

**MINKOWSKI UZAYINDA 2- PARAMETRELİ YÜZEY
AİLELERİNİN 5- EKSENLİ HAREKETLERİNİN
GEOMETRİSİ**

DOKTORA TEZİ

Selçuk BAŞ

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Vedat ASİL

Eylül-2015

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA 2- PARAMETRELİ YÜZEY
AİLELERİNİN 5- EKSENLİ HAREKETLERİNİN GEOMETRİSİ

DOKTORA TEZİ

Selçuk BAŞ
(111121203)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Vedat ASİL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 31.08.2015

Eylül-2015

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA 2- PARAMETRELİ YÜZEY
AİLELERİNİN 5- EKSENLİ HAREKETLERİNİN GEOMETRİSİ

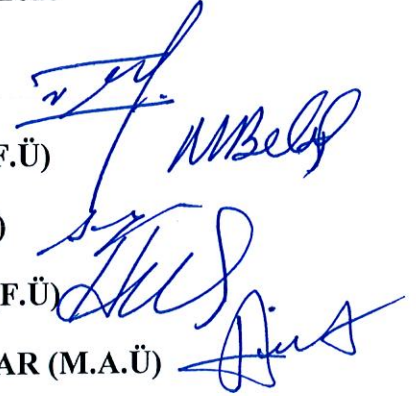
DOKTORA TEZİ

Selçuk BAŞ

(111121203)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31.08.2015
Tezin Savunulduğu Tarih : 28.09.2015

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)
Prof. Dr. Ahmet YILDIZ (İ.Ü)
Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR (M.A.Ü)



ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarında bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Vedat ASİL' e ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Talat KÖRPINAR' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Selçuk BAŞ

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER LİSTESİ	II
ŞEKİLLER LİSTESİ	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY	V
1. BÖLÜM.....	1
Giriş	1
2. BÖLÜM.....	5
Temel Tanımlar ve Teoremler	5
3. BÖLÜM.....	20
3.1. Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler	20
3.2. Minkowski Uzayında Kanal Yüzeyler.....	28
3.3. Minkowski Uzayında Yüzeylerin Harmonik Evolütleri	30
4. BÖLÜM.....	32
5-Eksenli Hareketlerin Yapısı	32
4.1. Minkowski Uzayında 5-Eksenli Kanal Yüzeyler	35
4.2. 5-eksenli Kanal Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri	87
4.3. 5-eksenli Kanal Yüzeylerin Harmonik Evolütleri.....	90
4.4. 5-eksenli Kanal Yüzeylerin Elastik Olmayan Akışları	94
5. BÖLÜM	98
Uygulamalar	98
6. BÖLÜM.....	112
Sonuç	112
KAYNAKLAR	116

SİMGELER LİSTESİ

E, F, G : Birinci temel formun bileşenleri

$\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$: İkinci temel formun bileşenleri

$\mathbf{m}(s, t)$: 5-eksenli yüzeyin merkez eğrisi

ε : İşaret matrisi

$\mathbf{K}$: Gauss eğriligi

$\mathbf{H}$: Ortalama eğrilik

$P(s, \theta)$: Kanal yüzey

$P(s, t, \theta)$: 5-eksenli kanal yüzey

$\mathbb{R}_1^3$: Minkowski uzayı

$\tilde{P}(s, t, \theta)$: Paralel 5-eksenli kanal yüzeyi

$\overline{P}(s, t, \theta)$: 5-eksenli kanal yüzeyin harmonik evolutü

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 5-eksenli freze makinesi	1
Şekil 1.2 Eğilme ve yatma açıları	2
Şekil 1.3 Koordinat sistemleri	2
Şekil 1.4 Kanal ve tüp yüzeyi	4
Şekil 1.5 Kanal yüzeyin karakteristik çemberi	4
Şekil 4.1 Bir parametrelî eğri ailesi	32
Şekil 5.1 $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi	101
Şekil 5.2 $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin harmonik evolütü	103
Şekil 5.3 $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi	104
Şekil 5.4 $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin harmonik evolütü	107
Şekil 5.5 $\mathfrak{K}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi	109
Şekil 5.6 $\mathfrak{Q}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi	110
Şekil 5.7 $R(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi	113

ÖZET

MINKOWSKI UZAYINDA 2- PARAMETRELİ YÜZEY AİLELERİNİN 5- EKSENLİ HAREKETLERİNİN GEOMETRİSİ

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, Minkowski uzayında yüzeyler, kanal yüzeyler ve 5-eksenli hareket ve yüzeyler ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verildi.

İkinci bölümde; temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde; Minkowski uzayında timelike ve spacelike yüzeyler, Minkowski uzayında kanal yüzeyler ve Minkowski uzayında yüzeylerin harmonik evolütleri verildi.

Dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmını kapsamaktadır.

Dördüncü bölümde; Minkowski uzayında hareketli merkez eğrileri bir parametrelî eğri ailesi olan eğrilerin timelike ve spacelike durumlarına göre 5-eksenli kanal ve tüp yüzeyleri elde edildi. 5-eksenli kanal ve tüp yüzeylerinin I. ve II. temel formunun katsayıları, Gauss ve ortalama eğrilikleri incelenmiştir. Daha sonra oluşturulan 5-eksenli yüzeylerin paralel yüzeyleri elde edilmiştir. Ayrıca 5-eksenli yüzeylerin harmonik evolütleri ele alındı. Son olarak bu yüzeylerin elastik olmayan akışları elde edildi.

Beşinci bölümde; 5-eksenli kanal ve tüp yüzeyler ile bazı uygulamalar verildi.

Altıncı bölüm ise; çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzayı, 5-eksenli kanal yüzey, 5-eksenli tüp yüzey, 5-eksenli hareket, 5-eksenli makine.

SUMMARY

GEOMETRY OF FIVE-AXIS MOTION OF TWO-PARAMETER FAMILIES OF SURFACES IN MINKOWSKI SPACE

This thesis consist of six chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of Minkowski space and surfaces are given.

In the third chapter, structure of surfaces are given in Minkowski space.

The fourth chapter contains original part of our study.

In the fourth chapter; 5-axis canal and tube surfaces for spacelike and timelike the center curve of a moving sphere are examined in the Minkowski 3-space. The Gaussian curvature, mean curvature, first and second fundamental form of coefficients of 5-axis canal and tube surfaces are examined. The parallel surfaces of 5-axis canal surfaces are obtained. On the other and, harmonic evolutes of 5-axis surfaces in Minkowski space are given. Finally, derive the corresponding equations for the inextensible flow of a 5-axis canal surface are given.

In the fifth chapter; 5-axis canal and tube surfaces are given with some applications.

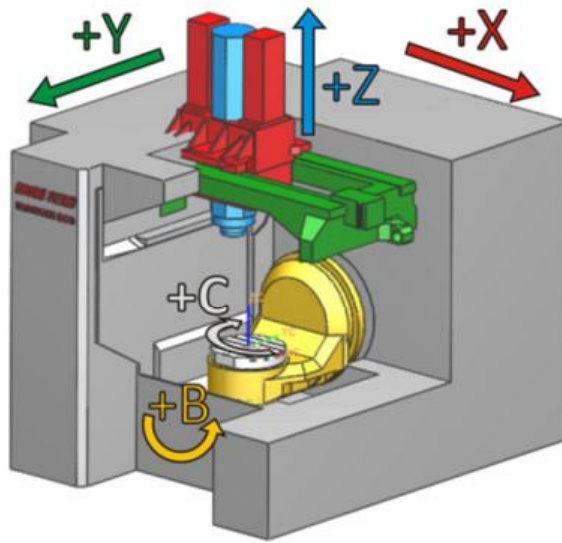
The sixth chapter has been devoted to the conclusion.

Keywords: Minkowski space, 5-axis canal surfaces, 5-axis tube surfaces, 5-axis motion, 5-axis machine.

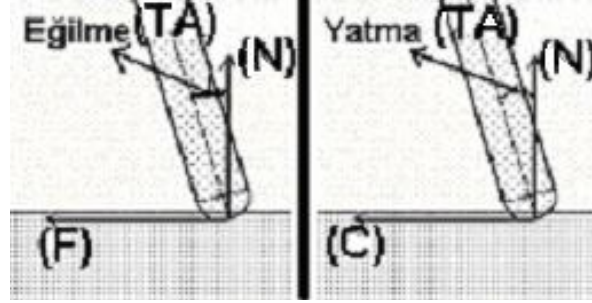
1. BÖLÜM

GİRİŞ

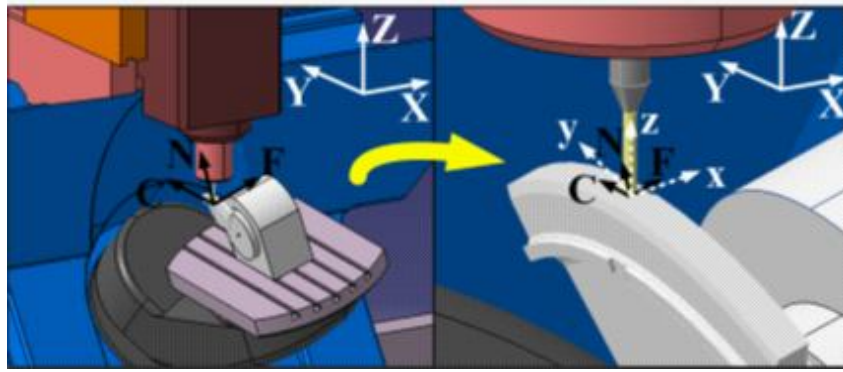
Beş eksenli hareketler havacılık, savunma imalat sanayi, otomotiv, kalıpcılık ve medikal sektörlerinde karmaşık yüzeylerin imalatında sıklıkla kullanılır. Özellikle bu alanlarda kullanılmasının sebebi, yüzey kalitesinin ve bütünlüğünün önemli olduğu ve üretim toleranslarının çok dar olduğundandır. 5-eksen frezeleme (kesme hareketi) tekniği ise 3-eksen frezeleme (kesme hareketi) tekniğine ek olarak, takıma veya iş parçasına verilen 2 adet eğim veya dönme hareketi ile sağlanan bir işleme yöntemidir. 5-eksen freze geometrisinde üç koordinat sistemi kullanılır: parçanın koordinat sistemi **XYZ**, süreç koordinat sistemi ve kesici takımın koordinat sistemi **xyz**, bu koordinat sistemlerinde (0,0,0) noktası kürenin merkezindedir. **F** eksenli ilerleme yönünde, **N** eksenli parçanın yüzey normali yönünde ve **C** eksenli ilerlemeye ve yüzey normaline dik yöndedir. 5-eksen frezelemede, ek olarak 2 kesme parametresi vardır, bunlar eğilme ve yatma açılarıdır. Eğilme açısı, kesici takımın yüzey normaline **N** göre **C** eksenli etrafındaki açısal dönüşüdür. Yatma açısı ise kesici takımın yüzey normaline **N** göre **F** eksenli etrafındaki açısal dönüşüdür, [25-29].



Şekil 1.1 5-eksenli freze makinesi, [29].



Şekil 1.2 Eğilme ve yatma açıları, [25].

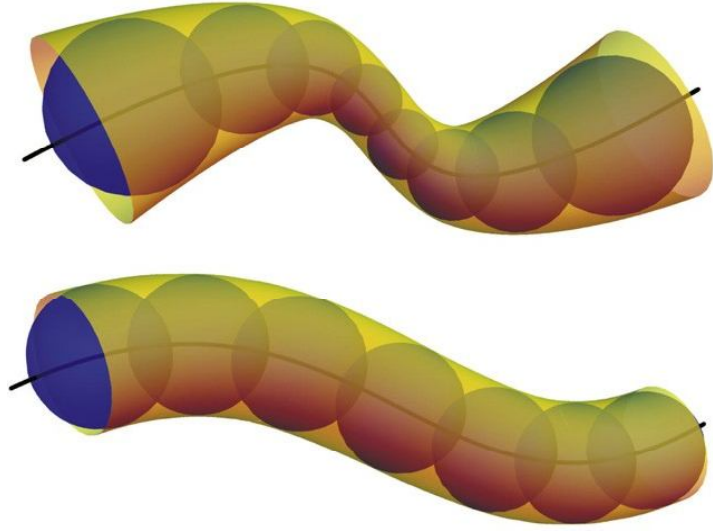


Şekil 1.3 Koordinat sistemleri, [29].

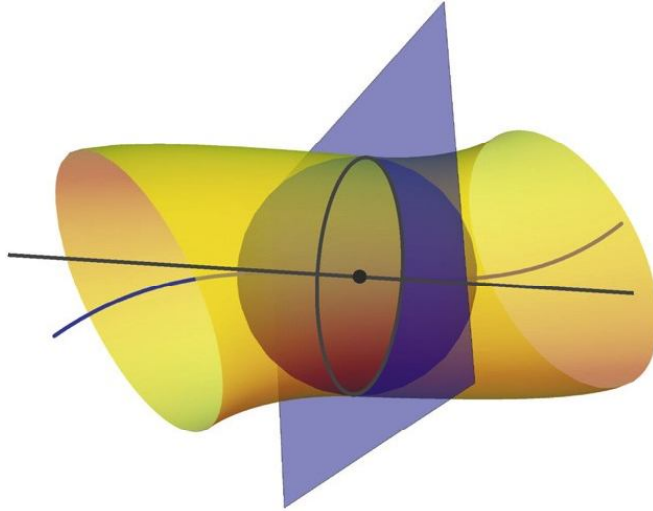
Bilgisayar destekli tasarım (CAD/CAM), kesici takım ve takım tezgahı teknolojilerindeki gelişmeler yüksek hassasiyete sahip parçaların daha kısa sürede üretilmesine olanak sağlamıştır. Mühendislikte bu alanla ilgili pek çok çalışma vardır. Öztürk ve Budak; 5-eksen frezelemede kuvvet ve şekil hatalarının modellenmesini incelediler, [25]. Tunç; 5-eksen frezeleme süreçlerinin geometrik analizini oluşturdu, [29]. Roth, İsmail, Mann; 5-eksenli hareket boyunca oluşan torodial kesme ve süpürme yüzeylerini ele aldı, [26]. Lartigue, Duc, Affouard; 5-eksenli takım hareketleriyle beraber oluşan yüzeyin zarflarını inceledi, [20]. Wang; süpürme yüzeylerini geometrik modellemesini çalıştı, [31]. Tsay ve Her; bükülmüş regle yüzeylerin 5-eksenli frezelemesini araştırdılar, [28]. Chiou ve Lee; 5-eksenli makinelerde swept yüzeylerin nümerik kontrollerini elde ettiler, [4]. Aras; iki parametrelili küre hareketlerinin 5-eksenli kesme yüzeylerini inceledi, [1].

Diferensiyel geometride yüzeyler teorisi önemli bir tutmaktadır. 3-boyutlu Minkowski uzayı, 3-boyutlu Öklid uzayına kıyasla daha kompleks yapılar içerir. Örneğin bu uzaydaki dönme eksenleri spacelike, timelike ve lightlike olarak adlandırılır. Minkowski uzayında teğet vektörler timelike, spacelike ve lightlike (null) olarak sınıflandırılır. Turgut; 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeylerini oluşturdu, [30]. Güler; 3-boyutlu Minkowski uzayında helisoidal yüzeyler ile dönel yüzeyler için Bour teoremini inceledi, [11]. Gülnur, Bayram, Kasap; Minkowski uzayında asimptotik eğriyle yüzey elde etmişlerdir, [8]. García, Ugail ve Yilmaz; Minkowski uzayında Bézier yüzeylerini elde ettiler, [9]. Sipus, Volenec; Minkowski uzayında bir yüzeyin harmonik evolutitlerini oluşturdular, [27].

Kanal yüzeyi değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır, [10]. Bu yüzeyler çoğunlukla, bilgisayar yardımıyla geometrik modellemelerde ve geometrik tasarımlarda kullanılır. Kanal yüzeyini oluşturan hareketli kürenin yarıçap fonksiyonu sabit ise, kanal yüzeyine tüp ya da boru yüzeyi adı verilir. Literatüre bakıldığında kanal yüzeylerdeki çalışmalar şunlardır; Körpınar ve Turhan; Heisenberg grubunda Bishop çatısına göre kanal yüzeyleri inceledi, [17]. Yaylı ve Doğan, kanal ve tüp yüzeylerini farklı çatılara göre ele aldılar, ayrıca Minkowski uzayında kanal yüzeylerin perspektif silüet eğrisini çalıştılar, [6,7]. Karacan, Tuncer ve Yoon; Weingarten ve lineer Weingarten kanal yüzeylerini incelediler, [13]. Karacan ve Bükçü; Minkowski uzayında kanal yüzeyleri ele aldılar, [14,15,16]. Kim ve Lee; kanal yüzeyin silüet eğrisini inceledi, [18]. Bizzarri ve Lávička; kanal yüzeyleri nümerikal bir metot ile yaklaşık parametrizasyonlarını hesapladılar, [2]. Xu, Feng ve Sun; kanal yüzeylerinin analitik ve geometrik özelliklerini çalıştılar, [32].



Şekil 1.4 Kanal ve tüp yüzeyi, [2].



Şekil 1.5 Kanal yüzeyin karakteristik çemberi, [2].

Bu çalışmada ise 3-boyutlu Minkowski uzayında hareketli merkez eğrileriyle 5-eksenli kanal ve tüp yüzeylerinin I. ve II. temel formlarının katsayıları, Gauss ve ortalama eğrilikleri bulundu. Elde edilen 5-eksenli yüzeylerin paralel yüzeyleri bulundu. Daha sonra ise 5-eksenli kanal ve tüp yüzeylerinin harmonik evolütleri incelendi. Son olarak bulunan 5-eksenli yeni yüzeylerin elastik olmayan akışları elde edildi.

2. BÖLÜM

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1.

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v \in V$ için

- i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
- ii) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$,
- $\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle, \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir, [24].

$\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. Bu simetrik bilineer form üç değişik durum altında incelenebilir;

1) Definit Durum:

Eğer,

- i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,
- ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

denir.

2) Semi-definit Durum:

Eğer,

- i) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif semi-tanımlı,

ii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif semi-tanımlı, denir.

3) Non-dejenere Durum: Eğer,

$\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna non-dejenere simetrik form denir, [24].

Tanım 2.1.2.

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir, [24].

Tanım 2.1.3.

V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir. g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır, [24].

Tanım 2.1.4.

V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir, [24].

Tanım 2.1.5.

V bir Lorentz uzayı olsun. $\forall v \in V$ için

$g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v 'ye space-like vektör,

$g(v, v) < 0$ ise v 'ye time-like vektör,

$v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ veya ise v 'ye light-like (null) vektör,

denir, [24].

Tanım 2.1.6.

V skalar çarpımlı bir uzay ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına v vektörünün normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör denir, [24].

Tanım 2.1.7.

V bir Lorentz uzayı ve W , V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

$g|_W$ pozitif tanımlı ise W ya space-like altuzay,

$g|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya time-like altuzay,

$g|_W$ dejenere ise W ya light-like altuzay,

denir, [24].

Teorem 2.1.8.

V bir Lorentz uzayı, V nin bir altuzayı W ve $\dim W \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler, [24].

- i) W time-like altuzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.
- ii) W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.
- iii) W uzayı bir tane time-like vektör içerir.

Tanım 2.1.9.

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$ -tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir. Başka bir deyişle g , M manifoldunun her p noktasına $T_p M$ tanjant uzayı üzerinde bir g_p skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır, [24].

Tanım 2.1.10.

$\mathbb{R}^n$, n -boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-v} v_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^n v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir. Burada $1 \leq v \leq n$ olmak üzere, sırasıyla v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerinin bileşenleridir, [24].

Tanım 2.1.11.

$\mathbb{R}_v^n$, yarı-Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n -uzayı denir, [24].

Tanım 2.1.12.

M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$\langle, \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer $\langle, \rangle$ fonksiyona M üzerinde bir iç çarpım, metrik tensör, diferensiyellenebilir metrik veya Riemann metriği denir. $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine de bir Riemann manifoldu denir, [23].

Tanım 2.1.13.

M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olmak üzere

i) simetrik

$$Y \in \chi(M) \text{ için } g(X, Y) = g(Y, X),$$

ii) 2-lineer

$$\begin{aligned} \forall X, Y, Z &\in \chi(M), \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ için} \\ g(aX + bY, Z) &= ag(X, Z) + bg(Y, Z), \\ g(X, aY + bZ) &= ag(X, Y) + bg(X, Z), \end{aligned}$$

iii) non-dejenere

$$\forall X, Y \in \chi(M) \text{ için } g(X, Y) = 0 \Rightarrow Y = 0,$$

özelliklerini sağlayan g tensörüne bir yarı-Riemann metriği ve (M, g) ikilisine de yarı-Riemann manifoldu denir, [24].

Tanım 2.1.14.

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\dim M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir Lorentz manifoldu denir. Bu tanıma göre bir M Lorentz manifoldu için

$$g_p(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i|_p w_i|_p - v_n|_p w_n|_p, \quad \forall p \in M \text{ ve } \forall v_p, w_p \in T_p M$$

dir, [24].

Tanım 2.1.15.

M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$g(T, T) > 0 \text{ ise } \alpha \text{ eğrisine spacelike eğri,}$$

$$g(T, T) < 0 \text{ ise } \alpha \text{ eğrisine timelike eğri,}$$

$$g(T, T) = 0 \text{ ve } T \neq 0 \text{ ise } \alpha \text{ eğrisine null eğri,}$$

denir. Eğrinin bir özel hali olan doğru gözönüne alınsın. Doğrunun doğrultman vektörü space-like ise doğru space-like doğru, doğrultman vektörü time-like ise doğru time-like doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur, [24].

Tanım 2.1.16.

M ve $\overline{M}$, sırasıyla n ve $(n + d)$ -boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere $x : M \rightarrow \overline{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için

$$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \overline{M},$$

türev dönüşümü birebir ise x fonksiyonuna bir immersiyon (daldırma) denir, [5].

Tanım 2.1.17.

M ve $\overline{M}$, sırasıyla, n ve $(n + d)$ –boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere ve $x : M \rightarrow \overline{M}$ dönüşümü bir immersiyon olsun. $\overline{M}$ manifoldu bir Riemann yapıya sahip ise x yardımıyla $\overline{M}$ den indirgenen metrik için, $\forall p \in M$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle dx_p(X), dx_p(Y) \rangle_{x_p}, \forall X, Y \in T_p M$$

eşitliği sağlandığında x e bir izometrik immersiyon denir, [5].

Tanım 2.1.18.

M_v^m , m –boyutlu ve v indeksli bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}_q^n$, n –boyutlu ve q indeksli bir diğer yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$j : M_v^m \rightarrow \overline{M}_q^n$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise ($\text{rank } j = m$) M_v^m manifolduna $\overline{M}_q^n$ nun bir yarı-Riemann altmanifoldu denir, [24].

