

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ÇİFT DİZİLERİN BİR MODÜLÜS FONKSİYONUNA GÖRE
 $\tilde{\alpha}$. DERECEDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Birgül TORGUT

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yavuz ALTIN

ŞUBAT-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT DİZİLERİN BİR MODÜLÜS FONKSİYONUNA GÖRE $\tilde{\alpha}$.
DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

DOKTORA TEZİ
Birgöl TORGUT
(111121205)

Tezin Enstitüye Verildiğı Tarih: 20.12.2016

Tezin Savunulduğı Tarih: 03.02.2017

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yavuz ALTIN



Diğer Juri Üyeleri:

Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)



Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)



Prof. Dr. Ayhan EŞİ (ADY.Ü)



Doç. Dr. Mahmut IŞIK (HR.Ü)



ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde daima yanımda olan her konuda yardımlarını esirgemeyen, emeğini her zaman üzerimde hissettiğim, gerek bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, saygıdeğer hocam Doç.Dr.Yavuz ALTIN' a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, engin bilgi ve birikimlerinden yararlandığım Sayın Prof.Dr.Rifat ÇOLAK ve Prof.Dr.Mikail ET hocalarıma, doktora eğitimim boyunca her zaman yanımda olan ve karşılaştığımız problemlerde tartışmalarıyla desteğini bizden esirgemeyen Sayın Doç.Dr.Hıfı ALTINOK hocama ve yaşamım boyunca hep yanımda olan emeklerini benden hiç esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Birgül TORGUT
ELAZIĞ-2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR	3
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	3
2.2. Çift Diziler ve İstatistiksel Yakınsaklık	10
2.3. Çift Diziler İçin I Yakınsaklık ve (s, t) . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık	21
3. ÇİFT DİZİLERİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN f İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	26
3.1. Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden f Yoğunluğu ve f Modülüs Fonksiyonuna Göre İstatistiksel Yakınsaklığı	26
3.2. Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden f Kuvvetli Cesàro Yakınsaklığı	30
3.3. Modülüs Fonksiyonuna Göre Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı ve $\tilde{\alpha}$. Dereceden Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık	34
4. ÇİFT DİZİLERİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI ...	37
4.1. Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden $I_2(u)$ Yakınsaklığı	37
4.2. Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı ve Modülüs Fonksiyonu	41
4.3. Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Düzgün f İstatistiksel Yakınsaklığı ve $\tilde{\alpha}$. Dereceden Düzgün Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık	42
5. SONUÇLAR	45
6. KAYNAKLAR	46

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konunun önemi ve istatistiksel yakınsaklığın tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde çift dizilerin $\tilde{\alpha}$. dereceden f yoğunluğu ve f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklık kavramları incelenmiştir. Çift dizilerde $\tilde{\alpha}$. dereceden f kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizi uzayları tanımlanmış ve f herhangi bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ şartı altında bu dizi uzayları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca bir modülüs fonksiyonunun sahip olduğu bazı şartlar altında $\tilde{\alpha}$. dereceden f istatistiksel yakınsak çift diziler kümesi ile kuvvetli p -Cesàro toplanabilir diziler kümesi arasındaki içerme bağıntıları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde çift diziler için $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün yoğunluk kavramı ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çift dizilerde düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilme kavramları verilmiştir. f herhangi bir modülüs fonksiyonu olmak üzere çift diziler için $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çift dizilerde düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik arasındaki içerme bağıntıları verilmiştir. Ayrıca çift diziler $\tilde{\alpha}$. dereceden için f düzgün yoğunluk kavramı tanımlanmış ve düzgün f istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çift dizilerde düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik arasındaki içerme bağıntıları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Modülüs fonksiyonu, Çift dizi.

SUMMARY

Statistical Convergence of order $\tilde{\alpha}$ in Double Sequences with respect to a Modulus Function

This study consists of four chapters.

In Chapter 1, we give some informations about the importance and historical development of statistical convergence.

In Chapter 2, we give some fundamental definitions and theorems.

In Chapter 3, we examine the concepts of f density of order $\tilde{\alpha}$ and statistical convergence order $\tilde{\alpha}$ with respect to a modulus function f of double sequences. We define f strongly p -Cesàro summable sequence spaces of order $\tilde{\alpha}$ in double sequences and examine some relations between these sequence spaces under condition $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$, where f is any modulus. Moreover, we examine some inclusion relations between f statistical convergence of order $\tilde{\alpha}$ in double sequences of a modulus function and strongly p -Cesàro summable sequences in double sequences under some conditions.

In Chapter 4, we examine some inclusion relations between the concepts uniform density, uniform statistical convergence and uniform strongly p -Cesàro summable sequences of order $\tilde{\alpha}$ for double sequences. We give also some inclusion relations between uniform statistical convergence of order $\tilde{\alpha}$ and uniform strongly p -Cesàro summable of order $\tilde{\alpha}$ for double sequences, where f is any modulus function. Furthermore, we define the concept f uniform density of order $\tilde{\alpha}$ for double sequences and examine inclusion relations for uniform f statistical convergence and uniform strong p -Cesàro summability in double sequences.

Keywords: Statistical convergence, Cesàro summability, Modulus function, Double Sequence.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n - boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$h.h.k$	: Hemen hemen her k
ℓ_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\delta(K)$	: Bir K cümlesinin doğal yoğunluğu
S	: İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
s^2	: Kompleks terimli bütün çift dizilerin cümlesi
$\delta^2(K)$	: Bir K cümlesinin çift doğal yoğunluğu
c^2	: Bütün yakınsak çift dizilerin uzayı
l_∞^2	: Bütün sınırlı çift dizilerin uzayı
S_2	: Bütün istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayı
$U_2(K)$	: Bir K cümlesinin düzgün çift yoğunluğu
$\delta_\alpha^{f,2}(K)$	: Bir K cümlesinin $\tilde{\alpha}$ dereceden f çift yoğunluğu
$S_\alpha^2(f)$	: f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak tüm çift dizilerin kümesi
$M(E, F)$	: Sınırlı çarpanlar
$I_2^{\tilde{\alpha}}(u)$	: Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün I_2 istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayı
$U_2^{\tilde{\alpha}}(K, f)$	: K nın $\tilde{\alpha}$ dereceden f düzgün çift yoğunluğu
$I_{2,f}^\alpha(u)$	: f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün I_2 istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayı

1. GİRİŞ

Dizi uzaylarının gelişimi pek çok yeni yakınsaklık metodunun tanımlanmasından etkilenmiştir. Bunların en önemlilerinden biri de istatistiksel yakınsaklıktır.

İstatistiksel yakınsaklık, ilk olarak Zygmund [1] tarafından "hemen hemen yakınsaklık" terimi adı altında 1935 deki "Trigonometrik Seriler" kitabının ilk baskısında Fourier serilerinin istatistiksel yakınsaklığıyla ilgili teorem ispatlarında görülmüştür.

Bu kavram 1951 yılında Steinhaus [2] tarafından Polonya'da Wrocław Üniversitesinde düzenlenen bir konferansta tanıtılmıştır. Daha sonra Fast [3] alışılmış dizisel limit kavramını genişleterek istatistiksel yakınsaklık tanımını vermiştir. Bu yeni kavram Schoenberg [4] tarafından bazı dizi uzayları üzerinde istatistiksel limitin bir lineer fonksiyonel olabileceğinin farkına varılmıştır. Šalát [5] sınırlı istatistiksel yakınsak diziler kümesinin sınırlı diziler uzayının kapalı bir alt uzayı olduğunu göstermiştir. İstatistiksel Cauchy dizisi kavramı Fridy [6] tarafından tanımlanmış ve reel veya kompleks terimli bir dizinin istatistiksel Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartın istatistiksel yakınsak olması gerektiği gösterilmiştir. Connor [7] tarafından istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesàro toplanabilirliğin sınırlı diziler uzayı üzerinde eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

Son zamanlarda toplanabilme teorisinde modülüs fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yer tutmaktadır.

Modülüs fonksiyonun tanımı ilk defa 1953 de Nakano [8] tarafından verilmiştir. Daha sonra Ruckle [9], $FK-$ uzaylarını tanımlamak için bir modülüs fonksiyonu kullanmıştır. Ruckle [9] tarafından daha önceden tanımlanmış olan kuvvetli toplanabilir dizi uzayları, Maddox [10] tarafından genelleştirilerek kuvvetli toplanabilir dizi uzaylarını f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlamış ve bu dizi uzayının bazı topolojik özelliklerini incelemiştir. Connor [11], tarafından istatistiksel yakınsaklık ile f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış kuvvetli Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Aizpuru, Listán-García ve Rambla-Barreno [12] 2014 yılında f sınırsız modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamış ve daha sonra Aizpuru, Listán-García ve Rambla-Barreno [13] 2012 yılında bu kavramı çift dizilere uygulamıştır.

İlk olarak α . dereceden istatistiksel yakınsaklık Gadjiev ve Orhan [14] tarafından tanımlandı. 2010 yılında Çolak [15] sayı dizileri için α . dereceden yoğunluk kavramını tanımlayarak α . dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımını verdi ve istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirerek α . dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkileri incelemiştir. Çolak ve Bektaş [16] α . dereceden λ - istatistiksel yakınsaklık tanımını vererek bazı içermeye teoremlerini vermişlerdir. Bhardwaj ve Dhawan [17] f sınırsız modülüs fonksiyonu yardımıyla α . dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımını vermiştir.

İstatistiksel yakınsaklık, Maddox [18], Mursaleen [19], Kolk [20], Savaş [21], Fridy ve Orhan [22], Miller ve Orhan [23] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda bu kavram pek çok yazar tarafından ölçüm teorisine, sayı teorisi, trigonometrik serilere, lokal konveks uzaylara, toplanabilirlik teorisine, Banach uzaylarına uygulanmıştır.

$\mathbb{N}$ Pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin bir I ideal kullanarak, Kostyrko, Šalát ve Wilczyński [24] tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirildi ve ideal yakınsaklık adıyla yeni bir kavram ortaya konuldu. Bu yakınsaklık modern analizde çalışılan bir çok yakınsaklığı kapsadığından dolayı çok önemlidir.

Düzgün yoğunluk kavramı ilk defa Raimi [25] tarafından verilmiştir ve bu kavram kullanılarak Maddox [26] tarafından yoğunluk ve düzgün yoğunluk arasındaki ilişki incelenmiştir. Düzgün yoğunluk kavramının özellikleri, Freedman ve Sember [27], Brown ve Freedman ([28],[29]), Gálková, László ve Šalát [30], Grekos, Toma ve Tomanová [31] tarafından çalışılmıştır.

I_u yakınsaklığın temel özellikleri Baláz ve Šalát [32] tarafından incelenmiştir. I_u yakınsaklık kavramı I yakınsaklığın bir özel halidir.

Mursaleen ve Edely [33] çift doğal yoğunluk kavramını kullanarak, çift dizilerin istatistiksel yakınsaklığını tanımlamıştır. Bu çalışmadan bağımsız olarak bu konu Moricz [34] tarafından da çalışılmıştır. Moricz ve Rhoades [35] çift diziler için hemen hemen yakınsaklık kavramını vermiştir. Çift dizilerin $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaklığı Çolak ve Altın [36] tarafından incelendi. Das ve Savaş [37] tarafından çift diziler için düzgün yoğunluk ve I_u yakınsaklık kavramları çalışılmıştır.

2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremler verildi. İkinci kısımda çift diziler ve istatistiksel yakınsaklık kavramları incelenmiştir. Üçüncü kısımda ise çift diziler için I yakınsaklık ve (s, t) . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve sınırsız f modülü fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklık kavramı hakkında kısa bilgiler ve örnekler verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı denir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için;

- 1) $x + y = y + x$
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- 4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.
- 5) $1x = x$
- 6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- 7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- 8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ dir [38].

Tanım 2.1.2. X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

- M1) $d(x, y) \geq 0$
- M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- M3) $d(x, y) = d(y, x)$
- M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [39].

