

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

134 736

**SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE ELEKTROSTATİK ALAN
PROBLEMLERİNİN ANALİZİNDE PARABOLİK
İTERPOLASYON FONKSİYONLARININ KULLANILMASI**

Belkıs ERİŞTİ

T.C. FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KÜTÜPHANE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

134 736

ELAZIĞ, 2003

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE ELEKTROSTATİK ALAN
PROBLEMLERİNİN ANALİZİNDE PARABOLİK
İTERPOLASYON FONKSİYONLARININ KULLANILMASI**

Belkıs ERİŞTİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Bu tez, 03.02.2003 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği / ~~çokluğu~~ ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM

Üye: Prof. Dr. Mehmet CEBECİ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Zafer AYDOĞAN

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim kurulu'nun 19/02/2003 tarih ve 7/1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasına, sahip olduğu bilgi ve tecrübeleriyle yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM'a gösterdiği ilgiden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışmam boyunca, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eşim Öğr. Gör. Hüseyin ERİŞTİ'ye ve beni bu günlere getiren anne ve babama çok teşekkür eder saygı ve sevgilerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
ŞEKİLLER.....	III
TABLOLAR.....	V
SİMGELER.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII

1. GİRİŞ

1.1. Sınır Elemanları Yöntemi'nin Literatürdeki Yeri Ve Diğer Yöntemler.....	1
--	---

2. ELEKTROSTATİK ALANLAR

2.1. Genel Bilgi.....	6
2.2. Statik Alanlar.....	6

3. BÖLGE ANALİZİ

3.1. Genel Bilgi.....	15
3.2. Green formülü.....	16
3.3. Laplace Denkleminin Temel Çözümü.....	17
3.3.1. Dirac Delta Fonksiyonu.....	17
3.3.2. Temel Çözüm.....	19
3.3.3. Diğer Denklemler Tipleri ve Temel Çözümleri.....	22

4. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

4.1. Genel Bilgi.....	24
4.2. Sınır İntegral Denklemleri.....	24
4.2.1. Sınır Noktaları İçin Sınır İntegral Denklemleri.....	24
4.2.1.1. $c(k)$ Katsayısının Hesaplanması.....	26
4.2.2. İç Noktalar İçin Sınır İntegral Denklemi.....	27
4.3. Sınırların Gösterimi ve Sınır Elemanları Yönteminin Uygulanması.....	28
4.4. Gauss Sayısal İntegrasyonu.....	31
4.5. Sınır Elemanları Yönteminde Numaralandırma Kuralı.....	32

5. İNTERPOLASYON FONKSİYONLARI VE ETKİ KATSAYILARI

5.1.	Fonksiyonların Gösterimi.....	33
5.2.	Sabit Eleman.....	33
5.2.1.	Etki Katsayılarının Hesaplanması.....	35
5.2.1.1.	G_{ks} Etki İntegrallerinin Hesaplanması.....	36
5.2.1.2.	H_{ks} Etki İntegrallerinin Hesaplanması.....	38
5.2.2.	Tekil İntegrallerin Hesaplanması.....	39
5.3.	Lineer Eleman.....	40
5.3.1.	Etki katsayılarının Hesaplanması.....	43
5.3.1.1.	G_{ks}^1 ve G_{ks}^2 Etki integrallerinin Hesaplanması.....	44
5.3.1.2.	H_{ks}^1 ve H_{ks}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması.....	44
5.3.2.	Tekil İntegrallerinin Hesaplanması.....	45
5.4.	Parabolik Eleman.....	47
5.4.1.	Etki Katsayılarının Hesaplanması.....	50
5.4.1.1.	G_{ks}^1 , G_{ks}^2 ve G_{ks}^3 Etki İntegrallerinin Hesaplanması.....	51
5.4.1.2.	H_{ks}^1 , H_{ks}^2 ve H_{ks}^3 Etki İntegrallerinin Hesaplanması.....	51
5.4.2.	Tekil İntegrallerinin Hesaplanması.....	52
 6. BİLGİSAYAR PROGRAMI		
6.1.	Genel Bilgi.....	60
6.2.	SABEL Programı.....	61
6.3.	LİNEL Programı.....	62
6.4.	PAREL Programı.....	62
 7. UYGULAMALAR		
7.1.	Genel Bilgi.....	64
7.2.	Düzlemsel Elektrot Sistemi.....	64
7.2.1	Elektrot Sisteminde, Sınır Değerlerinin Analizi.....	64
7.2.2.	Düzlemsel Elektrot Sisteminde, Belirlenen İç Noktalardaki Değerlerin Analizi.....	67
7.3.	Koaksiyel Kablo.....	71
7.4	Küre-Küre Sistemi.....	73
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....		75
KAYNAKLAR.....		77

ŞEKİLLER

	Sayfa
Şekil 2.1.a Bir elektrik alanı.....	8
Şekil 2.1.b harici kuvvetin neden olduğu bir elektrik alanındaki test yükünün hareketi.....	8
Şekil 2.2 Bir elektrik alanında bir c kapalı yolu boyunca bir q yükünün hareketi.....	8
Şekil 2.3 Alan şiddetinin eşpotansiyel yüzeyler yardımıyla hesabı.....	9
Şekil 3.1 Problem bölgesinin geometrik tanımı.....	15
Şekil 3.2 Dirac delta fonksiyonu.....	18
Şekil 3.3 İki boyutlu çözüm bölgesi.....	19
Şekil 3.4 Temel çözüm için yaklaşım.....	21
Şekil 4.1 Sınırdaki 'k' noktasının gösterilmesi.....	24
Şekil 4.2 'k' noktasının geometrik gösterimi.....	26
Şekil 4.3 İç noktadaki 'k' noktasının gösterilmesi.....	27
Şekil 4.4 İç noktadaki 'k' noktası etrafındaki ϵ yarıçaplı alan ifadesi.....	28
Şekil 4.5 Sınırın bölmelenmesi.....	28
Şekil 4.6.a Bölmelenmiş problem bölgesi.....	29
Şekil 4.6.b Sabit Eleman.....	29
Şekil 4.6.c Lineer Eleman.....	29
Şekil 4.6.d Parabolik Eleman.....	29
Şekil 5.1 Sabit elemanın problem bölgesinde genel gösterimi.....	33
Şekil 5.2.a Problem bölgesi sınırına denk olmayan sabit eleman.....	34
Şekil 5.2.b Problem bölgesi sınırına denk olan sabit eleman.....	34
Şekil 5.3 Sabit eleman koordinat sistemi.....	35
Şekil 5.4 Gauss integrasyon noktalarının dağılımı.....	37
Şekil 5.5 'k' düğümünün integral denklemi için geometrik gösterimi.....	39
Şekil 5.6 Süreksiz eleman.....	40
Şekil 5.7 Lineer elemanın problem bölgesinde genel gösterimi.....	41
Şekil 5.8 Lineer elemanın lokal koordinat sisteminde gösterimi.....	41
Şekil 5.9 'k' düğümünün, s elemanının birinci düğümü üzerinde bulunması	45
Şekil 5.10 'k' düğümünün, s elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunması	45
Şekil 5.11 Parabolik elemanın problem bölgesinde genel gösterimi.....	47
Şekil 5.12 Parabolik elemanın lokal koordinat ile gösterilmesi.....	48

Şekil 5.13	'k' düğümünün, 's' elemanının birinci düğümü üzerinde bulunması	53
Şekil 5.14	'k' düğümünün, 's' elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunması	56
Şekil 7.1	Düzlemsel elektrot sistemi.....	64
Şekil 7.2	40 elemana bölmelenmiş düzlemsel elektrot sistemi.....	65
Şekil 7.3	Düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında elde edilen çözümlerin karşılaştırılması.....	67
Şekil 7.4	Düzlemsel elektrot sisteminde belirlenen iç noktaların gösterimi.	67
Şekil 7.5	Tanımlanan iç noktalarda analitik çözümler ile SABEL program çözümlerinin karşılaştırılması.....	68
Şekil 7.6	Tanımlanan iç noktalarda analitik çözümler ile LİNEL program çözümlerinin karşılaştırılması.....	69
Şekil 7.7	Tanımlanan iç noktalarda analitik çözümler ile PAREL program çözümlerinin karşılaştırılması.....	70
Şekil 7.8	Koaksiyel kablonun çeyrek kesiti.....	71
Şekil 7.9	28 Elemana bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımının karşılaştırılması.....	72
Şekil 7.10	112 Elemana bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımının karşılaştırılması.....	73
Şekil 7.11	-100 V ve + 100 V'luk küre-küre sistemi.....	73
Şekil 7.12	Küre-küre sisteminde küreler etrafındaki potansiyel dağılım.....	74

TABLÖLAR

Tablo 4.1	Kurallı Gauss noktaları (apsisleri) ve ağırlık faktörleri.....	31
Tablo 7.1	40 Elemanlı düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında SABEL programı çözüm sonuçları.....	65
Tablo 7.2	40 Elemanlı düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında LİNEL programı çözüm sonuçları.....	66
Tablo 7.3	40 Elemanlı düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında PAREL programı çözüm sonuçları.....	66
Tablo 7.4	İç noktalarda SABEL programı çözüm sonuçları.....	68
Tablo 7.5	İç noktalarda LİNEL programı çözüm sonuçları.....	69
Tablo 7.6	İç noktalarda PAREL programı çözüm sonuçları.....	70
Tablo 7.7	28 Eleman ile bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımı.....	71
Tablo 7.8	112 Elemana bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımı.....	72

SİMGELER

D	: Elektrik akı yoğunluğu (C/m^2).
E	: Elektrik alan şiddeti (V/m).
E_n	: Birim vektör yönünde alan şiddeti (V/m).
E_x, E_y, E_z	: x, y, z yönlerindeki alan şiddeti (V/m).
Q	: Elektrik yükü (C).
u	: Potansiyel (V).
W	: Enerji (J).
F	: Kuvvet (N).
ρ	: Hacimsel yük yoğunluğu (C/m^3).
∇	: Gradient operatörü.
Δ_z	: Dirac delte fonksiyonu.
u	: Sınır üzerinde bilinen potansiyel değer.
q	: Sınır üzerinde bilinen potansiyelin türevinin değeri.
N_1, N_2, N_3	: Şekil fonksiyonları.
x, y	: Global koordinat sistemi.
ξ, η	: Lokal koordinat sistemi.
w_i	: Ağırlık faktörü.
J	: Jacobian tanımı.
B	: Problem bölgesi.
∂B	: Problem bölgesinin sınırı.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE ELEKTROSTATİK ALAN PROBLEMLERİNİN ANALİZİNDE PARABOLİK İNTERPOLASYON FONKSİYONLARININ KULLANILMASI

Belkıs ERİŞTİ

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı

2003, Sayfa : 78

Bu çalışmada, Sınır Elemanları Yöntemi'nde parabolik sınır elemanları kullanılarak iki boyutlu elektrostatik alan problemleri hesaplanmıştır. Ayrıca, sabit ve lineer sınır elemanlarıda incelenerek, her üç eleman tipi için ayrı programlar geliştirilmiştir.

Bu amaçla, Laplace ve Poisson denklem tipinde ifade edilen bölge denklemlerine ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak Green formülü ile sınır integral denklemi elde edilmiştir. Sınır integral denklemleri, parabolik sınır elemanları ile ayrıştırılarak matris formuna getirilmiştir. Bu matriste etki katsayıları, Gauss sayısal integrasyonu kullanılarak, tekil integraller ise analitik olarak hesaplanmıştır. Probleme Dirichlet ve Neumann sınır şartları uygulanarak, sınır üzerinde bilinmeyenlerden oluşan denklem sistemi çözülerek sınır bilinmeyenleri hesaplanmıştır. Daha sonra, hesaplanan ve bilinen sınır değerleri kullanılarak istenen iç noktalardaki gerilim değerleri bulunmaktadır.

Sonuç olarak, geliştirilen üç program düzlemsel elektrot ve koaksiyel kablo örneklerine uygulanarak elde edilen değerler analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Sınır Elemanları Yöntemi, Sınır İntegral Denklemi, Elektrostatik Alan, Laplace ve Poisson Denklemleri, Sabit Eleman, Lineer Eleman, Parabolik Eleman.

ABSTRACT

Master Thesis

THE USE OF PARABOLIC INTERPOLATION FUNCTIONS IN ANALYZING ELECTROSTATIC FIELD PROBLEMS BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Belkıs ERIŞTİ

Fırat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical Education

2003, Page: 78

In this study, two dimensional electrostatic field problems have been calculated by using the parabolic boundary elements of the Boundary Element Method. Furthermore, constant and linear boundary elements were investigated and the three different programs belong to three boundary elements were developed.

For this purpose, the region equations, which were described by the Laplace and Poisson equations, were obtained into boundary integral equations by the help of Green's formula and the method of weighted residuals. Boundary integral equations were discretized with parabolic boundary elements written in the matrix form. In this matrix form, influence coefficients are calculated by the method of numerical Gauss integration and single integrals were calculated analytically. Unknown boundary variables were calculated by solving the equation system, which is composed of boundary unknowns, by applying Dirichlet and Neumann boundary conditions. Then calculated and defined values were used to find the voltage values at the internal points of the region.

As the result, three developed programs were applied to planar samples of electrodes and coaxial cables and the values obtained are compared with the analytical calculations.

Key Words: Boundary Element Method, Boundary Integral Equation, Electrostatic Field, Equations of Laplace and Poisson, Constant Element, Linear Element, Parabolic Element.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Sınır Elemanları Yöntemi'nin Literatürdeki Yeri Ve Diğer Yöntemler

Sınır Elemanları Yöntemi (Boundary Element Method, BEM), Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method, FEM) geniş kullanım alanlarında yaygın bir şekilde kullanılırken ortaya çıkmıştır. FEM'in yapılan çalışmalarda bu şekilde rağbet görmesi, BEM'in ortaya çıkmasını tarihsel olarak sınırlamıştır. Bu bilim adamları, matematikçiler ve mühendisler arasında sayısal yöntemlerin gelişimi ve uygulamaları ile ilgili bir tartışma konusu ise de tarihin her yöntemin fenedeki rolüne ve mühendislikteki uygulamalarına yavaş yavaş açıklık getirdiği kolaylıkla görülmektedir.

FEM'in başlangıç noktası olarak Clough'un 1960'da ilk defa "sonlu eleman" terimini kullanmasına rağmen, genellikle Argyris ve Kelsey'in 1954 ve 1955'deki makaleleri ve Turner, Clough, Martin ve Topp'un 1956'da yayınlanan makaleleri kabul edilir. BEM isminden bugün ne alındığı Cruse (1968) ile birlikte, Rizzo'nun 1967'deki ilk formülasyonları ve yöntemle ilgili uygulamaları gösteren makalesine atfedilmelidir. Lachat ve Watson (1976), Jaswon ve Symm (1977) ve Brebbia (1978)'nin çalışmaları ile yeni sayısal teknikler içeren BEM, görüş noktası modellemede açık avantajlarla FEM'e bir alternatif olarak tanıtılmıştır. Böylece 1978'de BEM üzerine ilk konferans Southampton'da yapıldı ve C. A. Brebbia (1978) tarafından yazılan "Sınır Elemanları" bu tarihte yayınlandı. Bu tarihte, Sonlu Elemanlar üzerine birçok kitap yayınlanmıştı ve hala kullanımda olan NASTRAN, SAP, ANSYS gibi birçok yayın piyasadaydı.