Tanım 2.1.19.

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

in $\overline{M}$ ye indirgenmiş olan

$$\overline{D} : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \rightarrow \chi(\overline{M})$$

fonksiyonuna M den $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir. Buradaki $\chi(\overline{M})$, $\overline{M}$ nin her bir p noktasına $T_p \overline{M}$ de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\mathfrak{F}(\overline{M})$ – modülünü göstermektedir, [24].

Lemma 2.1.20.

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} II : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\rightarrow \chi(\overline{M})^\perp \\ (V, W) &\rightarrow II(V, W) = \text{nor} D_V W \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathfrak{F}(\overline{M})$ –bilineer ve simetriktir. Burada II ye $\overline{M}$ nin ikinci temel form tensörü denir, [24].

Tanım 2.1.21.

n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldunun $(n-1)$ –boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi denir, [24].

Tanım 2.1.22.

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı ω olsun. Her $V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), \omega)$$

şeklindeki $(1, 1)$ –tipinden tensör alanı S ye $\overline{M}$ nin ω den elde edilen şekil operatörü denir. Diğer bir deyişle, S şekil operatörü, ω birim normal vektör alanı olmak üzere, $\overline{M}$ nin her p noktasında

$$\begin{aligned} S : T_p(\overline{M}) &\rightarrow T_p(\overline{M}) \\ X_p &\rightarrow S(X_p) = -D_{X_p} \omega \end{aligned}$$

bir lineer operatördür, [24].

Tanım 2.1.23.

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere bu iki vektörün skaler çarpımı

$$\begin{aligned} < \cdot, \cdot >: \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow < \vec{v}, \vec{w} > = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $v = w$ ise

$$\|\vec{v}\| = |< \vec{v}, \vec{v} >|^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\vec{v}\|_L$ reel sayısına, v vektörünün Lorentz anlamında normu denir.

Normu 1 olan vektöre de Lorentz anlamında birim vektör denir, [24].

Tanım 2.1.24.

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_2 w_1 - v_1 w_2)$$

vektörüne $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ nin vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir. $\vec{v} \times \vec{w}$ veya $\vec{v} \wedge \vec{w}$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ve

$$\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}),$$

olmak üzere

$$v \times w = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

veya

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$$

dir. Saat yönünün tersi pozitif olarak alınmıştır.

Saat yönünde tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

dir. Bu durumda

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir, [24].

Tanım 2.1.25.

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $A^t \varepsilon A = \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine semi-ortogonal matris denir. Burada, $\det A = 1$ olup

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisine işaret matrisi denir, [24].

Teorem 2.1.26.

V bir Lorentz uzayı ve v, w iki timelike vektör olsun. Bu durumda

i) $|g(v, w)| \geq \|v\| \|w\|$ eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart v ve w vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

ii) v, w timelike vektörleri aynı time-konide ise

$$g(v, w) = -\|v\| \|w\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına v ve w timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

Burada v ve w vektörleri aynı time-konide değil ise o zaman

$$|g(v, w)| = \|v\| \|w\| \cosh \varphi$$

dir.

V Lorentz uzayında spacelike vektörler v ve w olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{g(v, w)}{\|v\| \|w\|}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya v ve w spacelike vektörler arasındaki açı denir. v ve w spacelike vektörler için

$$g(v, w) \leq \|v\| \|w\|$$

eşitsizliği vardır, [24].

Tanım 2.1.27.

$\mathbb{R}^3$ de 1-parametrel küre ailesinin zarfına kanal yüzeyi denir. Alternatif olarak kanal yüzeyi, merkezlerinin yörüngesi bir $\alpha(t)$ eğrisi ve yarıçap fonksiyonu $r(t)$ olan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır, [10].

Teorem 2.1.28.

α bir timelike eğri olsun. Her s için α nın Frenet üç ayaklısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olmak üzere Frenet denklemleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

α bir spacelike eğri olsun. Bu durumda

i) $\mathbf{N}$ vektörü spacelike ise Frenet denklemleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

olur.

ii) $\mathbf{N}$ vektörü timelike ise Frenet denklemleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

olur, [21].

Tanım 2.1.29.

$\mathbb{R}_1^3$ de

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$$

ve

$$\mathbb{H}_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$$

yüzeylerine sırasıyla de Sitter 2-uzay ve pseudo-hiperbolik uzay denir, [21].

Teorem 2.1.30.

$v \in V$ olmak üzere

- i) $\|v\| > 0$,
- ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v$ bir null vektördür,
- iii) v bir timelike vektör ise $\|v\|^2 = -g(v, v)$ dir,
- iv) v bir spacelike vektör ise $\|v\|^2 = g(v, v)$ dir, [24].

Teorem 2.1.31.

V Lorentz uzayı ve g de Lorentz metriği olmak üzere

- i) $\Gamma_N = \{v \in V - \{0\} : g(v, v) = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V nin light-like konisi,
- ii) $\Gamma_S = \{v \in V : g(v, v) \geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V nin spacelike konisi,
- iii) $\Gamma_T = \{v \in V - \{0\} : g(v, v) < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V nin timelike konisi denir, [24].

Tanım 2.1.32.

$\mathbb{R}^3$ de $\gamma(s)$, $s \in I$ eğrisi yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş olsun. Başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l olmak üzere

$$F : [0, l] \times [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ile verilen diferensiyellenebilen 1-parametrelili eğri ailesini göz önüne alalım. u eğri-lerin değişken parametreleri ve $0 \leq u \leq l$. F nin yay uzunluğu

$$s(u) = \int_0^u \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| du$$

şeklinde verilir. Burada,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| = \left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle \right|^{\frac{1}{2}}$$

dir. Ayrıca, F eğrisinin hız fonksiyonu $v = \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right|$ olmak üzere $\frac{\partial}{\partial s}$, u cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$$

şeklinde dir. Böylece s yay uzunluğu parametresi için $ds = v du$ yazılabilir. Böylece, F nin bir akışı

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f\mathbf{T} + g\mathbf{N} + h\mathbf{B},$$

şeklinde tanımlanır. Yay uzunluğunun varyasyonu ise

$$s(u, t) = \int_0^u v du$$

şeklinde verilir, ayrıca $\forall u \in [0, l]$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0$$

koşulunu sağlaması ile oluşturulur, [15].

Tanım 2.1.33.

Bir $F(u, t)$ eğri ailesi ve $\mathbb{R}^3$ de bunun $\frac{\partial F}{\partial t}$ hareketi (akışı)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| = 0$$

koşulunu sağlıyorsa bu akışa elastik olmayan (inextensible) hareketi (akışı) denir, [15].

Tanım 2.1.34.

$X(u, v, t)$ yüzeyinin akışı $\frac{\partial X}{\partial t}$, I. temel form $\{E, F, G\}$ olmak üzere $\frac{\partial X}{\partial t}$ akışı inextensible ise

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

dır, [15]. Fiziksel olarak bir bayrağın dalgalanması şeklinde ifade edilebilir.

3. BÖLÜM

Bu bölümünde ilk olarak Minkowski uzayında spacelike ve timelike yüzeyler verildi. Daha sonra, Minkowski uzayında kanal yüzeyler incelendi. Son olarak Minkowski uzayında yüzeylerin harmonik evolütleri verildi.

3.1. Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

Bu bölümde, spacelike ve timelike yüzey kavramları tanıtılacak, ardından bu yüzeylerin geometrisi için gerekli tanımlar verilecektir.

$M, \mathbb{R}_1^3$ de bir yüzey ve $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ bir immersiyon olsun. Yani φ , diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\forall P \in M$ için $d\varphi_p : T_P(M) \rightarrow T_{\varphi(P)}(\mathbb{R}_1^3)$ birebirdir. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\langle, \rangle_P$ Lorentz metriğinin φ ile geri getirilmiş g_P olsun. Buna göre $g_P = \varphi^*(\langle, \rangle_P)$ olduğundan $\forall u, v \in T_P(M)$ olmak üzere

$$g_P(u, v) = \langle u, v \rangle_P = \langle d\varphi_P(u), d\varphi_P(v) \rangle$$

olur. Burada $T_P(M)$ uzayı üç tipte olabilir:

- i) g_P pozitif tanımlı ise $T_P M$ spacelike düzlemdir.
- ii) g_P metriğinin indeksi 1 ise $T_P M$ timelike düzlemdir.
- iii) g_P dejenere metrik ise $T_P M$ lightlike düzlemdir.

Tanım 3.1.1.

Teğet düzlemleri spacelike (veya timelike, lightlike) olan immersiyona spacelike (veya timelike, lightlike) denir, [21].

M yüzeyi içinde $\varphi(U)$ diferensiyellenebilir yüzeyi için $Q \in U$ ve $\varphi(Q) = P$ olmak üzere

$$\varphi_u(Q) = \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}(Q)\right), \quad \varphi_v(Q) = \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}(Q)\right)$$

olarak tanımlanır. $\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q)\}$ kümesi $T_P M$ uzayının bir bazıdır.

$$\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q)\}$$

bazının denklik sınıfını, $T_P M$ vektör uzayın pozitif yönü olarak alacağız. Böylece $\varphi(U)$ basit yüzeyinin her bir P noktasındaki teğet düzlemi yönlendirilmiş olur. $\varphi(U)$ basit yüzeyinin her bir P noktasında $\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q), N(P)\}$ kümesi $T_P \mathbb{R}^3$ uzayının pozitif yönlü bir bazı olacak biçimde $\varphi(U)$ üstünde, ϖ birim normal vektör alanı tek olarak belirlidir ve

$$\varpi = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

dir. Bu ϖ vektör alanına $\varphi(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim normal vektör alanı diyeceğiz.

$\varpi, \varphi(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim normal vektör alanı ise,

$$\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q), -\varpi(P)\}$$

kümesi $T_P \mathbb{R}^3$ uzayının negatif yönlü bir çatı alanı olur. $-\varpi$ vektör alanına, $\varphi(U)$ basit yüzeyinin negatif yönlü birim normal vektör alanı denir.

$\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyini gözönüne alalım. $P \in M$ olsun, P noktasını içeren en az bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunduğunu biliyoruz. Buna göre, P noktasında $\varphi(U)$ basit yüzeyinden elde edilen pozitif yönlü bir $\varpi(P)$ birim normal vektörü vardır. P noktasında, P noktasını içeren başka bir $\varphi_*(H)$ basit yüzeyine göre de pozitif yönlü $Y(P)$ birim normal vektör alanı vardır.

$$Y(P) = \varpi(P) \text{ veya } Y(P) = -\varpi(P)$$

olduğu açıktır, [21].

Tanım 3.1.2.

M yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu Minkowski uzayı ve $\overline{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (U, φ) parametrizasyonu ile verilen, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned}\varphi : U &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))\end{aligned}$$

ile belirli olan $\varphi(U)$ yüzeyi gözönüne alınsın. Lineer bağımsız $\{\phi_u, \phi_v\}$ cümlesi, yüzeyin vektör alanlarının bir bazıdır. Yüzeyin birim normali

$$\varpi = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$$

ile belirlidir. Yüzeyin I . formunu, yani metriğini hesaplamadan önce bazı eşitlikler verilecektir.

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

olup

$$\langle \varpi, \varpi \rangle_L = \langle \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}, \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} \rangle_L$$

E, F, G ve

$$\begin{aligned}\|u \wedge v\|_L^2 &= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle_L \\ &= -\langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L + (\langle u, v \rangle_L)^2\end{aligned}$$

Lagrange özdeşliği'nden

$$\begin{aligned}\langle \varpi, \varpi \rangle_L &= (\langle \phi_u, \phi_v \rangle_L)^2 - \langle \phi_u, \phi_u \rangle_L \langle \phi_v, \phi_v \rangle_L \\ \langle \varpi, \varpi \rangle_L &= F^2 - EG\end{aligned}$$

elde edilir. Yüzeyin I . temel formunu hesaplamak için, φ nin tam diferensiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$

ile belirlidir. Buradan

$$\begin{aligned}
I &= (ds)^2 = \langle d\varphi, d\varphi \rangle \\
&= \langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial u} \rangle (du)^2 + 2 \langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v} \rangle dudv + \langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial v} \rangle (dv)^2 \\
&= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G$$

ve $\lambda = \frac{du}{dv}$, $I' = \frac{(ds)^2}{(dv)^2}$ olmak üzere

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$$

elde edilir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki $I = (ds)^2$ indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya semi-tanımlı olup olmadığını incelemek ile, $I = (dv)^2 I'$ olduğundan, I' yü incelemek aynıdır, [24].

Tanım 3.1.3.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\forall p \in \overline{M}$ ve $\forall v_p, w_p \in T_p \overline{M}$ için $\langle v_p, w_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0$ önermesi sağlanıyorsa $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir non-dejenere yüzey denir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ile belirlidir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \neq 0 \text{ veya } EG - F^2 \neq 0$$

olmasıdır, [24].

Tanım 3.1.4.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir space-like yüzey denir, [3].

Tanım 3.1.5.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir time-like yüzey denir, [3].

Tanım 3.1.6.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$K(p) = \varepsilon \det S_p$$

ifadesine, $\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği ve $K : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Burada, $\varepsilon = \langle \varpi, \varpi \rangle = \pm 1$ ile belirlidir. ϖ , $\overline{M}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır. $\overline{M}$ yüzeyi space-like ise $\varepsilon = \langle \varpi, \varpi \rangle = -1$ dir. Bu durumda, $K = -\det S$ dir. $\overline{M}$ yüzeyi time-like ise $\varepsilon = \langle \varpi, \varpi \rangle = 1$ dir. Bu durumda, $K = \det S$ dir, [24].

Tanım 3.1.7.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$H(p) = 2^{-1} \varepsilon . iz S_p$$

ifadesine, $\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği ve $H : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Burada, $\varepsilon = \langle \varpi, \varpi \rangle = \pm 1$

dir. $\varpi, \overline{M}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır. $\overline{M}$ yüzeyi space-like ise $\varepsilon = \langle \varpi, \varpi \rangle = -1$ dir. Bu durumda, $H = -2^{-1}\varepsilon.izS$ dir. $\overline{M}$ yüzeyi time-like ise $\varepsilon = \langle \varpi, \varpi \rangle = 1$ dir. Bu durumda, $H = 2^{-1}\varepsilon.izS$ dir. $H = 0$ yani $EN + GL - 2FM = 0$ ise bu yüzeye minimal yüzey denir, [24].

Teorem 3.1.8.

$x : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, M yüzeyinin spacelike bir immersiyonu olsun. x in Gauss ve ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= -\frac{\mathbf{eg} - \mathbf{f}^2}{EG - F^2} \\ \mathbf{H} &= -\frac{1}{2} \frac{G\mathbf{e} + E\mathbf{g} - 2F\mathbf{f}}{EG - F^2} \end{aligned}$$

olur ve (İmmersiyonun timelike olması durumunda formüllerde sadece işaret değişir), [21].

İspat. x spacelike bir immersiyon ve $X = X(u, v)$ yüzeyin lokal bir parametrisasyonu olsun. $\{X_u, X_v\}$ her noktada yüzeyin tanjant düzleminin lokal bir bazı olmak üzere, birinci temel form yüzeyin $T_P M$ tanjant düzlemi üzerinde tanımlı olan metriktir yani;

$$I_P = \langle \cdot, \cdot \rangle_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I_P(u, v) = \langle u, v \rangle_P$$

$B = \{X_u, X_v\}$ bazına göre I nın matrissel ifadesi $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ olsun.

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle$$

N yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere P noktasındaki ikinci temel form

$$\sigma_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sigma_P(u, v) = - \langle (dN)_P(u), v \rangle = \langle A(u), v \rangle$$

$B = \{X_u, X_v\}$ bazına göre σ nın matrissel ifadesi $\begin{pmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \mathbf{g} \end{pmatrix}$ olsun. Burada

$$\begin{aligned} - & \langle X_u, \varpi_u \rangle = \langle X_{uu}, \varpi \rangle = \mathbf{e} \\ - & \langle X_u, \varpi_v \rangle = - \langle X_v, \varpi_u \rangle = \langle X_{uv}, \varpi \rangle = \mathbf{f} \\ - & \langle X_v, \varpi_v \rangle = \langle X_{vv}, \varpi \rangle = \mathbf{g} \end{aligned}$$

Eğer $a, b \in T_P M$ ise

$$a^t \begin{pmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \mathbf{g} \end{pmatrix} b = a^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Ab$$

Böylece

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

olup yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= -\frac{\mathbf{e}\mathbf{g} - \mathbf{f}^2}{EG - F^2} \\ \mathbf{H} &= -\frac{1}{2} \frac{G\mathbf{e} + E\mathbf{g} - 2F\mathbf{f}}{EG - F^2} \end{aligned}$$

elde edilir, [21].

Teorem 3.1.9.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani;

$$\langle \varpi, \varpi \rangle < 0$$

olmasıdır, [24].

Teorem 3.1.10.

$\mathbb{R}_1^3$, 3–boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani;

$$\langle \varpi, \varpi \rangle > 0$$

olmasıdır, [24].

3.2. Minkowski Uzayında Kanal Yüzeyler

Kanal yüzeyini $P(s, \theta)$ ile gösterelim. Burada s , $L(s)$ merkez eğrisinin yay parametresidir. Kürelerin merkez eğrisi $L(s)$ ve yarıçap fonksiyonu $r(s)$ olmak üzere $q = P(s, \theta)$ noktaları için

$$\|P(s, \theta) - L(s)\| = r(s) \quad (3.2.1)$$

dir. $L(s)$ merkez eğrisinin eğriliği sıfırdan farklı olsun. Bu durumda eğrinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet çatısı tanımlıdır ve

$$P(s, \theta) - L(s) = \mathbf{a}(s, \theta)\mathbf{T}(s) + \mathbf{b}(s, \theta)\mathbf{N}(s) + \mathbf{c}(s, \theta)\mathbf{B}(s) \quad (3.2.2)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ fonksiyonları, $L(s)$ merkez eğrisinin tanımlı olduğu aralıkta diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Kanal yüzeyi ve küreler çemberler boyunca birbirlerine teğet oldukları için, bu noktalardaki teğet düzlemleri aynıdır. Kürenin yer vektörü normal vektörüne eşit olduğundan, kanal yüzeyinin normali $\boldsymbol{\varpi}(s, \theta) = P(s, \theta) - L(s)$ olur. Böylece

$$\langle P(s, \theta) - L(s), P_s \rangle = 0 \quad (3.2.3)$$

dır. $P(s, \theta)$ nın s değişkenine göre kısmi türevi alınır

$$P_s = \mathbf{T} + \mathbf{a}_s \mathbf{T} + \mathbf{a} \mathbf{T}' + \mathbf{b}_s \mathbf{N} + \mathbf{b} \mathbf{N}' + \mathbf{c}_s \mathbf{B} + \mathbf{c} \mathbf{B}'$$

olur. Frenet formüllerinden

$$P_s = (1 + \mathbf{a}_s - \mathbf{b}\kappa)\mathbf{T} + (\mathbf{a}\kappa + \mathbf{c}\tau + \mathbf{b}_s)\mathbf{N} + (\mathbf{c}_s + \mathbf{b}\tau)\mathbf{B}$$

elde edilir. $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1, \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle P(s, \theta) - L(s), P_s \rangle &= \mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{a}_s - \mathbf{a}\mathbf{b}\kappa + \mathbf{a}\mathbf{b}\kappa + \mathbf{b}\mathbf{b}_s - \mathbf{b}\mathbf{c}\tau + \mathbf{b}\mathbf{c}\tau - \mathbf{c}\mathbf{c}_s = 0, \\ \mathbf{a}\mathbf{a}_s + \mathbf{b}\mathbf{b}_s - \mathbf{c}\mathbf{c}_s &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\|P(s, \theta) - L(s)\| = r(s)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2 &= r^2, \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{b}_s - \mathfrak{c}\mathfrak{c}_s &= rr' \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= -rr' \\ \mathfrak{b} &= \pm r\sqrt{1 - r'^2} \cosh \theta \\ \mathfrak{c} &= \pm r\sqrt{1 - r'^2} \sinh \theta \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla kanal yüzeyinin parametrizasyonu

$$P(s, \theta) = L(s) - r(s)r'(s)\mathbf{T}(s) \pm r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}(\cosh \theta \mathbf{N}(s) + \sinh \theta \mathbf{B}(s)) \quad (3.2.4)$$

olarak elde edilir, [14].

Öte yandan,

$L(s)$ merkez eğrisi asli normalleri timelike olan bir spacelike eğri olsun. Bu durumda kanal yüzeyinin parametrizasyonu,

$$P(s, \theta) = L(s) - r(s)r'(s)\mathbf{T}(s) \pm r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}(\sinh \theta \mathbf{N}(s) + \cosh \theta \mathbf{B}(s)) \quad (3.2.5)$$

denklemleriyle verilir, [16].

$L(s)$ merkez eğrisi timelike eğri olsun. Bu durumda kanal yüzeyinin parametrizasyonu,

$$P(s, \theta) = L(s) + r(s)r'(s)\mathbf{T}(s) \pm r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}(\cos \theta \mathbf{N}(s) + \sin \theta \mathbf{B}(s)) \quad (3.2.6)$$

denklemleriyle verilir, [15].

3.3. Minkowski Uzayında Yüzeylerin Harmonik Evolütleri



doğru üzerindeki noktaları ele alalım. Buradan bu noktalar arasında

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD}|} = -\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CD}|} \quad (3.3.1)$$

eşitliği varsa A, B harmonik eşlenikleri B, D dir, [22].