Tanım 2.1.3. Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise dizi reel terimli dizi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ise dizi kompleks terimli dizi olarak adlandırılır [39].

Tanım 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ X de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ öyle ki $n > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $x = (x_n)$ dizisi X de yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [40].

Tanım 2.1.5. Bir (X, d) metrik uzayında bir (x_n) dizisini alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [40].

Tanım 2.1.6. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [39].

Tanım 2.1.7. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: X \rightarrow K \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonu X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

$$\text{N1) } \|x\| \geq 0, (x \in X)$$

$$\text{N2) } \|x\| = 0 \iff x = \theta, (x \in X)$$

$$\text{N3) } \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, (\alpha \in K, x \in X)$$

$$\text{N4) } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (x, y \in X) \text{ [41].}$$

Tanım 2.1.8. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında aldığımız her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya tam veya Banach uzayı adı verilir [41].

Tanım 2.1.9. Kompleks terimli tüm $x = (x_k), (k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. $\omega, x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır [42]. ω nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir. Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfıra yakınsak diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzaydır [40].

Tanım 2.1.10. (Modülüs fonksiyonu) Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

- i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- iii) f artan,
- iv) f sıfır noktasında sağdan sürekli,

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona modülüs fonksiyonu denir [8] .

Şimdi modülüs fonksiyonuna örnekler verelim.

Örnek 2.1.11. (a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sınırlı fonksiyonu bir modülüs fonksiyonudur.

(i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şartını sağlayacağı fonksiyonun tanımından açıktır.

(ii) $f(x + y) = \frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = f(x) + f(y)$ olduğu göz önüne alınırsa $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ eşitsizliği sağlanır.

(iii) f artandır. Çünkü $f(x) = \frac{x}{x+1}$ den $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ olduğundan fonksiyon artandır.

(iv) f sıfırda sağdan süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f(0)$$

dır. O halde $f(x) = \frac{x}{x+1}$ bir modülüs fonksiyonudur.

(b) $f(x) = \log(1 + x)$ sınırsız fonksiyonu da bir modülüs fonksiyonudur.

(i) $\log(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır. Çünkü $\log(1 + 0) = \log 1 = 0$ dır. O halde $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şartı sağlanır.

(ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ dir.

$1 + x + y \leq (1 + x)(1 + y)$ eşitsizliği ve logaritma özelliğinden $\log(1 + x + y) \leq \log(1 + x) + \log(1 + y)$ elde ederiz. Dolayısıyla $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ dir.

(iii) f artandır.

$f(x) = \log(x + 1)$ den $f'(x) = \frac{\log e}{1+x} > 0$ pozitif olduğundan fonksiyon artandır.

(iv) f sıfır noktasında sağdan süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x + 1) = 0 = f(0)$$

dır. O halde $f(x) = \log(x + 1)$ bir sınırsız modülüs fonksiyonudur.

Lemma 2.1.12. f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olsun. Bu takdirde her bir $x \geq \delta$ için,

$$f(x) \leq \frac{2f(1)}{\delta}x$$

olur [43].

Uyarı 2.1.13. f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu iken $f^{-1}, f.g, f - g$ ve f/g fonksiyonları modülüs fonksiyonu olmak zorunda değildir [9].

Lemma 2.1.14. f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu ise $f \circ g, \alpha f (a \geq 0), \frac{f}{1+f}, f + g$ fonksiyonları da modülüs fonksiyonlarıdır [9].

Tanım 2.1.15. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir [6].

Tanım 2.1.16. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k” biçiminde gösterilir [6].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.17. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x = L$ biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer, özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir [6].

Teorem 2.1.18. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x = L$ dir [44].

İspat. Kabul edelim ki $\lim x_k = L$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için ve $k \geq N$ için $|x_k - L| \leq \varepsilon$

olacak şekilde $N \geq 1$ sayısı vardır. $\delta(A(\varepsilon)) = 0$ olduğundan $S - \lim x = L$ olur. Burada $A(\varepsilon) = \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dir.

Aşağıdaki örnek yukarıdaki teoremin tersinin doğru olmadığını gösterir.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak $x = (x_k)$ yakınsak değildir. Bununla birlikte yukarıda tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak bir dizi olduğu halde sınırlıdır.

Diğer taraftan, $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.

Teorem 2.1.19. Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir [44].

İspat. Kabul edelim ki $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim x = L_2$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Aşağıdaki

$$\begin{aligned} K_1(\varepsilon) &= \left\{ k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ ve} \\ K_2(\varepsilon) &= \left\{ k \leq n : |x_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım.

$S - \lim x = L_1$ olduğundan $\delta(K_1(\varepsilon)) = 0$ dir. Benzer şekilde $S - \lim x = L_2$ olduğundan $\delta(K_2(\varepsilon)) = 0$ dir. $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) \cup K_2(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\delta(K(\varepsilon)) = 0$ olması $\delta(\mathbb{N} \setminus K(\varepsilon)) = 1$ olmasını gerektirir. Eğer $k \in \delta(\mathbb{N} \setminus K(\varepsilon))$ ise

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - x_k| + |x_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $|L_1 - L_2| = 0$, yani $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 2.1.20. $S - \lim x = a$, $S - \lim y = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde;

i) $S - \lim cx_k = ca$

ii) $S - \lim (x_k + y_k) = a + b$ dir [44].

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Tanım 2.1.21. Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [6].

Teorem 2.1.22. Bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart istatistiksel yakınsak olmasıdır [44].

İspat. İlk olarak $S - \lim x = L$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A(\varepsilon) = \{k \leq n : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ olmak üzere herhangi $\varepsilon > 0$ için $\delta(A(\varepsilon)) = 0$ bulunur. Bu durumda

$$\delta(\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \right) = 1$$

olmasını gerektirir.

$m, k \notin A(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ dir. $m \notin A(\varepsilon)$ ve

$$B(\varepsilon) = \{k \leq n : |x_m - x_k| < \varepsilon\}$$

olsun. Bu taktirde $\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) \subset B(\varepsilon)$ dir. Böylece

$$1 = \delta(\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) \leq \delta(B(\varepsilon)) \leq 1$$

dir. Bu $\delta(\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon)) = 0$ olmasını gerektirir. Burada $\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon) = \{k \leq n : |x_m - x_k| \geq \varepsilon\}$ dir. Böylece (x_k) istatistiksel Cauchy dizisi olur.

Tersine (x_k) istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde herhangi $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : |x_k - x_{N_0}| < \varepsilon\}|) = 1$ olacak şekilde $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : x_k < \varepsilon + x_{N_0}\}|) = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : x_{N_0} - \varepsilon < x_k\}|) = 1$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ a \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : x_k < a\}|) = 1 \right\} \\ B &= \left\{ b \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : x_k > b\}|) = 1 \right\} \end{aligned}$$

kümelerini alalım. Böylece $\varepsilon + x_{N_0} \in A$ ve $x_{N_0} - \varepsilon \in B$. Ayrıca $a \in A$ ve $b \in B$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : x_k < a\}|) = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : x_k > b\}|) = 1$$

dır. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : x_k < a\}|) = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : b < x_k < a\}|) = 1$$

olmasını gerektirir. Bu da $b < a$ olmasını gerektirir. Özellikle

$$x_{N_0} - \varepsilon \leq \sup B \leq \inf A \leq x_{N_0} + \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi pozitif sayı olduğundan $\sup B = \inf A$ elde edilir. $L = \sup B = \inf A$ alalım ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$L - \varepsilon < b < a < L + \varepsilon$$

olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. A ve B nin tanımından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : L - \varepsilon < x_k < L + \varepsilon\}|) = 1.$$

dir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : |x_k - L| < \varepsilon\}|) = 1,$$

veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

olur. Diğer bir deyişle (x_k) istatistiksel yakınsaktır ve istatistiksel limiti L dir.

2.2. Çift Diziler ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda çift diziler ve bu dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları incelenmiştir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere

$$s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$$

$$(j, k) \rightarrow x_{jk}$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna çift dizi denir [45]. Çift bir $x = (x_{jk})$ dizisinin x_{jk} elemanlarını

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & \dots & \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz. Bu çalışmamızda kompleks terimli bütün çift dizilerin cümlesini s^2 ile göstereceğiz. Buna göre, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesini göstermek üzere

$$s^2 = \{x = (x_{jk}) : \forall j, k \in \mathbb{N} \text{ için } x_{jk} \in \mathbb{C}\}$$

olup bu cümle $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in s^2$ için $\alpha x = (\alpha x_{jk})$ ve $x + y = (x_{jk} + y_{jk})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Tanım 2.2.2. Her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N$ olunca $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Bu durumda L sayısına (x_{jk}) dizisinin Pringsheim limiti denir [46]. Bütün yakınsak çift dizilerin uzayını c^2 ile göstereceğiz. Buna göre

$$c^2 = \left\{ x = (x_{jk}) \in s^2 : \lim_{j,k} x_{jk} = L \text{ olacak şekilde bir tek } L \in \mathbb{C} \text{ vardır} \right\}$$

dir.

Eğer bütün j ve k doğal sayıları için $|x_{jk}| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcut ise, yani

$$\|x\|_{(\infty,2)} = \sup_{jk} |x_{jk}| < \infty \quad (2.1)$$

ise $x = (x_{jk})$ çift dizisi sınırlıdır denir (Bazı durumlarda $(|x_{jk}|) < M$ gösterimi (x_{jk}) dizisinin sınırlı olduğunu gösterecektir). Bütün sınırlı çift dizilerin uzayını l_∞^2 ile göstereceğiz. Buna göre

$$l_\infty^2 = \left\{ x = (x_{jk}) \in s^2 : \sup_{jk} |x_{jk}| < \infty \right\}$$

dir [35].

Uyarı 2.2.3. Tek indisli olan klasik dizilerin aksine yakınsak bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Örnek olarak

$$x_{jk} = \begin{cases} k, & j = 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_{jk}) çift dizisi yakınsak olduğu halde sınırlı değildir. Açıkça görüldüğü gibi $P - \lim x = 1$ dir. Sınırlı ve yakınsak olan çift diziler uzayını ise c_∞^2 ile göstereceğiz ve bu uzay için $c_\infty^2 = c^2 \cap l_\infty^2$ eşitliğini yazabiliriz.

Tanım 2.2.4. $x = (x_{jk})$ kompleks terimli bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $p \geq j \geq N, q \geq k \geq N$ olduğunda $|x_{pq} - x_{jk}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [45].

Tanım 2.2.5. $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pozitif tam sayıların iki boyutlu bir kümesi olmak üzere $K(n, m) = \{(i, j) : (i, j) \in K, i \leq n, j \leq m\}$ tanımlayalım. Bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin alt asimptotik yoğunluğu

$$\delta^2(K) = \liminf_{n,m} \frac{|K(n, m)|}{nm}$$

olarak tanımlanır.

$$K(n, m)$$

$|K(n, m)| / nm$ çift dizisinin Pringsheim anlamında limitinin var olması durumunda, K kümesi çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve bu kümenin çift doğal yoğunluğu

$$\delta^2(K) = \lim_{n,m} \frac{|K(n, m)|}{nm}$$

ile verilir [33]. Örneğin $K = \{(i^2, j^2) : i, j \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu takdirde

$$\delta^2(K) = \lim_{n,m} \frac{|K(n, m)|}{nm} \leq \lim_{n,m} \frac{\sqrt{n}\sqrt{m}}{nm} = 0$$

olup K kümesinin çift doğal yoğunluğunun sıfır olduğu görülür. Bir başka örnek olarak, $\{(i, 2j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ kümesi alınırsa bu kümenin çift doğal yoğunluğunun $\frac{1}{2}$ olduğu görülür.

Tanım 2.2.6. $x = (x_{jk})$ kompleks terimli bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m \mid |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir [33]. Burada küme parantezlerinin dışında bulunan dikey çizgiler ile bahsi geçen kümenin eleman sayısı belirtilmektedir. Bütün istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayını S_2 ile göstereceğiz.