Problem çözümleri için FEM'e ihtiyaç duyulması ile yöntem hızla gelişmiş ve üzerine büyük yatırımlar yapılmıştır. Bu yatırımlar, FEM üzerine kurulu olan BEM yayınlarının neslini ve kullanımını etkilemiştir. Bu sebep kısmi olarak doğru olabilir, çünkü her iki yöntemin gelişimi arasındaki açıklığı kapatmak için geçen zaman yeterli idi. Dolayısıyla FEM ve BEM arasındaki şimdiki karşılaştırma için sebepler kendi özellikleriyle ilgilidir ve aşağıdaki üç alan göz önüne alınmalıdır:

- Problemin integral formülasyonu
- Bilgisayar ile sayısal formülasyon ve tanımlama
- Yöntemin uygulamasında kullanıcının rahatlığı

Üçüncü görünüşten başlayarak, BEM'in kullanıcı görüş noktası yönünden FEM'den daha rahat olduğu açıktır. Bir problemi modellemede boyut azaltma büyük bir avantajdır.

BEM'in ana dezavantajı, problemin sadece sınır integral formülasyonunun bulunması mümkün olduğu zaman, yeni bir problem için uygulama, bu problemin temel çözüm bilgisini gerektirebilir. Oysa FEM'de belirli bir problemten diğerine geçiş kolaydır. BEM sadece problemin temel çözümüne gereksinim duymaz, aynı zamanda bir çok integrasyonun çözümünü de gerektirir. BEM bu yapıyla karmaşık olmasına rağmen kullanıcı için daha sade ve kullanışlı bir yöntemdir.

Her iki yöntemin farklı alanlara uygulanabilir olmasına rağmen, kökenlerinin ve şu anki uygulama ve gelişmelerinin ana kısımlarının mekanik ve inşaat mühendisliğinin içinde olduğu açıktır. Bu alanlar içindeki çoğu aletler farklı geometrilerin elemanları ile inşa edilmiştir. Üç boyutlu gövdelerin BEM ile, geri kalanların ise FEM ile gerçekleştirilebileceği ispatlanabilir. Daha sonra iki yöntemin değişkenleri arasında bir homojenlik eksikliği olabilir.

Tartışılan bütün sorular birbirini etkilemeden, çoğu farklı problemlerin sınır integral formülasyonu, başarılı bir şekilde geliştirilmiştir ve yöntem çok sayıda problem için uygulanmıştır. Yöntemin uygulandığı alanlar, ayrıntısız olarak;

- Potansiyel teorisi ve bu teoremin sıcaklıkta ve akışkan mekaniğindeki uygulamaları.
- Elektrik ve manyetik alan teorisindeki uygulamaları,
- Elektrostatik ve elastodinamik problemler,
- Kırılma mekaniği,
- Bağlantı problemleri,
- Şekil optimizasyonu,
- Tesis analiz ve dizaynı,
- Madencilik ve tünel açma,
- Toprak-yapı etkileşimi,
- Toprak-akışkan etkileşimi,
- Bağımsız sınır problemleri,
- Non-isotropic davranış,
- Plastik davranış,
- Madeni levhalar,

şeklinde sıralanabilir (Paris vd., 1997).

Sonlu Farklar Yöntemi (Finite Difference Method, FDM) her çeşit kısmi diferansiyel eşitliklerin çözümü için kullanılan sayısal tekniklerin en güçlülerinden biridir. Bütün elektromanyetik alan problemleri skaler veya vektörel kısmi diferansiyel eşitlikleri ile temsil edilebildiğinden FDM farklı ortamlarda elektrik ve manyetik alanların geçici olduğu kadar uzaysal dağılımlarının çözümünde de kullanılabilir. FDM çözüm bölgesini sonlu ayırık noktalara bölerek ve kısmi diferansiyel eşitliğini bir fark eşitlikler setine değiştiren bir tekniktir. Bundan

dolayı çözüm tam değil, fakat yaklaşıktır. Bununla beraber şayet ayrık noktalar birbirine yakın seçilirse hata kabul edilebilir bir seviyeye indirilebilir (Gürdal, 2000).

Bu yöntemde, her bir koordinat yönünde kesilmiş bir Taylor serisi açılımı kullanılarak Laplace denklemi ayrıştırılır ve problem bölgesine yerleştirilen doğrusal bir ızgaranın her noktasında uygulanır. Bilinmeyenlerin sayısı ve denklemlerin sayısı, sınır şartlarının potansiyel olarak verilmediği ızgara noktalarının sayısına eşit olur. Elde edilen sonuç denklem sistemi iteratif olarak veya doğrudan çözülerek bilinmeyenler bulunur. Yöntemin istenmeyen yanları, problem geometrisinin ayrıntılı değil de kabaca modellenmesi ve özellikle açık alan problemlerinde bilinmeyenlerin sayısının çok olmasıdır. Ancak Sonlu Farklar Yöntemi, matrislerin elde edilmesinde ve ilgili işlemlerin yapılmasında sağladığı kolaylıktan dolayı, çok sayıda tekrar işlemlerinin ve bölmelemlerinin gerektiği yerlerde oldukça yaygın şekilde kullanılır (Yıldırım, 1999).

FEM köprü ve gemiler gibi karmaşık yapılardaki gerilme ve gerginliklerin değerlendirilmesinde inşaat ve makine mühendisleri tarafından geliştirilmiştir. FDM böyle yapısal analizin çözümü için uygundur, fakat daima kısmi diferansiyel eşitlik ve bir başlangıç noktası olarak bir sınır şartları seti gerektirir. Karmaşık bir yapısal problem için bazen kısmi diferansiyel eşitliğinin çözümü çok zor olmaktadır. Bundan dolayı yapı mühendisleri, mühendislik anlayışı ve fiziğin temel prensipleri ile FEM'i geliştirmiştir. Yöntem sonunda genelleştirildiğinde bir sistemin potansiyel enerjisi gibi fonksiyonelin yaklaşık bir minimizasyonu olduğu açıklığa kavuşmuştur. Aynı zamanda fonksiyonelin minimizasyonu temelde hiçbir şey fakat varyasyonel prensibin uygulaması olduğu keşfedilmiştir. Bu kabuller ile FEM yöntemi kısmi diferansiyel eşitliklerin bir varyasyonel prensipten bir fonksiyonele uyunca değiştirilebileceği problemlere de genişletilmiştir. Elektrostatik alan analizinde minimize edilecek fonksiyonel sınırlı bir hacim içindeki elektrostatik enerjidir (Gürdal, 2000).

Bu yöntemde problem bölgesi, eleman olarak isimlendirilen sonlu sayıda çok küçük alt alanlara ayrıştırılır. Problem bölgesinin sınırlarını modellemek için polinom yaklaşımları kullanılması daha iyi sonuçlar verir. Bununla birlikte, birçok pratik uygulamada, özellikle üç boyutlu problemlerde, bütün bölgenin ayrıştırılması için çok sayıda veri girişi gerektirmesi, geometrik modeldeki türev süreksizlikleri ve sonsuzluk içeren bölgelerin modellenmesi için yeterli olmayışı gibi kötü yanları vardır.

İki veya üç boyutlu alanların, farklı dielektrik sabitli ve iletkenlikli yalıtkan malzemelerden oluşan yüksek gerilim sistemlerinin matematiksel modellerini oluşturan, Laplace ve Poisson tipindeki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en son yöntemlerden biri de BEM'dir. BEM, elektrostatik alan hesaplamalarında doğru ve hızlı bir şekilde sayısal çözüm elde edilmesini sağlar (Yıldırım, 1999).

Sınır Elemanları Yöntemi, sınır integral denklemlerinin çözümü için kullanılan sayısal bir tekniktir. Bu teknikte elektromanyetik olaylar, matematiksel olarak integral şeklindeki Maxvell denklemleri ile tanımlanır. Eşdeğer kaynaklar veya alan değişkenleri gibi bilinmeyenlerden oluşan sınır integral denklemlerinin elde edilmesi, malzeme arakesitleri boyunca sınır şartlarının uygulanmasına imkan sağlar. Sınırlar, üzerinde bilinmeyenlerin gösterildiği sınır elemanlarına ayrıştırıldıktan sonra bir lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece sınır elemanları yöntemi verilen bir problemi çözer. Uzayda herhangi bir noktadaki bütün alan değişkenleri, sınırlardaki alanlar (direkt yaklaşım) veya eşdeğer kaynaklar (indirekt yaklaşım) benzetimleriyle gerçekleştirilen integrasyonlarla elde edilebilir (IES Software, 1996).

Sınır Elemanları Yönteminde, sadece sınırlar ayrıklaştırılmakta ve elde edilen sınır elemanları, sonlu elemanlara benzer tarzda interpolasyon fonksiyonu kullanılarak yaklaştırılmaktadır.

Bu teknikte, temel çözümün bulunmasının özel bir önemi vardır. Temel çözüm, problemi bölgede sağlayan basit bir fonksiyon yerine; "etki fonksiyonu" kavramıyla formüle edilmiştir. Sınırların çözümü bulunduktan sonra; herhangi bir iç noktadaki çözüm, sınırların çözümü yardımıyla bulunur. Zira etki fonksiyonu, iç noktalarla sınır düğümleri arasındaki etkileri temsil eder.

Sınır Elemanları Yönteminde kullanılan sınır tekniklerinin birçok çeşidi vardır. Bunlar; kaynak tanımlanması şeklinde verilen indirekt yaklaşım ile potansiyeller ve potansiyellerin normale göre türevleri gibi fiziksel değişkenlerin kaynak yoğunluğu yerine kullanıldığı direkt yaklaşımdır. İlk yıllarda indirekt yaklaşım tekniği kullanılırken, daha sonraki yıllarda bilgisayar çözümlerine uygunluğu nedeniyle direkt yaklaşım önem kazanmıştır. Bu tez çalışmasında direkt yaklaşım tekniği kullanılmıştır.

İndirekt yaklaşım yöntemlerinde, integral formülasyonundaki potansiyel doğrudan çözülemez, fakat alanı destekleyen bir eşdeğer kaynak bulunur. Eşdeğer kaynak, kaynağın yeri ve sınırdaki herhangi bir noktaya kaynağın etkisi ile ilişkili olan bir fonksiyon altında, tanımlanmış sınır şartlarını sağlamaya zorlanarak bulunur. Bu fonksiyon, bir Green fonksiyonu veya daha genel bir şekilde etki fonksiyonu olarak verilir. Bu şekilde kaynak bulunarak tekrar integralin içine yazılır ve bölgede herhangi bir noktadaki potansiyel hesaplanır. Kaynaklar sadece sınırlara ve farklı malzemelerin arakesitlerine yerleştirilir. Birçok pratik problemde kaynak bilinmez, ancak sınır üzerinde potansiyel veya potansiyelin normale göre türevi belirtildiğinden, bu şartları destekleyecek bir kaynak bulunur. Bu durum fiziksel olarak, sınır şartlarının yüzey üzerindeki kaynak dağılımlarına eşdeğer olduğu anlamındadır (Klimpke, 1983).

Direkt yöntemde, eşdeğer kaynak yoğunluğu dağılımları hesaplanmaksızın problem bölgesinde potansiyel ve potansiyelin normale göre türevi için doğrudan çözüm yapılır. Bilinmeyen potansiyel ve potansiyelin normale göre türevi için sınır integral denklemi, problem bölgesi üzerinde alan noktası alınarak Green teoreminden elde edilir (Yıldır, 1985).

Sınır Elemanları Yöntemi, diğer yöntemlerdeki zorlukları aşmak için geliştirilmiştir. Bu yöntemde, çözüm sadece sınırdan istendiğinden yöntem hareketli ve serbest yüzey problemleri için oldukça uygundur (Partridge vd., 1992). FEM'de bütün bölgenin bölmelenmesi gerekirken BEM'de sadece sınırların bölmelenmesi gerekir. Basit şekillerde bölgenin alt bölgelere ayrıştırılması kolaydır. Ancak üç boyutlu ve daha karmaşık şekillerde özellikle eğrisel şekillerde bölgenin küçük alt bölgelere ayrıştırılması zordur. Buna karşılık BEM'de sadece sınırlar bölmelendiğinden FEM'e göre daha avantajlı ve daha az zaman alıcıdır. FEM'de analiz edilecek bölgenin çözümü bütün alt bölgelerin çözümü sonucunda elde edilir. BEM'de ise ilk önce sınırdaki çözüm hesaplanır ve daha sonra gerekiyorsa istenilen bölge noktalarındaki çözüm bulunur. FEM'de sınırdaki hesaplamalarda bağlı değişkenler arasında tipik olarak daha az doğruluk derecesi vardır. Oysa ki BEM'de u ve q bağlı değişkenlerinin her ikisinde de aynı doğruluk derecesi vardır. Yüzey bölgeleri ile iç bölgelerin farklı büyüklükleri sebebiyle matrisler genellikle farklı uygun büyüklükte dirler. FEM'de seyrek simetrik matrisler oluşturulur. BEM'de ise tamamen yoğun nonsimetrik matrisler oluşturulur. Formülasyonda Green-Gauss teoremi ve temel çözümün kullanımı BEM'in bölge içindeki diferansiyel denklemin hiç tahmin gerektirmediği, sadece sınır şartlarının tahminini gerektirdiği anlamına gelir. Yani BEM'de sadece sınır şartları tahmin edilirken FEM'de diferansiyel denklemin tahmini gerekir. FEM'de eleman integrallerinin çözümü kolaydır, BEM'de ise çözümün doğruluğunda önemli bir etkiye sahip olan integraller tekil integralleri içerdiğinden çözüm daha zordur. FEM, bütün nonlinear problemlerin çözümünde oldukça yaygın bir şekilde uygulanır. Buna karşılık BEM, uygulanılmadan önce problemin bir temel çözümü ya da en azından yaklaşık bir çözümü bulunmalıdır. Zira temel çözümü bilinmeyen birçok lineer problem vardır (hemen hemen bütün nonhomojen denklemler). Bu nedenle BEM bütün lineer problemlerin çözümü için uygun olmayabilir (Hunter vd., 2002). Bütün bunlara karşılık BEM'de problemin boyutsallığı bir derece indirgenir ve eğrisel sınırlar kolaylıkla modellenebilir. Bundan dolayı BEM özellikle çok boyutlu problemlerin çözümünde tercih edilen ilk yöntem dir.

BÖLÜM 2

ELEKTROSTATİK ALANLAR

2.1. Genel Bilgi

Elektrik alanı, yüksek gerilimde kullanılan cihazların yalıtımında dikkate alınması gereken önemli faktörlerdendir. İletim hattı sisteminde gerilimler gittikçe arttığından, kullanılan yalıtım malzemelerinin daha büyük elektriksel zorlamalar altında çalışması gerekir. Sadece daha kalın yalıtım malzemesi kullanarak iyi bir sonuç alınması mümkün değildir. Bunun için elektrik alan dağılımının ve kritik bölgelerdeki alan şiddeti değerlerinin bilinmesi gerekir (Rumeli, 1969).

Doğru akım şartlarında ve düşük frekanslarda elektrik alanının bir yaklaşımı olan statik elektrik alan kullanılır. Orta iletkenlikli malzemelerin bulunduğu problemlerde alternatif elektrik alanı statik elektrik alanından farklıdır. Bu tip problemlerde statik elektrik alan yaklaşımı uygulanmaz (Kato vd., 1979).

Özellikle dış ortamdaki çimento tozları, baca gazları gibi endüstriyel kirlilik ve kıyı bölgelerindeki deniz suyu kirliliği, yüksek gerilim izolatörlerinin yüzeyinde iletken bir tabaka oluşturur. Bu durumda izolatör yüzeyinden rezistif-kapasitif bir kaçak akım akar ve alan dağılımı statik alan hesaplamaları ile belirlenemez. Bu nedenle elektrik alanları, statik ve dinamik elektrik alanları olmak üzere iki kısımda incelenir (Cebeci, 1991).