Yukarıdaki tanımdan faydalanarak bir yüzeyin harmonik evolütünü (focal set) tanımlayalım; bir S yüzeyini gözönüne alalım. Buradan

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

olmak üzere S yüzeyinin merkez eğrilikleri(odak noktaları) p_i ,

$$p_i(u_1, u_2) = f(u_1, u_2) + r_i(u_1, u_2)\varpi(u_1, u_2), \quad i = 1, 2, \quad (3.3.2)$$

dir. Burada $r_i = \frac{1}{\kappa_i}$ eğrilik yarıçapları, κ_i ler asli eğrilikler ve $\varpi(u_1, u_2)$ ise p de birim normal vektördür. Doğrusal harmonik eşlenik üç nokta p, p_1, p_2 ve bir nokta $\bar{p}$ olmak üzere çifte oran

$$(p_1, p_2; p, \bar{p}) = \frac{|\overrightarrow{p_1 p}|}{|\overrightarrow{p_2 p}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{p_2 \bar{p}}|}{|\overrightarrow{p_1 \bar{p}}|} = -1 \quad (3.3.3)$$

dir. ϖ tarafından belirlenen doğru üzerinde noktaların koordinatları

$$p = 0, p_1 = r_1, p_2 = r_2, \bar{p} = \lambda \quad (3.3.4)$$

ile verilirse

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2 - \lambda}{r_1 - \lambda} = -1 \quad (3.3.5)$$

ve buradan

$$\lambda = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (3.3.6)$$

olur. Ayrıca $r_1 = \frac{1}{\kappa_1}, r_2 = \frac{1}{\kappa_2}$ olduğundan ve Minkowski uzayında ortalama eğriliğin tanımından

$$\lambda = \frac{\epsilon}{\mathbf{H}} \quad (3.3.7)$$

olur. Böylece bir yüzeyin harmonik evolütünün parametrizasyonu

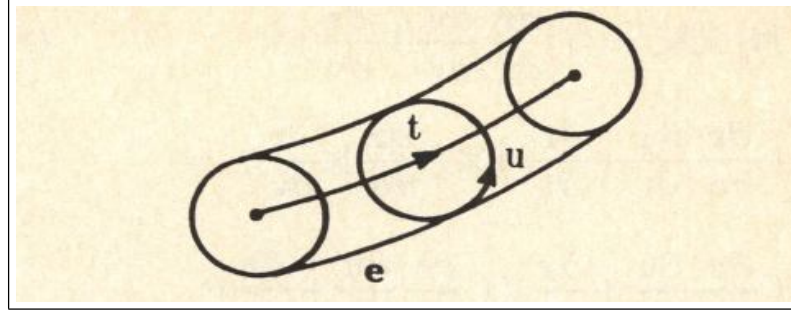
$$\bar{f}(u_1, u_2) = f(u_1, u_2) + \frac{\epsilon}{\mathbf{H}(u_1, u_2)} \boldsymbol{\varpi}(u_1, u_2) \quad (3.3.8)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\epsilon = \langle \boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\varpi} \rangle \in \{-1, 1\}$ dir, [27].

4. BÖLÜM

Bu bölümde hareketli merkez eğrileriyle 5-eksenli kanal ve tüp yüzeylerinin I. ve II. temel formunun katsayıları, Gauss ve ortalama eğrilikleri bulundu. Elde edilen 5-eksenli yüzeylerin paralel yüzeyleri oluşturuldu. Daha sonra ise 5-eksenli kanal ve tüp yüzeylerinin harmonik evolütleri incelendi. Son olarak bulunan 5-eksenli yeni yüzeylerin elastik olmayan akışları oluşturuldu.

$\alpha(t)$ eğrisinin bir parametrelî eğri ailesi $\alpha(u, t)$ olsun. Burada u merkez eğrisinin parametresini, t ise yörünge parametresini ifade etmektedir. Şekil olarak



Şekil 4.1 Bir parametrelî eğri ailesi, [31].

gösterilebilir. e ile bu eğri ailesinin teğeti ifade edilmektedir.

Bu şekilde oluşturulan iki parametrelî küre ailesi

$$\sum(t, u) : \sum(P - \mathbf{m}(t, u))^2 - r(t)^2 = 0$$

eşitliğiyle tanımlanır. Burada $\sum(t, u)$ iki parametrelî küre ailesini, P ise küre yüzeyi üzerinde bir noktayı göstermektedir. Ayrıca $\mathbf{m}(t, u)$ kürelerin merkez eğrisini, $r(t)$ de yarıçap fonksiyonunu göstermektedir.

$\sum(t, u)$ nin sırasıyla t ve u parametrelerine göre kısmî türevlerini

$$\begin{aligned} \sum_t(t, u) & : \sum(P - \mathbf{m}(t, u))\mathbf{m}_t + rr_t = 0, \\ \sum_u(t, u) & : \sum(P - \mathbf{m}(t, u))\mathbf{m}_u = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleriyle verilir. Eğer r_t sıfır olursa yüzey tüp (boru) yüzeyi olur. $\mathbf{m}_t$ ve $\mathbf{m}_u$ düzlemleri yüzeyin normalleridir.

Öte yandan

$$K(t, u) = \sum(t, u) \cap \sum_t(t, u)$$

karakteristik çember

$$S(t, u) = \sum(t, u) \cap \sum_u(t, u)$$

büyük çemberi göstermektedir. Karakteristik çember ve büyük çemberin kesişimi zarf yüzeyi üzerindeki noktaları oluşturur.

Hareketli kürelerin merkezleri $\mathbf{m}(t, u)$, küre silindir yüzeyi üzerinde 5-eksenli hareket ediyorsa o zaman

$$\mathbf{m}(t, u) = \mathbf{F}(u) + t\mathbf{n}(u)$$

ile verilir. Daha sonra koni yüzeyi ile kürenin 5-eksenli hareketinde merkez eğrisi

$$\mathbf{V}(u) = \mathbf{F}(u) - \frac{r_b}{\tan \alpha} \mathbf{n}(u)$$

dir, burada r_b alt taban yarıçapıdır. Dolayısıyla

$$\mathbf{m}(t, u) = \mathbf{V}(u) + t\mathbf{n}(u)$$

ile verilir. Ayrıca toroidal yüzey ile kürenin 5-eksenli hareketinde merkez eğrisi

$$\mathbf{m}(t, u) = \mathbf{F}(u) + R \cos t \mathbf{d}(u) + R \sin t \mathbf{e}(u)$$

ile verilir.

Buradan genel olarak karakteristik çemberin yarıçapı $R(t, u)$ ve $C(t, u)$ çemberin merkezi

$$\begin{aligned} R(t, u) &= r(t) \frac{\sqrt{\|\mathbf{m}_t(t, u)\|^2 - r_t(t)^2}}{\|\mathbf{m}_t(t, u)\|}, \\ C(t, u) &= \mathbf{m}(t, u) - r(t)r_t(t) \frac{\|\mathbf{m}_t(t, u)\|}{\|\mathbf{m}_t(t, u)\|^2} \end{aligned}$$

denklemleriyle verilir.

Böylece 5-eksenli tüp yüzey

$$K(t, u, \theta) = C(t, u) + R(t, u)(\cos \theta \mathbf{M}(t, u) + \sin \theta \mathbf{B}(t, u))$$

dir, burada $\theta \in [0, 2\pi]$, $R(t, u) = r$, $C(t, u) = \mathbf{m}(t, u)$ dir.

Ayrıca $\mathbf{m}(t, u)$ eğrisinin birim teğet, normal ve binormal vektörleri sırasıyla

$$\mathbf{T}(t, u) = \frac{\frac{\partial \mathbf{m}(t, u)}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{m}(t, u)}{\partial t} \right\|}, \mathbf{M}(t, u) = \frac{\frac{\partial \mathbf{m}(t, u)}{\partial t} \times \frac{\partial^2 \mathbf{m}(t, u)}{\partial t^2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{m}(t, u)}{\partial t} \times \frac{\partial^2 \mathbf{m}(t, u)}{\partial t^2} \right\|}, \mathbf{B}(t, u) = \mathbf{T}(t, u) \times \mathbf{M}(t, u)$$

ile verilir, [1].

4.1. Minkowski Uzayında 5-Eksenli Kanal Yüzeyler

İlk olarak timelike eğrinin teğetleri yardımıyla 5-eksenli kanal yüzeyi oluşturulacaktır.

Teorem 4.1.1.

Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(s, t, \theta) = & \gamma + [t + \varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \mathbf{T} \\ & + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \mathbf{N} \\ & \mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\xi(s) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}$ dir.

İspat. $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ yüzeyinin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında birim hızlı timelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^m &= \mathbf{T} + (t\kappa)\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(t\kappa^2)\mathbf{T} + (\kappa + t\kappa')\mathbf{N} + (t\kappa\tau)\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= -\frac{1}{\kappa^m} [(t^2\kappa^2\tau)\mathbf{T} + (t\kappa\tau)\mathbf{N} + (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')\mathbf{B}] \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

elde edilir.

(3.2.6) ve (4.1.2) sistemi beraber ele alınırsa $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ eğrisiyle, $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\mathfrak{P}(s, t, \theta) = \gamma + (t + rr')\mathbf{T}^m \mp r\sqrt{1 + r'^2}(\cos \theta \mathbf{N}^m + \sin \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.3)$$

olarak bulunur.

(4.1.3) denkleminde $\mathbf{m}$ eğrisinin Frenet denklemleri yazılırsa $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(s, t, \theta) = & \gamma + [(t + rr' \mp r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} t\kappa^2 (\cos \theta - \sin \theta t\tau)]\mathbf{T} \\ & + [t^2\kappa + rr't\kappa \mp r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} (\cos \theta(\kappa + t\kappa') - \sin \theta t\kappa\tau)]\mathbf{N} \\ & \mp [r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} (\cos \theta(t\kappa\tau) - \sin \theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]\mathbf{B}\end{aligned}\quad (4.1.4)$$

elde edilir.

(4.2.3) eşitliklerinde $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\xi(s) = r(s)\sqrt{1+r'^2(s)}$ yazılırsa $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(s, t, \theta) = & \gamma + [t + \varphi \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t\tau)]\mathbf{T} \\ & + [t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(\kappa + t\kappa') - \sin \theta t\kappa\tau)]\mathbf{N} \\ & \mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(t\kappa\tau) - \sin \theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]\mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 4.1.2.

(4.2.4) ile verilen $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}\mathbf{K} = & \frac{1}{\Gamma} [[-(\mu'_1 + \mu_2\kappa) [\varphi \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t\tau)] \\ & + (\mu_1\kappa + \mu'_2 - \mu_3\tau) [t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(\kappa + t\kappa') - \sin \theta t\kappa\tau)] \\ & + (\mu'_3 + \tau\mu_2) [\mp (\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(t\kappa\tau) - \sin \theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))]] [-(\lambda_1)_\theta [\varphi \\ & \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t\tau)] + (\lambda_2)_\theta [t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(\kappa + t\kappa') \\ & - \sin \theta t\kappa\tau)] + (\lambda_3)_\theta [\mp (\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(t\kappa\tau) - \sin \theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))]] \\ & - [-(\mu_1)_\theta [\varphi \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t\tau)] + (\mu_2)_\theta [t^2\kappa + \varphi t\kappa \\ & \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(\kappa + t\kappa') - \sin \theta t\kappa\tau)] + (\mu_3)_\theta [\mp (\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta(t\kappa\tau) - \sin \theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))]]^2]\end{aligned}\quad (4.1.5)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 1 + \varphi' \mp \left(\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}\right)' (\cos \theta - \sin \theta t \tau) \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (-\sin \theta t \tau') + t^2 \kappa^2 + \varphi t \kappa^2 \\
&\mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau), \\
\mu_2 &= t \kappa + \varphi \kappa \mp \frac{\xi t \kappa^3}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau) t^2 \kappa' + \varphi' t \kappa + \varphi t \kappa' \mp \left(\frac{\xi}{\kappa^m}\right)' (\cos \theta (\kappa + t \kappa') \\
&- \sin \theta t \kappa \tau) \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa' + t \kappa'') - \sin \theta t \kappa' \tau - \sin \theta t \kappa \tau') \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m} (-\cos \theta (t \kappa \tau) \\
&+ \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')), \\
\mu_3 &= \mp \left[\left(\frac{\xi}{\kappa^m}\right)' (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')) + \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau)'\right. \\
&\left. - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')')\right] + t^2 \kappa \tau + \varphi t \tau \kappa \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)], \\
\lambda_1 &= \mp \left[\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (-\sin \theta - \cos \theta t \tau)\right], \\
\lambda_2 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m} (-\sin \theta (\kappa + t \kappa') - \cos \theta t \kappa \tau)\right], \\
\lambda_3 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m} (-\sin \theta (t \kappa \tau) - \cos \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\Gamma = (-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (-\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3)^2$$

dir.

İspat. (4.2.4) ile verilen $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin I. ve II. temel formunun katsayılarını bulalım. Öncelikle $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ yüzeyinin s ve θ ya göre kısmi

türevleri alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_s(s, t, \theta) = & [1 + \varphi' \mp (\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m})'(\cos \theta - \sin \theta t \tau) \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(-\sin \theta t \tau')] \\
& + t^2 \kappa^2 + \varphi t \kappa^2 \mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \mathbf{T} \\
& + [t \kappa + \varphi \kappa \mp \frac{\xi t \kappa^3}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau) t^2 \kappa' + \varphi' t \kappa + \varphi t \kappa' \mp (\frac{\xi}{\kappa^m})'(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau) \\
& \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa' + t \kappa'') - \sin \theta t \kappa' \tau - \sin \theta t \kappa \tau')] \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}(-\cos \theta(t \kappa \tau) + \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] \mathbf{N} \\
& + [\mp (\frac{\xi}{\kappa^m})'(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')) + \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau)' - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))'] \\
& + t^2 \kappa \tau + \varphi t \tau \kappa \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_\theta(s, t, \theta) = & \mp [\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(-\sin \theta - \cos \theta t \tau)] \mathbf{T} \mp [\frac{\xi}{\kappa^m}(-\sin \theta(\kappa + t \kappa') - \cos \theta t \kappa \tau)] \mathbf{N} \\
& \mp [\frac{\xi}{\kappa^m}(-\sin \theta(t \kappa \tau) - \cos \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Hesaplamaların daha sade ve kısa olması amacıyla

$$\begin{aligned}
\mu_1 = & 1 + \varphi' \mp (\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m})'(\cos \theta - \sin \theta t \tau) \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(-\sin \theta t \tau') + t^2 \kappa^2 + \varphi t \kappa^2 \\
& \mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau), \\
\mu_2 = & t \kappa + \varphi \kappa \mp \frac{\xi t \kappa^3}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau) t^2 \kappa' + \varphi' t \kappa + \varphi t \kappa' \mp (\frac{\xi}{\kappa^m})'(\cos \theta(\kappa + t \kappa') \\
& - \sin \theta t \kappa \tau) \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa' + t \kappa'') - \sin \theta t \kappa' \tau - \sin \theta t \kappa \tau')] \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}(-\cos \theta(t \kappa \tau) \\
& + \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')), \\
\mu_3 = & \mp [(\frac{\xi}{\kappa^m})'(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')) + \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau)' \\
& - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] + t^2 \kappa \tau + \varphi t \tau \kappa \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)]
\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\mathfrak{P}_s(s, t, \theta) = \mu_1 \mathbf{T} + \mu_2 \mathbf{N} + \mu_3 \mathbf{B}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mp \left[\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (-\sin \theta - \cos \theta t \tau) \right], \\ \lambda_2 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m} (-\sin \theta (\kappa + t \kappa') - \cos \theta t \kappa \tau) \right], \\ \lambda_3 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m} (-\sin \theta (t \kappa \tau) - \cos \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')) \right]\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\mathfrak{P}_\theta(s, t, \theta) = \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{N} + \lambda_3 \mathbf{B}$$

bulunur. Buradan $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin I. temel form katsayıları

$$\begin{aligned}E &= -\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2, \\ F &= -\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3, \\ G &= -\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

olarak elde edilir.

$\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin normal vektörü

$$\boldsymbol{\varpi} = \mathfrak{P}(s, t, \theta) - \mathbf{m}(s, t)\tag{4.1.7}$$

dir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varpi}(s, t, \theta) &= [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \mathbf{T} \\ &+ [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \mathbf{N} \\ &\mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] \mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.1.8}$$

elde edilir.

$\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin II. temel formun katsayılarını hesaplayalım.

Öncelikle

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{ss}(s, t, \theta) &= (\mu_1' + \mu_2 \kappa) \mathbf{T} + (\mu_1 \kappa + \mu_2' - \mu_3 \tau) \mathbf{N} + (\mu_3' + \tau \mu_2) \mathbf{B}, \\ \mathfrak{P}_{s\theta}(s, t, \theta) &= (\mu_1)_\theta \mathbf{T} + (\mu_2)_\theta \mathbf{N} + (\mu_3)_\theta \mathbf{B}, \\ \mathfrak{P}_{\theta\theta}(s, t, \theta) &= (\lambda_1)_\theta \mathbf{T} + (\lambda_2)_\theta \mathbf{N} + (\lambda_3)_\theta \mathbf{B}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{e} = & -(\mu'_1 + \mu_2\kappa)[\varphi \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m}(\cos\theta - \sin\theta t\tau)] \\ & +(\mu_1\kappa + \mu'_2 - \mu_3\tau)[t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa + t\kappa') - \sin\theta t\kappa\tau)] \\ & +(\mu'_3 + \tau\mu_2)[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f} = & -(\mu_1)_\theta[\varphi \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m}(\cos\theta - \sin\theta t\tau)] \\ & +(\mu_2)_\theta[t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa + t\kappa') - \sin\theta t\kappa\tau)] \\ & +(\mu_3)_\theta[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g} = & -(\lambda_1)_\theta[\varphi \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m}(\cos\theta - \sin\theta t\tau)] \\ & +(\lambda_2)_\theta[t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa + t\kappa') - \sin\theta t\kappa\tau)] \\ & +(\lambda_3)_\theta[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))]\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}\mathbf{K} = & \frac{1}{\Gamma} [[-(\mu'_1 + \mu_2\kappa)[\varphi \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m}(\cos\theta - \sin\theta t\tau)] \\ & +(\mu_1\kappa + \mu'_2 - \mu_3\tau)[t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa + t\kappa') - \sin\theta t\kappa\tau)] \\ & +(\mu'_3 + \tau\mu_2)[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))]][-(\lambda_1)_\theta[\varphi \\ & \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m}(\cos\theta - \sin\theta t\tau)] + (\lambda_2)_\theta[t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa + t\kappa') - \sin\theta t\kappa\tau)] \\ & + (\lambda_3)_\theta[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))] - [-(\mu_1)_\theta[\varphi \\ & \mp \frac{\xi t\kappa^2}{\kappa^m}(\cos\theta - \sin\theta t\tau)] + (\mu_2)_\theta[t^2\kappa + \varphi t\kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa + t\kappa') - \sin\theta t\kappa\tau)] \\ & + (\mu_3)_\theta[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))]^2]\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\Gamma = (-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (-\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \mu_3\lambda_3)^2$$

dir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1.3.

(4.1.1) ile verilen $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin ortalama eğriligi

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{1}{2\Gamma} [(-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(-(\lambda_1)_\theta [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \\ & + (\lambda_2)_\theta [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \\ & + (\lambda_3)_\theta [\mp (\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))))] \\ & - 2[-\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3](-(\mu_1)_\theta [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \\ & + (\mu_2)_\theta [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \\ & + (\mu_3)_\theta [\mp (\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))))] \\ & + [-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2][-(\mu'_1 + \mu_2 \kappa) [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \\ & + (\mu_1 \kappa + \mu'_2 - \mu_3 \tau) [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \\ & + (\mu'_3 + \tau \mu_2) [\mp (\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))))] \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 1 + \varphi' \mp \left(\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}\right)' (\cos \theta - \sin \theta t \tau) \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (-\sin \theta t \tau') + t^2 \kappa^2 + \varphi t \kappa^2 \\
&\mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau), \\
\mu_2 &= t \kappa + \varphi \kappa \mp \frac{\xi t \kappa^3}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau) t^2 \kappa' + \varphi' t \kappa + \varphi t \kappa' \\
&\mp \left(\frac{\xi}{\kappa^m}\right)' (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau) \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa' + t \kappa'') \\
&- \sin \theta t \kappa' \tau - \sin \theta t \kappa \tau') \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m} (-\cos \theta (t \kappa \tau) + \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')), \\
\mu_3 &= \mp \left[\left(\frac{\xi}{\kappa^m}\right)' (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')) + \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau)' \right. \\
&- \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')') \left. \right] + t^2 \kappa \tau + \varphi t \tau \kappa \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)], \\
\lambda_1 &= \mp \left[\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (-\sin \theta - \cos \theta t \tau)\right], \\
\lambda_2 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m} (-\sin \theta (\kappa + t \kappa') - \cos \theta t \kappa \tau)\right], \\
\lambda_3 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m} (-\sin \theta (t \kappa \tau) - \cos \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\Gamma = (-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (-\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3)^2,$$

dir.

Şimdi 5-eksenli kanal yüzeyinin özel hali olan 5-eksenli tüp yüzeyini inceleyelim.

Teorem 4.1.4.

Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s, t, \theta) &= \gamma + [t \mp r (\cos \theta \frac{t \kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m})] \mathbf{T} \\
&+ [t^2 \kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t \kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t \kappa \tau}{\kappa^m})] \mathbf{N} \\
&\mp r [\cos \theta \frac{t \kappa \tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')] \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

dir.

İspat. (4.1.3) denkleminde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\mathfrak{L}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{T}^m \mp r(\cos \theta \mathbf{N}^m + \sin \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.11)$$

elde edilir.

(4.1.2) denklem sistemi (4.1.11) da yazılırsa $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(s, t, \theta) &= \gamma + [t \mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})]\mathbf{T} \\ &+ [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})]\mathbf{N} \\ &\mp r[\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')]\mathbf{B} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5.

(4.1.10) ile verilen $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{\Lambda} [[-(\eta'_1 + \eta_2\kappa)[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] + (\eta_1\kappa + \eta'_2 - \eta_3\tau)[t^2\kappa \\ &\mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\eta_2\tau + \eta'_3)(\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\ &- \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')))] [- (\rho_1)_\theta [\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\ &+ (\rho_2)_\theta [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\rho_3)_\theta [\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\ &- \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))] - [-(\eta_1)_\theta [\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\ &+ (\eta_2)_\theta [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\eta_3)_\theta [\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\ &- \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]]^2] \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\Lambda &= (-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) - (-\eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3)^2, \\
\rho_1 &= \mp r[-\sin\theta\frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m}], \\
\rho_2 &= \mp r[-\sin\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}], \\
\rho_3 &= \mp r[-\sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')], \\
\eta_1 &= 1 \mp (r(\cos\theta(\frac{t\kappa^2}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})') + t^2\kappa^2 \mp (r\kappa(\cos\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}))), \\
\eta_2 &= t\kappa \mp (r\kappa(\cos\theta\frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})) + (t^2\kappa' \mp r(\cos\theta(\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})')) \\
&\quad \mp (r(-\cos\theta\frac{t\kappa\tau^2}{\kappa^m} + \sin\theta\frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3\tau - \kappa\tau - t\tau\kappa'))), \\
\eta_3 &= t^2\kappa\tau \mp (r\tau(\cos\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})) \mp (r(\cos\theta(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'}{\kappa^m})'))
\end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.1.10) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin I. ve II. temel formunun katsayılarını bulalım. Öncelikle $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ yüzeyinin s ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri alınıp gerekli işlem ve düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_s(s, t, \theta) &= [1 \mp (r(\cos\theta(\frac{t\kappa^2}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})')) + t^2\kappa^2 \mp (r\kappa(\cos\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}))]\mathbf{T} \\
&+ [t\kappa \mp (r\kappa(\cos\theta\frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})) + (t^2\kappa' \mp r(\cos\theta(\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})')) \\
&\mp (r(-\cos\theta\frac{t\kappa\tau^2}{\kappa^m} + \sin\theta\frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3\tau - \kappa\tau - t\tau\kappa')))]\mathbf{N} \\
&+ [t^2\kappa\tau \mp (r\tau(\cos\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})) \mp (r(\cos\theta(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'}{\kappa^m})'))]\mathbf{B}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\theta(s, t, \theta) &= \mp r[-\sin\theta\frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m}]\mathbf{T} \\
&\mp r[-\sin\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}]\mathbf{N} \\
&\mp r[-\sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')]\mathbf{B}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Hesaplamaları daha kısa yazmak amacıyla

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 1 \mp (r(\cos \theta (\frac{t\kappa^2}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})')) + t^2\kappa^2 \mp (r\kappa(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})), \\ \eta_2 &= t\kappa \mp (r\kappa(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})) + (t^2\kappa' \mp r(\cos \theta (\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})')) \\ &\quad \mp (r(-\cos \theta \frac{t\kappa\tau^2}{\kappa^m} + \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3\tau - \kappa\tau - t\tau\kappa')), \\ \eta_3 &= t^2\kappa\tau \mp (r\tau(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})) \mp (r(\cos \theta (\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'}{\kappa^m})'))\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\mathfrak{L}_s(s, t, \theta) = \eta_1 \mathbf{T} + \eta_2 \mathbf{N} + \eta_3 \mathbf{B}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \mp r[-\sin \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m}], \\ \rho_2 &= \mp r[-\sin \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}], \\ \rho_3 &= \mp r[-\sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')]\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\mathfrak{L}_\theta(s, t, \theta) = \rho_1 \mathbf{T} + \rho_2 \mathbf{N} + \rho_3 \mathbf{B}$$

şeklinde elde edilir.