Uyarı 2.2.7. (a) Eğer $x = (x_{jk})$ yakınsak bir çift dizi ise yakınsak olduğu sayıya aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Sınırlı (veya sınırsız) satır ve (veya) sütunların sayısı sonlu olduğundan

$$K(n, m) \leq t_1 n + t_2 m$$

olur ve buradaki t_1 ve t_2 sonlu sayılar olup bu sayıların varlığından x dizisinin istatistiksel yakınsak olduğunu anlayabiliriz.

(b) Eğer $x = (x_{jk})$ çift dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise bu L sayısı bir tektir.

(c) İstatistiksel yakınsak olan bir çift dizinin yakınsak olmak zorunda olması gerekmediği gibi sınırlı olması da gerekmez.

Örnek 2.2.8. $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} jk, & j = n^2, k = m^2 \ (m, n = 1, 2, \dots) \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $S_2 - \lim x_{jk} = 1$ olduğunu görmek kolaydır. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $|\{(j, k) : j \leq n, k \leq m \mid |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{n}\sqrt{m}$ olur. Fakat $x = (x_{jk})$ dizisi ne yakınsak ne de sınırlıdır.

Teorem 2.2.9. Reel terimli bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_2(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{(j, k)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $j, k = 1, 2, \dots$ alt kümesinin var olup

$$P - \lim_{\substack{j, k \rightarrow \infty \\ j, k \in K}} x_{jk} = L$$

olmasıdır [33].

İspat. $x = (x_{jk})$ çift dizisi, L sayısına istatistiksel yakınsak olsun.

$$K_r = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| \geq \frac{1}{r}\}, r = 1, 2, \dots$$

ve

$$M_r = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| < \frac{1}{r}\}, r = 1, 2, \dots$$

alalım. Bu takdirde $\delta_2(K_r) = 0$ ve

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots M_i \supset M_{i+1} \supset \dots \quad (2.2)$$

ve

$$\delta_2(M_r) = 1, r = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

olur.

Şimdi $(j, k) \in M_r$ için (x_{jk}) dizisinin L sayısına yakınsak olduğunu göstermemiz gerekiyor. Varsayalım ki (x_{jk}) dizisi L sayısına yakınsak olmasın. Bu takdirde herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve sonsuz sayıda terim için

$$|x_{jk} - L| \geq \varepsilon$$

olur.

$$M_r = \{(j, k) : |x_{jk} - L| < \varepsilon\}$$

ve $\varepsilon > \frac{1}{r}$, $r = 1, 2, \dots$ alalım. Dolayısıyla

$$\delta_2(M_r) = 0 \quad (2.4)$$

olur ve (2.2) den $M_r \subset M_\varepsilon$ olur. Buradan $\delta_2(M_r) = 0$ olup bu durum (2.3) ile çelişir. Böylece (x_{jk}) dizisinin L sayısına yakınsak olduğu görülür.

Tersine $\delta_2(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ alt kümesinin mevcut olduğunu ve $\lim_{(j,k) \in K} x_{jk} = L$ olduğunu varsayalım. O halde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $j, k \geq N$ için

$$|x_{jk} - L| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Şimdi

$$K_\varepsilon = \{(j, k) : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(j_{N+1}, k_{N+1}), (j_{N+2}, k_{N+2}), \dots\}$$

alırsak

$$\delta_2(K_\varepsilon) = 1 - 1 = 0$$

olur. Dolayısıyla $x = (x_{jk})$ dizisi, L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Uyarı 2.2.10. Eğer $S_2 - \lim_{jk} x_{jk} = L$ ise, $\lim_{jk} y_{jk} = L$ ve $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} = y_{jk}\}) = 1$ olacak şekilde bir $y = (y_{jk})$ dizisi mevcuttur. Burada $x_{jk} = y_{jk}$ olması durumu hemen hemen her j, k için geçerlidir.

Teorem 2.2.11. $S_2 \cap l_\infty^2$ uzayı, l_∞^2 lineer normlu uzayının kapalı lineer bir alt uzayıdır [33].

İspat. $x^{(nm)} = (x_{jk}^{(nm)}) \in S_2 \cap l_\infty^2$ ve $x^{(nm)} \rightarrow x \in l_\infty^2$ olsun. $x^{(nm)} \in S_2 \cap l_\infty^2$ olduğundan

$$S_2 - \lim_{jk} x_{jk}^{(nm)} = a_{nm}, \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

olacak şekilde a_{nm} reel sayıları mevcuttur. $x^{(nm)} \rightarrow x$ iken, her $\varepsilon > 0$ için, $p \geq n \geq N$, $q \geq m \geq N$ olduğunda

$$\left| x_{jk}^{(pq)} - x_{jk}^{(nm)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.5)$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradaki $|\cdot|$ ile söz konusu lineer uzaydaki norm kastedilmektedir.

Teorem 2.2.9 dan, $\delta_2(K_1) = \delta_2(K_2) = 1$ olacak şekilde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin K_1 ve K_2 alt kümeleri mevcut olup

$$\lim_{\substack{j,k \\ (j,k) \in K_1}} x_{jk}^{(nm)} = a_{nm} \quad (2.6)$$

$$\lim_{\substack{j,k \\ (j,k) \in K_2}} x_{jk}^{(pq)} = a_{pq} \quad (2.7)$$

sağlanır. Bu takdirde $\delta_2(K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan $K_1 \cap K_2$ kümesi sonsuz olur. $(j_1, k_1) \in K_1 \cap K_2$ seçelim. (2.6) ve (2.7) eşitliklerinden

$$\left| x_{j_1 k_1}^{(pq)} - a_{pq} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.8)$$

ve

$$\left| x_{j_1 k_1}^{(nm)} - a_{nm} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.9)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $p \geq n \geq N$, $q \geq m \geq N$ için (2.5) – (2.9) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} |a_{pq} - a_{nm}| &\leq \left| a_{pq} - x_{j_1 k_1}^{(pq)} \right| + \left| x_{j_1 k_1}^{(pq)} - x_{j_1 k_1}^{(nm)} \right| + \left| x_{j_1 k_1}^{(nm)} - a_{nm} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (a_{nm}) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve dolayısıyla yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır.

$$\lim_{n,m} a_{nm} = a \quad (2.10)$$

olsun. x dizisinin a sayısına istatistiksel yakınsak olduğunu göstermemiz gerekiyor. $x^{(nm)}$ dizisi x dizisine yakınsak olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$|x_{jk}^{nm} - x_{jk}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde en az bir $N_1(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

Ayrıca (2.10) eşitliğinden, her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N_2(\varepsilon)$ olduğunda

$$|a_{jk} - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde en az bir $N_2(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

Yine, $S_2 - \lim x^{(nm)} = a_{nm}$ olduğundan dolayı, $\delta_2(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{(j, k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur öyle ki her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N_3(\varepsilon)$, $(j, k) \in K$ olduğunda

$$|x_{jk}^{nm} - a_{nm}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $N_3(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. $\max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\} = N_4(\varepsilon)$ diyelim.

Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ ve bütün $j, k \geq N_4(\varepsilon)$, $(j, k) \in K$ değerleri için

$$\begin{aligned} |x_{jk} - a| &\leq |x_{jk} - x_{jk}^{nm}| + |x_{jk}^{nm} - a_{jk}| + |a_{jk} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece x dizisi a sayısına istatistiksel yakınsaktır ve $x \in S_2 \cap l_\infty^2$ olur. Dolayısıyla $S_2 \cap l_\infty^2$ uzayı l_∞^2 uzayının kapalı lineer bir alt uzayıdır.

Teorem 2.2.12. $S_2 \cap l_\infty^2$ kümesi l_∞^2 da hiç bir yerde yoğun değildir [33].

İspat. Keyfi bir S normlu lineer uzayına ait S uzayından farklı kapalı bir lineer alt uzayının S uzayında hiç bir yerde yoğun olmamasından dolayı ve Teorem 2.2.11 den, sadece $S_2 \cap l_\infty^2 \neq l_\infty^2$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$x = (x_{jk})$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & j \text{ ve } k \text{ çift ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$x = (x_{jk})$ dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığı fakat sınırlı olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $S_2 \cap l_\infty^2 \neq l_\infty^2$ olur.

Tanım 2.2.13. $x = (x_{jk})$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $j, p \geq N$, $k, q \geq M$ olduğunda

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{pq}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ ve $M = M(\varepsilon)$ sayıları varsa $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir denir [33].

Teorem 2.2.14. $x = (x_{jk})$ kompleks terimli dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [33].

İspat. $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. $|x_{NM} - L| \geq \varepsilon$ olacak şekilde N ve M sayıları seçelim.

$$A_\varepsilon = \{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| \geq \varepsilon\}$$

$$B_\varepsilon = \{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

$$C_\varepsilon = \{(j, k) : j = N \leq n, k = M \leq m : |x_{NM} - L| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde üç küme belirleyelim. Bu takdirde $A_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ olur ve buradan $\delta_2(A_\varepsilon) \leq \delta_2(B_\varepsilon) + \delta_2(C_\varepsilon) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $x = (x_{jk})$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tersine x dizisi istatistiksel Cauchy dizisi olsun fakat istatistiksel yakınsak olmasın. Bu takdirde A_ε kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde N ve M sayıları mevcut olacaktır. Dolayısıyla

$$E_\varepsilon = \{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| < \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu 1 olur. Özel olarak eğer $|x_{jk} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ise

$$|x_{jk} - x_{NM}| \leq 2|x_{jk} - L| < \varepsilon \quad (2.11)$$

yazabiliriz. x dizisi istatistiksel yakınsak olmadığından B_ε kümesinin doğal yoğunluğu 1 olup bununla birlikte

$$\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| < \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. (2.11) eşitsizliğinden

$$\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| < \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olacağından A_ε kümesinin doğal yoğunluğunun 1 olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.2.15. $x = (x_{jk})$ kompleks terimli çift dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) x dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır,
- (b) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,
- (c) x dizisinin öyle bir y alt dizisi vardır ki;

$$\lim_{j,k} y_{jk} = L$$

dir [33].

Şimdi çift dizilerin kuvvetli Cesàro toplanabilirliği ile istatistiksel yakınsaklığı arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

Tanım 2.2.16. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve p pozitif reel sayı olsun

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - L|^p = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa x dizisine L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir [33].

Bütün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir çift dizilerin uzayını w_p^2 ile göstereceğiz. $p = 1$ olması durumunda kuvvetli Cesàro toplanabilir çift dizilerin uzayı $(C, 1, 1)$ elde edilir..

Not 2.2.17. (i) Eğer $0 < p \leq q < \infty$ ise $w_q^2 \subseteq w_p^2$ (Hölder eşitsizliğinden) ve

$$w_p^2 \cap l_\infty^2 \subseteq (C, 1, 1) \cap l_\infty^2$$

olur.

(ii) Eğer $x = (x_{jk})$ dizisi yakınsak fakat sınırlı değilse, x dizisi istatistiksel yakınsak olur. Ancak x dizisi Cesàro ya da kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olmak zorunda değildir [33].

Örnek 2.2.18. $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} k, & j = 1, \text{ tüm } k' \text{ lar için} \\ j, & k = 1, \text{ tüm } j' \text{ ler için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Dolayısıyla $\lim_{j,k} x_{jk} = 0$ olur fakat

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{jk} = \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \frac{1}{2} (m^2 + n^2 + m + n - 2)$$

olup bu limit sonlu bir değere sahip değildir. Bu yüzden x dizisi Cesàro toplanabilir değildir. x dizisi kuvvetli p -Cesàro toplanabilir de değildir. Fakat

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n,m} \frac{m + n - 1}{nm} = 0$$

olduğundan x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

(iii) Eğer x dizisi, sınırlı ve yakınsak bir çift dizi ise aynı zamanda Cesàro ve kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olup istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.2.19. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve p pozitif reel sayı olsun. Bu takdirde

(a) x dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise aynı zamanda L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

(b) $w_p^2 \cap l_\infty^2 = S_2 \cap l_\infty^2$ dir [33].