2.2. Statik Alanlar

Elektrostatik, yüklü bir parçacığın diğeri üzerine etkilediği elektrik kuvveti ile ilgili olarak Coulomb kanununun teoriksel ve deneysel doğrulanabilir ifadesine dayanmaktadır. Coulomb kanunu bir yükün diğeri bir yük üzerinde, hatta yükler büyük uzaklıklar ile birbirinden ayrılabilir bile daima bir kuvvet oluşturacağını ifade etmektedir. Fizikte bir yüke diğeri bir yükten dolayı etkiyen kuvvet ekseriyetle bir uzaklıktaki etkileşim olarak adlandırılır. Yükler durgun olduğu sürece bir uzaklıktaki görüş noktası gerekli bütün ihtiyaçları karşılar. Bununla beraber, eğer bir yük diğeri doğru hareket ettirilirse Coulomb kanununa göre yükler tarafından etkiyen kuvvetin de ani olarak değişmesi gerekir. Bunun tersine görecelik teorisi bir yükün hareketi hakkındaki bilginin (bozucu etki) diğeri yüke ulaşması için belli bir zaman alması gerektiğini zorunlu kılmaktadır. Çünkü, hiçbir sinyal ışık hızından daha hızlı hareket edemez. Bundan dolayı, yükler üzerine etkiyen kuvvetlerin artışı ani olamaz. Böylece yük sistemleri ile ilgili enerji ve momentin geçici olarak denge dışı olacağı gösterilir. Bu gerçekte görecelik teorisi ile

uyum içinde olup etkileşimli cisimler için moment ve enerjinin kendileri tarafından korunamayacağını ifade etmektedir. Cisimlerden kaçan (kaybolan) moment ve enerjiyi hesaba katmak için etkileşen cisimlerin yerleştiği ortamda ekstra bir şeyin varolması gerekir. Bu ekstra şey, alan olarak adlandırılır. Elektrik alanı, birim yük başına düşen kuvvet olarak tanımlanabilir (Gürdal, 2000).

Bir ilke olarak durgun elektriğin bütünü Coulomb yasası içindedir, denilebilir. Yükler ve yüklerin konumları verildiğinde bütün elektrik kuvvetleri bulunabilir. Yüklerin elektrik kuvvetlerinin ya da daha başka kuvvetlerin etkisi altında serbestçe hareketleri sağlandığında, yük dağılımının kararlı kalacağı denge düzenlenişlerinin hangileri olduğu bulunabilir. Aynı anlamda, Newton'un mekanik yasalarının tümü burada da geçerlidir. Ama yine mekanikte olduğu gibi elektromıknatıslıkta da başka kavramlar ve bu arada enerji kavramı da karşımıza çıkmaktadır (Purcell, 1979).

Bir $\vec{E}$ elektrik alanına bir q pozitif test yükü yerleştirilirse yük üzerinde $\vec{F} = q\vec{E}$ ile verilen bir kuvvet olacaktır. Bu kuvvet altında Şekil (2.1.a)'da görüldüğü gibi, yük $d\vec{l}$ diferansiyel uzaklığına hareket eder. Yükün hareketi nedeniyle elektrik alanı ile bir iş yapılır. Elektrik alanı ile harcanan enerji artışı veya basitçe $\vec{E}$ alanı ile yapılan iş miktarı,

$$dW_e = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.1)$$

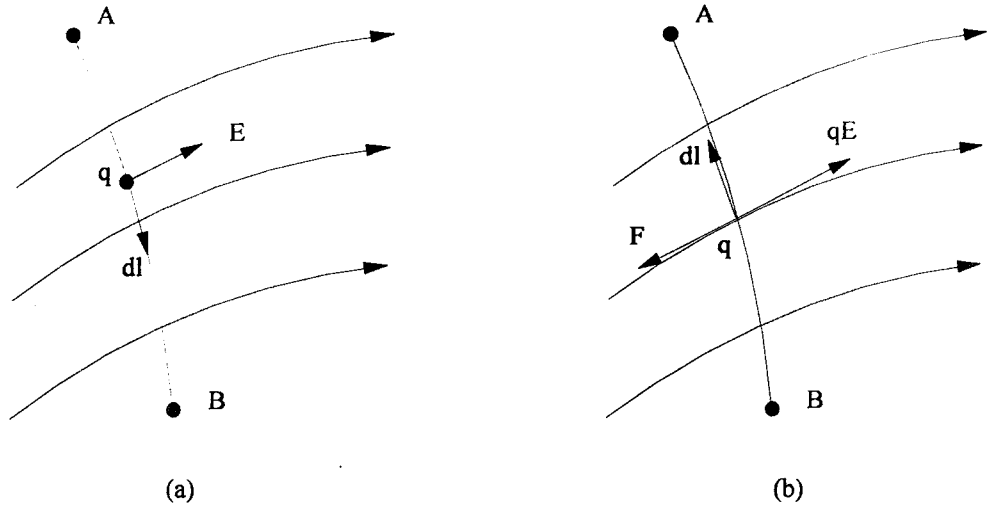
olarak ifade edilir. Burada e indisi $\vec{E}$ alanı ile yapılan işi işaretlemektedir. İş $\vec{E}$ alanı ile yapıldığında pozitif test yükünün daima $\vec{E}$ 'nin yönünde hareket ettiğine dikkat edilmelidir. Bununla beraber eğer test yükü harici bir $\vec{F}_{ext}$ kuvveti ile $\vec{E}$ 'nin zıt yönünde hareket ettirilirse harici kuvvet ile yapılan diferansiyel iş,

$$dW = -\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} \quad (2.2)$$

olur. Burada (-) işareti yükün $\vec{E}$ alanının zıt yönünde hareket ettiğini göstermektedir. Hareketli bir yük ile kazanılabilen kinetik enerjiyi dikkate almamak için harici kuvvetin Şekil (2.1.b)'de görüldüğü gibi elektrik kuvveti ile tam dengeli olduğu varsayılacaktır. Bu durumda, b noktasından a noktasına test yükünün hareket ettirilmesi için harici kuvvet ile yapılan toplam iş,

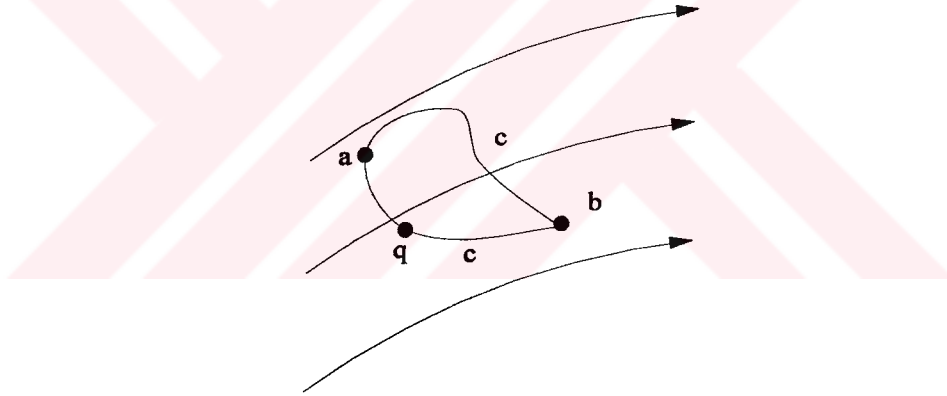
$$W_{ab} = -q \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 2.1 (a) Bir elektrik alanı ve (b) harici kuvvetin neden olduğu bir elektrik alanındaki test yükünün hareketi

Eğer Şekil (2.2) 'de görüldüğü gibi yük kapalı bir yol etrafında hareket ettirilirse yapılan iş sıfır olmalıdır. Başka ifadeyle $\vec{F}$ yerine $q\vec{E}$ yazılırsa ($q=1$ C olarak),



Şekil 2.2 Bir elektrik alanında bir c kapalı yolu boyunca bir q yükünün hareketi

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.4)$$

olur ki burada l, integrasyon yolunu gösterir (Gürdal, 2000).

Denk.(2.4)'e vektör analizinden bilinen Stokes teoremi uygulanırsa,

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \int (\text{rot} \vec{E}) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.5)$$

elde edilir.

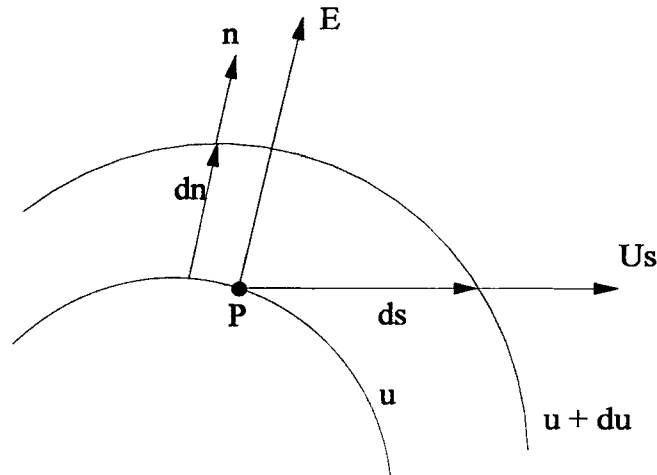
Denk.(2.5) 'in bütün kapalı yollara karşılık olan yüzeylere uygulandığı düşünülürse, bunun tek yolunun,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.6)$$

olduğu görülür. Bu sonuç gösteriyor ki, elektrik alanı rotasyonelsiz bir alandır. Rotasyonelsiz bir alan, skaler bir u potansiyel alanından türer.

Statik elektrik alanı problemlerinin çözümünde, çoğu kez u potansiyel alanı olarak bilinir. Böylece u yardımıyla sabit eşpotansiyel yüzeyler elde edilir (Özkaya, 1988).

Bilindiği gibi, potansiyelleri birbirine eşit noktalardan geçen çizgiler üzerindeki bütün noktalarda potansiyel aynıdır. Bu noktalar arasında potansiyel farkı yoktur. Böyle sabit potansiyelli çizgilere eşpotansiyel çizgiler denir. Yüklü iki levha arasında alınan potansiyelleri eşit noktalardan geçen çizgi de eş potansiyel çizgidir. Dahası, bu çizgiyi içeren ve levhalara paralel olan düzlem, sabit potansiyelli düzlemdir ve buna, eşpotansiyel düzlemi denir. Bir yükü, eşpotansiyel çizgisinde veya eşpotansiyel düzleminde hareket ettirmek için bir iş yapmak gerekmez. Çünkü böyle bir hareket, kuvvet çizgilerine (veya elektrik alana) diktir. Diğer taraftan, kuvvet çizgileri daima eşpotansiyelli yüzey veya çizgilere diktir. Elektrostatik şartlarda iletkenlerin yüzeyleri ve hacimleri, eşpotansiyel yüzeyler ve eşpotansiyel hacimlerdir. Tıpkı gravitasyonel kuvvetlerde olduğu gibi, elektrik alanının bulunduğu bir yerde yüklü bir taneciği iki nokta arasında hareket ettirmek için yapılan iş yoldan bağımsızdır. İki nokta arasındaki elektriksel potansiyel farkı, bu iki nokta arasında alınan yoldan bağımsızdır. Bu özellik bize, statik elektrik alanın korunumlu alan olduğunu gösterir (Çolakoğlu, 2000).



Şekil 2.3 Alan şiddetinin eşpotansiyel yüzeyler yardımıyla hesabı

Bir elektrik alanı, alan çizgileri ile gösterilebileceği gibi, eşpotansiyel çizgiler ile de gösterilebilir. Eşpotansiyel çizgiler sabit bir potansiyel farkı esas tutularak çizildiği takdirde

elde edilen şekil, alan hakkında fikir verir. Bu çizgilerin sık veya seyrek olması, söz konusu noktalarda alan şiddetinin büyük veya küçük olduğunu gösterir (Cebeci, 1991).

Şekil (2.3)'den de görüldüğü gibi aralarında du kadar, sonsuz küçüklükte potansiyel farkı bulunan iki eşpotansiyel yüzey verilmiş olsun.

Pozitif birim yükün, eşpotansiyel yüzeyin normali yönündeki $\vec{n}$ birim vektörü doğrultusunda dn kadar hareket etmesi halinde alan tarafından yapılan iş,

$$du = -\vec{E} \cdot d\vec{n} = -E_n \cdot dn \quad (2.7)$$

olur. Bu bağıntıdan,

$$E_n = -\frac{du}{dn} \quad (2.8)$$

olur. E_n , alan şiddeti vektörünün eşpotansiyel yüzeye dik $\vec{n}$ birim normal vektörü yönündeki bileşenidir.

Potansiyel, koordinat sisteminin bir fonksiyonu olduğundan, denk.(2.8) kısmi türev şeklinde,

$$E_n = -\frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.9)$$

olarak yazılır. Bu denklem vektörel olarak,

$$\vec{E}_n = -\vec{n} \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.10)$$

olarak ifade edilir. Bağıntılardaki eksi işareti, potansiyelin alan şiddeti vektörü yönünde azaldığı anlamına gelir.

Kartezyen koordinat sisteminde alan şiddeti vektörünün bileşenleri,

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} ; \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} ; \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.11)$$

bağıntıları yardımıyla bulunur. Buradan, vektör analizinden bilinen potansiyel gradyan vektörü,

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (2.12)$$

olarak yazılır ve böylece alan şiddeti ile potansiyel arasında,

$$\vec{E} = -\text{grad } u \quad (2.13)$$

bağıntısı vardır. Potansiyel gradyan vektörü, denk.(2.13)'de yerine yazılırsa,

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}\right) \quad (2.14)$$

bağıntısı elde edilir.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (2.15)$$

olduğundan alan şiddeti vektörü, denk.(2.15),

$$\vec{E} = -\nabla u \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir (Gönenç, 1977).

Denk.(2.16), elektrik alanın potansiyelin azaldığı yönde ve eşpotansiyel yüzeylere dik (ortogonal) olduğunu gösterir.

Bilindiği gibi uzayın bir yerinde elektrik alan varsa, o yerde kuvvet çizgileri de vardır, şeklinde hayali çizgiler tanımlanmıştır. Bu çizgiler her noktada elektrik alanını teğet kabul ederler. Bir noktada alınan kuvvet çizgilerine dik olan birim yüzeyden geçen çizgi sayısı o yerdeki elektrik alanı ile orantılıdır. N , çizgi sayısını göstermek üzere; $N = \epsilon_0 \cdot E$ olarak tanımlanır. ds uzayından geçen çizgi sayısı ise, $N = \epsilon_0 \cdot E \cdot ds$ olarak tanımlanır.

Kapalı bir yüzeyden geçen kuvvet çizgileri sayısı, o yüzeyin içinde bulunan net yük miktarına eşittir (Gauss Teoremi). Bu ifadenin formülize edilmiş şekli aşağıdaki gibidir:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.17)$$

Kapalı yüzey içerisinde hiç elektrik yükü yoksa veya pozitif elektrik yükleri negatif elektrik yüklerine miktar olarak eşitse, denk.(2.17)'nin sağ tarafı sıfır olur.

Bu kapalı yüzey herhangi bir yalıtkan madde içerisinde bulunuyorsa denk.(2.17), yalıtkan maddelerin bir karakteristiği olan, yalıtkanın cinsine bağlı olup, sıcaklık ve diğer bazı şartlarla değişebilen ϵ_r katsayısı ile çarpılır. Bir yalıtkan maddeden diğer bir yalıtkan maddeye geçişte ϵ_r katsayısı değişir.

$$\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.18)$$

$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ yazılıp, denk.(2.18)'de yerine konursa daha genel olarak,

$$\oint \epsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.19)$$

ifadesi elde edilir. Burada ϵ , yalıtkan maddenin mutlak dielektrik sabitidir. Gauss kanunu bir kapalı yüzey içinden geçen net dışa doğru akının, bu yüzeyle çevrelenen toplam yüke eşit olduğunu ifade etmektedir. Yani,

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.20)$$

yazılabilir. Burada $\vec{D}$ 'ye, elektriksel akı yoğunluğu veya kısaca deplasman vektörü denir ve,

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (2.21)$$

ile ifade edilir.