Buradan $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin I. temel formunun katsayılarını hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}E &= -\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2, \\ F &= -\eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3, \\ G &= -\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2\end{aligned}\tag{4.1.13}$$

ifadeleri elde edilir.

$\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin normal vektörü

$$\boldsymbol{\varpi}(s, t, \theta) = P(s, t, \theta) - \mathbf{m}(s, t)\tag{4.1.14}$$

dir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varpi}(s, t, \theta) = & \mp [r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})]\mathbf{T} \\
& + [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})]\mathbf{N} \\
& \mp r[\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')]\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

elde edilir.

$\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin II. temel formun katsayılarını hesaplayalım.

Öncelikle

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{ss}(s, t, \theta) &= (\eta'_1 + \eta_2\kappa)\mathbf{T} + (\eta_1\kappa + \eta'_2 - \eta_3\tau)\mathbf{N} + (\eta_2\tau + \eta'_3)\mathbf{B}, \\
\mathfrak{L}_{s\theta}(s, t, \theta) &= (\eta_1)_\theta\mathbf{T} + (\eta_2)_\theta\mathbf{N} + (\eta_3)_\theta\mathbf{B}, \\
\mathfrak{L}_{\theta\theta}(s, t, \theta) &= (\rho_1)_\theta\mathbf{T} + (\rho_2)_\theta\mathbf{N} + (\rho_3)_\theta\mathbf{B}
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Buradan $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ katsayıları

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} = & -(\eta'_1 + \eta_2\kappa)[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\
& + (\eta_1\kappa + \eta'_2 - \eta_3\tau)[t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] \\
& + (\eta_2\tau + \eta'_3)(\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} = & -(\eta_1)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\
& + (\eta_2)_\theta[t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] \\
& + (\eta_3)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} = & -(\rho_1)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\
& + (\rho_2)_\theta[t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] \\
& + (\rho_3)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Buradan $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \frac{1}{\Lambda} [[- (\eta'_1 + \eta_2 \kappa) [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m})] + (\eta_1 \kappa + \eta'_2 - \eta_3 \tau) [t^2 \kappa \\ & \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m})] + (\eta_2 \tau + \eta'_3) (\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m} \\ & - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2 \kappa^3 - \kappa - t\kappa')))] - (\rho_1)_\theta [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m})] \\ & + (\rho_2)_\theta [t^2 \kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m})] + (\rho_3)_\theta [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m} \\ & - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2 \kappa^3 - \kappa - t\kappa'))] - [- (\eta_1)_\theta [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m})] \\ & + (\eta_2)_\theta [t^2 \kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m})] + (\eta_3)_\theta [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m} \\ & - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2 \kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]]^2] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \Lambda &= (-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) - (-\eta_1 \rho_1 + \eta_2 \rho_2 + \eta_3 \rho_3)^2, \\ \rho_1 &= \mp r [-\sin \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m}], \\ \rho_2 &= \mp r [-\sin \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m}], \\ \rho_3 &= \mp r [-\sin \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2 \kappa^3 - \kappa - t\kappa')], \\ \eta_1 &= 1 \mp (r (\cos \theta (\frac{t\kappa^2}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m})') + t^2 \kappa^2 \mp (r \kappa (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m})), \\ \eta_2 &= t\kappa \mp (r \kappa (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m})) + (t^2 \kappa' \mp r (\cos \theta (\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t\kappa \tau}{\kappa^m})')) \\ &\quad \mp (r (-\cos \theta \frac{t\kappa \tau^2}{\kappa^m} + \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2 \kappa^3 \tau - \kappa \tau - t\tau \kappa'))), \\ \eta_3 &= t^2 \kappa \tau \mp (r \tau (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa \tau}{\kappa^m})) \mp (r (\cos \theta (\frac{t\kappa \tau}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t^2 \kappa^3 - \kappa - t\kappa'}{\kappa^m})')) \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.1.6.

(4.1.10) ile verilen $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} = & \frac{1}{2\Lambda} [(-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) [-(\rho_1)_\theta [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\
& + (\rho_2)_\theta [t^2\kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\rho_3)_\theta [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]] - 2 [(-\eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3) [-(\eta_1) \\
& [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] + (\eta_2)_\theta [t^2\kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\eta_3)_\theta \\
& [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]] + [\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2] [-(\eta_1' + \eta_2\kappa) \\
& [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})]
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\Lambda &= (-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) - (-\eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3)^2, \\
\rho_1 &= \mp r [-\sin \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m}], \\
\rho_2 &= \mp r [-\sin \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}], \\
\rho_3 &= \mp r [-\sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')], \\
\eta_1 &= 1 \mp (r (\cos \theta (\frac{t\kappa^2}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})') + t^2\kappa^2 \mp (r\kappa (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})), \\
\eta_2 &= t\kappa \mp (r\kappa (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})) + (t^2\kappa' \mp r (\cos \theta (\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})')) \\
&\quad \mp (r (-\cos \theta \frac{t\kappa\tau^2}{\kappa^m} + \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3\tau - \kappa\tau - t\tau\kappa'))), \\
\eta_3 &= t^2\kappa\tau \mp (r\tau (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})) \mp (r (\cos \theta (\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})' - \sin \theta (\frac{t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'}{\kappa^m})'))
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.1.7.

Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{K}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(s, t, \theta) &= \gamma + [(t - \varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} t \kappa^2 (-\cosh \theta - \sinh \theta t \tau))]\mathbf{T} \\ &+ [t^2 \kappa - \varphi t \kappa \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\cosh \theta (\kappa + t \kappa') + \sinh \theta t \kappa \tau)]\mathbf{N} \\ &\mp [\frac{\sigma}{\kappa^m} (\cosh \theta t \kappa \tau - \sinh \theta (t^2 \kappa^3 + \kappa + t \kappa'))]\mathbf{B}\end{aligned}\quad (4.1.17)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^m &= \mathbf{T} + (t\kappa)\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(-t\kappa^2)\mathbf{T} + (\kappa + t\kappa')\mathbf{N} + (t\kappa\tau)\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [-(t^2\kappa^2\tau)\mathbf{T} + (t\kappa\tau)\mathbf{N} + (t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa')\mathbf{B}]\end{aligned}\quad (4.1.18)$$

elde edilir.

(3.2.4) ve (4.1.18) sistemi beraber ele alınırsa $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ hareketli kürenin merkeziyle $\mathfrak{K}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\mathfrak{K}(s, t, \theta) = \gamma + (t - rr')\mathbf{T}^m \mp r\sqrt{1 - r'^2}(\cosh \theta \mathbf{N}^m + \sinh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.19)$$

olur. $\mathbf{m}(s, t)$ spacelike merkez eğri ailesinin Frenet denklemlerini kullanırsak 5-

eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(s, t, \theta) &= \gamma + [(t - rr' \mp r\sqrt{1 - r'^2} \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} (-\cosh \theta - \sinh \theta t\tau)]\mathbf{T} \\ &+ [t^2\kappa - rr't\kappa \mp \frac{r\sqrt{1 - r'^2}}{\kappa^m} (\cosh \theta(\kappa + t\kappa') + \sinh \theta t\kappa\tau)]\mathbf{N} \\ &\mp [\frac{r\sqrt{1 - r'^2}}{\kappa^m} (\cosh \theta t\kappa\tau - \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa'))]\mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Son eşitlikte $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(s, t, \theta) &= \gamma + [(t - \varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} t\kappa^2 (-\cosh \theta - \sinh \theta t\tau)]\mathbf{T} \\ &+ [t^2\kappa - \varphi t\kappa \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\cosh \theta(\kappa + t\kappa') + \sinh \theta t\kappa\tau)]\mathbf{N} \\ &\mp [\frac{\sigma}{\kappa^m} (\cosh \theta t\kappa\tau - \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa'))]\mathbf{B}\end{aligned}$$

hareketli kürenin spacelike merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ olan 5-eksenli kanal yüzeyini bulunmuş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.8.

Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma(s) + t\mathbf{T}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{B}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(s, t, \theta) &= \gamma + [t \mp \frac{r}{\kappa^m} (-\cosh \theta t\kappa^2 - \sinh \theta(t^2\kappa^2\tau))]\mathbf{T} \\ &+ [t^2\kappa \mp \frac{r}{\kappa^m} (\cosh \theta\kappa + t\kappa') + \sinh \theta(t\kappa\tau)]\mathbf{N} \\ &\mp \frac{r}{\kappa^m} [(\cosh \theta(t\kappa\tau) + \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa'))]\mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

dir.

İspat. (4.1.19) eşitliğinde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $\mathfrak{B}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\mathfrak{B}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{T}^m \mp r(\cosh \theta\mathbf{N}^m + \sinh \theta\mathbf{B}^m) \tag{4.1.21}$$

elde edilir. Spacelike merkez eğrisi $\mathbf{m}(s, t)$ nin (4.1.18) Frenet denklemleri gözönüne alınırsa $\mathfrak{B}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(s, t, \theta) &= \gamma + (t \mp r(-\cosh \theta \frac{1}{\kappa^m} t \kappa^2 - \sinh \theta \frac{1}{\kappa^m} t^2 \kappa^2 \tau)) \mathbf{T} \\ &+ (t^2 \kappa \mp r(\cosh \theta \frac{\kappa + v \kappa'}{\kappa^m} + \sinh \theta \frac{t \kappa \tau}{\kappa^m})) \mathbf{N} \\ &\mp r(\cosh \theta \frac{t \kappa \tau}{\kappa^m} + \sinh \theta \frac{t^2 \kappa^3 + \kappa + t \kappa'}{\kappa^m}) \mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.9.

Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t \mathbf{T}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{D}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(s, t, \theta) &= \gamma + [(t + \varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} t \kappa^2 (\sinh \theta + \cosh \theta t \tau))] \mathbf{T} \\ &+ [t^2 \kappa + t \kappa \varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\sinh \theta (\kappa + t \kappa') + \cosh \theta t \kappa \tau))] \mathbf{N} \\ &\mp [\frac{\sigma}{\kappa^m} (\sinh \theta t \kappa \tau + \cosh \theta (-t^2 \kappa^3 + \kappa + t \kappa'))] \mathbf{B}\end{aligned} \quad (4.1.22)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t \mathbf{T}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa, $\mathbf{m}(s, t)$ eğrisinin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^m &= \mathbf{T} + (t \kappa) \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(t \kappa^2) \mathbf{T} + (\kappa + t \kappa') \mathbf{N} + (t \kappa \tau) \mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(t^2 \kappa^2 \tau) \mathbf{T} + (t \kappa \tau) \mathbf{N} + (-t^2 \kappa^3 + \kappa + t \kappa') \mathbf{B}]\end{aligned} \quad (4.1.23)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla spacelike $\mathbf{m}(s, t)$ eğri ailesi kullanılarak ve (3.2.5) denklemi gözönüne alınırsa $\mathfrak{R}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\mathfrak{R}(s, t, \theta) = \gamma + (t + rr')\mathbf{T}^m \mp r(s)\sqrt{1 - r'^2}(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.24)$$

olarak elde edilir. $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ yazılırsa

$$\mathfrak{R}(s, t, \theta) = \gamma + (t + \varphi)\mathbf{T}^m \mp \sigma(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.25)$$

olur.

(4.1.25) eşitliğinde (4.1.23) eşitlikleri yazılırsa $\mathfrak{R}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyini

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(s, t, \theta) = & \gamma + [(t + \varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} t \kappa^2 (\sinh \theta + \cosh \theta t \tau)]\mathbf{T} \\ & + [t^2 \kappa + t \kappa \varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\sinh \theta (\kappa + t \kappa') + \cosh \theta t \kappa \tau)]\mathbf{N} \\ & \mp [\frac{\sigma}{\kappa^m} (\sinh \theta t \kappa \tau + \cosh \theta (-t^2 \kappa^3 + \kappa + t \kappa'))]\mathbf{B} \end{aligned}$$

olarak edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.10.

Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{D}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(s, t, \theta) = & \gamma + (t \mp \frac{r}{\kappa^m} (t \kappa^2 \sinh \theta + t^2 \kappa^2 \tau \cosh \theta))\mathbf{T} \\ & + (t^2 \kappa \mp \frac{r}{\kappa^m} (\sinh \theta (\kappa + t \kappa') + t \kappa \tau \cosh \theta))\mathbf{N} \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m} (t \kappa \tau \sinh \theta + \cosh \theta (\kappa - t^2 \kappa^3 + t \kappa'))\mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

dir.

İspat. (4.1.24) eşitliğinde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $\mathfrak{D}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\mathfrak{D}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{T}^m \mp r(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.27)$$

olur.

(4.1.23) denklem sistemi (4.2.27) denkleminde yazılırsa $\mathfrak{D}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(s, t, \theta) &= \gamma + (t \mp \frac{r}{\kappa^m} (t\kappa^2 \sinh \theta + t^2 \kappa^2 \tau \cosh \theta)) \mathbf{T} \\ &+ (t^2 \kappa \mp \frac{r}{\kappa^m} (\sinh \theta (\kappa + t\kappa') + t\kappa \tau \cosh \theta)) \mathbf{N} \\ &\mp \frac{r}{\kappa^m} (t\kappa \tau \sinh \theta + \cosh \theta (\kappa - t^2 \kappa^3 + t\kappa')) \mathbf{B}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.11.

Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(s, t, \theta) &= \gamma + [(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m} \xi \sin \theta (\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \mathbf{T} \\ &+ (t \mp \frac{\xi}{\kappa^m} [(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta (\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]) \mathbf{N} \\ &+ [\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi}{\kappa^m} \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \mathbf{B}\end{aligned} \quad (4.1.28)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\xi(s) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında birim hızlı timelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^m &= (1 + t\kappa) \mathbf{T} + (t\tau) \mathbf{B}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(t\kappa') \mathbf{T} + (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) \mathbf{N} + (t\tau') \mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3] \mathbf{T} + \frac{1}{\kappa^m} [\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa] \mathbf{N} \\ &\quad + \frac{1}{\kappa^m} [\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa] \mathbf{B}\end{aligned} \quad (4.1.29)$$

olur. Dolayısıyla timelike $\mathbf{m}(s, t)$ eğri ailesinin (4.1.29) Frenet denklemleri ve (3.2.6) eşitliği kullanılarak $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\mathfrak{A}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} + rr'\mathbf{T}^m \mp r(s)\sqrt{1+r'^2}(\cos\theta\mathbf{N}^m + \sin\theta\mathbf{B}^m) \quad (4.1.30)$$

olur. (4.1.30) denkleminde $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\xi(s) = r(s)\sqrt{1+r'^2(s)}$ yazılırsa

$$\mathfrak{A}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} + \varphi\mathbf{T}^m \mp \xi(\cos\theta\mathbf{N}^m + \sin\theta\mathbf{B}^m) \quad (4.1.31)$$

olur.

(4.1.30) eşitliğinde (4.1.29) $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri yazılırsa $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(s, t, \theta) = & \gamma + [(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos\theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin\theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]\mathbf{T} \\ & + (t \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos\theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin\theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)])\mathbf{N} \\ & + [\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos\theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi}{\kappa^m}\sin\theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]\mathbf{B} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.12.

(4.1.28) ile verilen $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} = & \frac{1}{\Pi} [[-(\varrho'_1 + \varrho_2 \kappa) [(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m} \xi \sin \theta (\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& + (\varrho_1 \kappa + \varrho'_2 - \varrho_3 \tau) [\mp \frac{\xi}{\kappa^m} [(\cos \theta + t) (\kappa + t \kappa^2 - t \tau^2) + \sin \theta (\tau t^2 \kappa' - t \tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& + (\varrho'_3 + \tau \varrho_2) [\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} (\kappa + 2t \kappa^2 - t \tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]] [-(v_1)_\theta [(\varphi \\
& + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m} \xi \sin \theta (\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& + (v_2)_\theta [\mp \frac{\xi}{\kappa^m} [(\cos \theta + t) (\kappa + t \kappa^2 - t \tau^2) + \sin \theta (\tau t^2 \kappa' - t \tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& + (v_3)_\theta [\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} (\kappa + 2t \kappa^2 - t \tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]] \\
& - [-(\varrho_1)_\theta [(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m} \xi \sin \theta (\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& + (\varrho_2)_\theta [\mp \frac{\xi}{\kappa^m} [(\cos \theta + t) (\kappa + t \kappa^2 - t \tau^2) + \sin \theta (\tau t^2 \kappa' - t \tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& + (\varrho_3)_\theta [\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} (\kappa + 2t \kappa^2 - t \tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]]^2] \quad (4.1.32)
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\Pi = (-\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (-v_1 \varrho_1 + v_2 \varrho_2 + v_3 \varrho_3)^2,$$

dir.

İspat. (4.1.28) ile verilen $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin I. ve II. temel formunun katsayılarını bulalım. Öncelikle $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ yüzeyinin s ve θ ya göre kısmi

türevleri alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_s(s, t, \theta) = & (1 + [(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)]') \\
& \mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]\mathbf{T} \\
& + ([\kappa(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& \mp (\frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]') \\
& - [\varphi t \tau^2 \mp \frac{\tau}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \tau \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)])\mathbf{N} \\
& + ([\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]' \\
& \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)])\mathbf{B}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_\theta(s, t, \theta) = & \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3) - t\kappa' \sin \theta]\mathbf{T} \\
& \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa) - \sin \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)]\mathbf{N} \\
& \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa) - \sin \theta t\tau']\mathbf{B}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. İşlemlerin daha kısa ve sade olması için

$$\begin{aligned}
\varrho_1 = & (1 + [(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\sigma \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)]') \\
& \mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]), \\
\varrho_2 = & [\kappa(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& \mp (\frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]') \\
& - [\varphi t \tau^2 \mp \frac{\tau}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \tau \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]), \\
\varrho_3 = & [\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]' \\
& \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]
\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$\mathfrak{A}_s(s, t, \theta) = \varrho_1 \mathbf{T} + \varrho_2 \mathbf{N} + \varrho_3 \mathbf{B}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} v_1 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m} [\cos \theta (\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3) - t \kappa' \sin \theta], \\ v_2 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m} [\cos \theta (\tau t^2 \kappa' - t \tau' - t^2 \tau' \kappa) - \sin \theta (\kappa + t \kappa^2 - t \tau^2)], \\ v_3 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m} [\cos \theta (\kappa + 2t \kappa^2 - t \tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa) - \sin \theta t \tau'] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{A}_\theta(s, t, \theta) = v_1 \mathbf{T} + v_2 \mathbf{N} + v_3 \mathbf{B}$$

olur. I. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2, \\ F &= -\varrho_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + \varrho_3 v_3, \\ G &= -v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

şeklinde elde edilir.

$\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin normal vektörü

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varpi}(s, t, \theta) &= [(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m} \xi \sin \theta (\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \mathbf{T} \\ &\mp \frac{\xi}{\kappa^m} [(\cos \theta + t) (\kappa + t \kappa^2 - t \tau^2) + \sin \theta (\tau t^2 \kappa' - t \tau' - t^2 \tau' \kappa)] \mathbf{N} \\ &+ [\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m} (\xi \cos \theta + t) t \tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} (\kappa + 2t \kappa^2 - t \tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

olarak bulunur.

$\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin II. temel formun katsayılarını hesaplayalım.

Öncelikle

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{ss}(s, t, \theta) &= (\varrho_1' + \varrho_2 \kappa) \mathbf{T} + (\varrho_1 \kappa + \varrho_2' - \varrho_3 \tau) \mathbf{N} + (\varrho_3' + \tau \varrho_2) \mathbf{B}, \\ \mathfrak{A}_{s\theta}(s, t, \theta) &= (\varrho_1)_\theta \mathbf{T} + (\varrho_2)_\theta \mathbf{N} + (\varrho_3)_\theta \mathbf{B}, \\ \mathfrak{A}_{\theta\theta}(s, t, \theta) &= (v_1)_\theta \mathbf{T} + (v_2)_\theta \mathbf{N} + (v_3)_\theta \mathbf{B} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ katsayıları

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} = & -(\varrho'_1 + \varrho_2 \kappa)[(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& +(\varrho_1 \kappa + \varrho'_2 - \varrho_3 \tau)[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& +(\varrho'_3 + \tau \varrho_2)[\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)], \\
\mathbf{f} = & -(\varrho_1)_\theta[(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{t\kappa'}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t) \mp \frac{\xi}{\kappa^m} \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& +(\varrho_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& +(\varrho_3)_\theta[\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi}{\kappa^m} \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)], \\
\mathbf{g} = & -(v_1)_\theta[(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{t\kappa'}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{\xi}{\kappa^m} \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& +(v_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& +(v_3)_\theta[\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]
\end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} = & \frac{1}{\Pi} [[-(\varrho'_1 + \varrho_2 \kappa)[(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& +(\varrho_1 \kappa + \varrho'_2 - \varrho_3 \tau)[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& +(\varrho'_3 + \tau \varrho_2)[\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]] [-(v_1)_\theta[(\varphi \\
& + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& +(v_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& +(v_3)_\theta[\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]] \\
& - [-(\varrho_1)_\theta[(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
& +(\varrho_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)]] \\
& +(\varrho_3)_\theta[\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]]^2]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$\Pi = (-\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (-v_1\varrho_1 + v_2\varrho_2 + v_3\varrho_3)^2$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.13.