İspat. (a) $K_\varepsilon(P) = \{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L|^p \geq \varepsilon\}$ olsun. x , L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} 0 & \leftarrow \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - L|^p \\ &= \frac{1}{nm} \left\{ \sum_{(j,k) \in K_\varepsilon(P)} |x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \notin K_\varepsilon(P)} |x_{jk} - L|^p \right\} \\ &\geq \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece x , L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

(b) $I_\varepsilon(P) = \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\}$ ve $M = \|x\|_{(\infty, 2)} + |L|$ olsun.

Buradaki $\|x\|_{(\infty, 2)}$ ifadesi (2.1) ile verilen $x = (x_{jk})$ sınırlı çift dizisinin sup-normunu göstermektedir. x dizisi, sınırlı istatistiksel yakınsak olduğundan her $n, m \geq N$ için

$$\frac{1}{nm} \left| \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı seçebiliriz. Bu takdirde her $n, m \geq N$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - L|^p &= \frac{1}{nm} \left\{ \sum_{(j,k) \in I_\varepsilon(P)} |x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \notin I_\varepsilon(P)} |x_{jk} - L|^p \right\} \\ &< \frac{1}{nm} nm \frac{\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{nm} nm \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir.

Not 2.2.20. Sınırlı ve istatistiksel yakınsak bir $x = (x_{jk})$ dizisinin aynı zamanda Cesàro toplanabilir olduğuna fakat tersinin doğru olmadığına dikkat etmek gerekir.

Örnek 2.2.21. $x = (x_{jk})$ çift dizisi her k için

$$x_{jk} = (-1)^j$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{jk} = 0$$

olur. Fakat $x = (x_{jk})$ dizisi aşıkarak istatistiksel yakınsak değildir [48].

Tanım 2.2.22. i) E çift dizi uzayı olsun. $x = (x_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}} \in E$ ler için $|y_{jk}| \leq |x_{jk}|$, $j, k \geq 1$ olduğunda $y = y_{jk} \in E$ oluyorsa normal denir [49].

ii) Eğer E kendisinin tüm basamak uzaylarının kanonik görüntülerini içeriyorsa monoton denir [49].

Tanım 2.2.23. Her normal dizi uzayı monotondur [50].

2.3. Çift Diziler İçin I – Yakınsaklık ve (s, t) . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda çift diziler için I – yakınsaklık ve I_u – düzgün yakınsaklık ve (s, t) . dereceden çift yoğunluk kavramları verilecek, bu kavram yardımıyla $\tilde{\alpha}$. dereceden çift diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı ve f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklık kavramları incelenecektir.

Tanım 2.3.1. X boş olmayan bir cümle olsun. $I \subset 2^X$ sınıfı, eğer

- (i) $\emptyset \in I$
- (ii) Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$
- (iii) Her $A \in I$ ve her $B \subseteq A$ için $B \in I$

şartlarını sağlarsa, X üzerinde bir idealdir denir [24].

Tanım 2.3.2. $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir I ideali için $I \neq 2^{\mathbb{N}}$ oluyorsa I ya gerçek (aşıkâr) ideal denir [24].

Tanım 2.3.3. I ideali $\mathbb{N}$ de gerçek ideal olsun. Eğer I , $\mathbb{N}$ nin her sonlu alt kümesini kapsıyorsa I ya uygun ideal adı verilir [24].

Tanım 2.3.4. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinde aşıkâr olmayan bir ideal olsun. (x_{jk}) çift bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$E_\varepsilon = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi I_2 ye ait ise (x_{jk}) dizisi L sayısına I_2 –yakınsaktır denir ve $I_2 - \lim x_{jk} = L$ yazılır [47].

Tanım 2.3.5. Eğer k' ya göre düzgün olmak üzere

$$U(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_E(j+k) = a$$

veya denk olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |E \cap \{k+1, \dots, k+n\}| = a$$

ise $E \subset \mathbb{N}$ alt kümesi düzgün yoğunluğa sahiptir denir [25].

Lemma 2.3.6. Düzgün sıfır yoğunluk, sıfır yoğunluğu gerektirir fakat tersi doğru değildir [26].

Örnek 2.3.7. $A = \{2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19, \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesini alalım. Bu kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır, fakat düzgün yoğunluklu değildir [26].

Tanım 2.3.8. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi için

$$K(m, n, l, i) = |\{(j, k) : i + 1 \leq j \leq i + m, \text{ ve } l + 1 \leq k \leq l + n, (j, k) \in K\}|$$

şeklinde tanımlayalım. K kümesinin alt ve üst düzgün çift yoğunluklarını

$$\underline{U}_2(K) = \liminf_{m,n} \frac{K(m, n, l, i)}{nm} \quad \text{ve} \quad \overline{U}_2(K) = \limsup_{m,n} \frac{K(m, n, l, i)}{nm}$$

ile tanımlayalım. Eğer $\underline{U}_2(K) = \overline{U}_2(K)$ ise K nın düzgün çift yoğunluğu mevcuttur ve

$$U_2(K) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{K(m, n, l, i)}{nm}$$

ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımdan herhangi bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi için

$$\underline{U}_2(K) \leq \underline{\delta}_2(K) \leq \overline{\delta}_2(K) \leq \overline{U}_2(K)$$

ve böylece $U_2(K)$ mevcut ise bu taktirde $U_2(K) = \delta_2(K)$ dır [37].

Özellik 2.3.9. Herhangi bir E kümesi keyfi ardışık tamsayı dizilerini içeriyorsa $\overline{U}_2(E) = 1$ dir. Yani her $N_1 > 0$ için $\{k + 1, k + 2, \dots, k + N_1\} \subseteq E$ olacak şekilde bir k sayısı varsa,

$$\overline{U}_2(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{m \geq 0} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} \chi_E(i) \right] = 1$$

dir [27].

Tanım 2.3.10. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $U_2(A_\varepsilon) = 0$ ise (x_{jk}) dizisi çift düzgün yoğunluğa göre $L \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsaktır (veya I_u - yakınsak) denir. Burada $A_\varepsilon = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$ dir [37].

Tanım 2.3.11. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. Eğer

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{m,n} \left| \frac{1}{pq} \sum_{j=m+1}^{m+p} \sum_{k=n+1}^{n+p} x_{jk} - L \right| = 0$$

yani

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{j=m+1}^{m+p} \sum_{k=n+1}^{n+p} x_{jk} = L \quad (m, n \text{ ye göre düzgün})$$

ise x dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır [35].

Tanım 2.3.12. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve p pozitif reel bir sayı olsun.

$$\lim_{r,q} \frac{1}{rq} \sum_{j=m+1}^{m+r} \sum_{k=n+1}^{n+q} |x_{jk} - L|^p = 0, \quad (m, n \text{ ye göre düzgün})$$

olması halinde x dizisi L sayısına düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir [37]. Bütün düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir çift dizilerin uzayını w_{up}^2 ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.13. $(s, t) \in (0, 1]$ olmak üzere $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin (s, t) . dereceden çift yoğunluğu

$$\delta_{(s,t)}^2(K) = P - \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{|(K(n, m))|}{n^s m^t}$$

şeklinde tanımlanır [36] .

Not 2.3.14. Her $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi için $\delta^2(K) \leq 1$ olduğu halde $\delta_{(s,t)}^2(K) > 1$ veya $\delta_{(s,t)}^2(K) = \infty$ olabilir [36] .

Tanım 2.3.15. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve $(s, t) \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} |\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa (x_{jk}) dizisi (s, t) . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir [36] .

Bu durumda $S_{(s,t)}^2 - \lim_{j,k} x_{jk} = L$ yazarız ve (s, t) . dereceden tüm istatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesini $S_{(s,t)}^2$ ile gösteririz.

$s = 1, t = 1$ oması durumunda (s, t) . dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı çift dizilerin istatistiksel yakınsaklığma indirgenmiş olur.

Teorem 2.3.16. $s, t, \xi, \eta \in (0, 1]$ olmak üzere $s \leq \xi, t \leq \eta \in (0, 1]$ verilsin. Bu taktirde

$$S_{(s,t)}^2 \subseteq S_{(\xi,\eta)}^2 \text{ olur [36] .}$$

İspat. $s, t, \xi, \eta \in (0, 1]$ olsun. $s \leq t, \xi \leq \eta \in (0, 1]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} P - \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\xi m^\eta} |\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} |\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $S_{(s,t)}^2 \subseteq S_{(\xi,\eta)}^2$ dır.

Bu teoremden özel olarak $\xi = \eta = 1$ alınırse aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.3.17. Herhangi $s, t \in (0, 1]$ için $S_{(s,t)}^2 \subseteq S^2$ olur [36].

Tanım 2.3.18. $s, t \in (0, 1]$ ve p bir pozitif reel sayı olsun $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun.

Bu durumda

$$\lim_{n, m} \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - L|^p = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa x dizisi (s, t) . dereceden L ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir. Bütün (s, t) .dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir çift dizilerin uzayını $w_{s,t}^2(p)$ ile göstereceğiz [36].

Tanım 2.3.19. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve

$$K(p, q, i, j) = \{(a, b) : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q, (a, b) \in K\}$$

olmak üzere $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin f çift yoğunluğu

$$\delta^{f2}(K) = \lim_{i, j \rightarrow \infty} \lim_{p, q \rightarrow \infty} \frac{f(|(K(p, q, i, j))|)}{f(pq)}$$

şeklinde tanımlanır [13].

f çift yoğunluk kavramı $f(x) = x$ olması durumundan çift doğal yoğunluk kavramına indirgenir.

Tanım 2.3.20. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $x = (x_{ij}) \in s^2$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta^{f2}(|\{(a, b), i \leq a \leq p, j \leq b \leq q : |x_{ij} - L| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa (x_{ij}) dizisi f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaktır denir [13].

Aşağıdaki lemma f istatistiksel yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğini ve limiti koruduğunu gösterir.

Lemma 2.3.21. $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesini $\delta^{f_2}(K) = 0$ olacak şekilde alırsak $\delta_2(K) = 0$ olur [13].



3. ÇİFT DİZİLERİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN f İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

3.1. Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden f Yoğunluğu ve f Modülüs Fonksiyonuna Göre İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda çift diziler için $\tilde{\alpha}$. dereceden f doğal yoğunluk ve f istatistiksel yakınsaklık kavramları verilerek bazı içerme bağıntıları incelenecektir.

Bu bölümde $s, t, u, v \in (0, 1]$ alacağız ve (s, t) yerine $\tilde{\alpha}$, (u, v) yerine $\tilde{\beta}$ yazacağız.

Aşağıdaki bağıntıları sık sık kullanacağız.

$$\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \Leftrightarrow s \leq u \text{ ve } t \leq v$$

$$\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta} \Leftrightarrow s < u \text{ ve } t < v$$

$$\tilde{\alpha} \cong \tilde{\beta} \Leftrightarrow s=u \text{ ve } t=v$$

$$\tilde{\alpha} \in (0, 1] \Leftrightarrow s, t \in (0, 1]$$

$$\tilde{\beta} \in (0, 1] \Leftrightarrow u, v \in (0, 1]$$

$$\tilde{\alpha} \cong 1 \Leftrightarrow s = t = 1$$

$$\tilde{\beta} \cong 1 \Leftrightarrow u = v = 1$$

$$\tilde{\alpha} \succ 1 \Leftrightarrow s > 1 \text{ ve } t > 1$$

$$\tilde{\alpha} \succ 0 \Leftrightarrow s > 0 \text{ ve } t > 0$$

Tanım 3.1.1. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olmak üzere $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin $\tilde{\alpha}$. dereceden f çift yoğunluğu

$$K(n, m) = \{(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, (i, j) \in K\}$$

olmak üzere

$$\delta_{\tilde{\alpha}}^{f,2}(K) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{f(|K(n, m)|)}{f(n^s m^t)}$$

şeklinde tanımlanır.

f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. f ve $\tilde{\alpha}$ özel seçimlerinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Eğer $f(x) = x$ alınırsa bu taktirde $\delta_{\tilde{\alpha}}^{f,2}(K) = \delta_{\alpha}^2(K)$ elde edilir [36].