Denk.(2.20) 'ye Green teoremi uygulandığında,

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.22)$$

yazılır. Eğer $Q \neq 0$ ise, diverjans sıfır değildir ve bunu, ρ ile gösterilen hacimsel yük yoğunluğu cinsinden ifade etmek uygun olacaktır. Böylece kapalı bir yüzey içindeki elektrik yükü, yük yoğunluğunun bu yüzey içindeki hacimsel integraline eşittir (Özkaya, 1988).

Denk.(2.20)'ye diverjans teoremi uygulanarak denk.(2.20),

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \cdot dv = \int_V \rho_v \cdot dv \quad (2.23)$$

olarak da yazılabilir. Bunun bir S yüzeyi ile sınırlanan herhangi bir V hacmi için doğru olması gerektiğinden iki integral birbirine eşittir. Uzayda herhangi bir noktada,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.24)$$

şeklindedir. Bu eşitlik Gauss kanununun nokta veya diferansiyel biçimi olarak adlandırılır. Denk.(2.24) şu şekilde ifade edilebilir: Uzayda herhangi bir noktadan elektrik akı hatlarının çıktığı yerde bir pozitif yük yoğunluğu vardır. Şayet yük yoğunluğu negatif ise, elektrik akı

hatları noktaya doğru yaklaşarak birleşirler. Denk.(2.24) elektrik akı yoğunluğunun daima bir bölgede mevcut olan serbest yüklerin bir ölçüsü olduğunu göstermektedir (Gürdal, 2000).

Dielektrik sabitinin noktadan noktaya değişmediği homojen bir madde içinde denk.(2.21)'in, denk.(2.24)'te yerine konulmasıyla,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.25)$$

ifadesi elde edilir. Denk.(2.25), elektrik alanı ile yük arasındaki bağıntıyı vermektedir. Denk.(2.16), denk.(2.25)'te yerine yazılırsa, potansiyel ile yük yoğunluğu arasındaki bağıntı elde edilir:

$$\nabla(\nabla \cdot u) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{veya} \quad \nabla^2 \cdot u = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.26)$$

Denk.(2.26), ikinci dereceden diferansiyel bir denklemdir (Poisson denklemi). Elektrik yükü bulunmayan bir uzay parçası içinde sağ tarafı sıfır olur (Laplace denklemi).

Laplace denklemi, kartezyen koordinat sisteminde açık olarak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilir. Alanın sadece x eksenı boyunca değişmesi halinde potansiyel,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.28)$$

ve elektrik alan şiddeti,

$$E = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.29)$$

formülünden hesaplanabilir (Özkaya, 1988).

Potansiyel fonksiyonu u , serbest elektrik yükü bulunmayan izotrop, lineer homojen olmayan veya homojen bir ortamda Laplace denklemini sağlar. Laplace denklemi, sağ tarafı sıfır olan ikinci mertebeden kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Sınır değer problemi, belirli sınır şartlarını sağlayan potansiyel fonksiyonun bulunması olup, sınır değer probleminin çözülmesi, potansiyel fonksiyonunun sağladığı Laplace denkleminin genel çözümündeki

integrasyon sabitlerinin sınır şartlarına uygun olarak bulunması demektir. Sınır değer problemlerini çözmek için çeşitli yöntemler vardır.

Sınır değer problemlerinin çeşitleri:

- Herhangi bir yüzey üzerindeki potansiyel dağılımı verilirse, sınır değer problemine birinci çeşit sınır değer veya Dirichlet problemi denir.
- Herhangi bir yüzey üzerinde potansiyelin normal türevinin dağılımı verilirse, sınır değer problemine ikinci çeşit sınır değer veya Neumann problemi denir.
- Herhangi bir yüzey üzerinde, kısmen potansiyel dağılımı ve kısmen de türevinin dağılımı verilirse, sınır değer problemine karışık sınır değer problemi denir.

Problemde potansiyeller yerine yükler, potansiyellerin türevi yerine de yüzeysel yük yoğunlukları verilebilir.

Dirichlet probleminde belirli sınır şartlarını sağlayacak potansiyel fonksiyonu tektir; Neumann probleminde ise iki farklı çözüm olmakla beraber, yoğunluk ve alan vektörü türevle elde edildiğinden çözüm yine tektir (Bayrakçı, 2000).



BÖLÜM 3

BÖLGE ANALİZİ

3.1. Genel Bilgi

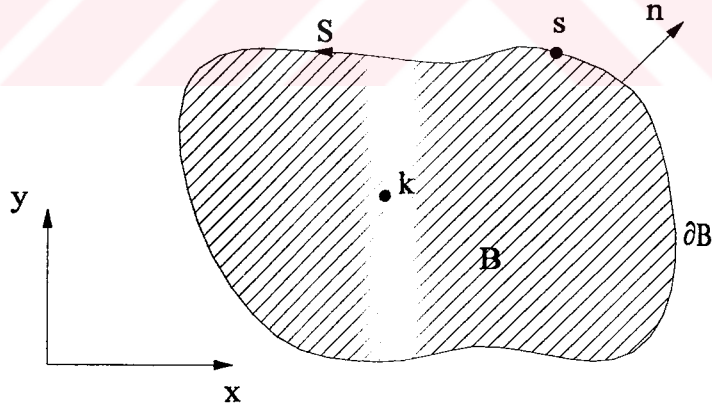
Mühendislik uygulamalarında, birçok problemler bölgeler halindedir. 2 veya 3 boyutlu olarak tanımlanan problem bölgelerini tanımlayan bazı denklem tipleri meydana çıkarılmıştır. Yaygın olarak kullanılan bu denklemler, Laplace, Helmholtz, Wave, Diffusion ve Navier 's denklemleridir. Bu tez çalışmasında, elektrostatik alan problem bölgesi 2 boyutlu olarak incelenip Laplace denklem tipi ile analiz edilmiştir. Laplace operatörü, u 'ya göre,

$$L = \nabla^2 u \quad (3.1)$$

veya genel olarak,

$$L = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.1 Problem bölgesinin geometrik tanımı

B bölgesinde $b=b(x,y)$ fonksiyonu, bilinen bir fonksiyondur. Buna göre problem bölgesini tanımlayan kısmi diferansiyel denklem olan Poisson denklemi,

$$\nabla^2 u = b \quad (\text{B bölgesinde}) \quad (3.3)$$

şeklindedir.

Poisson denkleminde ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak sınır integral denklemi elde edilebilir. Bunun için denk.(3.3) bir w ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak,

$$\iint_B (\nabla^2 u - b) w dB = \iint_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b \right) w dB = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. $b = 0$ için Laplace denklemi elde edilir ve denk.(3.4),

$$\iint_B (\nabla^2 u) w dB = \iint_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) w dB = 0 \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır.

3.2. Green¹ Formülü (Riemann Formülü)

Green formülünde B bölgesindeki iki katlı integral, S sınırında bir çizgisel integralle ifade edilmiştir. Green formülüne göre bölge integrali,

$$\begin{aligned} \nabla(\phi(z) \nabla \psi(k, z)) &= \phi(z) \nabla^2 \psi(k, z) + \nabla \phi(z) \nabla \psi(k, z) \\ \nabla(\psi(k, z) \nabla \phi(z)) &= \psi(k, z) \nabla^2 \phi(z) + \nabla \psi(k, z) \nabla \phi(z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada ' k ' bölge içerisindeki kaynak nokta ve ' z ' bölge içerisindeki alan noktası olarak tanımlanır. ψ , ϕ ve bunların kısmi türevleri, B bölgesinde skaler bir fonksiyon olarak ifade edilir ve ψ fonksiyonu keyfi, ' k ' sabit noktasında tanımlanır. Bu fonksiyonlar, referans olarak ' z ' noktasında saptanmıştır.

Bu iki denklemin farkı alınıp B bölgesinde integralleri alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_B [\nabla(\phi(z) \nabla \psi(k, z)) - \nabla(\psi(k, z) \nabla \phi(z))] dB(z) \\ = \int_B [\phi(z) \nabla^2 \psi(k, z) - \psi(k, z) \nabla^2 \phi(z)] dB(z) \end{aligned} \quad (3.7)$$

denklemi elde edilir. Bu bölge integraline Green formülü uygulanırsa,

1-George Green (1793-1841), kendi kendine eğitim yapmış bir değirmencinin çocuğudur. Green formülü, Green'in en yaygın bilinen integral formülüdür.

$$\begin{aligned} & \int_B [\phi(z) \nabla^2 \psi(k, z) - \psi(k, z) \nabla^2 \phi(z)] dB(z) \\ &= \int_{\partial B} \left(\phi(s) \frac{\partial \psi}{\partial n}(k, s) - \psi(k, s) \frac{\partial \phi}{\partial n}(s) \right) dS(s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda iki katlı bölge integrali, sınırlara taşınmış bir integrale dönüştürülmüştür. Bu denklemde 's' sınırdaki bir nokta, 'n' ise sınırın normalidir.

Elde edilen bu denklem, sınır integral denkleminin temel denklemidir. Bu denklem, denk.(3.5) 'deki terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_B [u(z) \nabla^2 w(k, z) - w(k, z) \nabla^2 u(z)] dB(z) \\ &= \int_{\partial B} \left(u(s) \frac{\partial w}{\partial n}(k, s) - w(k, s) \frac{\partial u}{\partial n}(s) \right) dS(s) \end{aligned} \quad (3.9)$$

denklemini elde edilir.

3.3. Laplace Denkleminin Temel Çözümü

Problem bölgesini ifade eden sınır integrallerinin sonucunu elde etmek için Laplace denkleminin temel çözümünün bulunması gerekir. Buna göre denk.(3.9) 'da ifade edilen Laplace denkleminin,

$$\nabla^2 w(k, z) = 0 \quad (3.10)$$

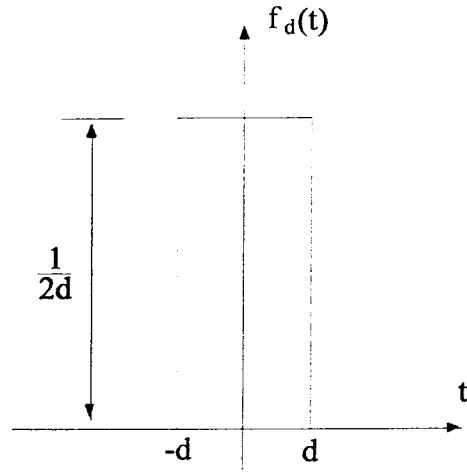
temel çözümünü elde etmek için denk.(3.3) 'deki Poisson ifadesi kullanılır. Burada, b Dirac delta fonksiyonudur.

$$b = -\Delta(k, z) \quad (3.11)$$

3.3.1. Dirac¹ Delta Fonksiyonu

Mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılan bu fonksiyon tipinde Şekil (3.2)'de gösterildiği gibi geniş bir düzleme uygulanmış fonksiyonun etki alanı incelenir.

¹-Paul A.M. Dirac (1902-1994), 1933 'de Erwin Schrodinger 'le beraber quantum mekaniği çalışmasında Nobel ödülünü kazanmıştır. Dirac 1926 yılında fonksiyonu tahmini olarak buldu. 1950 yılında ise fonksiyonu Schwartz genelleştirerek tanımlamıştır.



Şekil 3.2 Dirac delta fonksiyonu

Bu fonksiyon,

$$\begin{aligned} f_d(t) &= 0 & |t| > d \\ f_d(t) &= \frac{1}{2d} & |t| < d \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun noktasal limiti alınırsa;

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} f_d(t) &= 0 & t \neq 0 \\ \lim_{d \rightarrow 0} f_d(t) &= \infty & t = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre Dirac delta fonksiyonu, tanımlanan bir noktada sonsuza giderken bu nokta dışında her noktada fonksiyon sıfıra eşittir. Bu fonksiyonun bölge üzerinde integrali alınırsa,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_d(t) dt = 1 \quad (3.14)$$

sonucu elde edilir.

Dirac delta fonksiyonu herhangi bir fonksiyonla çarpımının integrali,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_d(t) h(t) dt = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_d(t) h(t) dt = h(0) \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda Dirac delta fonksiyonunun, herhangi bir fonksiyonla çarpımının integrali, fonksiyonun tanımlanan noktasındaki değerine eşittir.

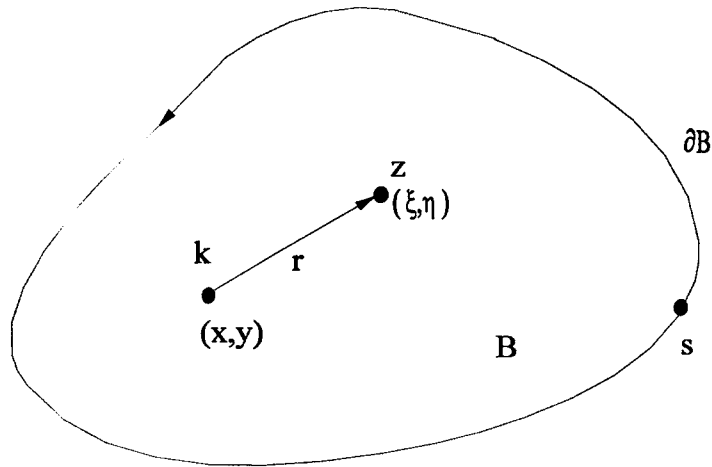
3.3.2. Temel Çözüm

Laplace denkleminin temel çözümü, sınır eleman formülasyonunda kullanılan ağırlık fonksiyonudur. Bu yüzden temel çözümü elde etmek önemlidir.

Sonsuz bir bölgede 'k' noktasında yoğunlaştırılmış birim kaynak nedeniyle bir 'z' noktasındaki potansiyelin değeri, 'k' noktasındaki kaynak nedeniyle 's' noktasındaki temel çözüm (*fundamental solution*) olarak isimlendirilir. Temel çözüm genellikle u^* şeklinde ifade edilir. 'z' noktası alan noktası (*field point*) olarak isimlendirilir. 'k' noktası, yoğunlaştırılmış birim kaynağın uygulandığı kaynak noktası (*source point*) olarak tanımlanır (Defiguerido, 1991). 's' ise, sınırdaki alan noktasıdır.

Burada kaynak, potansiyel alanı üreten büyüklüktür. İncelenen fiziksel probleme göre değişkenlik gösterir. Mesela; sıcaklık alanlarında bir ısı kaynağı veya elektrik alanlarında bir elektrik yükü kaynak olabilir (Yıldırım, 1999).

u^* fonksiyonu iki parametre ile değişir: 'k' kaynak noktasının koordinatları ve 'z' alan noktasının koordinatları. Temel çözüm u^* , lokal koordinat sisteminde sadece 'k' ve 's' noktaları arasındaki bir 'r' uzaklığına bağlı olarak ifade edilebilir (Nowak vd.,1994).