(4.1.28) ile verilen $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{1}{2\Gamma} [(-\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)(-(\nu_1)_\theta[(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \\ & \mp \frac{1}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] + (\nu_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) \\ & + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]] + (\nu_3)_\theta[\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \\ & \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]] - 2[-\varrho_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + \varrho_3 v_3] \\ & (-(\varrho_1)_\theta[(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] \\ & + (\varrho_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]] \quad (4.1.35) \\ & + (\varrho_3)_\theta[\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]] \\ & + [-\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2][-(\varrho_1' + \varrho_2\kappa)[(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \\ & \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] + (\varrho_1\kappa + \varrho_2' - \varrho_3\tau)[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa \\ & + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]] + (\varrho_3' + \tau\varrho_2)[\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \\ & \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]] \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= (1 + [(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\sigma \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]') \\
&\mp \frac{\xi\kappa}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\varrho_2 &= [\kappa(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] \\
&\mp (\frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)])' \\
&- [\varphi t\tau^2 \mp \frac{\tau}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi\tau \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)], \\
\varrho_3 &= [\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]' \\
&\mp \frac{\xi\tau}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
v_1 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3) - t\kappa' \sin \theta], \\
v_2 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa) - \sin \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)], \\
v_3 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa) - \sin \theta t\tau']
\end{aligned}$$

ve

$$\Pi = (-\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (-v_1\varrho_1 + v_2\varrho_2 + v_3\varrho_3)^2$$

dir.

Teorem 4.1.14.

Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(s, t, \theta) &= \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]\mathbf{T} \\
&+ (t \mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)])\mathbf{N} \quad (4.1.36) \\
&\mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]\mathbf{B}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.1.30) eşitliğinde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\mathfrak{S}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} + \mp r(s)(\cos \theta \mathbf{N}^m + \sin \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.37)$$

olur.

Buradan (4.1.29) deki ifadeler (4.1.37) denkleminde yazılırsa $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(s, t, \theta) = & \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\kappa') + \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] \mathbf{T} \\ & + (t \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \mathbf{N} \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\tau') + \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)] \mathbf{B} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.15.

(4.1.37) ile verilen $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin Gauss eğriligi

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \frac{1}{\Pi} [[- (\beta'_1 + \beta_2\kappa) (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\kappa') + \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\ & + (\beta_1\kappa + \beta'_2 - \beta_3\tau) (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\ & + (\beta_2\tau + \beta'_3) (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\tau') + \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]) \\ & [- (\psi_1)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\kappa') + \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\ & + (\psi_2)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\ & + (\psi_3)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\tau') + \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]) \\ & - [- (\beta_1)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\tau') + \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\ & + (\beta_2)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\ & + (\beta_3)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t\tau') + \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)])]^2] \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 \mp [r \cos \theta (\frac{t\kappa'}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)}{\kappa^m})'] \\
&\mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \kappa \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\beta_2 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta (t\kappa') + \kappa \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\
&\mp [r \cos \theta (\frac{(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)}{\kappa^m})'] \\
&\mp \frac{r}{\kappa^m} [-\tau \cos \theta (t\tau') - \tau \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)], \\
\beta_3 &= \mp [r \cos \theta (\frac{t\tau'}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)}{\kappa^m})'] \\
&\mp \frac{r}{\kappa^m} [\tau \cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \tau \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\psi_1 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta (t\kappa') + \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\
\psi_2 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \cos \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\psi_3 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta (t\tau') + \cos \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]
\end{aligned}$$

ve

$$\Pi = (-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (-v_1\eta_1 + v_2\eta_2 + v_3\eta_3)^2$$

dir.

İspat. (4.1.36) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin I. ve II. temel formunun katsayılarını bulalım. İlk olarak $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ yüzeyinin s ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri alınıp gerekli işlem ve düzenlemeler yapılsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_s(s, t, \theta) = & [1 \mp [r \cos \theta (\frac{t\kappa'}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)}{\kappa^m})'] \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \kappa \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)] \mathbf{T} \\
& + [\mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta (t\kappa') + \kappa \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] \\
& \mp [r \cos \theta (\frac{(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)}{\kappa^m})'] \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\tau \cos \theta (t\tau') - \tau \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]] \mathbf{N} \\
& + [\mp [r \cos \theta (\frac{t\tau'}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)}{\kappa^m})', \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [\tau \cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \tau \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]]] \mathbf{B},
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_\theta(s, t, \theta) = & \mp r [-\sin \theta \frac{t\kappa'}{\kappa^m} + \sin \theta \frac{(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)}{\kappa^m}] \mathbf{T} \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \cos \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)] \mathbf{N} \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta (t\tau') + \cos \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

olur. Hesaplamaların daha sade ve kısa olması amacıyla

$$\begin{aligned}
\beta_1 = & 1 \mp [r \cos \theta (\frac{t\kappa'}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)}{\kappa^m})'] \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \kappa \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\beta_2 = & \mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta (t\kappa') + \kappa \sin \theta (\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\
& \mp [r \cos \theta (\frac{(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)}{\kappa^m})'] \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\tau \cos \theta (t\tau') - \tau \sin \theta (\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)], \\
\beta_3 = & \mp [r \cos \theta (\frac{t\tau'}{\kappa^m})' + r \sin \theta (\frac{(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)}{\kappa^m})', \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [\tau \cos \theta (\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \tau \sin \theta (\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]
\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\mathfrak{S}_s(s, t, \theta) = \beta_1 \mathbf{T} + \beta_2 \mathbf{N} + \beta_3 \mathbf{B}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\ \psi_2 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \cos \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\ \psi_3 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(t\tau') + \cos \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\mathfrak{S}_\theta(s, t, \theta) = \psi_1 \mathbf{T} + \psi_2 \mathbf{N} + \psi_3 \mathbf{B}$$

elde edilir.

Buradan $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin I. temel formun katsayıları hesaplanırsa

$$\begin{aligned}E &= -\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \\ F &= -\psi_1\beta_1 + \psi_2\beta_2 + \psi_3\beta_3, \\ G &= -\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2\end{aligned} \tag{4.1.39}$$

ifadeleri elde edilir.

$\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin normal vektörü

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varpi}(s, t, \theta) &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [r \cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] \mathbf{T} \\ &\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)] \mathbf{N} \\ &\mp \frac{r}{\kappa^m} [r \cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)] \mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

olur.

$\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin II. temel formun katsayılarını hesaplayalım.

Öncelikle

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{ss}(s, t, \theta) &= (\beta_1' + \beta_2\kappa) \mathbf{T} + (\beta_1\kappa + \beta_2' - \beta_3\tau) \mathbf{N} + (\beta_2\tau + \beta_3') \mathbf{B}, \\ \mathfrak{S}_{s\theta}(s, t, \theta) &= (\beta_1)_\theta \mathbf{T} + (\beta_2)_\theta \mathbf{N} + (\beta_3)_\theta \mathbf{B}, \\ \mathfrak{S}_{\theta\theta}(s, t, \theta) &= (\psi_1)_\theta \mathbf{T} + (\psi_2)_\theta \mathbf{N} + (\psi_3)_\theta \mathbf{B}\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Buradan **e, f, g** katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{e} = & -(\beta'_1 + \beta_2 \kappa) \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \right) \\ & + (\beta_1 \kappa + \beta'_2 - \beta_3 \tau) \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \right) \\ & + (\beta_2 \tau + \beta'_3) \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f} = & -(\beta_1)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \right) \\ & + (\beta_2)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \right) \\ & + (\beta_3)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g} = & -(\psi_1)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \right) \\ & + (\psi_2)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \right) \\ & + (\psi_3)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \right)\end{aligned}$$

bulunur.

Buradan (4.2.35) ile verilen $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}\mathbf{K} = & \frac{1}{\Pi} \left[[-(\beta'_1 + \beta_2 \kappa) \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \right) \right. \right. \\ & + (\beta_1 \kappa + \beta'_2 - \beta_3 \tau) \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \right) \\ & + (\beta_2 \tau + \beta'_3) \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \right) \\ & \left. [-(\psi_1)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \right) \right. \right. \\ & + (\psi_2)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \right) \\ & + (\psi_3)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \right) \\ & \left. - [-(\beta_1)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \right) \right. \right. \\ & + (\beta_2)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \right) \\ & \left. \left. + (\beta_3)_\theta \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \right) \right] \right]^2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\Pi = (-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (-v_1 \eta_1 + v_2 \eta_2 + v_3 \eta_3)^2$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.16.

(4.1.36) ile verilen $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} = & \frac{1}{2\Pi} [(-\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)[(-\psi_1)_\theta(\mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\
& + (\psi_2)_\theta(\mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\
& + (\psi_3)_\theta(\mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)])] \\
& - 2[(-\psi_1\beta_1 + \psi_2\beta_2 + \psi_3\beta_3)[(-\beta_1)_\theta(\mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\
& + (\beta_2)_\theta(\mp (t\tau')[\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\
& + (\beta_3)_\theta(\mp (t\tau')[\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)])] \\
& + [-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2][-(\beta_1' + \beta_2\kappa)[(\mp \frac{r}{\kappa^m}[\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\
& + (\beta_1\kappa + \beta_2' - \beta_3\tau)[(\mp (t\tau')[\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\
& + (\beta_2\tau + \beta_3')(\mp \frac{r}{\kappa^m}[(t\tau')\cos \theta + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)])]]]
\end{aligned} \tag{4.1.41}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\beta_1 = & 1 \mp [r \cos \theta(\frac{t\kappa'}{\kappa^m})' + r \sin \theta(\frac{(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)}{\kappa^m})'] \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \kappa \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\beta_2 = & \mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta(t\kappa') + \kappa \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\
& \mp [r \cos \theta(\frac{(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)}{\kappa^m})' + r \sin \theta(\frac{(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)}{\kappa^m})'] \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\tau \cos \theta(t\tau') - \tau \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)], \\
\beta_3 = & \mp [r \cos \theta(\frac{t\tau'}{\kappa^m})' + r \sin \theta(\frac{(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)}{\kappa^m})'] \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [\tau \cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \tau \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\psi_1 = & \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\
\psi_2 = & \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \cos \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\psi_3 = & \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(t\tau') + \cos \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]
\end{aligned}$$

ve

$$\Pi = (-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (-v_1\eta_1 + v_2\eta_2 + v_3\eta_3)^2$$

dir.

Teorem 4.1.17.

Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{X}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(s, t, \theta) = & \gamma + [-\varphi(1 - t\kappa) \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(-t\kappa') + \sinh \theta(t\tau)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2))]\mathbf{T} \\ & + [t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2) + \sinh \theta(\tau t^2\kappa' + t\tau' - t^2\tau'\kappa))]\mathbf{N} \\ & + [-\varphi t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(t\tau') + \sinh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2))]\mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m}(s, t) = \gamma + t\mathbf{N}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^m &= (1 - t\kappa)\mathbf{T} + (t\tau)\mathbf{B}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(-t\kappa')\mathbf{T} + (\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)\mathbf{N} + (t\tau')\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(t\tau)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)]\mathbf{T} + \frac{1}{\kappa^m}[\tau t^2\kappa' + t\tau' - t^2\tau'\kappa]\mathbf{N} \\ &\quad + \frac{1}{\kappa^m}[(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)]\mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{m}(s, t) = \gamma + t\mathbf{N}$ hareketli kürenin merkeziyle ve (3.2.4) denklemi gözönüne alınırsa $\mathfrak{K}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\mathfrak{K}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} - rr'\mathbf{T}^m \mp r\sqrt{1 - r'^2}(\cosh \theta\mathbf{N}^m + \sinh \theta\mathbf{B}^m) \quad (4.1.44)$$

elde edilir.

Bu son eşitlikte $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ yazılırsa

$$\mathfrak{K}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} - \varphi\mathbf{T}^m \mp \sigma(\cosh \theta\mathbf{N}^m + \sinh \theta\mathbf{B}^m)$$

bulunur.

Buradan ise $\mathbf{m}(s, t)$ spacelike merkez eğri ailesinin Frenet denklemlerini kullanırsak $\mathfrak{X}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(s, t, \theta) = & \gamma + [-\varphi(1 - t\kappa) \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(-t\kappa') + \sinh \theta(t\tau)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2))] \mathbf{T} \\ & + [t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2) + \sinh \theta(\tau t^2 \kappa' + t\tau' - t^2 \tau' \kappa))] \mathbf{N} \\ & + [-\varphi t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(t\tau') + \sinh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2))] \mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.18.

Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{Q}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(s, t, \theta) = & \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m}[\cosh \theta(-t\kappa') + \sinh \theta(t\tau)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)] \mathbf{T} \\ & + [t \mp \frac{r}{\kappa^m} \cosh \theta(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2) \mp \frac{r}{\kappa^m}(\tau t^2 \kappa' + t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \mathbf{N} \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m}[\cosh \theta(t\tau') + \sinh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)] \mathbf{B}\end{aligned} \quad (4.1.45)$$

olur.

İspat. (4.1.44) eşitliğinde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $\mathfrak{Q}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\mathfrak{Q}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{T}^m \mp r(\cosh \theta\mathbf{N}^m + \sinh \theta\mathbf{B}^m) \quad (4.1.46)$$

elde edilir. Spacelike merkez eğrisi $\mathbf{m}(s, t) = \gamma + t\mathbf{N}$ nin (4.1.43) Frenet denklemleri gözönüne alınırsa $\mathfrak{B}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(s, t, \theta) &= \gamma + (t \mp r(-\cosh \theta \frac{1}{\kappa^m} t \kappa^2 - \sinh \theta \frac{1}{\kappa^m} t^2 \kappa^2 \tau))\mathbf{T} \\ &+ (t^2 \kappa \mp r(\cosh \theta \frac{\kappa + v\kappa'}{\kappa^m} + \sinh \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}))\mathbf{N} \\ &\mp r(\cosh \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} + \sinh \theta \frac{t^2 \kappa^3 + \kappa + t\kappa'}{\kappa^m})\mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.19.

Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{F}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(s, t, \theta) &= \gamma + [\varphi + \varphi t \kappa \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\kappa') + \cosh \theta(t\tau)(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2))]\mathbf{T} \\ &+ [t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2) + \cosh \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' + t^2 \tau' \kappa))]\mathbf{N} \\ &+ [\varphi t \tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\tau') - \cosh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2))]\mathbf{B}\end{aligned}\quad (4.1.47)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^m &= (1 + t\kappa)\mathbf{T} + (t\tau)\mathbf{B} \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(t\kappa')\mathbf{T} + (\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2)\mathbf{N} + (t\tau')\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(t\tau)(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2)]\mathbf{T} + \frac{1}{\kappa^m}[\tau t^2 \kappa' - t\tau' + t^2 \tau' \kappa]\mathbf{N} \\ &- \frac{1}{\kappa^m}[(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)]\mathbf{B}\end{aligned}\quad (4.1.48)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla spacelike $\mathbf{m}(s, t) = \gamma + t\mathbf{N}$ eğri ailesi kullanılarak ve (3.2.5) denklemi gözönüne alınırsa $\mathfrak{K}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\mathfrak{F}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} + rr'\mathbf{T}^m \mp r(s)\sqrt{1-r'^2}(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.49)$$

olarak elde edilir. $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}$ yazılırsa

$$\mathfrak{F}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} + \varphi \mathbf{T}^m \mp \sigma(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.50)$$

olur.

(4.1.50) denkleminde (4.1.48) eşitlikleri yazılırsa $\mathfrak{F}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyini

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(s, t, \theta) = & \gamma + [\varphi + \varphi t\kappa \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\kappa') + \cosh \theta(t\tau)(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2))] \mathbf{T} \\ & + [t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2) + \cosh \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' + t^2 \tau' \kappa))] \mathbf{N} \\ & + [\varphi t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\tau') - \cosh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2))] \mathbf{B} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Böylece ispat tanımlanır.

Teorem 4.1.20.

Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{W}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(s, t, \theta) = & \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m}[(\sinh \theta(t\kappa') + \cosh \theta(t\tau)(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2))] \mathbf{T} \\ & + [t \mp \frac{r}{\kappa^m}(\sinh \theta(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2) + \cosh \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' + t^2 \tau' \kappa))] \mathbf{N} \quad (4.1.51) \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m}[\sinh \theta(t\tau') - \cosh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)] \mathbf{B} \end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.1.49) eşitliğinde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $\mathfrak{W}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\mathfrak{W}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{N} \mp r(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.52)$$

olur.

(4.1.48) denklem sistemi (4.1.52) denklemde gözönüne alınırsa $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkezli $\mathfrak{W}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}(s, t, \theta) &= \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m}[(\sinh \theta(t\kappa') + \cosh \theta(t\tau)(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2))]\mathbf{T} \\ &+ [t \mp \frac{r}{\kappa^m}(\sinh \theta(\kappa + t\kappa^2 + t\tau^2) + \cosh \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' + t^2\tau'\kappa))]\mathbf{N} \\ &\mp \frac{r}{\kappa^m}[\sinh \theta(t\tau') - \cosh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)]\mathbf{B}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.21.

Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{T}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}(s, t, \theta) &= \gamma + [\varphi \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(-\cos \theta(t\kappa\tau) - \sin \theta(t^2\tau^3))]\mathbf{T} \\ &+ [-\varphi t\tau \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa - t\tau') + \sin \theta(t\tau^2))]\mathbf{N} \\ &+ [t \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(-\cos \theta(t\tau^2) + \sin \theta(\kappa - t\tau' - t^2\kappa\tau^2))]\mathbf{B},\end{aligned}\tag{4.1.53}$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\xi(s) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}$ dir.

İspat. $\mathfrak{T}(s, t, \theta)$ yüzeyinin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında birim hızlı timelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılsa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^m &= \mathbf{T} - t\tau\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(-t\kappa\tau)\mathbf{T} + (\kappa - t\tau')\mathbf{N} - (t\tau^2)\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= -\frac{1}{\kappa^m}(t^2\tau^3)\mathbf{T} + \frac{1}{\kappa^m}(t\tau^2)\mathbf{N} + \frac{1}{\kappa^m}(\kappa - t\tau' - t^2\kappa\tau^2)\mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.1.54}$$

elde edilir.

(3.2.6) ve (4.1.54) sistemi beraber ele alınırsa $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ hareketli kürenin merkeziyle, $\mathfrak{T}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzey

$$\mathfrak{T}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} + rr'\mathbf{T}^m \mp r(s)\sqrt{1+r'^2}(\cos\theta\mathbf{N}^m + \sin\theta\mathbf{B}^m) \quad (4.1.55)$$

olarak bulunur.

(4.2.54) denkleminde $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\xi(s) = r(s)\sqrt{1+r'^2(s)}$ yazılırsa

$$\mathfrak{T}(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} + \varphi\mathbf{T}^m \mp \xi(\cos\theta\mathbf{N}^m + \sin\theta\mathbf{B}^m) \quad (4.1.56)$$

olur.

Buradan (4.1.54) denklem sistemini (4.1.56) denkleminde yerinde yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(s, t, \theta) &= \gamma + [\varphi \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(-\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\tau^3))]\mathbf{T} \\ &+ [-\varphi t\tau \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa-t\tau') + \sin\theta(t\tau^2))]\mathbf{N} \\ &+ [t \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(-\cos\theta(t\tau^2) + \sin\theta(\kappa-t\tau' - t^2\kappa\tau^2))]\mathbf{B} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.22.

Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $P(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} P(s, t, \theta) &= \gamma \mp [\frac{r}{\kappa^m}(-\cos\theta(t\kappa\tau) - \sin\theta(t^2\tau^3))]\mathbf{T} \\ &\mp [\frac{r}{\kappa^m}(\cos\theta(\kappa-t\tau') + \sin\theta(t\tau^2))]\mathbf{N} \\ &+ [t \mp [\frac{r}{\kappa^m}(-\cos\theta(t\tau^2) + \sin\theta(\kappa-t\tau' - t^2\kappa\tau^2))]]\mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.57)$$

dir.

İspat. (4.1.55) denkleminde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $P(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$P(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} \mp r(\cos\theta\mathbf{N}^m + \sin\theta\mathbf{B}^m) \quad (4.1.58)$$

olur. (4.1.54) $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ nin Frenet denklemleri (4.1.58) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P(s, t, \theta) &= \gamma \mp \left[\frac{r}{\kappa^m} (-\cos \theta(t\kappa\tau) - \sin \theta(t^2\tau^3)) \right] \mathbf{T} \\ &\mp \left[\frac{r}{\kappa^m} (\cos \theta(\kappa - t\tau') + \sin \theta(t\tau^2)) \right] \mathbf{N} \\ &+ [t \mp \left[\frac{r}{\kappa^m} (-\cos \theta(t\tau^2) + \sin \theta(\kappa - t\tau' - t^2\kappa\tau^2)) \right]] \mathbf{B} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ olan $P(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi bulunmuş olur.

Teorem 4.1.23.

Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $M(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} M(s, t, \theta) &= \gamma + \left[\varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (-\cosh \theta(t\kappa\tau) - \sinh \theta(t^2\kappa^2\tau)) \right] \mathbf{T} \\ &+ \left[\varphi t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\cosh \theta(\kappa + t\tau') + \sinh \theta(t\kappa\tau)) \right] \mathbf{N} \\ &+ \left[t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa')) \right] \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^m &= \mathbf{T} + t\tau\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(-t\kappa\tau)\mathbf{T} + (\kappa + t\tau')\mathbf{N} + (t\tau^2)\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [-(t^2\kappa^2\tau)\mathbf{T} + (t\kappa\tau)\mathbf{N} + (t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa')\mathbf{B}] \end{aligned} \quad (4.1.60)$$

elde edilir.

(3.2.4) ve (4.1.60) sistemi beraber ele alınırsa $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ hareketli kürenin merkeziyle $M(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzey

$$M(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} - rr'\mathbf{T}^m \mp r(s)\sqrt{1 - r'^2}(\cosh \theta \mathbf{N}^m + \sinh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.61)$$

bulunur.

(4.1.61) denkleminde $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ yazılırsa

$$M(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} - \varphi\mathbf{T}^m \mp \sigma(\cosh \theta \mathbf{N}^m + \sinh \theta \mathbf{B}^m)$$

olur. Son eşitlikte (4.1.60) sistemi yazılırsa

$$\begin{aligned} M(s, t, \theta) &= \gamma + [\varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(-\cosh \theta(t\kappa\tau) - \sinh \theta(t^2\kappa^2\tau))] \mathbf{T} \\ &+ [\varphi t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(\kappa + t\tau') + \sinh \theta(t\kappa\tau))] \mathbf{N} \\ &+ [t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa'))] \mathbf{B} \end{aligned}$$

hareketli kürenin spacelike merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ olan $M(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi bulunmuş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.24.

Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $V(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} V(s, t, \theta) &= \gamma \mp [\frac{r}{\kappa^m}(-\cosh \theta(t\kappa\tau) - \sinh \theta(t^2\kappa^2\tau))] \mathbf{T} \\ &\mp [\frac{r}{\kappa^m}(\cosh \theta(\kappa + t\tau') + \sinh \theta(t\kappa\tau))] \mathbf{N} \\ &+ [t \mp \frac{r}{\kappa^m}(\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa'))] \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.62)$$

dir.

İspat. (4.1.61) eşitliğinde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $V(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$V(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} \mp r(\cosh \theta \mathbf{N}^m + \sinh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.63)$$

elde edilir.

Spacelike merkez eğrisi, $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ nin (4.1.60) Frenet denklemleri gözönüne alınırsa $V(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} V(s, t, \theta) = & \gamma \mp \left[\frac{r}{\kappa^m} (-\cosh \theta(t\kappa\tau) - \sinh \theta(t^2\kappa^2\tau)) \right] \mathbf{T} \\ & \mp \left[\frac{r}{\kappa^m} (\cosh \theta(\kappa + t\tau') + \sinh \theta(t\kappa\tau)) \right] \mathbf{N} \\ & + \left[t \mp \frac{r}{\kappa^m} (\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa')) \right] \mathbf{B} \end{aligned}$$

olarak edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.25.

Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ eğrisiyle verilirse, bu takdirde $D(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} D(s, t, \theta) = & \gamma + \left[\varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3)) \right] \mathbf{T} \\ & + \left[\varphi t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\sinh \theta(\kappa + t\kappa') + \cosh \theta(t\tau^2)) \right] \mathbf{N} \\ & + \left[t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m} (\sinh \theta(t\tau^2) + \cosh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa')) \right] \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ olmak üzere γ Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa, $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^m &= \mathbf{T} + t\tau\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(t\kappa\tau)\mathbf{T} + (\kappa + t\kappa')\mathbf{N} + (t\tau^2)\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(t^2\tau^3)\mathbf{T} + (t\tau^2)\mathbf{N} + (-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa')\mathbf{B}] \end{aligned} \quad (4.1.65)$$

olur.

Dolayısıyla spacelike $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ eğri ailesi kullanılarak ve (3.2.5) denklemi gözönüne alınırsa 5-eksenli kanal yüzeyi $D(s, t, \theta)$

$$D(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} + rr'\mathbf{T}^m \mp r(s)\sqrt{1 - r'^2}(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.66)$$

olarak elde edilir.

(4.1.66) eşitliğinde $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ yazılırsa

$$D(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} + \varphi\mathbf{T}^m \mp \sigma(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.67)$$

olur.

(4.1.65) denklem sistemi (4.1.67) te yerine yazılırsa $D(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} D(s, t, \theta) &= \gamma + [\varphi \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3))]\mathbf{T} \\ &+ [\varphi t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(\kappa + t\kappa') + \cosh \theta(t\tau^2))]\mathbf{N} \\ &+ [t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\tau^2) + \cosh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa'))]\mathbf{B} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.26.

Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $R(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned} R(s, t, \theta) &= \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m}[(\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3))]\mathbf{T} \\ &\mp \frac{r}{\kappa^m}[\sinh \theta(\kappa + t\kappa') + \cosh \theta(t\tau^2)]\mathbf{N} \\ &+ [t \mp \frac{r}{\kappa^m}(\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa'))]\mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.68)$$

dir.

İspat. (4.1.66) eşitliğinde yarıçap fonksiyonu $r = r(s)$ sabit alınırsa $\mathfrak{D}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$R(s, t, \theta) = \gamma + t\mathbf{B} \mp r(\sinh \theta \mathbf{N}^m + \cosh \theta \mathbf{B}^m) \quad (4.1.69)$$

olur.

(4.1.65) denklem sistemi (4.1.69) te yerine yazılırsa $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ merkezli $R(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} R(s, t, \theta) = & \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m} [(\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3))] \mathbf{T} \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m} [\sinh \theta(\kappa + t\kappa') + \cosh \theta(t\tau^2)] \mathbf{N} \\ & + [t \mp \frac{r}{\kappa^m} (\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa'))] \mathbf{B} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.27.

Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ merkez eğrisiyle verilirse, bu

takdirde $\Omega(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}
\Omega(s, t, \theta) = & \gamma + [-\varphi + \varphi r \kappa \cos t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((1 - r \kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t + r \kappa \tau \sin t)) \\
& \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (((r' \sin t + r \tau \cos t)(\kappa - r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r \tau \sin t)' \\
& + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r \tau \sin t)((r' \sin t + r \tau \cos t)' + r' \tau \cos t \\
& + r \tau^2 \sin t))] \mathbf{T} + [r \cos t - \varphi r' \cos t - \varphi r \tau \sin t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} (\kappa - r \kappa^2 \cos t \\
& + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t) \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (((1 - r \kappa \cos t)((r' \sin t \\
& + r \tau \cos t)' + r' \tau \cos t + r \tau^2 \sin t)) - (r' \sin t + r \tau \cos t)((1 - r \kappa \cos t)' \\
& - \kappa r' \cos t + r \kappa \tau \sin t))] \mathbf{N} + [r \sin t - \varphi r' \sin t - \varphi r \tau \cos t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((r' \sin t \\
& + r \tau \cos t)' + r' \tau \cos t + r \tau^2 \sin t) \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} ((1 - r \kappa \cos t)((\kappa - r \kappa^2 \cos t \\
& + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r \tau \sin t) \\
& ((1 - r \kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t))] \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1.70}$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ olmak üzere γ Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne

alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^m &= (1 - r\kappa \cos t)\mathbf{T} + (r' \cos t + r\tau \sin t)\mathbf{N} + (r' \sin t + r\tau \cos t)\mathbf{B}, \\
\mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(1 - \kappa r \cos t)' - \kappa r' \cos t - r\kappa \tau \sin t]\mathbf{T} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m}[\kappa - r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r\tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t]\mathbf{N} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m}[(r' \sin t + r\tau \cos t)' + r' \tau \cos t + r\tau^2 \sin t]\mathbf{B}, \\
\mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(r' \sin t + r\tau \cos t)((\kappa - r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r\tau \sin t)' \\
&+ \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r\tau \sin t)((r' \sin t + r\tau \cos t)' \\
&+ r' \tau \cos t + r\tau^2 \sin t))] \mathbf{T} + \frac{1}{\kappa^m}[(1 - r\kappa \cos t)((r' \sin t + r\tau \cos t)' \\
&+ r' \tau \cos t + r\tau^2 \sin t)) - (r' \sin t + r\tau \cos t)((1 - r\kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t \\
&+ r\kappa \tau \sin t)] \mathbf{N} + \frac{1}{\kappa^m}[(1 - r\kappa \cos t)((\kappa - r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r\tau \sin t)' \\
&+ \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r\tau \sin t)((1 - r\kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t \\
&- r\tau \kappa \sin t))] \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1.71}$$

elde edilir.

(3.2.4) ve (4.1.71) sistemi beraber ele alınırsa $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ hareketli kürenin merkeziyle $\Omega(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\Omega(s, t, \theta) = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B}) - rr' \mathbf{T}^m \mp r\sqrt{1 - r'^2}(\cosh \theta \mathbf{N}^m + \sinh \theta \mathbf{B}^m) \tag{4.1.72}$$

olur.

$$(4.1.72) \text{ eşitliğinde } \varphi(s) = r(s)r'(s) \text{ ve } \sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)} \text{ yazılırsa}$$

$$\Omega(s, t, \theta) = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B}) - \varphi \mathbf{T}^m \mp \sigma(\cosh \theta \mathbf{N}^m + \sinh \theta \mathbf{B}^m) \tag{4.1.73}$$

olur.

(4.1.73) denkleminde (4.1.71) sistemi yerine yazılırsa $\Omega(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal

yüzeyi

$$\begin{aligned}
\Omega(s, t, \theta) = & \gamma + [-\varphi + \varphi r \kappa \cos t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((1 - r \kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t + r \kappa \tau \sin t)) \\
& \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (((r' \sin t + r \tau \cos t)(\kappa - r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r \tau \sin t)' \\
& + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r \tau \sin t)((r' \sin t + r \tau \cos t)' + r' \tau \cos t \\
& + r \tau^2 \sin t))] \mathbf{T} + [r \cos t - \varphi r' \cos t - \varphi r \tau \sin t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} (\kappa - r \kappa^2 \cos t \\
& + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t) \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (((1 - r \kappa \cos t)((r' \sin t \\
& + r \tau \cos t)' + r' \tau \cos t + r \tau^2 \sin t)) - (r' \sin t + r \tau \cos t)((1 - r \kappa \cos t)' \\
& - \kappa r' \cos t + r \kappa \tau \sin t))] \mathbf{N} + [r \sin t - \varphi r' \sin t - \varphi r \tau \cos t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((r' \sin t \\
& + r \tau \cos t)' + r' \tau \cos t + r \tau^2 \sin t) \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} ((1 - r \kappa \cos t)((\kappa - r \kappa^2 \cos t \\
& + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r \tau \sin t) \\
& ((1 - r \kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t))] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece hareketli kürenin spacelike merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ olan 5-eksenli kanal yüzeyini bulunmuş olur.

Teorem 4.1.28.

Minkowski uzayında γ timelike eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\Theta(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}
\Theta(s, t, \theta) = & \gamma + [\varphi + \varphi r \kappa \cos t \mp \frac{\xi \cos \theta}{\kappa^m} [((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t))] \\
& \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} [(((r' \sin t + r \tau \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r \tau \sin t)' - \tau r' \sin t - r \tau^2 \cos t) \\
& - ((r' \cos t - r \tau \sin t)(\tau r' \cos t - r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)')))] \mathbf{T} \\
& + [r \cos t + \varphi r' \cos t - \varphi r \tau \sin t \mp \frac{\xi \cos \theta}{\kappa^m} (\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r \tau \sin t)' - \tau r' \sin t \\
& - r \tau^2 \cos t) \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} ((r' \sin t + r \tau \cos t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t) \quad (4.1.74) \\
& - (1 + r \kappa \cos t)(\tau r' \cos t - r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)'))] \mathbf{N} \\
& + [r \sin t + \varphi r' \sin t + \varphi r \tau \cos t \mp \frac{\xi \cos \theta}{\kappa^m} (\tau r' \cos t - r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \\
& \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} ((1 + r \kappa \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r \tau \sin t)' - \tau r' \sin t - r \tau^2 \cos t)) \\
& - ((r' \cos t - r \tau \sin t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t))] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\xi(s) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}$ dir.

İspat. $\Theta(s, t, \theta)$ yüzeyinin merkez eğrisi $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ olmak üzere γ Minkowski uzayında birim hızlı timelike eğri olsun. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet

denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^m &= (1 + r\kappa \cos t)\mathbf{T} + (r' \cos t - r\tau \sin t)\mathbf{N} + (r' \sin t + r\tau \cos t)\mathbf{B}, \\
\mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(1 + r\kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r\tau \kappa \sin t]\mathbf{T} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m}[\kappa + r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r\tau \sin t)' - \tau r' \sin t - r\tau^2 \cos t]\mathbf{N} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m}[\tau r' \cos t - r\tau^2 \sin t + (r' \sin t + r\tau \cos t)']\mathbf{B}, \\
\mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m}[(r' \sin t + r\tau \cos t)(\kappa + r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r\tau \sin t)' - \tau r' \sin t - r\tau^2 \cos t) \\
&- (r' \cos t - r\tau \sin t)(\tau r' \cos t - r\tau^2 \sin t + (r' \sin t + r\tau \cos t)')] \mathbf{T} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m}[(r' \sin t + r\tau \cos t)((1 + r\kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r\tau \kappa \sin t) \\
&- (1 + r\kappa \cos t)(\tau r' \cos t - r\tau^2 \sin t + (r' \sin t + r\tau \cos t)')] \mathbf{N} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m}[(1 + r\kappa \cos t)(\kappa + r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r\tau \sin t)' - \tau r' \sin t - r\tau^2 \cos t) \\
&- (r' \cos t - r\tau \sin t)((1 + r\kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r\tau \kappa \sin t)] \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1.75}$$

olarak elde edilir.

(3.2.6) ve (4.1.75) sistemi beraber ele alınırsa $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t\mathbf{N} + \sin t\mathbf{B})$ hareketli kürenin merkeziyle $\Theta(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\Theta(s, t, \theta) = \gamma + r(\cos t\mathbf{N} + \sin t\mathbf{B}) + rr'\mathbf{T}^m \mp r\sqrt{1 + r'^2}(\cos \theta\mathbf{N}^m + \sin \theta\mathbf{B}^m) \tag{4.1.76}$$

olur.

(4.2.72) eşitliğinde $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\xi(s) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}$ yazılırsa $\Theta(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\Theta(s, t, \theta) = \gamma + r(\cos t\mathbf{N} + \sin t\mathbf{B}) + \varphi\mathbf{T}^m \mp \xi(\cos \theta\mathbf{N}^m + \sin \theta\mathbf{B}^m) \tag{4.1.77}$$

olarak elde bulunur.

(4.1.77) eşitliği ve (4.1.75) denklem sisteminden

$$\begin{aligned}
\Theta(s, t, \theta) = & \gamma + [\varphi + \varphi r \kappa \cos t \mp \frac{\xi \cos \theta}{\kappa^m} [((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t))] \\
& \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} [(((r' \sin t + r \tau \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r \tau \sin t)' - \tau r' \sin t - r \tau^2 \cos t) \\
& - ((r' \cos t - r \tau \sin t)(\tau r' \cos t - r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)')))] \mathbf{T} \\
& + [r \cos t + \varphi r' \cos t - \varphi r \tau \sin t \mp \frac{\xi \cos \theta}{\kappa^m} (\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r \tau \sin t)' - \tau r' \sin t \\
& - r \tau^2 \cos t) \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} ((r' \sin t + r \tau \cos t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t) \\
& - (1 + r \kappa \cos t)(\tau r' \cos t - r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)'))] \mathbf{N} \\
& + [r \sin t + \varphi r' \sin t + \varphi r \tau \cos t \mp \frac{\xi \cos \theta}{\kappa^m} (\tau r' \cos t - r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \\
& \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m} ((1 + r \kappa \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t - r \tau \sin t)' - \tau r' \sin t - r \tau^2 \cos t)) \\
& - ((r' \cos t - r \tau \sin t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t - r \tau \kappa \sin t))] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.1.29.

Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde

$\Phi(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}
\Phi(s, t, \theta) = & \gamma + [\varphi + \varphi r \kappa \cos t \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} ((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r \tau \kappa \sin t)) \\
& \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((r' \cos t + r \tau \sin t)(\tau r' \cos t + r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \\
& - ((r' \sin t + r \tau \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t \\
& + r \tau^2 \cos t)))] \mathbf{T} + [r \cos t + \varphi r' \cos t + \varphi r \tau \sin t \\
& \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t) \quad (4.1.78) \\
& \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((1 + r \kappa \cos t)((\tau r' \cos t + r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \\
& - ((r' \sin t + r \tau \cos t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r \tau \kappa \sin t)))] \mathbf{N} \\
& + [r \sin t + \varphi r' \sin t + \varphi r \tau \cos t \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (\tau r' \cos t + r \tau^2 \sin t \\
& + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} (((1 + r \kappa \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t \\
& + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t) \\
& - ((r' \cos t + r \tau \sin t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r \tau \kappa \sin t)))] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

İspat. Hareketli kürenin merkez eğrisi $\mathbf{m}(s, t) = \gamma + r(\cos t \mathbf{N} + \sin t \mathbf{B})$ olmak üzere γ Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir spacelike eğridir. Buradan $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri Minkowski uzayındaki yapılar gözüne

alınıp gerekli işlemler yapılırsa $\mathbf{m}(s, t)$ nin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^m &= (1 + r\kappa \cos t)\mathbf{T} + (r' \cos t + r\tau \sin t)\mathbf{N} + (r' \sin t + r\tau \cos t)\mathbf{B}, \\
\mathbf{N}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(1 + r\kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r\tau \kappa \sin t]\mathbf{T} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m} [\kappa + r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r\tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t]\mathbf{N} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m} [\tau r' \cos t + r\tau^2 \sin t + (r' \sin t + r\tau \cos t)']\mathbf{B}, \\
\mathbf{B}^m &= \frac{1}{\kappa^m} [(r' \cos t + r\tau \sin t)(\tau r' \cos t + r\tau^2 \sin t + (r' \sin t + r\tau \cos t)') \\
&- (r' \sin t + r\tau \cos t)(\kappa + r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r\tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t)]\mathbf{T} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m} [(1 + r\kappa \cos t)(\tau r' \cos t + r\tau^2 \sin t + (r' \sin t + r\tau \cos t)') \\
&- (r' \sin t + r\tau \cos t)((1 + r\kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r\tau \kappa \sin t)]\mathbf{N} \\
&+ \frac{1}{\kappa^m} [(1 + r\kappa \cos t)(\kappa + r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r\tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t) \\
&- (r' \cos t + r\tau \sin t)((1 + r\kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r\tau \kappa \sin t)]\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1.79}$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla spacelike $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t\mathbf{N} + \sin t\mathbf{B})$ eğri ailesi kullanılarak ve (3.2.5) denklemi gözönüne alınırsa $\Phi(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\Phi(s, t, \theta) = \gamma + r(\cos t\mathbf{N} + \sin t\mathbf{B}) + \varphi\mathbf{T}^m \mp r\sqrt{1 - r'^2}(\sinh \theta\mathbf{N}^m + \cosh \theta\mathbf{B}^m) \tag{4.1.80}$$

olarak bulunur. $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ yazılırsa

$$\Phi(s, t, \theta) = \gamma + r(\cos t\mathbf{N} + \sin t\mathbf{B}) + \varphi\mathbf{T}^m \mp \sigma(\sinh \theta\mathbf{N}^m + \cosh \theta\mathbf{B}^m) \tag{4.1.81}$$

olur. (4.1.81) eşitliğinde (4.1.79) eşitlikleri yazılırsa $\Phi(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}
\Phi(s, t, \theta) = & \gamma + [\varphi + \varphi r \kappa \cos t \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} ((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r \tau \kappa \sin t)) \\
& \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((r' \cos t + r \tau \sin t)(\tau r' \cos t + r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \\
& - ((r' \sin t + r \tau \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t \\
& + r \tau^2 \cos t)))] \mathbf{T} + [r \cos t + \varphi r' \cos t + \varphi r \tau \sin t \\
& \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (\kappa + r \kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t) \\
& \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} ((1 + r \kappa \cos t)((\tau r' \cos t + r \tau^2 \sin t + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \\
& - ((r' \sin t + r \tau \cos t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r \tau \kappa \sin t)))] \mathbf{N} \\
& + [r \sin t + \varphi r' \sin t + \varphi r \tau \cos t \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m} (\tau r' \cos t + r \tau^2 \sin t \\
& + (r' \sin t + r \tau \cos t)') \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m} (((1 + r \kappa \cos t)(\kappa + r \kappa^2 \cos t \\
& + (r' \cos t + r \tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r \tau^2 \cos t) \\
& - ((r' \cos t + r \tau \sin t)((1 + r \kappa \cos t)' + \kappa r' \cos t + r \tau \kappa \sin t)))] \mathbf{B}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. 5-eksenli Kanal Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $F(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin a uzaklıktaki paraleli olan $\tilde{F}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\tilde{F}(s, t, \theta) = F(s, t, \theta) + a\varpi(s, t, \theta) \quad (4.2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada ϖ yüzeyinin birim normal vektörüdür ve a reel sayıdır.

Teorem 4.2.1.

(4.1.1) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin paralel yüzeyi

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{P}}(s, t, \theta) &= \gamma + t\mathbf{T} + (1 + a)\left([t + \varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)]\mathbf{T} \right. \\ &+ [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)]\mathbf{N} \\ &\left. \mp [\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))]\mathbf{B}\right) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

dir.

İspat. (4.1.1) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(s, t, \theta) &= \gamma + [t + \varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)]\mathbf{T} \\ &+ [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)]\mathbf{N} \\ &\mp [\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))]\mathbf{B} \end{aligned}$$

ve bu yüzeyin normali

$$\begin{aligned} \varpi(s, t, \theta) &= [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)]\mathbf{T} \\ &+ [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)]\mathbf{N} \\ &\mp [\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))]\mathbf{B} \end{aligned}$$

idi. Buradan gerekli işlemler yapılırsa $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin paralel yüzeyi $\tilde{\mathfrak{P}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{P}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{T} + (1+a)([t + \varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)]\mathbf{T} \\ & + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)]\mathbf{N} \\ & \mp [\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))]\mathbf{B})\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2.

(4.1.10) ile verilen 5-eksenli kanal yüzeyi $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ nın paralel yüzeyi $\tilde{\mathfrak{L}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{L}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{T} + (1+a)(\mp[r(\cos \theta \frac{t \kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2 \kappa^2 \tau}{\kappa^m})]\mathbf{T} \\ & + [t^2 \kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t \kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t \kappa \tau}{\kappa^m})]\mathbf{N} \\ & \mp r[\cos \theta \frac{t \kappa \tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')]\mathbf{B})\end{aligned}\quad (4.2.3)$$

dir.

Sonuç 4.2.3.

(4.1.28) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin paralel yüzeyi $\tilde{\mathfrak{A}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{A}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{N} + (1+a)([(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t \kappa'] \\ & \mp \frac{1}{\kappa^m} \xi \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)]\mathbf{T} \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t \kappa^2 - t \tau^2) \\ & + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t \tau' - t^2 \tau' \kappa)]\mathbf{N} + [\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t \tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t \kappa^2 \\ & - t \tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]\mathbf{B})\end{aligned}\quad (4.2.4)$$

dir.

Sonuç 4.2.4.

(4.1.36) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin paralel yüzeyi $\tilde{\mathfrak{S}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{S}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{N} + (1+a)(\mp \frac{r}{\kappa^m} [r \cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]\mathbf{T} \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]\mathbf{N} \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m} [r \cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

dir.

4.3. 5-eksenli Kanal Yüzeylerin Harmonik Evolütleri

Teorem 4.3.1.