(ii) Eğer $f(x) = x$ ve $\tilde{\alpha} \cong 1$ alınırsa bu taktirde $\delta_{\tilde{\alpha}}^{f,2}(K) = \delta^2(K)$ elde edilir [33].

f herhangi bir sınırsız modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olsun. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ durumunda herhangi bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi için $\delta_{\tilde{\alpha}}^{f,2}(K) + \delta_{\tilde{\alpha}}^{f,2}(K^c) = 1$ eşitliği sağlanamaz. Örneğin, $f(x) = x^p$, $0 < p \leq 1$ ve $K = \{(i^2, j^2) : i, j \in \mathbb{N}\}$ alınırsa $\delta_{\tilde{\alpha}}^{f,2}(K) = \infty = \delta_{\tilde{\alpha}}^{f,2}(K^c)$ olur.

Tanım 3.1.2. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olmak üzere $x = (x_{jk}) \in s^2$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^s m^t)} f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa (x_{jk}) dizisi f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu durumda $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) - \lim_{j,k} x_{jk} = L$ yazarız ve f modülüs fonksiyonuna göre tüm $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesini $S_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ ile gösteririz.

$\tilde{\alpha} \cong 1$ olması durumunda, $\tilde{\alpha}$. dereceden f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklık, çift dizilerin f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklığına indirgenir. Eğer $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak ise bu takdirde L tektir. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ için f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Fakat $\tilde{\alpha} > 1$ için iyi tanımlı değildir.

Örnek 3.1.3. $f(x) = x$ olsun. $x = (x_{jk})$ dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j+k \text{ çift ise} \\ 0, & j+k \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu takdirde $\tilde{\alpha} > 1$ için, yani $s > 1$ ve $t > 1$ için

$$\frac{1}{f(n^s m^t)} f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{f\left(\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)}{f(n^s m^t)}$$

$$\frac{1}{f(n^s m^t)} f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{f\left(\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)}{f(n^s m^t)}$$

olur. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^s m^t)} f(|\{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}|) \\
& \leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{f((\frac{n}{2} + 1)(\frac{m}{2} + 1))}{f(n^s m^t)} = 0 \\
& \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^s m^t)} |\{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}| \\
& \leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{f((\frac{n}{2} + 1)(\frac{m}{2} + 1))}{f(n^s m^t)} = 0
\end{aligned}$$

dir. Buradan $x = (x_{jk})$ dizisinin hem 1 hem de 0 sayısına f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak olduğu anlaşılır. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 3.1.4. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olsun ve $x = (x_{jk})$, $y = (y_{jk})$ kompleks dizileri verilsin. Bu takdirde

- (i) $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) - \lim_{j,k} x_{jk} = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) - \lim_{j,k} cx_{jk} = cx_0$,
- (ii) $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) - \lim_{j,k} x_{jk} = x_0$ ve $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) - \lim_{j,k} y_{jk} = y_0$ ise $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) - \lim_{j,k} (x_{jk} + y_{jk}) = x_0 + y_0$

dır.

Bu teoreme göre $S_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ kümesi bir lineer uzaydır.

Her yakınsak çift dizinin aynı sayıya f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak olduğunu göstermek kolaydır. Yani herhangi bir sınırsız f modülüstü ve herbir $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ için $c^2 \subset S_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ dir. Ancak tersi sağlanmaz.

Örnek 3.1.5. $x = (x_{jk})$ dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j = n^3, k = m^3 \text{ ise } n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve $f(x) = x^p$, $(0 < p \leq 1)$ olsun. (x_{jk}) dizisi yakınsak olmamasına rağmen $\tilde{\alpha} \succ \frac{1}{3}$ (yani $s, t > \frac{1}{3}$) için (x_{jk}) dizisi 0 sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.1.6. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0, 1]$ sayıları $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subseteq S_{\tilde{\beta}}^2(f)$ dir ve bu kapsama $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ için kesindir.

İspat. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0, 1]$ verilsin. Eğer $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ ($s \leq u$ ve $t \leq v$) ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(n^u m^v)} f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|) \\ & \leq \frac{1}{f(n^s m^t)} f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subseteq S_{\tilde{\beta}}^2(f)$ demektir. Kapsamanın kesinliğini göstermek için

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j = n^2, k = m^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

dizisini göz önüne alalım. $f(x) = x^p$, ($0 < p \leq 1$) alalım. Bu takdirde, $\tilde{\beta} \in (\frac{1}{2}, 1]$ için ($\frac{1}{2} < u \leq 1$ ve $\frac{1}{2} < v \leq 1$) $S_{\tilde{\beta}}^2(f) - \lim x_{jk} = 0$ olur yani $x \in S_{\tilde{\beta}}^2(f)$ dir, fakat $\tilde{\alpha} \in (0, \frac{1}{2}]$ için ($0 < s \leq \frac{1}{2}$ ve $0 < t \leq \frac{1}{2}$) $x \notin S_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ dir.

Teorem 3.1.6 da $\tilde{\beta} = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.7. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olmak üzere eğer bir çift dizi L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$.dereceden istatistiksel yakınsak ise, bu takdirde L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaktır, yani $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subseteq S^2(f)$ dir.

Teorem 3.1.8. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olsun. Bu takdirde

(i) $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subset S_{\tilde{\alpha}}^2$ ve kapsama kesindir,

(ii) $S_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subset S^2$ ve kapsama kesindir.

İspat. i) ve ii) kapsamalarının kesinliğini göstermek için $x = (x_{jk})$ dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} jk, & j = n^2, k = m^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

olarak tanımlayalım ve $f(x) = \log(x + 1)$ alalım. Bu takdirde, $\tilde{\alpha} \in (\frac{1}{2}, 1]$ (yani $s > \frac{1}{2}$ ve $t > \frac{1}{2}$) için $x \in S_{\tilde{\alpha}}^2$ dir ve böylece $x \in S^2$ dir. Fakat, f modülüs fonksiyonunun artan olması nedeniyle

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(n^s m^t)} f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}|) \\ & \geq \frac{1}{f(nm)} f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}|) \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan $x \notin S_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ dir.

c^2 , S^2 , $S_{\tilde{\alpha}}^2$, $S^2(f)$ ve $S_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ arasındaki kapsama bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{ccc} S^2(f) & \subset & S^2 \\ \cup & & \cup \\ c^2 & \subset & S_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subset S_{\tilde{\alpha}}^2 \end{array}$$

3.2. Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$.Dereceden f Kuvvetli Cesàro Yakınsaklığı

Bu kısımda çift dizilerde $\tilde{\alpha}$.dereceden f kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayını genelleştireceğiz.

Tanım 3.2.1. f sınırlı veya sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \succ 0$ olsun.

$$\begin{aligned} w_{\tilde{\alpha},0}^2(f) &= \left\{ x = (x_{jk}) \in s^2 : \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) = 0 \right\}, \\ w_{\tilde{\alpha}}^2(f) &= \left\{ x = (x_{jk}) \in s^2 : \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk} - L|) = 0 \right\}, \\ w_{\tilde{\alpha},\infty}^2(f) &= \left\{ x = (x_{jk}) \in s^2 : \sup_{n,m} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlayalım. Bu dizi uzayları $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzaydır.

Hatırlatma 3.2.2. (i) Eğer $\tilde{\alpha} \cong 1$ alınırsa bu taktirde yukarıdaki dizi uzayları $w_0^2(f)$, $w^2(f)$ ve $w_{\infty}^2(f)$ dizi uzaylarına dönüşür.

(ii) Eğer $f(x) = x$ alınırsa bu taktirde yukarıdaki dizi uzayları $w_{\tilde{\alpha},0}^2$, $w_{\tilde{\alpha}}^2$ ve $w_{\tilde{\alpha},\infty}^2$ dizi uzaylarına dönüşür.

Teorem 3.2.3. Herhangi bir f modülüs fonksiyonu için

- (i) $\tilde{\alpha} \succ 0$ ise $w_{\tilde{\alpha},0}^2(f) \subset w_{\tilde{\alpha},\infty}^2(f)$ dır.
- (ii) $\tilde{\alpha} \succeq 1$ ise $w_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subset w_{\tilde{\alpha},\infty}^2(f)$ dır.

İspat. (i) Aşıkardır.

(ii) $x \in w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ olsun. Modülüs fonksiyonunun artanlığından

$$\frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) \leq \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk} - L|) + f(|L|) \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m 1$$

yazabiliriz. $\tilde{\alpha} \geq 1$ ve $x \in w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ olduğundan $x \in w_{\tilde{\alpha},\infty}^2(f)$ olur

Teorem 3.2.4. f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \geq 1$ için $w_{\tilde{\alpha}}^2 \subset w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$, $w_{\tilde{\alpha},0}^2 \subset w_{\tilde{\alpha},0}^2(f)$ ve $w_{\tilde{\alpha},\infty}^2 \subset w_{\tilde{\alpha},\infty}^2(f)$ dir.

İspat. Burada sadece $w_{\tilde{\alpha},\infty}^2 \subset w_{\tilde{\alpha},\infty}^2(f)$ olduğunu göstereceğiz. Diğer durumlar benzer şekilde gösterilir. $x \in w_{\tilde{\alpha},\infty}^2$ olsun, böylece

$$\sup_{n,m} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk}| < \infty$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $0 < t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta \in (0, 1)$ seçelim.

$$\frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) = \sum_1 + \sum_2$$

eşitliğini gözönüne alalım. Burada ilk toplam $|x_{jk}| \leq \delta$ ve ikinci toplam $|x_{jk}| > \delta$ üzerinde alınmıştır. Bu taktirde $\sum_1 \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}-1}}$ dir ve $|x_{jk}| > \delta$ için

$$|x_{jk}| < \frac{|x_{jk}|}{\delta} < 1 + \left\lceil \frac{|x_{jk}|}{\delta} \right\rceil$$

dir. Burada $\lceil t \rceil$, t nin tam değeridir. Modülüs fonksiyonu tanımından $|x_{jk}| > \delta$ için

$$f(|x_{jk}|) \leq \left(1 + \left\lceil \frac{|x_{jk}|}{\delta} \right\rceil\right) f(1) \leq 2f(1) \frac{|x_{jk}|}{\delta}$$

dir. Böylece $\sum_2 \leq 2f(1) \delta^{-1} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk}|$ dir ki $\sum_1 \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}-1}}$ olduğundan

$$\frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}-1}} + 2f(1) \delta^{-1} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk}|$$

eşitsizliği elde edilir. $\tilde{\alpha} \geq 1$ ve $x \in w_{\tilde{\alpha},\infty}^2$ olduğundan $x \in w_{\tilde{\alpha},\infty}^2(f)$ olur.

Teorem 3.2.5. f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \succ 0$ olsun. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise $w_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subset w_{\tilde{\alpha}}^2$ dir.

İspat. Burada Maddox [51] tarafından verilen bir önermeyi kullanacağız.

$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \inf \left\{ \frac{f(t)}{t} : t > 0 \right\}$ seçelim. λ tanımından her $t \geq 0$ için $f(t) \geq \lambda t$ elde edilir. $\lambda > 0$ olduğu için, her $t \geq 0$ için $t \leq \lambda^{-1} f(t)$ olur ve böylece

$$\frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - L| \leq \lambda^{-1} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk} - L|)$$

eşitsizliği elde edilir. $x \in w_{\alpha}^2(f)$ olduğundan $x \in w_{\alpha}^2$ olur.

Hatırlatma 3.2.6. Teorem 3.2.4 de görüldüğü gibi $w_{\alpha}^2 \subset w_{\alpha}^2(f)$ kapsaması $\tilde{\alpha} \succeq 1$ durumunda doğrudur. Burada f modülüs fonksiyonunun üzerinde herhangi bir kısıtlama söz konusu değildir. Halbuki Teorem 3.2.5 de $w_{\alpha}^2(f) \subset w_{\alpha}^2$ kapsamasının sadece $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ şartını sağlayan bir f modülüs fonksiyonu için doğru olduğunu ifade etmiştik ki burada $\tilde{\alpha}$ üzerinde bir kısıtlama yoktur.