Şekil 3.3 İki boyutlu çözüm bölgesi

Laplace denkleminin temel çözümü için ifade edilen,

$$\nabla^2 u^* + \Delta_z = 0 \quad (3.16)$$

denkleminde, B bölgesi içerisindeki herhangi bir 'z' noktasındaki alanın kaynağa uzaklığı,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (3.17)$$

kadardır. Önceki bölümde de bahsedildiği gibi 'z' noktası için,

$$\Delta_z = 0 \quad (3.18)$$

eşittir. Buna göre denk.(3.16),

$$\nabla^2 u^* = 0 \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilir. Bu Laplace denkleminin silindirik koordinatlarda ifadesi,

$$\nabla^2 u^*(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*(r)}{\partial r} \right) \quad (3.20)$$

şeklindedir. Bu durumda denklem, kısmi türev yerine bayağı türevle ifade edilebilir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*(r)}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.21)$$

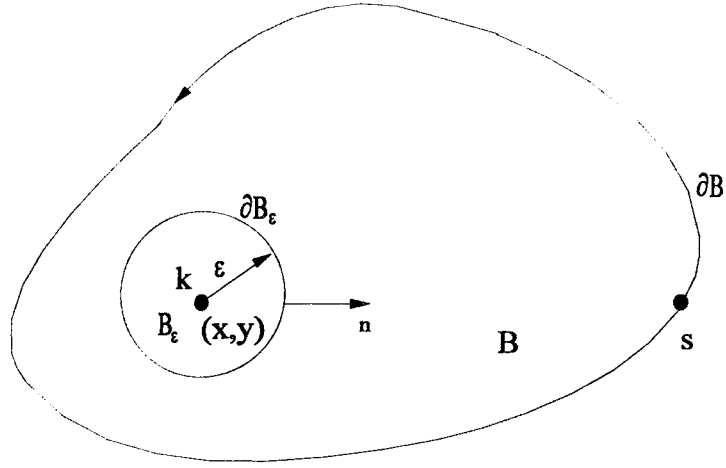
Böylece, denklemin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$r \frac{du^*(r)}{dr} = A \quad (3.22)$$

denklemini elde edilebilir. Buradan,

$$u^* = A \ln(r) + B \quad (3.23)$$

genel denklem ifadesi elde edilir. Burada A ve B değişkenlerinin bulunması gerekir. Bunun için kaynak noktasındaki durumda, yani $r = 0$, $z = k$ 'daki durum incelenir. Bu durumda bir tekillik söz konusudur. Kaynağın bulunduğu noktayı çevreleyen ε yarıçaplı bir daire alınır ve daha sonra ε sıfıra götürülür (Şekil 3.4).



Şekil 3.4 Temel çözüm için yaklaşım

Bu durumda, denk.(3.16) ifadesinden her iki tarafın B_ϵ bölgesinde integrali alınarak,

$$\int_{B_\epsilon} \nabla^2 u^* dB_\epsilon = - \int_{B_\epsilon} \Delta_z dB_\epsilon \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu denklemden, Dirac delta fonksiyonun özelliği kullanılarak,

$$\int_{B_\epsilon} \nabla^2 u^* dB_\epsilon = -1 \quad (3.25)$$

eşitliği elde edilir. Green teoreminin özelliğinden denklem,

$$\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS_\epsilon = -1 \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklem,

$$\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS_\epsilon = -1 \quad (3.27)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin çözümünden,

$$A = -\frac{1}{2\pi} \quad (3.28)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç denk.(3.23)'de yerine yazılırsa,

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) + B \quad (3.29)$$

elde edilir ($B = 0$ alınabilir). Bu durumda iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümü,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.30)$$

şeklinde bulunur (Yıldırım, 1999).

3.3.3 Diğer Denklem Tipleri ve Temel Çözümleri

İki boyutlu diğer denklem tipleri ve elde edilen temel çözümleri aşağıda verilmiştir (Hunter, 2002).

Helmholtz Denklemi	$\nabla^2 u^* + \lambda^2 u^* + \Delta_k = 0$	
Temel Çözümü	$u^* = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(\lambda r)$	(H, Henkel fonksiyonu)
Wave Denklemi	$c^2 (\nabla^2 u^*) - \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + \Delta_k(t) = 0$	(c, Dalga hızı)
Temel Çözümü	$u^* = -\frac{H(ct - r)}{2c\pi(c^2 t^2 - r^2)}$	
Diffusion Denklemi	$\nabla^2 u^* - \frac{1}{K} \frac{\partial u^*}{\partial t} = 0$	(K, Yayılma gücü)
Temel Çözümü	$u^* = -\frac{1}{(4Kt\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right)$	
Navier' s Denklemi	$\frac{\partial \sigma_{jl}^*}{\partial x_j} + \Delta_n = 0$	

Temel Çözümü

$$\mathbf{p}_i^* = p_{ji}^* \mathbf{e}_j$$

$$p_{ji}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu^2)r^2} \quad (\nu, \text{Poisson oranı})$$



BÖLÜM 4

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

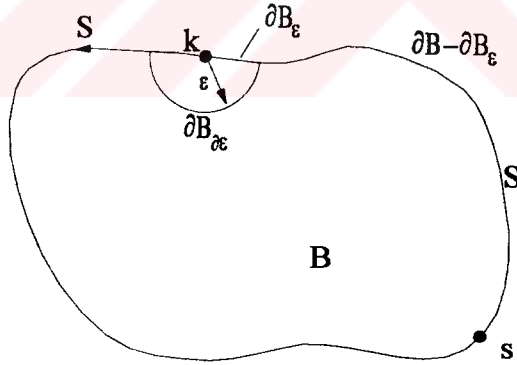
4.1. Genel Bilgi

Sınır elemanları yönteminde, analiz edilen problem bölgesinin sınırları keyfi olarak ayrıştırılır. Sınırlardaki bu her bir bölmeye de sınır elemanı adı verilir. Bu elemanlar üzerinde bilinen ve hesaplanması gereken sınır değerleri mevcuttur. Bu değerler gerilim (u) ve gerilimin türevi olan akıdır (q). Sınır elemanları yönteminde ilk önce sınırdaki bilinmeyen değerlerin hesaplanması gerekir. Daha sonra istenen noktadaki değer, bu sınır değerlerine göre hesaplanır. Bu hesaplamamanın temeli, sınır integral denklemlerine dayanır. Problem bölgesinde, hassas değerler elde etmek için sınırdaki eleman sayısı artırılır.

4.2. Sınır İntegral Denklemleri

Bölüm 3.2'de ifade edilen Green integral formülüne göre sınır integral denklemleri elde edilir. Burada sınırda ve iç noktalardaki integral denklemleri geliştirilecektir.

4.2.1. Sınır Noktaları İçin Sınır İntegral Denklemleri



Şekil 4.1 Sınırdaki 'k' noktasının gösterilmesi

Denk.(3.9)'da ifade edilen genel bölge denklemi, sınır noktalarında ve iç noktalarda Laplace denklemi özelliğine göre,

$$\int_B \left(u(s) \frac{\partial w}{\partial n}(k, s) - w(k, s) \frac{\partial u}{\partial n}(s) \right) dS(s) = 0 \quad (4.1)$$

$$w(k, s) \rightarrow u^*(k, s) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial n}(k, s) \rightarrow q^*(k, s)$$

ile gösterilirse, denk.(4.1),

$$\int_{\partial B} (u(s)q^*(k, s) - u^*(k, s)q(s))dS(s) = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Şekil (4.1)'de görüldüğü gibi, 'k' noktası ∂B_ε ile gösterilen sınırın üzerinde olduğu ve ε yarıçapının limiti sıfıra götürülerek noktasal hesabı göz önüne alınacaktır. Bu durumda, denk.(4.1) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B - \partial B_\varepsilon} (u(s)q^*(k, s) - u^*(k, s)q(s))dS(s) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (u(s)q^*(k, s) - u^*(k, s)q(s))dS(s) = 0 \quad (4.3)$$

Yukarıdaki denklemde eşitlikten sonraki birinci integral ifadesi, sınırdaki 'k' noktasının ε yarıçap dairesinin dışında kalan sınır denklemini ifade etmektedir. İkinci integral ifadesi ise 'k' noktasının ε yarıçap dairesinin içerisinde kalan sınır denklemini ifade eder. Bu denklem ifadesi tekil bir integral ifadesidir. Bu denklem 'k' noktası, 's' noktası üzerinde iken hesaplanması gerekir. Diğer noktalarda limit değeri sıfıra eşittir. Bu durumda ikinci integral ifadesi,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (u(s)q^*(k, s))dS(s) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (u^*(k, s)q(s))dS(s) \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu integraller aşağıdaki sonucu verir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (u(s)q^*(k, s))dS(s) = c(k)u(k) \quad (4.5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (u^*(k, s)q(s))dS(s) = 0 \quad (4.6)$$

Bu durumda denk.(4.2),

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B - \partial B_\varepsilon} (u(s)q^*(k, s) - u^*(k, s)q(s))dS(s) + c(k)u(k) \quad (4.7)$$

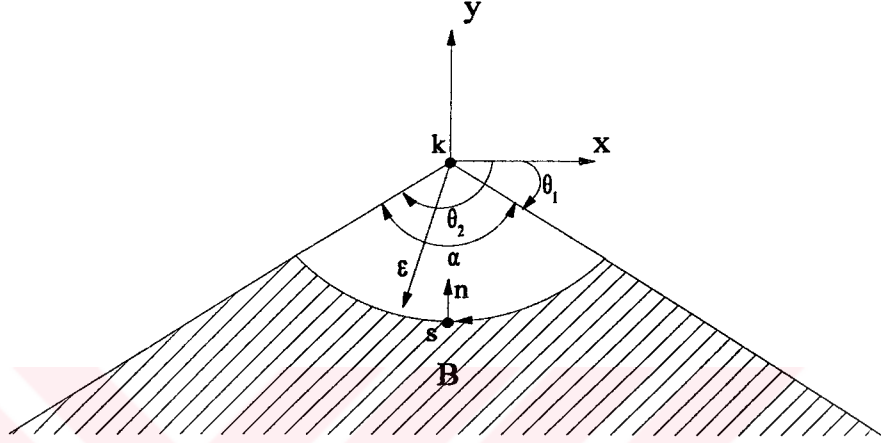
şeklinde ifade edilebilir. Buna göre $u(s)$ ve $q(s)$ bağımsız değerleri integral dışına alınarak,

$$c(k)u(k) + u(s) \int_{\partial B} q^*(k, s)dS(s) = q(s) \int_{\partial B} u^*(k, s)dS(s) \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sınır noktaları için ifade edilen sınır integral denklemidir.

4.2.1.1. c(k) Katsayısının Hesaplanması

Denk.(4.7)'de ifade edilen c(k) katsayısı tekil integrallerde hesaplanması gereken bir katsayıdır. Bu katsayı elemanın geometrisine göre değişkenlik gösterir.



Şekil 4.2 'k' noktasının geometrik gösterimi

c(k) katsayısının değeri, denk.(4.4)'ün çözümü ile elde edilebilir. Buna göre,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u(s) \frac{\partial w}{\partial n}(k, s) \right) dS(s) = c(k) u(k) \quad (4.9)$$

şeklindeki tekil integral ifadesinden,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(k) \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}(k, s) dS(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(k) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta \quad (4.10)$$

$$c(k) u(k) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} u(k) \quad (4.11)$$

sonucu elde edilir. Buna göre c(k) katsayısı,

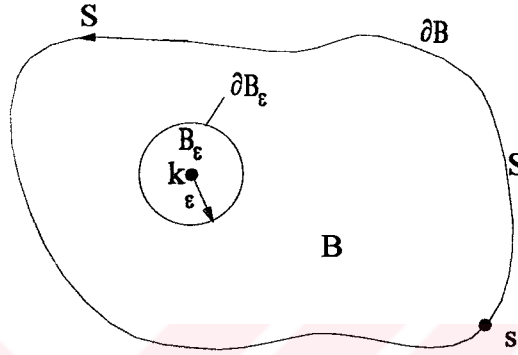
$$c(k) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre, $\alpha=\pi$ olan düzgün sınırlı bir problem bölgesinin sınır noktalarındaki sınır integral denklemi,

$$\frac{1}{2} u(k) + u(s) \int_{\partial B} q^*(k, s) dS(s) = q(s) \int_{\partial B} u^*(k, s) dS(s) \quad (4.13)$$

şeklindedir.

4.2.2. İç Noktalar İçin Sınır İntegral Denklemi



Şekil 4.3 İç noktadaki 'k' noktasının gösterilmesi

Denk.(4.2)'deki genel sınır integral denklemi ifadesiyle iç noktalardaki sınır integral denklemi elde edilir. Burada Şekil (4.3)'de görüldüğü gibi iç noktadaki 'k' noktası etrafındaki ε yarıçapının limiti sıfıra götürülerek noktasal hesaba ele alınacaktır. Bu durumda, denk.(4.2) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

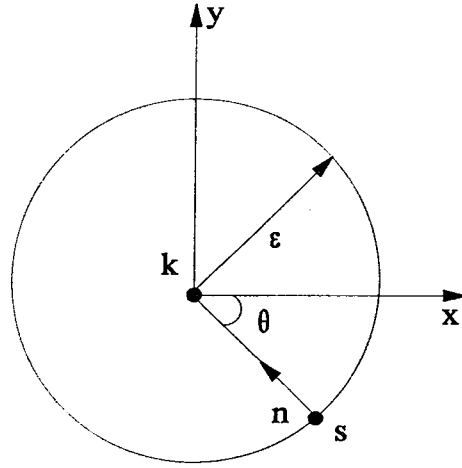
$$0 = \int_{\partial B} (u(s)q^*(k, s) - u^*(k, s)q(s)) dS(s) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (u(s)q^*(k, s) - u^*(k, s)q(s)) dS(s) \quad (4.14)$$

Bu denklemden, Bölüm (4.2)'de olduğu gibi ikinci integral ifadesinin sonucu elde edilecektir. Bu integral ifadesinde 'k' noktası etrafındaki ε yarıçaplı dairesel alan incelenir. Bu alan sıfıra götürülerek k noktasında çözüm elde edilir. Buna göre denklem,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u(s)q^*(k, s) dS(s) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} q(s)u^*(k, s) dS(s) \quad (4.15)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u(s)q^*(k, s) dS(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(s) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta = u(s) = u(k) \quad (4.16)$$



Şekil 4.4 İç noktadaki 'k' noktası etrafındaki ε yarıçaplı alan ifadesi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} q(s) u^*(k, s) dS(s) = 0 \quad (4.17)$$

Buna göre denk.(4.14),

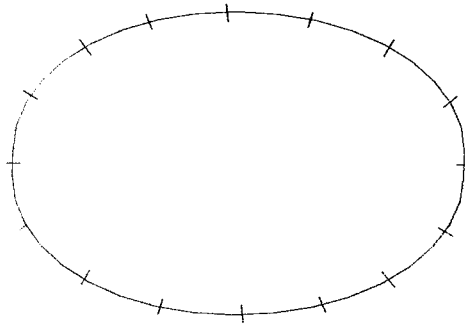
$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B} (u(s) q^*(k, s) - u^*(k, s) q(s)) dS(s) + u(k) \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre iç noktalarda sınır integral denklemi genel olarak,

$$u(k) + u(s) \int_{\partial B} q^*(k, s) dS(s) = q(s) \int_{\partial B} u^*(k, s) dS(s) \quad (4.19)$$

şeklinde gösterilir.