(4.1.1) denkleminle verilen 5-eksenli kanal yüzeyinin harmonik evolütü $\overline{\mathfrak{P}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{P}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{T} + ([\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)]\mathbf{T} + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') \\ & - \sin \theta t \kappa \tau)]\mathbf{N} \mp [\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))]\mathbf{B})(1 + 2\epsilon \Gamma\{[(-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) \\ & - (\lambda_1)_\theta[\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)] + (\lambda_2)_\theta[t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \\ & + (\lambda_3)_\theta[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')))] - 2[-\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3] \quad (4.3.1) \\ & - (\mu_1)_\theta[\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)] + (\mu_2)_\theta[t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \\ & + (\mu_3)_\theta[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')))] + [-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2][-(\mu_1' \\ & + \mu_2 \kappa)[\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau)] + (\mu_1 \kappa + \mu_2' - \mu_3 \tau)[t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') \\ & - \sin \theta t \kappa \tau)] + (\mu_3' + \tau \mu_2)[\mp(\frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')))]\}^{-1}) \end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.1.8) ve (4.1.9) eşitlikleri (3.3.8) ifadesinde gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa (4.3.1) elde edilir.

Sonuç 4.3.2.

(4.1.10) denklemiyle verilen $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin harmonik evolütü

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{L}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{T} + (\mp [r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})]\mathbf{T} + [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})]\mathbf{N} \mp r[\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')]\mathbf{B})(1 + 2\epsilon\Lambda\{[(-\eta_1^2 + \eta_2^2 \\
& + \eta_3^2)[-(\rho_1)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] + (\rho_2)_\theta[t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\rho_3)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]] - 2[(-\eta_1\rho_1 \\
& + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3)[-(\eta_1)[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] + (\eta_2)_\theta[t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\eta_3)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]] + [\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2][-(\eta'_1 + \eta_2\kappa) \\
& [\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})]]\}^{-1})
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

dir.

Sonuç 4.3.3.

(4.1.28) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin harmonik evolütü

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{N} + \left([(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]\mathbf{T} \right. \\
& + (t \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)])\mathbf{N} \\
& + [\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi}{\kappa^m} \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]\mathbf{B}) \\
& (1 + 2\epsilon\Gamma\{ [(-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(-\nu_1)_\theta[(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \\
& \mp \frac{1}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] + (\nu_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) \\
& + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]] + (\nu_3)_\theta[\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \\
& \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]] - 2[-\eta_{1\nu_1} + \eta_2\nu_2 + \eta_3\nu_3] \\
& (-\eta_1)_\theta[(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] \\
& + (\eta_2)_\theta[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]] \\
& + (\eta_3)_\theta[\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]] \\
& + [-\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2][-(\eta'_1 + \eta_2\kappa)[(\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \\
& \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)] + (\eta_1\kappa + \eta'_2 - \eta_3\tau)[\mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa \\
& + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]] + (\eta'_3 + \tau\eta_2)[\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \\
& \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]]\}^{-1})
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

dir.

Sonuç 4.3.4.

(4.1.36) ile verilen $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin harmonik evolutü $\overline{\mathfrak{S}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{S}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{N} + \left(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]\right)\mathbf{T} \\
& + \left(t \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]\right)\mathbf{N} \\
& \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]\mathbf{B} (1 + 2\epsilon\Pi \\
& \{ [(-\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)[-(\psi_1)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\
& + (\psi_2)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\
& + (\psi_3)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)])] \quad (4.3.4) \\
& - 2[(-\psi_1\beta_1 + \psi_2\beta_2 + \psi_3\beta_3)[-(\beta_1)_\theta (\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\
& + (\beta_2)_\theta (\mp (t\tau') [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\
& + (\beta_3)_\theta (\mp (t\tau') [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)])] \\
& + [-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2][-(\beta_1' + \beta_2\kappa)[(\mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta(t\tau') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]) \\
& + (\beta_1\kappa + \beta_2' - \beta_3\tau)[(\mp (t\tau') [\cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]) \\
& + (\beta_2\tau + \beta_3')(\mp \frac{r}{\kappa^m} [(t\tau') \cos \theta + \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)])])\}^{-1})
\end{aligned}$$

dir.

4.4. 5-eksenli Kanal Yüzeylerin Elastik Olmayan Akışları

Teorem 4.4.1.

(4.1.1) ile verilen $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ akışı inextensibilite ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \mu_3\lambda_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) &= 0\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 + \varphi' \mp \left(\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}\right)'(\cos \theta - \sin \theta t \tau) \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(-\sin \theta t \tau') + t^2 \kappa^2 + \varphi t \kappa^2 \\ &\mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau), \\ \mu_2 &= t \kappa + \varphi \kappa \mp \frac{\xi t \kappa^3}{\kappa^m}(\cos \theta - \sin \theta t \tau) t^2 \kappa' + \varphi' t \kappa + \varphi t \kappa' \mp \left(\frac{\xi}{\kappa^m}\right)'(\cos \theta(\kappa + t \kappa') \\ &- \sin \theta t \kappa \tau) \mp \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa' + t \kappa'') - \sin \theta t \kappa' \tau - \sin \theta t \kappa \tau') \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}(-\cos \theta(t \kappa \tau) \\ &+ \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')), \\ \mu_3 &= \mp \left[\left(\frac{\xi}{\kappa^m}\right)'(\cos \theta(t \kappa \tau) - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')) + \frac{\xi}{\kappa^m}(\cos \theta(t \kappa \tau))' \right. \\ &\left. - \sin \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa')'\right] + t^2 \kappa \tau + \varphi t \tau \kappa \mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}(\cos \theta(\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)], \\ \lambda_1 &= \mp \left[\frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m}(-\sin \theta - \cos \theta t \tau)\right], \\ \lambda_2 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m}(-\sin \theta(\kappa + t \kappa') - \cos \theta t \kappa \tau)\right], \\ \lambda_3 &= \mp \left[\frac{\xi}{\kappa^m}(-\sin \theta(t \kappa \tau) - \cos \theta(t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))\right]\end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.2 ve tanım 2.1.34 beraber ele alınıp gerekli işlemler yapılırsa (4.4.1) bulunur.

Sonuç 4.4.2.

(4.1.10) ile verilen $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ akışı inextensible ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) &= 0\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \mp r[-\sin\theta\frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m}], \\ \rho_2 &= \mp r[-\sin\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m}], \\ \rho_3 &= \mp r[-\sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \cos\theta\frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')], \\ \eta_1 &= 1 \mp (r(\cos\theta(\frac{t\kappa^2}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})') + t^2\kappa^2 \mp (r\kappa(\cos\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})), \\ \eta_2 &= t\kappa \mp (r\kappa(\cos\theta\frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m}) + (t^2\kappa' \mp r(\cos\theta(\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})')) \\ &\quad \mp (r(-\cos\theta\frac{t\kappa\tau^2}{\kappa^m} + \sin\theta\frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3\tau - \kappa\tau - t\tau\kappa'))), \\ \eta_3 &= t^2\kappa\tau \mp (r\tau(\cos\theta\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin\theta\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})) \mp (r(\cos\theta(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})' - \sin\theta(\frac{t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'}{\kappa^m})'))\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.4.3.

(4.1.28) ile verilen $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ akışı inextensible ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(-\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\varrho_1v_1 + \varrho_2v_2 + \varrho_3v_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) &= 0,\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= (1 + [(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\sigma \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{1}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)]') \\
&\mp \frac{\xi \kappa}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)], \\
\varrho_2 &= [\kappa(\varphi + \varphi t \kappa) \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \mp \frac{\kappa}{\kappa^m}\sigma \sin \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \\
&\mp (\frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)])' \\
&- [\varphi t \tau^2 \mp \frac{\tau}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \tau \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)], \\
\varrho_3 &= [\varphi t \tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)]' \\
&\mp \frac{\xi \tau}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \sin \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa)], \\
v_1 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3) - t\kappa' \sin \theta], \\
v_2 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\tau t^2 \kappa' - t\tau' - t^2 \tau' \kappa) - \sin \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)], \\
v_3 &= \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[\cos \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa) - \sin \theta t \tau']
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.4.4.

(4.1.36) ile verilen $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ akışı inextensible ise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(-\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(-\psi_1\beta_1 + \psi_2\beta_2 + \psi_3\beta_3) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) &= 0
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 \mp [r \cos \theta(\frac{t\kappa'}{\kappa^m})' + r \sin \theta(\frac{(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)}{\kappa^m})'] \\
&\mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \kappa \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\beta_2 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [\kappa \cos \theta(t\kappa') + \kappa \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\
&\mp [r \cos \theta(\frac{(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2)}{\kappa^m})' + r \sin \theta(\frac{(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)}{\kappa^m})'] \\
&\mp \frac{r}{\kappa^m} [-\tau \cos \theta(t\tau') - \tau \sin \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)], \\
\beta_3 &= \mp [r \cos \theta(\frac{t\tau'}{\kappa^m})' + r \sin \theta(\frac{(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)}{\kappa^m})'] \\
&\mp \frac{r}{\kappa^m} [\tau \cos \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \tau \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\psi_1 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(t\kappa') + \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)], \\
\psi_2 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) + \cos \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)], \\
\psi_3 &= \mp \frac{r}{\kappa^m} [-\sin \theta(t\tau') + \cos \theta(\kappa + 2t\kappa^2 - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]
\end{aligned}$$

dir.

5. BÖLÜM

UYGULAMALAR

Örnek 5.1.1.

$$\gamma(s) = \left(-\frac{5}{9} \cosh 3s, \frac{4}{3}s, -\frac{5}{9} \sinh 3s\right)$$

timelike eğrisini ele alalım, burada $-1 \leq s \leq 1$ dir. O halde bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\mathbf{T}(s) = \left(-\frac{5}{3} \sinh 3s, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \cosh 3s\right),$$

$$\mathbf{N}(s) = (-5 \cosh 3s, 0, -5 \sinh 3s),$$

$$\mathbf{B}(s) = \left(-\frac{4}{3} \sinh 3s, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \cosh 3s\right)$$

olarak hesaplanabilir. Şimdi buradan $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyini ve bu yüzeyin harmonik evolütünü bulalım.

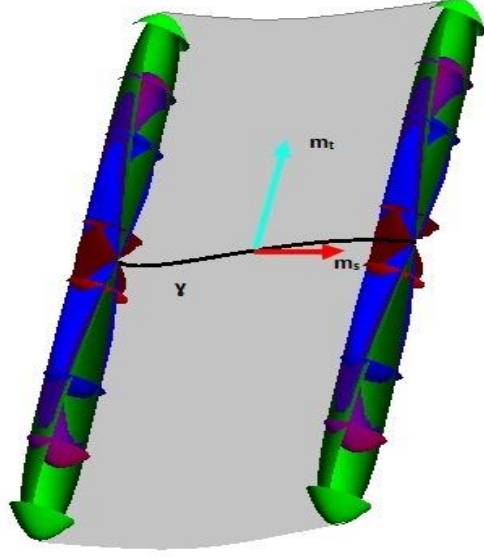
a) $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{P}}(s, t, \theta) = & -\frac{5}{9} \cosh 3s + [(t + rr' \mp r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} t\kappa^2 (\cos \theta - \sin \theta t\tau)] \\ & (-\frac{5}{3} \sinh 3s) + [t^2\kappa + rr't\kappa \mp r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t\kappa')) \\ & - \sin \theta t\kappa\tau](-5 \cosh 3s) + [r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} \cos \theta (t\kappa\tau) - \sin \theta (t^2\kappa^3 \\ & - \kappa - t\kappa')](-\frac{4}{3} \sinh 3s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathfrak{P}}(s, t, \theta) = & \frac{4}{3}s + \frac{4}{3}[(t + rr' \mp r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} t\kappa^2 (\cos \theta - \sin \theta t\tau)] \\ & + \frac{5}{3}[r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} \cos \theta (t\kappa\tau) - \sin \theta (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\mathfrak{P}}(s, t, \theta) = & -\frac{5}{9} \sinh 3s + [(t + rr' \mp r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} t\kappa^2 (\cos \theta \\ & - \sin \theta t)](-\frac{5}{3} \cosh 3s) + [t^2\kappa + rr't\kappa \mp r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t\kappa')) \\ & - \sin \theta t\kappa\tau](-5 \sinh 3s) + [r\sqrt{1+r'^2} \frac{1}{\kappa^m} \cos \theta (t\kappa\tau) - \sin \theta (t^2\kappa^3 - \kappa \\ & - t\kappa')](-\frac{4}{3} \cosh 3s) \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu yüzeyin grafiği $r(s) = s$ için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.1

Şekil 5.1 de $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin hareketi $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ anında sırasıyla kırmızı, mavi, mor ve yeşil renkleriyle gösterilmektedir.

b) $\overline{\mathfrak{P}}(s, t, \theta)$ harmonik evölüt yüzeyinin bileşenleri,

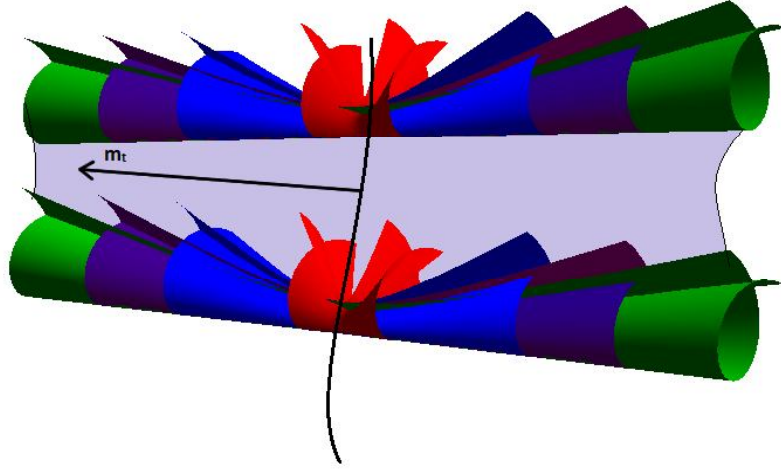
$$\begin{aligned}
x_{\overline{\mathfrak{P}}}(s, t, \theta) = & -\frac{5}{9} \cosh 3s - \frac{5t}{3} \sinh 3s + [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta \\
& - \sin \theta t \tau)] (-\frac{5}{3} \sinh 3s) + [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] (-\frac{5}{3} \sinh 3s) \lambda \\
& + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] (-5 \cosh 3s) \\
& + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] (-5 \lambda \cosh 3s) \\
& \mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] (-\frac{4}{3} \sinh 3s) \\
& \mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] (-\frac{4\lambda}{3} \sinh 3s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{\overline{\mathfrak{P}}}(s, t, \theta) = & \frac{4}{3} s + \frac{4}{3} t + \frac{4}{3} ([\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \\
& + \frac{4\lambda}{3} ([\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \mp \frac{5}{3} [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 \\
& - \kappa - t \kappa'))] \mp \frac{5\lambda}{3} [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{\overline{\mathfrak{P}}}(s, t, \theta) = & -\frac{5}{9} \sinh 3s - \frac{5t}{3} \cosh 3s + [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta \\
& - \sin \theta t \tau)] (-\frac{5}{3} \cosh 3s) + [\varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] (-\frac{5\lambda}{3} \cosh 3s) \\
& + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] (-5 \sinh 3s) \\
& + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] (-5 \lambda \sinh 3s) \\
& \mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] (-\frac{4}{3} \cosh 3s) \\
& \mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] (-\frac{4\lambda}{3} \cosh 3s)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\lambda = \frac{\epsilon}{\mathbf{H}}$ ve $\mathbf{H}$ ortalama eğriliği (4.2.9) eşitliğidir. Bu yüzeyin grafiği

$r(s) = s$ için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.2

Şekil 5.2 de $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin harmonik evolütütünün hareketi $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ anında sırasıyla kırmızı, mavi, mor ve yeşil renkleriyle gösterilmektedir.

Örnek 5.1.2.

$$\gamma(s) = \left(\frac{4}{9} \cos 3s, \frac{4}{9} \sin 3s, \frac{5}{3}s \right)$$

timelike eğrisini ele alalım, burada $0 \leq s \leq 2\pi$ dir. O halde bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \left(-\frac{4}{3} \sin 3s, \frac{4}{3} \cos 3s, \frac{5}{3} \right), \\ \mathbf{N}(s) &= \left(-4 \cos 3s, -4 \sin 3s, 0 \right), \\ \mathbf{B}(s) &= \left(\frac{5}{3} \sin 3s, -\frac{5}{3} \cos 3s, -\frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Şimdi buradan timelike eğrisiyle beraber $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi ve bu yüzeyin harmonik evoluttünü bulalım.

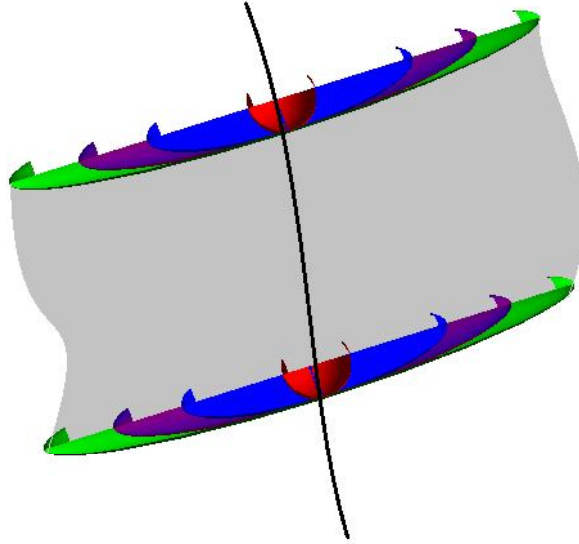
a) $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{L}}(s, t, \theta) = & \frac{4}{9} \cos 3s + [t \mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\ & (-\frac{4}{3} \sin 3s) + [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})](-4 \cos 3s) \\ & \mp r[\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')](\frac{5}{3} \sin 3s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathfrak{L}}(s, t, \theta) = & \frac{4}{9} \sin 3s + [t \mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\ & (\frac{4}{3} \cos 3s) + [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})](-4 \sin 3s) \\ & \mp r[\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')](\frac{5}{3} \cos 3s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\mathfrak{L}}(s, t, \theta) = & \frac{5}{3}s + \frac{5}{3}[t \mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\ & \mp r[\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')](\frac{4}{3}) \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu yüzeyin grafiği $r(s) = 1$ için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.3

Şekil 5.3 de $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin hareketi $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ anında sırasıyla kırmızı, mavi, mor ve yeşil renkleriyle gösterilmektedir.

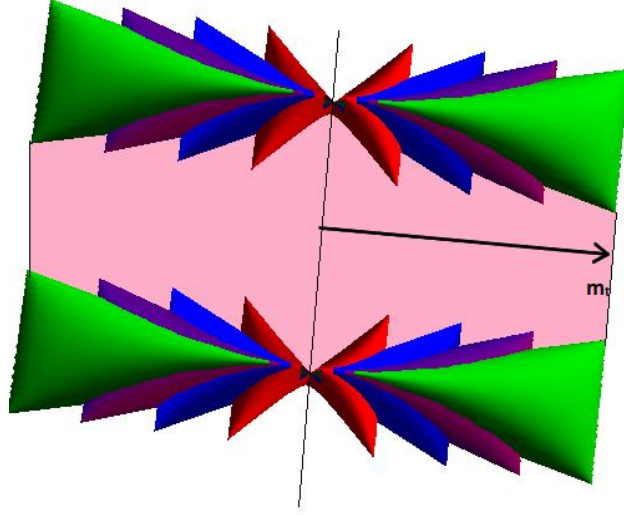
b) $\overline{\mathfrak{L}}(s, t, \theta)$ harmonik evölüt yüzeyinin bileşenleri

$$\begin{aligned}
x_{\overline{\mathfrak{L}}}(s, t, \theta) = & \frac{4}{9} \cos 3s - \frac{4t}{3} \sin 3s - \frac{4}{3} \sin 3s [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] - \frac{4\lambda}{3} \sin 3s [\mp r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\
& + [t^2\kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] (-4 \cos 3s) + \lambda [t^2\kappa \\
& \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] (-4 \cos 3s) \mp r [\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')] (\frac{5}{3} \sin 3s) \mp \lambda r [\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')] (\frac{5}{3} \sin 3s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{\overline{\mathfrak{L}}}(s, t, \theta) = & \frac{4}{9} \sin 3s + \frac{4t}{3} \cos 3s \mp [r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} \\
& - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] (\frac{4}{3} \cos 3s) \mp [r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\
& (\frac{4\lambda}{3} \cos 3s) + [t^2\kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] (-4 \sin 3s) \\
& + [t^2\kappa \mp r (\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] (-4\lambda \sin 3s) \\
& \mp r [\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')] (-\frac{5}{3} \cos 3s) \\
& \mp r [\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')] (-\frac{5\lambda}{3} \cos 3s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{\overline{\mathfrak{L}}}(s, t, \theta) = & \frac{5}{3} s + \frac{5t}{3} \mp \frac{5}{3} [r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \\
& \mp \frac{5\lambda}{3} [r (\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] \mp \frac{4}{3} r [-\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\
& + \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')] \mp \frac{4\lambda}{3} r [-\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \\
& + \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')]
\end{aligned}$$

olur. Burada $\lambda = \frac{\epsilon}{\mathbf{H}}$ ve $\mathbf{H}$ ortalama eğriliği (4.2.15) eşitliğidir. Bu yüzeyin grafiği $r(s) = 1$ için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.4

Şekil 5.4 de $\mathcal{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin harmonik evolütütünün hareketi $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ anında sırasıyla kırmızı, mavi, mor ve yeşil renkleriyle gösterilmektedir.

