N-soliton solutions for the Kdv equation and KdV-like 215 equation, Prog. Theor. Phys. **51**, 1355-1367
- [36] **Shi Y., Li D.**, 2012. New exact solutions for the (2+1)-dimensional Sawada-Kotera equation, Computers and Fluids. **68**, 88-93.
- [37] **Ma Y., Geng X.**, 2012. Darboux and Backlund transformations of the bidirectional Sawada-Kotera equation, Appl. Math. Comput. **218**, 6963-6965.
- [38] **Wazwaz A.M.**, 2010. N-soliton solutions for the integrable bidirectional sixth-order Sawada-Kotera equation, Appl. Math. Comput. **216**, 2317-2320.
- [39] **Zhang J., Wei X., Hou J.**, 2010. Symbolic computation of exact solutions for the compound KdV-Sawada-Kotera equation, Int. J. Computer Math. **87**, 94-102.
- [40] **Liu C., Dai Z.**, 2008. Exact soliton solutions for the fifth-order Sawada-Kotera equation, Appl. Math. Comput. **206**, 272-275.
- [41] **Ruan H.Y., Li Z.F.**, 2006. Interactions between the y-periodic solution and the algebraic solution of the (2+1) - dimensional Sawada-Kotera equation, Phys. Scripta. **74**, 221-226.

- [42] **Liu Q., Zhu J.M.**, 2006. Exact Jacobian elliptic function solutions and hyperbolic function solutions for Sawada-Kotera equation with variable coefficient, Phys. Letters A. **352**, 233-238.
- [43] **Chen B., Xie Y.**, 2005. An auto-Backlund transformation and exact solutions of stochastic wick-type Sawada-Kotera equations, Chaos, Solitons and Fractals. **23**, 243-248.
- [44] **Xu Z., Chen H., Chen W.**, 2013. The multisoliton solutions for the (2+1)-dimensional Sawada-Kotera equation, Abs. Appl. Analysis. **767254**, 5 pages.
- [45] **Behzadi S.**, 2012. Numerical solution of Sawada-Kotera equation by using iterative methods, Int. J. Industrial Math. **4**, **00283**, 20 pages.
- [46] **Dinarvard S., Khosravi S., Doosthoseini A., Rashidi M.M.**, 2008. The homotopy analysis method for solving the Sawada-Kotera and Lax's fifth-order KdV equations, Adv. Theor. Appl. Mech. **1**, 327-335.
- [47] **Russell J.S.**, 1844. Report on waves, Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science , John Murray, Londra 311-390.
- [48] **Stokes G.G.**, 1847. On the theory of Oscillatory waves , Camb. Trans. **8**, 441-473.
- [49] **Ali A. H .A.**, 1989. Finite Element Studies Of Kortoweg de Vries Equation , Ph.D.Thesis, University College of North Wales, Bangor UK, 1-2.
- [50] **Wahibin L.B.**, 1974. A dissipative Galerkin Method for the numerical solution of first order hyperbolic equation. In Mathematical Aspects of Finite Elements in partial differential equations (C. de Boor, Ed.), New York, Academic Press, 147-169.
- [51] **Alexander M.E., Morris J.LI.**, 1981. Galerkin Methods for some model equations for nonlinear Dispersive Waves, J. Comp. Phys. **39**, 94-102.
- [52] **Wazwaz A.M.**, 2007. The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations, Appl. Math. Comput. **184** (2), 1002-1014.
- [53] **Ablowitz M.J., Clarkson P.A.**, 1991. Solitons, Nonlinear Evolution equations and Inverse scattering, Cambridge University Press, Cambridge.
- [54] **Bagolubasky I.L.**, 1997. Some examples of inelastic soliton interaction, Comput. Phys. Commun. **13** (2), 149-155

- [55] **Drazin P.G. Johnson R.S.**, 1996. Solitons: An introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
- [56] **Whitham G.B.**, 1999. Linear and Nonlinear Waves, Wiley-Interscience, New York, NY.
- [57] **Fu Z., Liu S., Liu Sh.**, 2004. New kinds of solutions to Gardner equation, Chaos, Solitons and Fractals **20**, 301-309.
- [58] **Kaup D.**, A higher-order water wave equation and method for solving it. Prog. Theor. Phys. Soc. 396-408
- [59] **Kupershmidt B.A.**, 1984. A super KdV equation: An integrable system, Phys. Lett. A **102** 213-215.
- [60] **Ito M.**, 1980. An extension of nonlinear evolution equations of KdV (mKdV) type to higher orders, Phys. Soc. Japan **49**, 771-778.
- [61] **Duffy B.R., Parkes E.J.**, 1996. Travelling solitary wave solutions to a seventh-order generalized KdV equation, Phys. Lett. A **214**, 271-272.
- [62] **Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B.**, 1988. Structural stability of the Korteweg de Vries solitons under a singular perturbation, Physica D **31** (1), 127-134.
- [63] **Wazwaz A.M.**, 2012. Soliton solutions for two (3+1)-dimensional non-integrable KdV - type equations, Math. Computer Modelling. **55**, 1845-1848.
- [64] **Wang C., Dai Z., Liang L.**, 2010. Exact three-wave solution for higher-dimensional KdV-type equation, Appl. Math. Comput. **216**, 501-505.
- [65] **Wazwaz A.M.**, 2009. Four (2+1)-dimensional integrable extensions of the KdV equation multiple-soliton and multiple singular soliton solutions Appl. Math. Comput. 1463-1476.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ'da doğdu. 2013 yılında 100. Yıl İlköğretim okulundan ve 2007 yılında Mehmet Akif Ersoy lisesinden mezun oldu. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik lisans programına kaydoldu. Mezun olduğu 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü uygulamalı matematik alanında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen devam etmekte.