4.3. Sınırların Gösterimi ve Sınır Elemanları Yönteminin Uygulanması

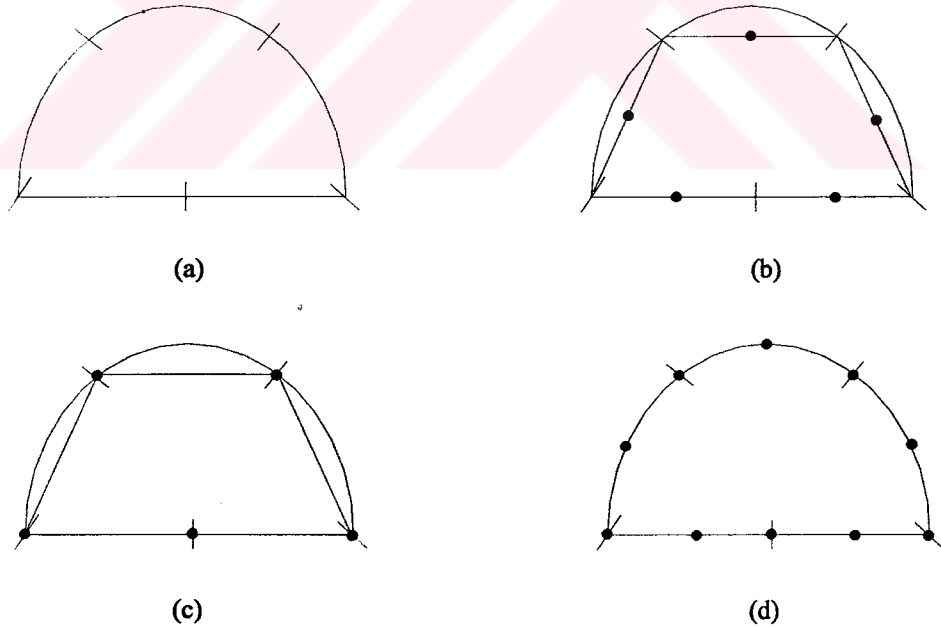


Şekil 4.5 Sınırın bölmelenmesi

Sınır integral denklemleri ile ifade edilen problem bölgesinin sınırları, N elemana bölünerek integral denklemin çözümü yapılır. Bu çözümün sonucunda bilinen sınır integralleri yardımıyla sınırdaki bilinmeyen değerler bulunur. Bu işlem sonucunda, problem bölgesinde istenilen bir noktadaki potansiyel değeri, bu noktaya ait sınır integral denkleminin çözümü ile elde edilir.

Sınırdaki ayrıştırılan bu elemanlar üzerinde, sınır integrallerinin hesaplanmasında referans alınan, aynı zamanda eleman üzerinde var olan ve hesaplanması gereken değerlerin bulunduğu noktalar mevcuttur. Bu noktalar sınır integral denklemlerinde 'k' ile ifade edilen noktalar. Sınırdaki bulunan bu noktalara genel olarak düğüm (*node*) adı verilir.

Bu ifadeye göre problem bölgesinin çözümü için çeşitli sınır elemanları geliştirilmiştir. Bu elemanlar genel olarak; sabit, lineer ve bu tez çalışmasında incelediğimiz parabolik elemanlardır. Buna göre sabit elemanda bir düğüm bulunmaktadır ve bu düğüm elemanın merkezindedir. Lineer elemanda ise iki düğüm bulunur ve bu düğümler elemanın uç noktalarındadır. Parabolik elemanda ise üç düğüm bulunur. Bu düğümlerin birisi elemanın merkezinde, diğer ikisi ise uç noktalarındadır. Burada lineer ve parabolik elemanda ifade edilen uç noktadaki düğümler, elemandan önceki ve sonraki elemanlardaki düğümler ile ortaklık söz konusudur.



Şekil 4.6 (a) Bölmelenmiş problem bölgesi (b) Sabit eleman (c) Lineer eleman (d) Parabolik eleman

Sınır elemanları yöntemiyle problem bölgesi analizinde, düğüm eleman ilişkisi vardır. Sınır noktalarında sınır elemanları yönteminin uygulanmasında, sınırdaki her düğümün bütün

elemanlarla ilişkisi incelenir. Böylece her bir düğüm-eleman çözümü elde edilir. Buna göre denk.(4.13)'deki ifade,

$$\int_{\partial B} u^*(k,s) dS(s) = G_{ks} \quad (4.20)$$

ve

$$\int_{\partial B} q^*(k,s) dS(s) = H_{ks} \quad (4.21)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada 'k' düğüm noktası 's' ise sınırdaki elemandır. Bu denklemde H_{ks} ve G_{ks} katsayılarına, etki katsayıları (*influence coefficients*) adı verilir. Buna göre sınır noktalarında denklem ifadesi denk.(4.13)'e göre,

$$c_k u_k + u_s H_{ks} = q_s G_{ks} \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir. Sınır üzerinde N eleman bulunduğu durum göz önüne alınırsa denk.(4.22),

$$c_k u_k + \sum_{s=1}^N H_{ks} u_s = \sum_{s=1}^N G_{ks} q_s \quad (4.23)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada H ve G, sınırdaki düğüm sayısı N ise (NxN) boyutlu iki matris ve u ile q, (Nx1) boyutlu vektörlerdir. Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda sınırdaki bilinmeyen değerler elde edilir. Buna göre denk.(4.23)'teki ifadede bilinen değerler bir tarafa bilinmeyenlerse diğer tarafa taşınır. Bu durumda denklem,

$$A x = F \quad (4.24)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada x, bilinmeyen u ve q değerlerini temsil eden (Nx1) boyutlu matrisi ifade eder. A, bilinmeyen u ve q değerlerine ait H ve G matris elemanlarını ifade eden (NxN) boyutlu matrisi gösterir. F ise bilinen u ve q değerlerinin kendilerine ait H ve G matris elemanlarının çarpımını ifade eden (Nx1) boyutlu matrisi ifade eder.

İç noktalara sınır elemanlarının uygulanmasında ise, belirlenen iç nokta ile bütün sınır elemanları arasındaki ilişki incelenir. Bu ilişki sonucunda denk.(4.19)'un çözümü ile elde edilen sonuçlar denk.(4.22)'deki terimler cinsinden yazılırsa,

$$u_k + u_s H_{ks} = q_s G_{ks} \quad (4.25)$$

denklemini elde edilir. Sınırdaki N eleman bulunduğunda göz önüne alınırsa bu denklem,

$$u_k + \sum_{s=1}^N H_{ks} u_s = \sum_{s=1}^N G_{ks} q_s \quad (4.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada H ve G, (Nx1) boyutlu matrisi ifade eder. Bu matris denkleminin çözümü denk.(4.24)'e göre bulunur ve istenilen iç noktadaki gerilim değeri u_k elde edilir.

4.4. Gauss Sayısal İntegrasyonu

Gauss sayısal integrasyon formülü, kaynak noktası içermeyen sınır elemanları üzerindeki integrasyon için kullanılır. Eğer incelenmekte olan eleman kaynak noktası içeriyorsa integraller tekil olur. Bu durumda, ya analitik integrasyon (basit durumlar için) ya da logaritmik sayısal integrasyon formülleri kullanılmalıdır.

Tablo 4.1 Kurallı Gauss noktaları (apsisleri) ve ağırlık faktörleri

n	Apsisler, ξ_i	Ağırlık faktörleri, w_i
2	-0.5773502692	1.0000000000
	0.5773502692	1.0000000000
3	± 0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888888
4	± 0.8611363116	0.3478548551
	± 0.3399810436	0.6521451549
5	± 0.9061798459	0.2369268851
	± 0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888888
6	± 0.9324695142	0.1713244924
	± 0.6612093865	0.3607615730
	± 0.2386191861	0.4679139346
7	± 0.9491079123	0.1294849662
	± 0.7415311856	0.2797053915
	± 0.4058451514	0.3818300505
	0.0000000000	0.4179591837
8	± 0.9602898565	0.1012285363
	± 0.7966664774	0.2223810345
	± 0.5255324099	0.3137066459
	± 0.1834346425	0.3626837834

İki boyutlu problemlerde, bir boyutlu sınır elemanları üzerindeki integraller için bir boyutlu Gauss alan hesabı kullanılmaktadır. Her bir integral için,

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (4.27)$$

yazılır. Burada n: integrasyon noktalarının sayısı, ξ_i : i noktasının lokal koordinatı ve w_i : ağırlık faktörüdür (Yıldırım, 1999).

ξ_i değerleri ve w_i ağırlık faktörleri, sekiz noktaya kadar olan değerler için Tablo 4.1'de verilmiştir. Burada düğümler (apsisler) gerçekte Legendre polinomlarının kökleridir, ağırlık faktörleri ise bir denklem sisteminin çözümüyle elde edilmiştir (Mathews, 1992).

4.5. Sınır Elemanları Yönteminde Numaralandırma Kuralı

Sınır elemanları yönteminde bir dış veya iç sınır tanımlamak için normalin yönü özdeşliği kullanılır (Brebbia, 1978). Buna göre iki boyutlu problemler için, sınır düğümlerinin numaralandırılması işleminde aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. Dış yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünde (sağa doğru) tanımlanır.
2. İç yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünün tersinde (sola doğru) olarak tanımlanır (Yıldırım, 1999).

BÖLÜM 5

İTERPOLASYON FONKSİYONLARI VE ETKİ KATSAYILARI

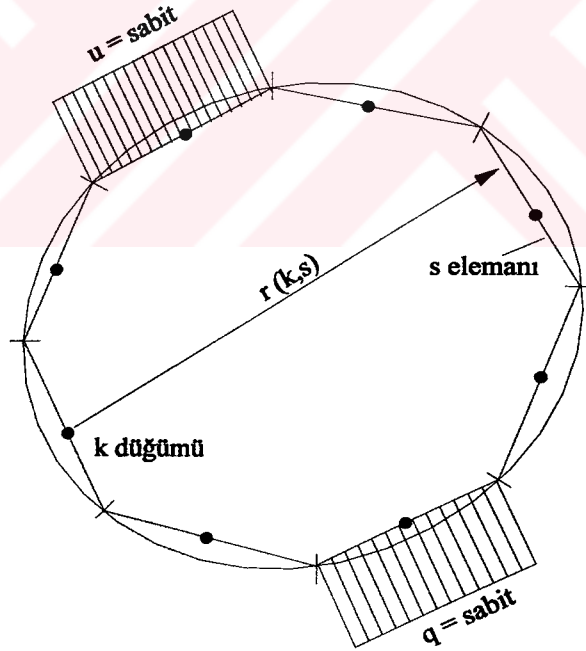
5.1. Fonksiyonların Gösterimi

Sınır elemanları yönteminde, problem bölgesinin çözümünde sınır elemanları üzerinde çeşitli interpolasyon fonksiyonlar geliştirilmiştir. Bu fonksiyonlar, eleman üzerindeki değerlerin durumuna göre ifade edilmektedir.

Bir eleman şekli için kullanılan şekil fonksiyonu ile eleman içindeki fiziksel değerlerin tanımı için kullanılan interpolasyon fonksiyonları aynı ise böyle bir elemana eş parametrelili (*isoparametric*) eleman adı verilir (Beer vd., 1991).

5.2. Sabit Eleman

Sınır elemanları yönteminin bu eleman türünde, sınır değerlerinin (potansiyel ve akı), eleman boyunca sabit değerli olduğu kabul edilir ve bu değerler elemanın orta noktasında tek bir düğümle gösterilir.



Şekil 5.1 Sabit elemanın problem bölgesinde genel gösterimi

Eleman geometrisi, incelenen problem bölgesi sınırlarının uç noktaları arasında düz bir çizgi olarak gösterilir. Problem bölgesi eğrisel sınırlara sahipse; problem bölgesi sınırı ile eleman sınırı denk değildir (Şekil 5.2.a). Bu tür problemlerin çözümünde bu denkleğe yaklaşım

Sınırdaki düğümler üzerinde bulunan u ve q değerleri denk.(4.23)'e göre hesaplanır. Bu denklemde ifade edilen c_k katsayısı, sınırların düzlemsel olması nedeniyle ($\alpha=\pi$), değeri her zaman $1/2$ 'ye eşittir. Ayrıca c_k katsayısının hesaplamasında diğer genel bir yöntem ise; uniform bir potansiyel, sınırlanmış bir bölgeye uygulandığında bütün türevlerin (q değerlerinin) sıfır olması zorunluluğundan hareketle denk.(4.23)'teki H matrisinin köşegen terimlerinin hesaplanmasıdır. Bu durumda,

olur. Burada u_i , tanımlanan noktalarda sabit değerli vektörlerdir. Böylece, H 'ın herhangi bir satırının elemanlarının toplamı sıfır olmalıdır ve köşegen katsayılarının değerleri, bütün köşegen olmayan katsayıların değerleri bilindiğinden kolayca hesaplanabilir.

Bu tanıma göre sınır noktalarında denklem genel olarak,

şeklinde yazılabilir. Veya,

$$\hat{H} u = G q \quad (5.4)$$

şeklinde matris denklemi ile ifade edilebilir. Bu denklemde,

$$\hat{H}_{kk} = H_{kk} + c_k \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanır.

İç noktalarda u değeri ise denk.(4.26)'ya göre hesaplanır. Buna göre iç noktalardaki genel denklem ise,

$$u_k = \sum_{s=1}^N G_{ks} q_s - \sum_{s=1}^N H_{ks} u_s \quad (5.6)$$

şeklinde gösterilir. Bu denklem,

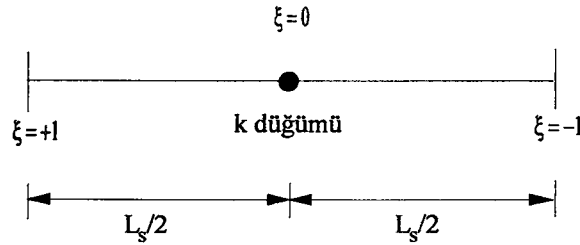
$$u_k = G q - H u \quad (5.7)$$

matris denklemi şeklinde de gösterilebilir.

Buna göre u ve q değerlerinin hesaplanmasında, sınır noktalarında ve iç noktalarda ifade edilen denklemlerde H_{ks} ve G_{ks} etki katsayılarının hesaplanması gerekir.

5.2.1 Etki Katsayılarının Hesaplanması

Sınır elemanları yönteminde, sınır elemanı lokal koordinatlarla ifade edilmiştir. Eleman üzerindeki sayısal integrasyon noktaları da bu koordinata göre belirtilmiştir. Lokal koordinat sisteminde verilen bir eleman üzerindeki bir noktanın koordinatları, global koordinat sisteminde aşağıdaki şekilde verilebilir.



Şekil 5.3 Sabit eleman koordinat sistemi

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi \quad (5.8)$$

$$y(\xi) = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2} \xi \quad (5.9)$$

Bu denklemlerde, $\xi = -1$ ve $\xi = +1$ yazılarak sabit elemanın uç noktalarının koordinatları elde edilebilir (Şekil 5.3). Ayrıca denk.(5.8) ve denk.(5.9),

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2 \quad (5.10)$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)y_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)y_2 \quad (5.11)$$

şeklinde de yazılabilir.