Örnek 5.1.3.

$$\gamma(s) = \left(-\frac{3}{25} \sinh 5s, \frac{4}{5}s, -\frac{3}{25} \cosh 5s\right)$$

spacelike eğrisini ele alalım, burada $-1 \leq s \leq 1$ dir. O halde bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \left(-\frac{3}{5} \cosh 5s, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \sinh 5s\right), \\ \mathbf{N}(s) &= (-3 \sinh 5s, 0, -3 \cosh 5s), \\ \mathbf{B}(s) &= \left(-\frac{4}{5} \cosh 5s, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \sinh 5s\right). \end{aligned}$$

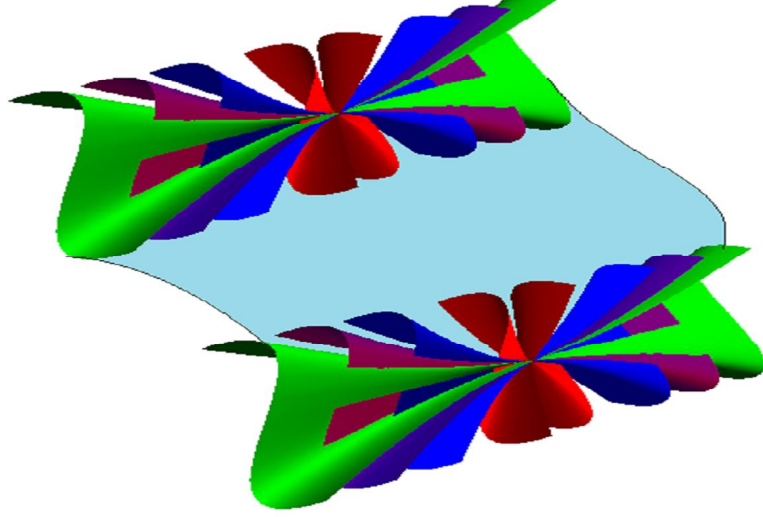
Dolayısıyla $\mathfrak{K}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{K}}(s, t, \theta) = & -\frac{3}{25} \sinh 5s + [(t - rr' \mp \frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} t\kappa^2 (-\cosh \theta \\ & - \sinh \theta t\tau))(-\frac{3}{5} \cosh 5s) + [t^2\kappa - rr't\kappa \mp \frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} (\cosh \theta(\kappa + t\kappa') \\ & + \sinh \theta t\kappa\tau))](-3 \sinh 5s) \mp [\frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} (\cosh \theta t\kappa\tau - \sinh \theta(t^2\kappa^3 \\ & + \kappa + t\kappa'))](-\frac{4}{5} \cosh 5s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathfrak{K}}(s, t, \theta) = & \frac{4}{5}s + \frac{4}{5}[(t - rr' \mp \frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} t\kappa^2 (-\cosh \theta - \sinh \theta t\tau)] \\ & - \frac{3}{5}[\mp \frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} (\cosh \theta t\kappa\tau - \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa + t\kappa'))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\mathfrak{K}}(s, t, \theta) = & -\frac{3}{25} \cosh 5s + [(t - rr' \mp \frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} t\kappa^2 (-\cosh \theta \\ & - \sinh \theta t\tau))(-\frac{3}{5} \sinh 5s) + [t^2\kappa - rr't\kappa \mp \frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} (-\cosh \theta(\kappa + t\kappa') \\ & + \sinh \theta t\kappa\tau))](-3 \cosh 5s) \mp [\frac{r\sqrt{1+r'^2}}{\kappa^m} (\cosh \theta t\kappa\tau - \sinh \theta(t^2\kappa^3 + \kappa \\ & + t\kappa'))](-\frac{4}{5} \sinh 5s) \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu yüzeyin grafiği $r(s) = s$ için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.5

Şekil 5.5 de $\mathfrak{K}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyininin hareketi $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ anında sırasıyla kırmızı, mavi, mor ve yeşil renkleriyle gösterilmektedir.

Örnek 5.1.4.

$$\gamma = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}s, \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right), \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right) \right)$$

spacelike eğrisini ele alalım. Öyleki $\kappa = \frac{1}{3}$ ve $\tau = \frac{2}{3}$ dür. O halde bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right), \frac{\sqrt{3}}{3} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right) \right), \\ \mathbf{N} &= \left(0, \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right), \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right) \right), \\ \mathbf{B} &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right), -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s\right) \right) \end{aligned}$$

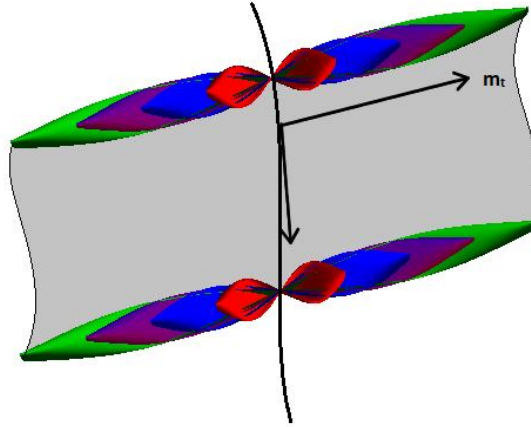
olarak hesaplanabilir. Şimdi $\mathfrak{Q}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin parametrik denklemi

$$x_{\mathfrak{Q}}(s, t, \theta) = \frac{2\sqrt{3}}{3}s \mp \frac{2\sqrt{3}r}{3\kappa^m} [\cosh \theta(-t\kappa') + \sinh \theta(t\tau)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)] \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cosh \theta(t\tau') + \sinh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)](-\frac{\sqrt{3}}{3}),$$

$$y_{\mathfrak{Q}}(s, t, \theta) = \cosh(\frac{\sqrt{3}}{3}s) \mp \frac{\sqrt{3}r}{3\kappa^m} [\cosh \theta(-t\kappa') + \sinh \theta(t\tau)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)] \sinh(\frac{\sqrt{3}}{3}s) + [t \mp \frac{r}{\kappa^m} \cosh \theta(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2) \mp \frac{r}{\kappa^m} (\tau t^2 \kappa' + t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \cosh(\frac{\sqrt{3}}{3}s) \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cosh \theta(t\tau') + \sinh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)](-\frac{2\sqrt{3}}{3} \sinh(\frac{\sqrt{3}}{3}s)),$$

$$z_{\mathfrak{Q}}(s, t, \theta) = \sinh(\frac{\sqrt{3}}{3}s) \mp \frac{\sqrt{3}r}{3\kappa^m} [\cosh \theta(-t\kappa') + \sinh \theta(t\tau)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)] \cosh(\frac{\sqrt{3}}{3}s) + [t \mp \frac{r}{\kappa^m} \cosh \theta(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2) \mp \frac{r}{\kappa^m} (\tau t^2 \kappa' + t\tau' - t^2 \tau' \kappa)] \sinh(\frac{\sqrt{3}}{3}s) \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cosh \theta(t\tau') + \sinh \theta(1 - t\kappa)(\kappa - t\kappa^2 + t\tau^2)](-\frac{2\sqrt{3}}{3} \cosh(\frac{\sqrt{3}}{3}s))$$

biçimindedir. Bu yüzeyin grafiği $r(s) = 1$ için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.6

Şekil 5.6 de $\mathfrak{Q}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin hareketi $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ anında sırasıyla kırmızı, mavi, mor ve yeşil renkleriyle gösterilmektedir.

Örnek 5.1.5.

$$\gamma = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(s), \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh(s) \right)$$

spacelike eğrisini ele alalım, burada $0 \leq s \leq 2\pi$ dir. O halde bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh(s), \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(s) \right), \\ \mathbf{N} &= (\sinh(s), 0, \cosh(s)), \\ \mathbf{B} &= \left(\frac{1}{2} \cosh(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \sinh(s) \right) \end{aligned}$$

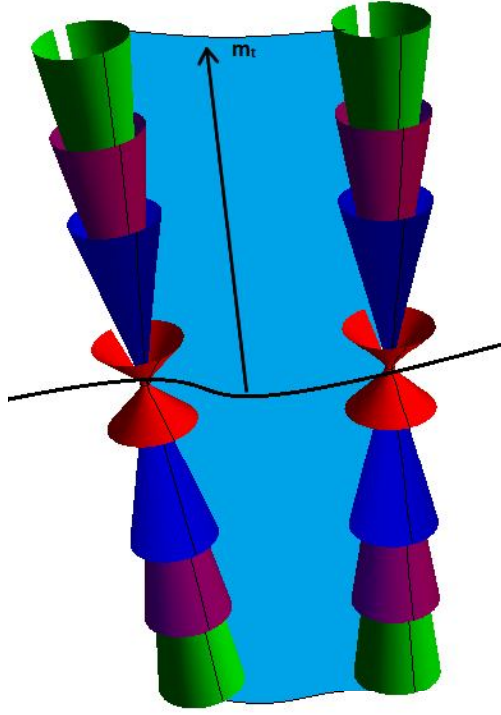
olarak hesaplanabilir. Buradan $R(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x_R(s, t, \theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(s) \mp \frac{r}{\kappa^m} [(\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3))] \\ &(\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh(s) \mp \frac{r}{\kappa^m} [\sinh \theta(\kappa + t\kappa') + \cosh \theta(t\tau^2)](\sinh(s) + \frac{1}{2}[t \\ &\mp \frac{r}{\kappa^m} (\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa'))]) \cosh(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_R(s, t, \theta) &= \frac{s}{2} \mp \frac{1}{2} \frac{r}{\kappa^m} [(\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3))] \\ &-\frac{\sqrt{3}}{2} [t \mp \frac{r}{\kappa^m} (\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa'))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_R(s, t, \theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh(s) \mp \frac{r}{\kappa^m} [(\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3))] \\ &(\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(s)) \mp \frac{r}{\kappa^m} [\sinh \theta(\kappa + t\kappa') + \cosh \theta(t\tau^2)] \cosh(s) \\ &+\frac{1}{2} [t \mp \frac{r}{\kappa^m} (\cosh \theta(t\tau^2) + \sinh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa'))] \sinh(s) \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu yüzeyin grafiği $r(s) = 1$ için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.7

Şekil 5.7 de $R(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin hareketi $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ anında sırasıyla kırmızı, mavi, mor ve yeşil renkleriyle gösterilmektedir.

6. BÖLÜM

SONUÇ

Minkowski uzayında hareketli merkez eğrileri bir parametrelili eğri ailesi olan eğrilerin timelike ve spacelike durumlarına göre 5-eksenli kanal ve tüp yüzeyleri elde edilmiştir. 5-eksenli kanal ve tüp yüzeylerinin I. ve II. temel formunun katsayıları, Gauss ve ortalama eğrilikleri bulundu. Daha sonra elde edilen 5-eksenli yüzeylerin paralel yüzeyleri oluşturuldu. Yine bulunan 5-eksenli yüzeylerin harmonik evölütleri bulundu. Son olarak bu yüzeylerin elastik olmayan akışları elde incelendi.

4. bölümdeki teoremlere bağlı olarak aşağıdaki bazı sonuçlar elde edildi.

Sonuç 6.1.1. Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{T}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{P}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(s, t, \theta) = & \gamma + [t + \varphi \mp \frac{\xi t \kappa^2}{\kappa^m} (\cos \theta - \sin \theta t \tau)] \mathbf{T} \\ & + [t^2 \kappa + \varphi t \kappa \mp \frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (\kappa + t \kappa') - \sin \theta t \kappa \tau)] \mathbf{N} \\ & \mp [\frac{\xi}{\kappa^m} (\cos \theta (t \kappa \tau) - \sin \theta (t^2 \kappa^3 - \kappa - t \kappa'))] \mathbf{B}\end{aligned}$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$, $\xi(s) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}$ dir.

Sonuç 6.1.2. Minkowski uzayında timelike γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{N}$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\mathfrak{S}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyi

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(s, t, \theta) = & \gamma \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t \kappa') + \sin \theta (\kappa t \tau + t^2 \tau \kappa^2 - t^2 \tau^3)] \mathbf{T} \\ & + (t \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (\kappa + t \kappa^2 - t \tau^2) + \sin \theta (\tau t^2 \kappa' - t \tau' - t^2 \tau' \kappa)]) \mathbf{N} \\ & \mp \frac{r}{\kappa^m} [\cos \theta (t \tau') + \sin \theta (\kappa + 2t \kappa^2 - t \tau^2 + t^2 \kappa^3 - t^2 \tau^2 \kappa)] \mathbf{B}\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 6.1.3. Minkowski uzayında timelike asli normallere sahip olan bir space-like γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + t\mathbf{B}$ eğrisiyle verilirse, bu takdirde $D(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} D(s, t, \theta) = & \gamma + [\varsigma \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\kappa\tau) + \cosh \theta(t^2\tau^3))] \mathbf{T} \\ & + [\varsigma t\tau \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(\kappa + t\kappa') + \cosh \theta(t\tau^2))] \mathbf{N} \\ & + [t \mp \frac{\sigma}{\kappa^m}(\sinh \theta(t\tau^2) + \cosh \theta(-t^2\kappa\tau^2 + \kappa + t\kappa'))] \mathbf{B} \end{aligned}$$

dir. Burada $\varsigma(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

Sonuç 6.1.4. Minkowski uzayında spacelike asli normallere sahip olan bir space-like γ eğrisinin bir parametrelili ailesi $\mathbf{m} = \gamma + r(\cos t\mathbf{N} + \sin t\mathbf{B})$ merkez eğrisiyle verilirse, bu takdirde $\Omega(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} \Omega(s, t, \theta) = & \gamma + [-\varphi + \varphi r\kappa \cos t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m}((1 - r\kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t + r\kappa\tau \sin t)) \\ & \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m}(((r' \sin t + r\tau \cos t)((\kappa - r\kappa^2 \cos t + (r' \cos t + r\tau \sin t)' \\ & + \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r\tau \sin t)((r' \sin t + r\tau \cos t)' + r' \tau \cos t \\ & + r\tau^2 \sin t))] \mathbf{T} + [r \cos t - \varphi r' \cos t - \varphi r\tau \sin t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m}(\kappa - r\kappa^2 \cos t \\ & + (r' \cos t + r\tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t) \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m}(((1 - r\kappa \cos t)((r' \sin t \\ & + r\tau \cos t)' + r' \tau \cos t + r\tau^2 \sin t)) - (r' \sin t + r\tau \cos t)((1 - r\kappa \cos t)' \\ & - \kappa r' \cos t + r\kappa\tau \sin t))] \mathbf{N} + [r \sin t - \varphi r' \sin t - \varphi r\tau \cos t \mp \frac{\sigma \cosh \theta}{\kappa^m}((r' \sin t \\ & + r\tau \cos t)' + r' \tau \cos t + r\tau^2 \sin t) \mp \frac{\sigma \sinh \theta}{\kappa^m}((1 - r\kappa \cos t)((\kappa - r\kappa^2 \cos t \\ & + (r' \cos t + r\tau \sin t)' + \tau r' \sin t + r\tau^2 \cos t)) - (r' \cos t + r\tau \sin t) \\ & ((1 - r\kappa \cos t)' - \kappa r' \cos t - r\tau\kappa \sin t))] \mathbf{B} \end{aligned}$$

dir. Burada $\varphi(s) = r(s)r'(s)$ ve $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}$ dir.

Sonuç 6.1.5. (4.1.28) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{A}(s, t, \theta)$ 5-eksenli kanal yüzeyinin

paralel yüzeyi $\widetilde{\mathfrak{A}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{A}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{N} + (1+a)((\varphi + \varphi t\kappa) \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\kappa' \\ & \mp \frac{1}{\kappa^m}\xi \sin \theta(\kappa t\tau + t^2\tau\kappa^2 - t^2\tau^3)]\mathbf{T} \mp \frac{\xi}{\kappa^m}[(\cos \theta + t)(\kappa + t\kappa^2 - t\tau^2) \\ & + \sin \theta(\tau t^2\kappa' - t\tau' - t^2\tau'\kappa)]\mathbf{N} + [\varphi t\tau \mp \frac{1}{\kappa^m}(\xi \cos \theta + t)t\tau' \mp \frac{\xi \sin \theta}{\kappa^m}(\kappa + 2t\kappa^2 \\ & - t\tau^2 + t^2\kappa^3 - t^2\tau^2\kappa)]\mathbf{B})\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 6.1.6. (4.1.10) denklemiyle verilen $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin harmonik evolutü $\overline{\mathfrak{L}}(s, t, \theta)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{L}}(s, t, \theta) = & \gamma + t\mathbf{T} + (\mp [r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})]\mathbf{T} + [t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} \\ & - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})]\mathbf{N} \mp r[\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa')]\mathbf{B})(1 + 2\epsilon\Lambda\{[(-\eta_1^2 + \eta_2^2 \\ & + \eta_3^2)[-(\rho_1)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] + (\rho_2)_\theta[t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} \\ & - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\rho_3)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]] - 2[(-\eta_1\rho_1 \\ & + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3)[-(\eta_1)[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})] + (\eta_2)_\theta[t^2\kappa \mp r(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} \\ & - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m})] + (\eta_3)_\theta[\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{1}{\kappa^m}(t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'))]] + [\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2][-(\eta_1' + \eta_2\kappa) \\ & [\mp r(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m})]]\}^{-1})\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 6.1.7. (4.1.10) ile verilen $\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ 5-eksenli tüp yüzeyinin $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{L}(s, t, \theta)$ akışı inextensible ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) &= 0\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \mp r \left[-\sin \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m} \right], \\
\rho_2 &= \mp r \left[-\sin \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \right], \\
\rho_3 &= \mp r \left[-\sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} - \cos \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa') \right], \\
\eta_1 &= 1 \mp \left(r \left(\cos \theta \left(\frac{t\kappa^2}{\kappa^m} \right)' - \sin \theta \left(\frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m} \right)' \right) + t^2\kappa^2 \mp \left(r\kappa \left(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \right) \right) \right), \\
\eta_2 &= t\kappa \mp \left(r\kappa \left(\cos \theta \frac{t\kappa^2}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t^2\kappa^2\tau}{\kappa^m} \right) + (t^2\kappa' \mp r \left(\cos \theta \left(\frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} \right)' - \sin \theta \left(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \right)' \right) \right) \\
&\quad \mp \left(r \left(-\cos \theta \frac{t\kappa\tau^2}{\kappa^m} + \sin \theta \frac{1}{\kappa^m} (t^2\kappa^3\tau - \kappa\tau - t\tau\kappa') \right) \right), \\
\eta_3 &= t^2\kappa\tau \mp \left(r\tau \left(\cos \theta \frac{\kappa + t\kappa'}{\kappa^m} - \sin \theta \frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \right) \mp \left(r \left(\cos \theta \left(\frac{t\kappa\tau}{\kappa^m} \right)' - \sin \theta \left(\frac{t^2\kappa^3 - \kappa - t\kappa'}{\kappa^m} \right)' \right) \right)
\end{aligned}$$

dir.

Bu çalışma 5-eksenli kanal yüzeylerin araştırılmasında önemli bir referans olacaktır. Elde edilen bu yüzeylerin farklı geometrik özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Aras, E.**, 2009. Generating cutter swept envelopes in five axis milling by two parameter families of spheres, *Computer-Aided Design*, 41 (2), 95–105.
- [2] **Bizzarri, M., Lávička, M.**, 2012. A symbolic-numerical method for computing approximate parameterizations of canal surfaces, *Computer-Aided Design*, 44, 846–857.
- [3] **Beem, J. K., Ehrlich, E. P.**, 1981. Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker. Inc., New York.
- [4] **Chiou, C-J., Lee, Y-S.**, 2002. Swept surface determination for five-axis numerical control machining, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42, 1497-1507.
- [5] **Chen, B.Y.**, 1973. Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker Inc., pp. 310, New York.
- [6] **Doğan, F.**, 2012. Genelleştirilmiş kanal yüzeyleri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [7] **Doğan, F., Yaylı, Y.**, 2012. Parametrization of Perspective Silhouettes on Canal Surfaces in Minkowski 3-Space, *Journal of Mathematical and Computational Science*, (2) 1, 374-385.
- [8] **Gulnur, S., Bayram E., and Kasap E.**, 2013. Surface with a common asymptotic curve in Minkowski 3-space, arXiv:1305.0382v1.
- [9] **García, M.C.M., Ugail, H., and Yilmaz, A.**, 2012. On Bézier Surfaces in Three-Dimensional Minkowski Space, Dpto. de Geometría y Topología Universidad de Sevilla Zlatibor.
- [10] **Gray, A.**, 1999. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, second ed., CrcPress, USA.
- [11] **Guler, E.**, 2010. Time-like helicoidal and rotational surfaces with light-like profile curve in three dimensional Minkowski space, Ph. D. Thesis, Ankara

University.

[12] **Hacısalıhoğlu, H. H.**, 2000. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Cilt 3, 205 s.

[13] **Karacan, M.K., Yoon D.W., Tuncer.Y.**, 2006. Weingarten and Linear Weingarten Canal Surfaces, arXiv:1106.3175.

[14] **Karacan, M.K., Bukcu B.**, 2007. An alternative moving frame for tubular surface around the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-Space, *Mathematica Moravica*, 11, 47–54.

[15] **Karacan, M.K., Bukcu B.**, 2007. An alternative moving frame for tubular surface around timelike curves in Minkowski 3-Space, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 12 (2), 73-80.

[16] **Karacan, M.K., Bukcu B.**, 2008. An alternative moving frame for a tubular surface around a spacelike curve with a spacelike normal in Minkowski 3-Space, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 57, 193-201.

[17] **Körpınar,T., Turhan, E.**, 2011. On characterization of B-canal surfaces in terms of biharmonic B-slant helices according to Bishop frame in Heisenberg group Heis^3 , *J. Math. Anal. Appl.*, 382, 57–65.

[18] **Kim, KU-J., Lee, In-K.**, 2003. The perspective silhouette of a canal surface, *Computer Graphics Forum*, 22 (1), 15-22.

[19] **Kwon, D.Y., Park, F.C., Chi, D.P.**, 2005. Inextensible flows of curves and developable surfaces, *Appl. Math. Lett.*, 18,1156-1162.

[20] **Lartigue, C., Duc, E., Affouard, A.**, 2003. Tool path deformation in 5-axis flank milling using envelope surface, *Comput Aided Design*, 35, 375–382.

[21] **Lopez, R.**, 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, arXiv:0810.3351v2.

[22] **Milne, J.J.**, 1911. An Elementary Treatise on Cross-Ratio Geometry: With Historical Notes, Cambridge University Press.

- [23] **Nomizu, K.** 1966. Fundamentals of Linear Algebra, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [24] **O’Neill, B.**, 1983. Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York.
- [25] **Öztürk, E., Budak, E.**, 2006. 5-Eksen Frezelemede Kuvvet ve Şekil Hatalarının Modellenmesi, TİMAK-Tasarım imalat Analiz Kongresi, BALIKESİR.
- [26] **Roth, D., Bedi, S., Ismail, F., Mann, S.**, 2001. Surface swept by a toroidal cutter during 5-axis machining, *Computer-Aided Design*, 33 (1), 57–63.
- [27] **Sipus, Z.M., Volenec, V.**, 2014. The harmonic evolute of a surface in Minkowski 3-space, *Mathematical Communications*, (19), 43-55.
- [28] **Tsay, D.M., Her, M.J.**, 2001. Accurate 5-axis machining of twisted ruled surfaces, *ASME J. Manuf. Sci. Eng.*, 123 (4), 731–738.
- [29] **Tunç, L.T.**, 2006. Geometrical analysis and optimization of 5-axis milling processes, Ph. D. Thesis, Sabancı University.
- [30] **Turgut, A.**, 1995. 3-boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [31] **Wang, W.P., Wang, K.K.**, 1986. Geometric modeling for swept volume of moving solids, *Computer Graphics and Applications*, 6 (12), 8–17.
- [32] **Xu, Z., Feng, R., and Sun, J.G.**, 2006. Analytic and algebraic properties of canal surfaces, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 195 (1-2), 220-228.
- [33] **Wang, W., Joe, B.**, 1997. Robust computation of the rotation minimizing frame for sweep surface modeling, *Computer Aided Design*, 29 (5), 379–391.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ' da doğmuşum. İlk ve orta öğretimimi Elazığ' da tamamladım. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 2008 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2011 yılında yüksek lisansımı tamamladım. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora başladım. Evliyim.