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 3.2.7. f herhangi bir modülüs fonksiyonu, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve $\tilde{\alpha} \succeq 1$ olsun. Bu taktirde $w_{\alpha}^2 = w_{\alpha}^2(f)$ dir.

Teorem 3.2.8. f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$, $\tilde{\beta} \succeq \tilde{\alpha} \succ 0$ olsun. Bu taktirde $w_{\alpha}^2(f) \subset w_{\beta}^2(f)$ dir ve kapsama kesindir.

İspat. Kapsamanın kesinliğini gösterelim. f bir modülüs fonksiyonu olsun ve $x = (x_{jk})$ dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j = n^2, k = m^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. $f(0) = 0$ ve modülüs fonksiyonunun özelliğini kullanırsak,

$$\frac{1}{n^u m^v} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk} - 0|) \leq \frac{\sqrt{n}\sqrt{m}}{n^u m^v} f(1) = \frac{1}{n^{u-\frac{1}{2}} m^{v-\frac{1}{2}}} f(1)$$

bulunur. $u, v > \frac{1}{2}$ için $n, m \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{n^{u-\frac{1}{2}} m^{v-\frac{1}{2}}} f(1) \rightarrow 0$ olur ve böylece $u, v > \frac{1}{2}$ için $x \in w_{\beta}^2(f)$ dir. Ayrıca

$$\frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk} - 0|) \geq \frac{\sqrt{n}\sqrt{m}-1}{n^s m^t} f(1)$$

olur ve $0 < s, t < \frac{1}{2}$ için $n, m \rightarrow \infty$ iken $\frac{\sqrt{n}\sqrt{m}-1}{n^s m^t} f(1) \rightarrow \infty$ dir ki bu $0 < s, t < \frac{1}{2}$ için $x \notin w_{\alpha}^2(f)$ olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.9. E ve F iki çift dizi uzayı olsun. $x = (x_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}} \in E$ olmak üzere E dizi uzayından F dizi uzayına bir çarpan $ux = (u_{jk}x_{jk}) \in F$ olacak şekilde bir $u = (u_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$ dizisidir. Bu şekildeki tüm çarpanların lineer uzayı $m(E, F)$ ile gösterilecektir. Sınırlı çarpanlar $M(E, F)$ ile gösterilecektir. Böylece

$$M(E, F) = \ell_{\infty}^2 \cap m(E, F)$$

yazılır.

Eğer $E = F$ ise bu taktirde $m(E, F)$ ve $M(E, F)$ nin yerine $m(E)$ ve $M(E)$ yazılır [52].

Teorem 3.2.10. f bir modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \succ 0$ olsun. Bu taktirde

- (i) $\ell_\infty^2 \subset M(w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f))$,
- (ii) $M(w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)) \subset w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)$, $\tilde{\alpha} \succeq 1$,
- (iii) f sınırlı ve $\tilde{\alpha} \succeq 1$ ise

$$M(w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)) = w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f) = s^2$$

dir.

İspat. (i) $b \in \ell_\infty^2$ olması ve en az bir $H > 0$ ve her j ve k için $|b_{jk}| < 1 + [|H|]$ olmasını gerektirir ve böylece her $x \in w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)$ için

$$\frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|b_{jk} x_{jk}|) \leq (1 + [|H|]) \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|)$$

olur ki bu ilk kapsamayı verir.

(ii) İkinci kapsama $\tilde{\alpha} \succeq 1$ ve her $j, k \in \mathbb{N}$ için $e_{jk} = 1$ olmak üzere $e = (e_{jk}) \in w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)$ den çıkar.

(iii) f sınırlı ve $\tilde{\alpha} \succeq 1$ ise herhangi bir $x = (x_{jk}) \in s^2$ için

$$\frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) \leq \sup \{f(y) : y > 0\} \frac{1}{n^{s-1} m^{t-1}},$$

olur ki $w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f) = s^2$ bulunur. Benzer şekilde (ii)' den ve yukarıdaki teknikten $M(w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)) = w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)$ bulunur.

Aşağıdaki teoremi ispatsız veriyoruz.

Teorem 3.2.11. Herhangi bir f modülüs fonksiyonu ve $\tilde{\alpha} \succ 0$ için $w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f)$ ve $M(w_{\tilde{\alpha}, \infty}^2(f))$ uzayları normal ve monotondur.

3.3. Modülüs Fonksiyonuna Göre Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı ve $\tilde{\alpha}$. Dereceden Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık

Bu kısımda bir modülüs fonksiyonunun bazı şartlar altında çift dizilerde $\tilde{\alpha}$. dereceden f istatistiksel yakınsaklığı ile çift dizilerde kuvvetli p -Cesàro toplanabilir diziler arasındaki içermeye bağıntıları incelenecektir.

Lemma 3.3.1. Her $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti için sınırsız bir f modülüs fonksiyonu vardır [10].

Teorem 3.3.2. $0 < \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \leq 1$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olsun. Her $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere ve sınırsız f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer bir dizi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise, L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\beta}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi bir $x = (x_{jk})$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk} - L|) &\geq f\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - L|\right) \\ &\geq f(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon) \\ &\geq cf(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| f(\varepsilon)) \end{aligned}$$

elde edilir ki $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk} - L|) \\ &\geq \frac{1}{n^s m^t} cf(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| f(\varepsilon)) \\ &\geq \frac{1}{n^u m^v} cf(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| f(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{n^u m^v f(n^u m^v)} cf(|\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| f(\varepsilon)) f(n^u m^v). \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olduğundan $x = (x_{jk})$ dizisi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise, L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\beta}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 3.3.3. Her $x \geq 0, y \geq 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti var olmak üzere f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun ve

$\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ verilsin. Eğer bir dizi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise, L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 3.3.3 de $\tilde{\alpha} \cong 1$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.4. Her $x \geq 0, y \geq 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti var olmak üzere f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer bir dizi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir ise, L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 3.3.5. Bir f modülüs fonksiyonu için $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ şartı sağlansın. Eğer bir dizi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir ise, L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 3.3.6. Teorem 3.3.2 nin tersi genelde doğru değildir. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ için $\tilde{\alpha}$. dereceden f istatistiksel yakınsak ve sınırlı bir dizinin genelde f modülüs fonksiyonuna göre $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir olmak zorunda olmadığını söyleyebiliriz. Bu durum için

$$x_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{k}}, & j \neq n^3, k \neq m^3 \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

olmak üzere. $x = (x_{jk})$ dizisini ve $f(x) = x$ sınırsız modülüs fonksiyonunu örnek olarak alabiliriz. $f(x) = x$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ dır ve her $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti vardır. Ayrıca $\tilde{\alpha} \in (\frac{1}{3}, 1]$ alınırsa $x \in l_\infty^2$ ve $x \in S_\alpha^2(f)$ olduğu açıktır. İlk olarak

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f\left(\left|\frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{k}}\right|\right) > \sqrt{m}\sqrt{n}$$

eşitsizliğinin her $m \geq 2$ ve $n \geq 2$ pozitif tamsayıları için sağlandığını hatırlayalım. $G_n = \{j \leq n : j \neq i^2, i = 1, 2, 3, \dots\}$, $H_m = \{k \leq m : k \neq i^2, i = 1, 2, 3, \dots\}$ kümelerini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) &= \sum_{j \in G_n, 1 \leq j \leq n} \sum_{k \in H_m, 1 \leq k \leq m} f(|x_{jk}|) \\ &+ \sum_{j \notin G_n, 1 \leq j \leq n} \sum_{k \notin H_m, 1 \leq k \leq m} f(|x_{jk}|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in G_n, 1 \leq j \leq n} \sum_{k \in H_m, 1 \leq k \leq m} f\left(\frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{k}}\right) \\
&\quad + \sum_{j \notin G_n, 1 \leq j \leq n} \sum_{k \notin H_m, 1 \leq k \leq m} 1 \\
&> \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f\left(\frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{k}}\right) > f(\sqrt{m}\sqrt{n})
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) > \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f\left(\frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{k}}\right) \\
&> \frac{1}{n^s m^t} f(\sqrt{m}\sqrt{n}) \\
&= \frac{1}{n^s m^t} \sqrt{m}\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{n^{s-1/2}} \frac{1}{m^{t-1/2}} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{\alpha} \in (0, 1/2]$ için $x \notin w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ bulunur. Bu nedenle $\tilde{\alpha} \in (1/3, 1/2]$ için $x \in S_{\tilde{\alpha}}^2(f) - w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ bulunur.

Sonuç 3.3.7. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olsun. Bu takdirde $w_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subset S^2(f)$ dir. Eğer $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$ ise kapsama kesindir.

İspat. Sonuç 3.3.3 ve Sonuç 3.1.7 'den $w_{\tilde{\alpha}}^2(f) \subset S^2(f)$ bulunur. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j = n^3, k = m^3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

dizisini ve $f(x) = x$ modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu takdirde $\tilde{\alpha} \in (1/3, 1]$ için $S^2(f) - \lim_{j,k \rightarrow \infty} x_{jk} = 0$ olduğu açıktır, yani $x \in S^2(f)$ dir. Fakat $\tilde{\alpha} \in (0, 1/3]$ için $x \notin w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ dir. Gerçekten,

$$\frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(|x_{jk}|) \geq \frac{\sqrt[3]{n} - 1}{n^s} \cdot \frac{\sqrt[3]{m} - 1}{m^t}$$

olduğunu görmek kolaydır.

$n \rightarrow \infty$ için $(\sqrt[3]{n}-1)/n^s \rightarrow \infty$ ve $m \rightarrow \infty$ için $(\sqrt[3]{m}-1)/m^t \rightarrow \infty$ olduğundan dolayı eğer $\tilde{\alpha} \in (0, 1/3]$ alınırsa $x \notin w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ dir. Dolayısıyla $\tilde{\alpha} \in (0, 1/3]$ için $x \in S^2(f) - w_{\tilde{\alpha}}^2(f)$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

4. ÇİFT DİZİLERİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEDEN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

4.1 Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden $I_2(u)$ Yakınsaklığı

Bu kısımda çift diziler için $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün yoğunluk kavramı ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çift dizilerde düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliği arasındaki içermeye bağıntıları incelenecektir.

Tanım 4.1.1. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi için

$$K(m, n, l, i) = \{(j, k) : i + 1 \leq j \leq i + m, \text{ ve } l + 1 \leq k \leq l + n, (j, k) \in K\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a^{mn}(K) &= \sup_{l, i \geq 0} |K(m, n, l, i)| \\ a_{mn}(K) &= \inf_{l, i \geq 0} |K(m, n, l, i)| \end{aligned}$$

ifadelerini tanımlayalım. K kümesinin $\tilde{\alpha}$. dereceden alt ve üst düzgün çift yoğunluklarını l ve i ye göre düzgün olarak

$$\underline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \liminf_{m, n \rightarrow \infty} \frac{|K(m, n, l, i)|}{n^s m^t} \quad \text{ve} \quad \overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \limsup_{m, n \rightarrow \infty} \frac{|K(m, n, l, i)|}{n^s m^t}$$

ile tanımlayalım. Eğer $\underline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K)$ ise K nın $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün çift yoğunluğu mevcuttur ve $U_2^{\tilde{\alpha}}(K)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımdan herhangi bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi için

$$\underline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K) \leq \underline{\delta}_2^{\tilde{\alpha}}(K) \leq \overline{\delta}_2^{\tilde{\alpha}}(K) \leq \overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K)$$

ve böylece $U_2^{\tilde{\alpha}}(K)$ mevcut ise bu taktirde $U_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \delta_2^{\tilde{\alpha}}(K)$ dır.