5.2.1.1 G_{ks} Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.3) ve denk.(5.6)'da verilen G_{ks} etki integrallerini hesaplamak için u^* temel çözümü kullanılır.

$$G_{ks} = \int_{\partial B} u^* dS \quad (5.12)$$

Sınır integrallerini hesaplamak amacıyla, sınırdaki bir dS sınır parçası için,

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = J d\xi \quad (5.13)$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü yapılır. Bu denklemde J , Jacobian tanımı olarak adlandırılır. Denk.(5.8) ve denk.(5.9)'de türev alınarak,

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{y_2 - y_1}{2} \quad (5.14)$$

elde edilir ve bu türevler denk.(5.13)'da yerine yazılırsa,

$$dS = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} d\xi = \frac{L_s}{2} d\xi \quad (5.15)$$

şeklinde basit bir koordinat dönüşümü yapılmış olur (Burada L_s elemanın uzunluğudur).

$$G_{ks} = \int_{\partial B_s} u^* dS = \int_{\partial B_s} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.16)$$

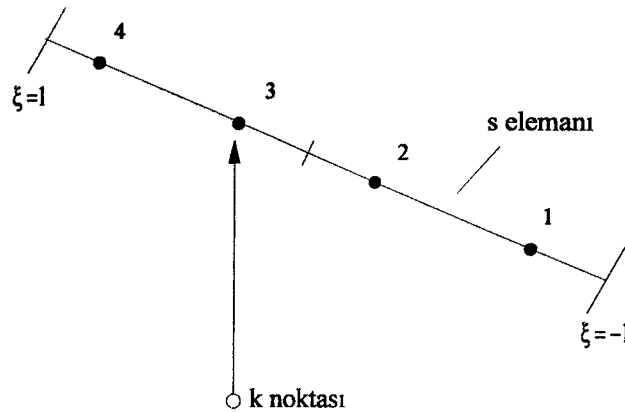
$$G_{ks} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_s} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \frac{L_s}{2} \int_{-1}^{+1} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi \quad (5.17)$$

Şeklinde ifade edilen denklem, denk.(4.27)'ye göre,

$$G_{ks} = \frac{L_s}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi = \frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{r_i}\right) w_i$$

$$G_{ks} = \frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{r_i}\right) w_i \quad (5.18)$$

şeklinde hesaplanır. Burada r , 'k' kaynak noktası (sınırdaki düğüm, iç noktada hesaplanmak istenen nokta) ile Gauss integrasyon noktaları arasındaki uzaklıktır. Ayrıca n , eleman üzerindeki Gauss integrasyon noktalarının sayısıdır. $n = 4$ durumunda lokal koordinatlar,



Şekil 5.4 Gauss integrasyon noktalarının dağılımı

$$\xi_1 = -0.86113631, \quad \xi_2 = -0.33998104, \quad \xi_3 = -\xi_2, \quad \xi_4 = -\xi_1$$

ve bu koordinatların ağırlık faktörleri,

$$w_1=0.34785485, \quad w_2=0.65214515, \quad w_3=w_2, \quad w_4=w_1$$

şeklindedir.

5.2.1.2. H_{ks} Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.3) ve denk.(5.6)'da verilen H_{ks} etki integrallerini hesaplamak için ilk önce, q^* teriminin bulunması gerekir.

$$H_{ks} = \int_{\partial B_S} q^* dS \quad (5.19)$$

Burada q^* , temel çözümün (u^*) normale göre türevidir.

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{ve} \quad u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

olduğundan,

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d_{ks}}{r} \quad (5.20)$$

çözümü elde edilir. Burada d_{ks} , 'k' kaynak noktasının 's' elemanına dik uzaklığı olarak tanımlanır. Buna göre,

$$H_{ks} = \int_{\partial B_S} q^* dS = \int_{\partial B_S} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{\partial B_S} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (5.21)$$

$$H_{ks} = \int_{\partial B_S} -\frac{1}{2\pi r} \frac{d_{ks}}{r} dS = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_S} \frac{d_{ks}}{r^2} dS$$

$$H_{ks} = -\frac{1}{2\pi} \frac{L_s}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d_{ks}}{r^2} d\xi = -\frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{d_{ks}}{r_i^2} w_i$$

$$H_{ks} = -\frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{d_{ks}}{r_i^2} w_i \quad (5.22)$$

şeklinde etki katsayısı çözümlenir.

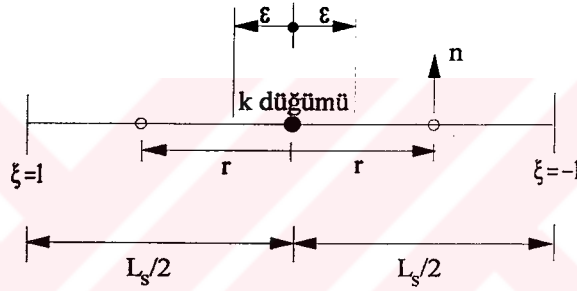
5.2.2. Tekil İntegrallerin Hesaplanması

Sınır değerlerinin çözümünde, 'k' kaynak düğümünün, 's' elemanı üzerinde olması durumunda ($k = s$), bir tekillik meydana geleceğinden yüksek dereceden integrasyon kuralları veya özel bir formül kullanılması tavsiye edilir.

Sabit elemanlarının özel durumu için H_{kk} ve G_{kk} katsayıları analitik olarak hesaplanabilir. n normali ile kaynak noktasına olan r uzaklığı daima birbirine dik olduğundan dolayı H_{kk} terimleri sıfır olur.

$$H_{kk} = \int_{\partial B_k} q^* dS = \int_{\partial B_k} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS = 0 \quad (5.23)$$

G_{kk} tekil integralleri de özel işlem gerektirir.



Şekil 5.5 'k' düğümünün integral denklemi için geometrik gösterimi

$$G_{kk} = \int_{\partial B_k} u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_k} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.24)$$

Elemanın merkezinde bulunan 'k' düğümü, simetri hesabına göre,

$$G_{kk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L_s/2}^0 \ln\frac{1}{r} dS + \frac{1}{2\pi} \int_0^{L_s/2} \ln\frac{1}{r} dS \quad (5.25)$$

$$G_{kk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{L_s/2} \ln\frac{1}{r} dS \quad (5.26)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil (5.5)'de gösterilen 'k' noktası etrafındaki ε yarıçapının limiti sıfıra götürülerek tekil integral ifadesi elde edilir.

$$G_{kk} = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [r \ln(r) - r]_{\varepsilon}^{L_s/2} \quad (5.27)$$

$$G_{kk} = \frac{L_s}{2\pi} \left(1 + \ln \left(\frac{2}{L_s} \right) \right) \quad (5.28)$$

5.3. Lineer Eleman

Sınır elemanları yönteminin bu eleman türünde, sınır değerinin eleman üzerinde tanımlanan ve elemanın her iki uç noktasında bulunan düğümler arasında lineer bir değişim gösterdiği kabul edilir.

Bir sınır düğümünde, çeşitli durumlar meydana gelebilir. Birincisi, düğümün düz sınır üzerinde olmasıdır. Bu durumda, düğümden önceki ve sonraki akılar farklı tanımlanmadıkça, potansiyel ve akıdan sadece biri bilinmeyecektir. Bu durumlarda bilinmeyen değer, sınır integral denklemlerinin çözümü sonucunda bulunur.

İkincisi, düğümün bir köşe noktasında olmasıdır. Burada, sınır şartlarına bağlı olarak dört durum ortaya çıkar.

1. Bilinen değerler : Köşeden önceki ve sonraki akılar.

Bilinmeyen değer : Potansiyel.

2. Bilinen değerler : Potansiyel ve köşeden önceki akı.

Bilinmeyen değer : Köşeden sonraki akı.

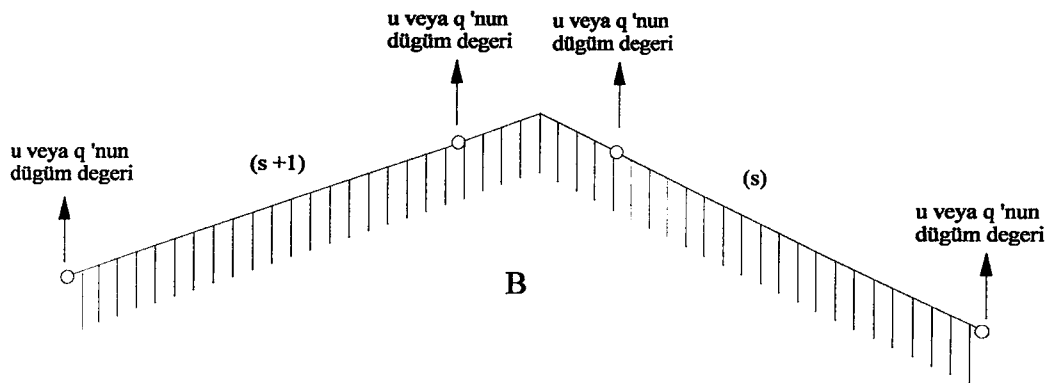
3. Bilinen değerler : Potansiyel ve köşeden sonraki akı.

Bilinmeyen değer : Köşeden önceki akı.

4. Bilinen değer : Potansiyel.

Bilinmeyen değerler : Köşeden önceki ve sonraki akılar.

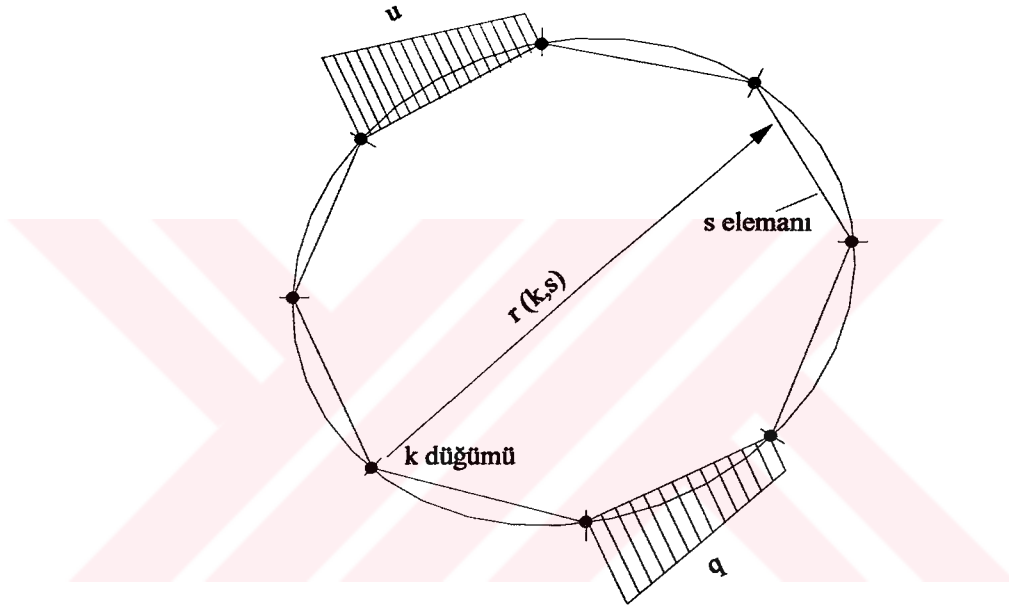
İlk üç durum için her düğümde sadece bir bilinmeyen vardır. Bilinmeyen değer sürekli interpolasyon fonksiyon ile sınır integral denklemlerin çözümü sonucunda elde edilir.



Şekil 5.6 Süreksiz eleman

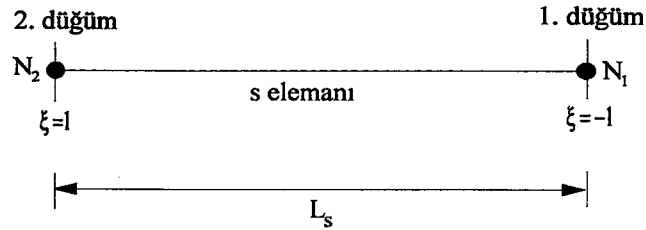
Bir köşe düğümünde bilinmeyenlerin sayısı iki olduğunda (4.durum), bu düğüm için fazladan bir denklem gerekir. Problem süreksiz elemanlar düşüncesi kullanılarak da çözülebilir (Danson vd., 1985). Bu durumda, 's' elemanının ikinci düğümü ve 's+1' elemanının birinci düğümü, köşede birleşen elemanın iç tarafına kaydırılır ve köşede birleşme yerine bağımsız iki düğüm olarak kalır (Şekil 5.6). Böylece, her düğüm için bir sınır integral denklemi yazılabilir (Yıldırım, 1999). Bilinmeyen değerler, bu denklemlerin çözümü sonucunda elde edilir. Bu çözüm fonksiyonlarına, süreksiz interpolasyon fonksiyonu adı verilir.

Eleman geometrisi ise sabit elemandaki gibi sınırların uç noktaları arasında düz bir çizgi ile gösterilir.



Şekil 5.7 Lineer elemanın problem bölgesinde genel gösterimi

Lineer elemanda, sabit elemanda olduğu gibi düğüm-eleman ilişkisi incelenir. Fakat eleman üzerinde iki düğüm bulunması nedeniyle, düğüm-eleman ilişkisi sonucunda eleman üzerinde bulunan her düğüme ait ayrı ayrı etki katsayıları meydana gelir.



Şekil 5.8 Lineer elemanın lokal koordinat sisteminde gösterimi

Lineer elemanda Şekil (5.8)'de gösterildiği gibi lokal koordinatlarla ifade edilen düğümlere ait interpolasyon fonksiyonları birinci düğümde,

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.29)$$

ve ikinci düğümde,

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.30)$$

denklemleriyle tanımlanır. Gauss noktalarının global koordinat cinsinden gösterilmesi de denk.(5.10) ve denk.(5.11)'deki gibidir.

Sınırdaki u ve q değerleri denk.(4.8)'e göre sınır N elemana bölünmüş ise,

$$c(k) u(k) + \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} u(s) q^*(k, s) dS(s) = \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} q(s) u^*(k, s) dS(s) \quad (5.31)$$

denkleminin çözümüyle elde edilir. Bu denklemde u(s) ve q(s) eleman üzerindeki gerilim ve akıyı ifade eder. Lineer elemanda s elemanı iki düğümle ifade edildiği için eleman üzerindeki gerilim ve akı her iki düğümde de (1. düğüm ve 2. düğüm) ayrı ayrı tanımlanır. Buna göre eleman üzerinde herhangi bir noktadaki gerilim değeri,

$$u_s(\xi) = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

ve akı değeri,

$$q_s(\xi) = N_1 q_1 + N_2 q_2 = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

şeklinde gösterilir. Böylece denk.(5.31),

$$c(k) u(k) + \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} q^*(k, s) dS(s) = \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} u^*(k, s) dS(s) \quad (5.34)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda düğümlere ait etki integralleri ise,

$$H_{ks}^1 = \int_{\partial B_s} N_1 q^* dS \quad (5.35)$$

$$H_{ks}^2 = \int_{\partial B_S} N_2 q^* dS \quad (5.36)$$

$$G_{ks}^1 = \int_{\partial B_S} N_1 u^* dS \quad (5.37)$$

$$G_{ks}^2 = \int_{\partial B_S} N_2 u^* dS \quad (5.38)$$

şeklinde tanımlanır. Bu etki integralleri ise sınır noktalarında genel olarak,

$$c_k u_k + \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} H_{ks}^1 & H_{ks}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} G_{ks}^1 & G_{ks}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

denklemleriyle ifade edilir. Bu denklemde c_k katsayısı ise denk.(4.12)'ye göre hesaplanır. Lineer eleman sınırı düzlemsel olsa da, düğümler elemanın sonunda olduğu için c_k katsayısı s elemanından önceki ve sonraki eleman arasındaki açıya göre değişkenlik gösterir. Diğer bir tanımla c_k katsayısı, denk.(5.2) ifadesine göre H matrisinin terimleri toplanmasıyla elde edilir. Bu ifadeye göre lineer elemanda c_k katsayısı,

$$c_k = - \sum_{s=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 H_{ks}^{\alpha} \quad (5.40)$$

denklemleriyle ifade edilir.

İç noktalarda ise, sınır noktalarında tanımlanan ifade aynen geçerlidir. Buna göre iç noktalarda sınır integral denklemi denk.(4.26) tanımına göre,

$$u_k = \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} G_{ks}^1 & G_{ks}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} H_{ks}^1 & H_{ks}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

şeklinde ifade edilir.