Lemma 4.1.2. $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. K_1 ve K_2 kümelerini

$$K_1 = \{j \in \mathbb{N} : (j, k) \in K \text{ bazı } k \in \mathbb{N} \text{ için}\},$$

$$K_2 = \{k \in \mathbb{N} : (j, k) \in K \text{ bazı } j \in \mathbb{N} \text{ için}\},$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $\overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K) \leq \overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K_1) \overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K_2)$ dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
a^{mn}(K) &= \sup_{l,i \geq 0} |\{(j, k) : i+1 \leq j \leq i+m, l+1 \leq k \leq l+n, (j, k) \in K\}| \\
&\leq \max_{i \geq 0} |\{j \in K_1 : i+1 \leq j \leq i+m\}| \cdot \max_{i \geq 0} |\{k \in K_2 : l+1 \leq k \leq l+n\}| \\
&= a^m(K) \cdot a^n(K) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
\overline{U_2^{\tilde{\alpha}}}(K) &= \limsup_{m,n \rightarrow \infty} \frac{a^{mn}(K)}{n^s m^t} \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m(K_1)}{m^t} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n(K_2)}{n^s} \\
&= \overline{U_2^{\tilde{\alpha}}}(K_1) \overline{U_2^{\tilde{\alpha}}}(K_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.3. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ bir ideal olmak üzere $x = (x_{jk})$ kompleks terimli bir çift dizi ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olsun. Eğer $A_\varepsilon = \{((j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon)\} \in I_2$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\overline{U_2^{\tilde{\alpha}}}(A_\varepsilon) = 0$ ise $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün I_2 istatistiksel yakınsaktır denir. Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün I_2 istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayını $I_2^{\tilde{\alpha}}(u)$ ile göstereceğiz.

c_2 , tüm yakınsak çift dizilerin uzayını gösterebilir. Bu taktirde

$$c_2 \subset I_2^\alpha(u) \subset S_2^\alpha$$

ve kapsama kesindir. Aşağıdaki örnekte kapsamanın kesinliği gösterilmiştir:

Örnek 4.1.4. $A = \cup_{k=1}^\infty \{5^k + 1, 5^k + 2, \dots, 5^k + k\}$ olsun. $x = (x_{jk})$ dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & (j, k) \in A \times A \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\overline{U^{\tilde{\alpha}}}(A) = 1, \underline{U^{\tilde{\alpha}}}(A) = 0, \delta_\alpha(A) = 0$ dir. Buradan $\overline{U^{\tilde{\alpha}}}(A \times A) =$

$1, \underline{U^{\tilde{\alpha}}}(A \times A) = 0$ ve $\delta_\alpha(A \times A) = 0$ elde edilir. $x = (x_{jk})$ dizisi 0 sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır fakat $x = (x_{jk})$ dizisi 0 sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden $I_2(u)$ istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 4.1.5. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. m ve n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} |x_{jk} - L|^p = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa x dizisine L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir denir. Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir çift dizilerin uzayını $w_p^2(u, \tilde{\alpha})$ ile göstereceğiz.

Hatırlatma 4.1.6. Eğer $\tilde{\alpha} \cong 1$ alınırsa bu taktirde yukarıdaki dizi uzayı $w_p^2(u)$ dizi uzayına dönüşür [53].

Teorem 4.1.7. $0 \prec \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \preceq 1$ olsun. Eğer bir dizi L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise aynı zamanda bu sayıya $\tilde{\beta}$. dereceden $I_2(u)$ - istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi bir $x = (x_{jk})$ dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} |x_{jk} - L|^p \\ &= \frac{1}{n^s m^t} \left\{ \sum_{(j,k) \in A_\varepsilon} |x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \notin A_\varepsilon} |x_{jk} - L|^p \right\} \\ & \geq \frac{\sup_{A_\varepsilon} \{ (j,k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n \}}{\varepsilon^p \frac{n^s m^t}{n^u m^v}} \\ & \geq \frac{\sup_{A_\varepsilon} \{ (j,k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n \}}{\varepsilon^p \frac{n^s m^t}{n^u m^v}} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise, L sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden $I_2(u)$ yakınsak olduğu anlaşılır.

Teorem 4.1.8. $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve p pozitif reel sayı olsun. Bu takdirde $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise aynı zamanda L sayısına $I_2^{\tilde{\alpha}}(u)$ yakınsaktır.

İspat. $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} |x_{jk} - L|^p &= \frac{1}{n^s m^t} \left\{ \sum_{(j,k) \in A_\varepsilon} |x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \notin A_\varepsilon} |x_{jk} - L|^p \right\} \\ &\geq \frac{\sup_{A_\varepsilon} \{ (j,k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n \}}{\varepsilon^p \frac{n^s m^t}{n^u m^v}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^s m^t} \sup_{n,m} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} |x_{jk} - L|^p \\ & \geq \frac{\sup_{n,m} A_\varepsilon \{(j,k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n\}}{\varepsilon^p} \frac{1}{n^s m^t} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A_\varepsilon \{(j,k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n\} = \{(j,k) \in K : i+1 \leq j \leq i+m, l+1 \leq k \leq l+n, |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$ dir. Böylece $\overline{U_2^{\tilde{\alpha}}}(A_\varepsilon) = 0$ ve $U_2^{\tilde{\alpha}}(A_\varepsilon) = 0$ olur ki bu da $I_2^{\tilde{\alpha}}(u) - \lim x = L$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.9. Reel terimli bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin bir L sayısına $I_2^{\tilde{\alpha}}(u) -$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart $U_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \infty$ ve $P - \lim_{j,k \rightarrow \infty} x_{jk} = L$ olacak şekilde bir $K = \{(j,k)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, j, k = 1, 2, \dots$ kümesinin mevcut olmasıdır.

İspat. $x = (x_{jk})$ çift dizisi, L sayısına $I_2^{\tilde{\alpha}}(u) -$ yakınsak olsun.

$$K_r^c = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| \geq \frac{1}{r}\}, r = 1, 2, \dots$$

ve

$$K_r = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| < \frac{1}{r}\}, r = 1, 2, \dots$$

alalım. Bu takdirde $I_2^{\tilde{\alpha}}(u) -$ yakınsaklık tanımından $U_2^{\tilde{\alpha}}(K_r^c) = 0$ ve

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots K_r \supset K_{r+1} \supset \dots \quad (4.1)$$

dir. $U_2^{\tilde{\alpha}}(K_r) = \infty$, $j = 1, 2, \dots$ olur. $(s_1, t_1) \in K_1$ olsun. K_2 nin tamamından $m \geq s_2$, $n \geq t_2$ iken $s_2 \geq s_1$ ve $t_2 \geq t_1$ olacak şekilde $(s_2, t_2) \in K_2$ seçelim. Böylece

$$\frac{a_{mn}(K_2)}{n^s m^t} > \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edilirse $m \geq s_2$, $n \geq t_2$ iken her $i \geq 2$ için $s_i > s_{i-1}$, $t_i > t_{i-1}$ olmak üzere $(s_i, t_i) \in K_i$ olacak şekilde (s_i, t_i) elemanlarından oluşan bir dizi oluşturabiliriz ve böylece

$$\frac{a_{mn}(K_i)}{n^s m^t} > 1 - \frac{1}{i} \quad (4.2)$$

elde ederiz.

K ' yı aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\{(j, k) : 1 \leq j \leq s_1, 1 \leq k \leq t_1\} \subset K$$

$i \geq 2$ için $\{(j, k) : s_i \leq j \leq s_{i+1}, t_i \leq k \leq t_{i+1}\} \cap K_j$ kümesi K ya aittir. (4.1) ve (4.2) den her $i \in \mathbb{N}$ için $s_i \leq j \leq s_{i+1}, t_i \leq k \leq t_{i+1}$ olacak şekilde $(j, k) \in K$ seçebilir ve dolayısıyla

$$\frac{a_{mn}(K)}{n^s m^t} \geq \frac{a_{mn}(K_i)}{n^s m^t} > 1 - \frac{1}{i}$$

olur ki buradan $U_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \infty$ olduğu görülür.

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\frac{1}{r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir r sayısı seçilsin. $s_i \leq j$ ve $t_i \leq k$ olacak şekilde $(j, k) \in K$ olsun. Bu takdirde $s_q \leq j \leq s_{q+1}, t_q \leq k \leq t_{q+1}$ olacak şekilde bir $q \geq r$ sayısı vardır. Fakat K nın tanımına göre $(j, k) \in K_q$ ve böylece

$$|x_{jk} - L| < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu da göstermektedir ki (x_{jk}) dizisi L sayısına yakınsaktır.

4.2 Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı ve Modülüs Fonksiyonu

Bu kısımda f herhangi bir modülüs fonksiyonu olmak üzere çift diziler için $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çift dizilerde düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilme arasındaki içerme bağıntıları incelenecektir.

Tanım 4.2.1. f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $0 \prec \tilde{\alpha} \preceq 1$ olsun. $w_p^2(u, f, \tilde{\alpha})$ dizi uzayını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$w_p^2(u, f, \tilde{\alpha}) = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_{jk}) : \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} (f |x_{jk} - L|)^{p_{jk}} = 0, \\ m \text{ ve } n \text{ ye göre düzgün, en az bir } L \text{ için} \end{array} \right\}$$

Teorem 4.2.2. $0 \prec \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \preceq 1$ ve $0 < h = \inf p_{jk} \leq p_{jk} \leq \sup p_{jk} = H < \infty$ olsun. f herhangi bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $w_p^2(u, f, \tilde{\alpha}) \subset I_2^{\tilde{\beta}}(u)$ dir.

İspat. Herhangi bir $x = (x_{jk})$ dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} (f |x_{jk} - L|)^{p_{jk}} \\ &= \frac{1}{n^s m^t} \left\{ \sum_{(j,k) \in A_\varepsilon} (f |x_{jk} - L|)^{p_{jk}} + \sum_{(j,k) \notin A_\varepsilon} (f |x_{jk} - L|)^{p_{jk}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min \left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right) \frac{\sup_{n,m} A_\varepsilon \{ (j, k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n \}}{n^s m^t} \\
&\geq \min \left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right) \frac{\sup_{n,m} A_\varepsilon \{ (j, k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n \}}{n^u m^v}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x \in w_p^2(u, f, \tilde{\alpha})$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafından limit alırsak sıfıra yakınsar. Böylece (x_{jk}) dizisinin $I_2^{\tilde{\beta}}(u)$ yakınsak olduğu anlaşılır.

Teorem 4.2.3. f modülüs fonksiyonu sınırlı olsun. $0 \prec \tilde{\alpha} \preceq 1$ ve $0 < h = \inf p_{jk} \leq p_{jk} \leq \sup p_{jk} = H < \infty$ verilsin. Bu durumda $I_2^{\tilde{\alpha}}(u) \subset w_p^2(u, f, \tilde{\alpha})$ dir.

İspat. f modülüs fonksiyonu sınırlı, $x \in I_2^{\tilde{\alpha}}(u)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. f modülüs fonksiyonu sınırlı olduğundan $f(|x_{jk}|) \leq K$ olacak şekilde bir K tamsayısı vardır.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} (f|x_{jk} - L|)^{p_{jk}} \\
&= \frac{1}{n^s m^t} \left\{ \sum_{(j,k) \in A_\varepsilon} (f|x_{jk} - L|)^{p_{jk}} + \sum_{(j,k) \notin A_\varepsilon} (f|x_{jk} - L|)^{p_{jk}} \right\} \\
&\leq \max(K^h, K^H) \frac{\sup_{n,m} A_\varepsilon \{ (j, k) \in K : i+1, i+m; l+1, l+n \}}{n^s m^t} \\
&\quad + \frac{nm}{n^s m^t} \max \left(f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H \right).
\end{aligned}$$

Böylece $x \in w_p^2(u, f, \tilde{\alpha})$ elde edilir.

Sonuç 4.2.4. $I_2^{\tilde{\alpha}}(u) = w_p^2(u, f, \tilde{\alpha})$ olması için gerek ve yeter şart f modülüs fonksiyonunun sınırlı olmasıdır.

4.3 Çift Dizilerin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Düzgün f İstatistiksel Yakınsaklığı ve $\tilde{\alpha}$. Dereceden Düzgün Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık

Bu kısımda çift diziler için $\tilde{\alpha}$. dereceden f düzgün yoğunluk kavramı ve düzgün f istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çift dizilerde düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik arasındaki içerme bağıntıları incelenecektir.

Tanım 4.3.1. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun

$$K(m, n, l, i) = |\{(j, k) : i+1 \leq j \leq i+m, \text{ ve } l+1 \leq k \leq l+n, (j, k) \in K\}|$$

kümesini tanımlayalım. K kümesinin $\tilde{\alpha}$. dereceden alt ve üst düzgün çift yoğunluklarını l ve i ye göre düzgün olarak

$$\underline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K, f) = \liminf_{m, n \rightarrow \infty} \frac{(f(|K(m, n, l, i)|))}{f(n^s m^t)} \quad \text{ve} \quad \overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K, f) = \limsup_{m, n \rightarrow \infty} \frac{(f(|K(m, n, l, i)|))}{f(n^s m^t)}$$

ile tanımlayalım. Eğer $\underline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K, f) = \overline{U}_2^{\tilde{\alpha}}(K, f)$ ise K nın $\tilde{\alpha}$. dereceden f düzgün çift yoğunluğu mevcuttur ve $U_2^{\tilde{\alpha}}(K, f)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.2. $x = (x_{jk})$ kompleks terimli bir çift dizi ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olsun. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olmak üzere eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon(f) = f(|\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|) \in I$$

ve $U_2^{\tilde{\alpha}}(A_\varepsilon(f)) = 0$ ise $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün $I_2(f)$ istatistiksel yakınsaktır denir. $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün $I_2(f)$ istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayını $I_{2,f}^{\tilde{\alpha}}(u)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.3.3. $0 \prec \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \preceq 1$ ve $0 < h = \inf p_{jk} \leq p_{jk} \leq \sup p_{jk} = H < \infty$ verilsin. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve her $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer bir dizi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise L sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden $I_2^f(u)$ yakınsaktır.

İspat. Herhangi bir $x = (x_{jk})$ dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} (f|x_{jk} - L|)^{p_{jk}} \geq f \left(\sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} |x_{jk} - L|^{p_{jk}} \right) \\ & \geq f(|\{(j, k), i+1 \leq j \leq i+m, l+1 \leq k \leq l+n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon) \\ & \geq cf \left(|\{(j, k), i+1 \leq j \leq i+m, l+1 \leq k \leq l+n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \right) \\ & \quad \times \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \end{aligned}$$

olur. $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=i+1}^{i+m} \sum_{k=l+1}^{l+n} (f|x_{jk} - L|)^{p_{jk}} \\ & \geq \frac{1}{n^s m^t} cf(|\{(j, k), i+1 \leq j \leq i+m, l+1 \leq k \leq l+n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|) \\ & \quad \times \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{n^u m^v} cf(|\{(j, k), i+1 \leq j \leq i+m, l+1 \leq k \leq l+n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|) \\
&\quad \times \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \\
&= \frac{1}{n^u m^v f(n^u m^v)} cf(|\{(j, k), i+1 \leq j \leq i+m, l+1 \leq k \leq l+n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|) \\
&\quad \times \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) f(n^u m^v).
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olduğundan ve eğer f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise, L sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden $I_2^f(u)$ yakınsaktır.

Sonuç 4.3.4. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ ve $0 < h = \inf p_{jk} \leq p_{jk} \leq \sup p_{jk} = H < \infty$ verilsin. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve her $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer bir dizi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise L sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden $I_2^f(u)$ yakınsaktır.

Yukarıdaki teoremden $\tilde{\alpha} \cong 1$ alınır aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.5. $0 < h = \inf p_{jk} \leq p_{jk} \leq \sup p_{jk} = H < \infty$ verilsin. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve her $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer bir dizi f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise L sayısına $I_2^f(u)$ yakınsaktır.

5. SONUÇLAR

Bu tezde, Aizpuru, Listán-García ve Rambla-Barreno [13] tarafından verilen f sınırsız modülüs fonksiyonu yardımıyla çift diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirilerek $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olmak üzere çift dizilerde $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaklık ve $\tilde{\alpha}$. dereceden f kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizi uzayları tanımlanmıştır ve f herhangi bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ şartı altında bu dizi uzaylarının arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Baláž ve Šalát [32] tarafından verilen I_u yakınsaklık kavramının temel özellikleri ile Das ve Savaş [37] tarafından çift diziler için düzgün yoğunluk ve I_u yakınsaklık kavramlarından yararlanılarak $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olmak üzere çift dizilerde $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün yoğunluk ve I_u yakınsaklık kavramlarının temel özellikleri incelenerek bazı içerme teoremleri verilmiştir. Ayrıca f sınırsız modülüs fonksiyonu olmak üzere $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün $I_2(f)$ istatistiksel yakınsak dizi uzayı ile $\tilde{\alpha}$. dereceden düzgün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizi uzayları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

1. **Zygmund, A.**, 1977. Trigonometric Series, Vol. I, II. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne.
2. **Steinhaus, H.**, 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73–74.
3. **Fast, H.**, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
4. **Schoenberg, I.J.**, 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly., 66, 361-375.
5. **Šalát, T.**, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.
6. **Fridy, J.A.**, 1985. On the statistical convergence, Analysis., 5, 301-313.
7. **Connor, J.S.**, 1988. The statistical and strong p - Cesàro convergence of sequences, Analysis., 8 (1-2), 47–63.
8. **Nakano, H.**, 1953. Concave modulars, J. Math. Soc. Japan., 5, 29-49.
9. **Ruckle, W.H.**, 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math., 25, 973-978.
10. **Maddox, I. J.**, 1986. Sequence spaces defined by a modulus, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 100 (1), 161–166.
11. **Connor, J.S.**, 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canada Math. Bull., 32 (2), 194-198.
12. **Aizpuru, A.; Listán-García, M. C.; Rambla-Barreno, F.**, 2014. Density by moduli and statistical convergence, Quaest. Math., 37 (4), 525–530.
13. **Aizpuru, A.; Listán-García, M. C.; Rambla-Barreno, F.**, 2012. Double density by moduli and statistical convergence, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin., 19 (4), 663–673.

14. **Gadjiev, A. D.; Orhan, C.**, 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math., 32 (1), 129–138.
15. **Çolak, R.**, 2010. Statistical convergence of order α , Modern Methods in Analysis and its Applications, (Anamaya Publ. New Delhi, India), 121-129.
16. **Çolak, R. ; Bektaş, Ç. A.**, 2011. λ – statistical convergence of order α , Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 31 (3), 953-959.
17. **Bhardwaj, V. K.; Dhawan, S.**, 2015. f – statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus, J. Inequal. Appl., 2015, 332, 14 pp.
18. **Maddox, I. J.**, 1988. Statistical convergence in a locally convex space, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 104 (1), 141–145.
19. **Mursaleen, M.**, 2000. λ – Statistical convergence, Math. Slovaca., 50 (1), 111-115.
20. **Kolk, E.**, 1991. The statistical convergence in Banach spaces, Tartu ÜL. Toimetised., 928, 41–52.
21. **Savaş, E.**, 2000. Strongly almost convergence and almost λ – statistical convergence, Hokkaido Math. J., 29, 531-536.
22. **Fridy, J.A. ; Orhan, C.**, 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160 (1), 43-51.
23. **Miller, H. I.; Orhan, C.**, 2001. On almost convergent and statistically convergent subsequences, Acta Math. Hungar., 93 (1-2), 135–151.
24. **Kostyrko, P. ; Šalát, T. ; Wilczyński, W.**, 2000. I -convergence, Real Anal. Exchange., 26 (2), 669–685.
25. **Raimi, R. A.**, 1963. Convergence, density, and τ -density of bounded sequences, Proc. Amer. Math. Soc., 14 , 708–712.
26. **Maddox, I. J.**, 1978. A new type of convergence, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 83 (1), 61–64.

27. **Freedman, A. R.; Sember, J. J.**, 1981. Densities and summability, *Pacific J. Math.*, 95 (2), 293–305.
28. **Brown, T. C.; Freedman, A. R.**, 1987. Arithmetic progressions in lacunary sets, *Rocky Mountain J. Math.*, 17 (3), , 587–596.
29. **Brown, T. C.; Freedman, A. R.**, 1990. The uniform density of sets of integers and Fermat's last theorem, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada.*, 12 (1), 1–6.
30. **Gáliková, Z.; László, B.; Šalát, T.**, 2002. Remarks on uniform density of sets of integers, *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.*, (N.S.) 29, 3–13.
31. **Grekos, G. ; Toma, V. ; Tomanová, J.**, 2010. A note on uniform or Banach density, *Ann. Math. Blaise Pascal.*, 17 (1), 153–163.
32. **Baláz, V. ; Šalát, T.**, 2006. Uniform density u and corresponding I_u -convergence, *Math. Commun.*, 11 (1), 1–7.
33. **Mursaleen, M. ; Edely, O. H.H.**, 2003. Statistical convergence of double sequences, *J. Math. Anal. Appl.*, 288 (1), 223–231.
34. **Móricz, F.**, 2003. Statistical convergence of multiple sequences, *Arch. Math.*, (Basel) 81 (1), 82–89.
35. **Móricz, F. ; Rhoades, B.E.**, 1988. Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 104 (2), 283–294.
36. **Çolak, R.; Altin, Y.**, 2013. Statistical convergence of double sequences of order $\bar{\alpha}$, *J. Funct. Spaces Appl.*, Art. ID 682823, 5 pp.
37. **Das, P. ; Savaş, E.**, 2012. Double uniform density and corresponding convergence of double sequences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 49 (4), 419–435.
38. **Maddox, I. J.**, 1970. *Elements of Fuctional Analysis*, Cambirdge University Press, Cambridge, Second Edition.
39. **Jain, P.K. ; Ahmad, K.**, 1993. *Metric Spaces*, Narosa Publishing House, New Delhi, INDIA.

40. **Chandrasekhara Rao, K.**, 2006. Functional Analysis, Alpha Science International Ltd. Oxford, U.K.
41. **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley & Sons, New York.
42. **Goes, G. ; Goes, S.**, 1970. Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients, I. Math. Z. 118, 93–102.
43. **Pehlivan, S. ; Fisher, B.**, 1995. Some sequence spaces defined by a modulus, Math. Slovaca., 45 (3), 275–280.
44. **Tabib, K. K.**, 2012. The Topology Of Statistical Convergence, Master Of Sciences, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at El Paso, USA.
45. **Burkill, J.C.; Burkill, H.**, 1970. A Second Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press, London, U.K
46. **Pringsheim, A.**, 1900. Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, (German) Math. Ann., 53 (3), 289–321.
47. **Tripathy, B. ; Tripathy, B. C.**, 2005. On I – convergent double sequences, Soochow J. Math., 31 (4), 549–560.
48. **Mursaleen, M. ; Mohiuddine, S.A.**, 2014. Convergence Methods for Double Sequences and Applications, New Delhi, INDIA: Springer.
49. **Mölder, A.**, 2004. The topologization of sequence spaces defined by a matrix of moduli, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 53 (4), 218–225.
50. **Boos, J.**, 2000. Classical and Modern Methods in Summability, New York, NY, USA: Oxford University Press Inc.
51. **Maddox, I. J.**, 1987. Inclusions between FK – spaces and Kuttner’s theorem, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 101 (3), 523–527.
52. **Dündar, E. ; Altay, B.**, 2012. Multipliers for bounded ℓ_2 – convergence of double sequences, Math. Comput. Modelling., 55 (3-4), 1193–1198.

53. **Taş, E.; Yurdakadmin, T.**, 2012. Characterization of uniform statistical convergence for double sequences, Miskolc Math. Notes., 13 (2), 543–553.



ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 2003 yılında kazandığım Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldum. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek lisans eğitimime başladım ve 2010 yılında bitirdim. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Analiz ve Fonksiyonlar teorisi Anabilim Dalında, Doktora eğitimine başladım ve devam etmekteyim.