5.3.1 Etki katsayılarının Hesaplanması

Lineer eleman iki düğümlerle tanımlanmaktadır. Elde edilen integral denklemlerinde ise bu iki düğüme ait ayrı ayrı H ve G etki katsayıları hesaplanması gerekir. Bu hesaplama sonucunda, ' k ' düğümünün ' s ' elemanın 1. düğümlerine etkisi ile ' $s-1$ ' elemanın 2. düğümlerine etkisi toplanarak H ve G etki matrisleri oluşturulur.

5.3.1.1 G_{ks}^1 ve G_{ks}^2 Etki integrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.39) ve denk.(5.41)'deki integral denklemlerinde ifade edilen G_{ks}^1 ve G_{ks}^2 etki integrallerinin çözümünde u^* temel çözümü söz konusudur. Bu etki integralleri, denk.(5.37) ve denk.(5.38)'deki integral denklemin çözümü ile elde edilir.

$$G_{ks}^1 = \int_{\partial B_S} N_1 u^* dS \quad \text{ve} \quad G_{ks}^2 = \int_{\partial B_S} N_2 u^* dS$$

Lineer eleman sınırı sabit eleman sınırı gibi düzlemsel olduğundan bu etki katsayılarının çözümü sabit elemanın çözümüyle benzerdir. Sadece N_1 ve N_2 interpolasyon fonksiyonları eklenir. Buna göre G_{ks}^1 ve G_{ks}^2 etki integralleri,

$$G_{ks}^1 = \frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 - \xi_i) \ln \left(\frac{1}{r_i} \right) w_i \quad (5.42)$$

$$G_{ks}^2 = \frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 + \xi_i) \ln \left(\frac{1}{r_i} \right) w_i \quad (5.43)$$

şeklinde tanımlanır.

5.3.1.2 H_{ks}^1 ve H_{ks}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.39) ve denk.(5.41)'deki integral denklemlerinde ifade edilen H_{ks}^1 ve H_{ks}^2 etki integrallerinin çözümünde q^* temel çözümü kullanılır. Bu etki integralleri, denk.(5.35) ve denk.(5.36)'daki integral denklemin çözümü ile elde edilir.

$$H_{ks}^1 = \int_{\partial B_S} N_1 q^* dS \quad \text{ve} \quad H_{ks}^2 = \int_{\partial B_S} N_2 q^* dS$$

Bu etki integrallerinin çözümleri, G_{ks}^1 ve G_{ks}^2 etki integralleri çözümünde de bahsedildiği gibi sabit elemandaki çözüme benzerdir. Buna göre H_{ks}^1 ve H_{ks}^2 etki integralleri,

$$H_{ks}^1 = -\frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 - \xi_i) \frac{d_{ks}}{r_i^2} w_i \quad (5.44)$$

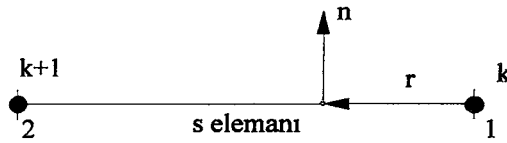
$$H_{ks}^2 = -\frac{L_s}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 + \xi_i) \frac{d_{ks}}{r_i^2} w_i \quad (5.45)$$

denklemleriyle ifade edilir.

5.3.2. Tekil İntegrallerin Hesaplanması

'k' kaynak düğümünün, 's' elemanı üzerinde olması nedeniyle meydana gelen bu durumda H ve G'ye ait tekil integraller ayrı ayrı hesaplanır.

's' elemanı üzerinde iki düğüm bulunması nedeniyle her düğüme ait etki integralleri hesaplanır. Bu durumda 'k' düğümü, 's' elemanının birinci düğümü üzerinde iken,



Şekil 5.9 'k' düğümünün, s elemanının birinci düğümü üzerinde bulunması

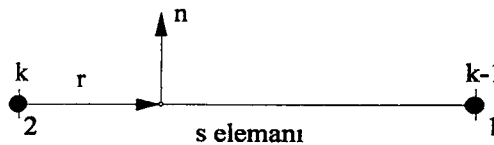
$$H_{kk}^1 = \int_{\partial B_k} N_1 q^* dS = \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 - \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (5.46)$$

$$H_{kk}^2 = \int_{\partial B_k} N_2 q^* dS = \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 + \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (5.47)$$

$$G_{kk}^1 = \int_{\partial B_k} N_1 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.48)$$

$$G_{kk}^2 = \int_{\partial B_k} N_2 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.49)$$

ve 'k' düğümü ikinci düğüm üzerinde ise,



Şekil 5.10 'k' düğümünün, s elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunması

$$H_{kk-1}^1 = \int_{\partial B_k} N_1 q^* dS = \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 - \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (5.50)$$

$$H_{kk-1}^2 = \int_{\partial B_k} N_2 q^* dS = \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 + \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (5.51)$$

$$G_{kk-1}^1 = \int_{\partial B_k} N_1 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.52)$$

$$G_{kk-1}^2 = \int_{\partial B_k} N_2 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_k} \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.53)$$

tekil integralleri söz konusudur. Bu tekil integraller analitik olarak hesaplanır.

H tekil integral katsayıları, n normali ile kaynak noktasına olan r uzaklığının daima dik olması nedeniyle sıfırdır.

$$H_{kk}^1 = H_{kk}^2 = 0 \quad (5.54)$$

$$H_{kk-1}^1 = H_{kk-1}^2 = 0 \quad (5.55)$$

G tekil integral katsayıları, birinci düğüm üzerinde iken denk.(5.48),

$$G_{kk}^1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{L_k}{2} d\xi \quad (5.56)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tekil integral ifadesinin tekillik tanımıyla çözümü sonucunda,

$$G_{kk}^1 = \frac{L_k}{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{L_k} \right) \quad (5.57)$$

denklemini elde edilir. Aynı şekilde denk.(5.49),

$$G_{kk}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{L_k}{2} d\xi \quad (5.58)$$

şeklinde ifade edilir. Bu tekil integral denklemin çözümünde ise,

$$G_{kk}^2 = \frac{L_k}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{L_k} \right) \quad (5.59)$$

denklemini elde edilir.

'k' düğümü 's' elemanının ikinci düğümü üzerinde iken G integrallerinin hesaplanmasında; G_{kk-1}^1 tekil integrali ile G_{kk}^2 tekil integralinin aynı analitik duruma sahip olduğu görülür. Aynı şekilde G_{kk-1}^2 tekil integrali ile G_{kk}^1 tekil integrali de aynı durumdadır. Dolayısıyla tekil integral çözümleri de aynıdır. Buna göre tekil integral çözümleri,

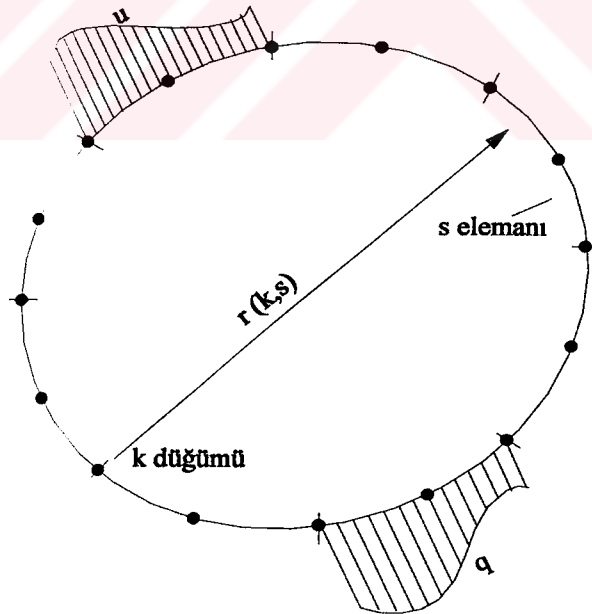
$$G_{kk-1}^1 = G_{kk}^2 = \frac{L_k}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{L_k} \right) \quad (5.60)$$

$$G_{kk-1}^2 = G_{kk}^1 = \frac{L_k}{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{L_k} \right) \quad (5.61)$$

olarak ifade edilir.

5.4. Parabolik Eleman

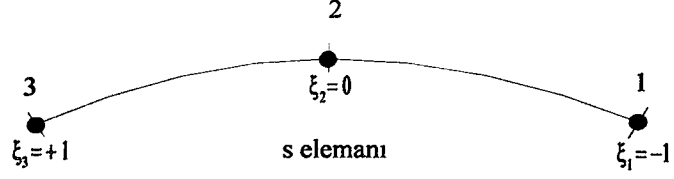
Bu eleman türünde, eleman üzerinde bulunan düğüm değerlerinin (gerilim ve akı) eleman boyunca parabolik değişime sahip olduğu kabul edilir. Düğümler eleman boyunca biri merkezde, diğer ikisi ise elemanın uç noktalarında tanımlanır. Şekil (5.11)'de örnek olarak, 's' elemanı üzerindeki değerlerin değişimi taralı olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.11 Parabolik elemanın problem bölgesinde genel gösterimi

Parabolik elemanda eleman sınırı, problem sınırına denk olarak değişkenlik gösterir. Bu durum izoparametrik (*isoparametric*) olarak adlandırılır. Bu parabolik elemanın en önemli

avantajıdır. Buna göre elde edilen çözümler çok hassastır. Belli başlı dezavantajları ise; eleman üzerinde bulunan düğümlere ait etki integralleri ve tekil integraller oldukça karmaşık ve hesaplamaları daha zor olmasıdır.



Şekil 5.12 Parabolik elemanın lokal koordinat ile gösterilmesi

Parabolik elemanda, düğümlere ait interpolasyon fonksiyonları,

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \quad (5.62)$$

$$N_2 = 1-\xi^2 \quad (5.63)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \quad (5.64)$$

şeklinde tanımlanır. Eleman üzerindeki herhangi bir noktanın global koordinat cinsinden ifadesi ise;

$$x(\xi) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (5.65)$$

$$y(\xi) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (5.66)$$

şeklindedir. Sınırdaki bir dS parçası denk.(5.13)'e göre koordinat dönüşümü yapılır. Bu denklemde $\frac{dx}{d\xi}$ ve $\frac{dy}{d\xi}$ 'yi elde etmek için denk.(5.65) ve denk.(5.66)'nın türevleri alınırsa,

$$\frac{dx}{d\xi} = (2\xi-1)\frac{x_1}{2} - 2\xi x_2 + (2\xi+1)\frac{x_3}{2} \quad (5.67)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = (2\xi-1)\frac{y_1}{2} - 2\xi y_2 + (2\xi+1)\frac{y_3}{2} \quad (5.68)$$

denklemleri elde edilir.

N elemana bölünen parabolik elemanda, sınırdaki düğümler üzerinde bulunan u ve q değerleri, genel olarak ifade edilen denk.(4.8)'in çözümü sonucunda elde edilir.

$$c(k) u(k) + \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} u(s) q^*(k, s) dS(s) = \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} q(s) u^*(k, s) dS(s) \quad (5.69)$$

Bu denklemde u(s) ve q(s) değerleri, eleman üzerindeki değerleri ifade eder. Bu değerler, eleman üzerinde üç düğüm bulunması nedeniyle,

$$u_s(\xi) = (N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3) = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$q_s(\xi) = (N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3) = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

denklemleri ile tanımlanır. Böylece denk.(5.69)

$$c(k) u(k) + \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} q^*(k, s) dS(s) = \sum_{s=1}^N \int_{\partial B} [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} u^*(k, s) dS(s) \quad (5.72)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda düğümlere ait etki integralleri ise,

$$H_{ks}^1 = \int_{\partial B_s} N_1 q^* dS \quad (5.73)$$

$$H_{ks}^2 = \int_{\partial B_s} N_2 q^* dS \quad (5.74)$$

$$H_{ks}^3 = \int_{\partial B_s} N_3 q^* dS \quad (5.75)$$

$$G_{ks}^1 = \int_{\partial B_s} N_1 u^* dS \quad (5.76)$$

$$G_{ks}^2 = \int_{\partial B_s} N_2 u^* dS \quad (5.77)$$

$$G_{ks}^3 = \int_{\partial B_s} N_3 u^* dS \quad (5.78)$$

denklemleri ile tanımlanır. Bu etki integralleri, sınır noktalarında genel olarak,

$$c_k u_k + \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} H_{ks}^1 & H_{ks}^2 & H_{ks}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} G_{ks}^1 & G_{ks}^2 & G_{ks}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

denklemiyle tanımlanır. Bu denklemde c_k katsayısının ise, eleman geometrisine bağlı olarak hesaplanması gerekir. Ancak parabolik elemanda, eleman sınırı eğrisel sınırlarla ifade edileceği için her bir c_k katsayısını hesaplamak zordur. Bunun için c_k katsayısı, denk.(5.2) tanımına göre diğer hesaplama metodu ile hesaplanır. Buna göre c_k katsayısı,

$$c_k = - \sum_{s=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 H_{ks}^{\alpha} \quad (5.80)$$

denklemiyle elde edilir.

İç noktalarda sınır integral denklemi ise,

$$u_k = \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} G_{ks}^1 & G_{ks}^2 & G_{ks}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} - \sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} H_{ks}^1 & H_{ks}^2 & H_{ks}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

şeklinde tanımlanır.

5.4.1. Etki Katsayılarının Hesaplanması

Parabolik elemana ait sınır integral denklemlerinde, tanımlanan herhangi bir nokta (sınırdaki düğüm, iç noktada hesaplanmak istenen nokta) ile sınır elemanı arasında etkileşim sonucu altı farklı etki integral denklemi meydana gelmektedir. Düğümler üzerinde bulunan u ve q değerlerini elde etmek için bu integral denklemlerinin hesaplanması gerekir. Bu hesaplama sonucunda, lineer elemanlarda da ifade edildiği gibi, elemanın uç noktalarında bulunan düğümler ile elemandan sonra ve önce gelen elemanın son düğümleri ile ortaklığı söz konusudur. Buna göre, 'k' noktasının 's' elemanın birinci düğümlerine etkisi ile 's-1' elemanın üçüncü düğümlerine etkisi toplanarak H ve G etki matrisleri oluşturulur.

5.4.1.1. G_{ks}^1 , G_{ks}^2 ve G_{ks}^3 Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.79) ve denk.(5.81)'de ifade edilen G_{ks} etki integrallerinin hesaplanmasında, sınırdaki $dS \rightarrow d\xi$ dönüşümünün yapılması gerekir. Bu etki integralleri denk.(5.76), denk.(5.77) ve denk.(5.78)'de ifade edilmiştir.

$$G_{ks}^1 = \int_{\partial B_S} N_1 u^* dS \quad G_{ks}^2 = \int_{\partial B_S} N_2 u^* dS \quad G_{ks}^3 = \int_{\partial B_S} N_3 u^* dS$$

Sınırdaki dS parçasının $d\xi$ lokal dönüşümü denk.(5.13)'e göre,

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = J d\xi$$

şeklinde yapılmıştır. Bu denklemde J , denk.(5.67) ve denk.(5.68)'e göre,

$$J = \sqrt{\left((2\xi - 1)\frac{x_1}{2} - 2\xi x_2 + (2\xi + 1)\frac{x_3}{2}\right)^2 + \left((2\xi - 1)\frac{y_1}{2} - 2\xi y_2 + (2\xi + 1)\frac{y_3}{2}\right)^2} \quad (5.82)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre 's' elemanı üzerindeki düğümlere ait G_{ks} etki integralleri (ayrıca denk.(4.27) tanımına göre),

$$G_{ks}^1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi(\xi_i - 1) \ln\left(\frac{1}{r_i}\right) J w_i \quad (5.83)$$

$$G_{ks}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n (1 - \xi_i^2) \ln\left(\frac{1}{r_i}\right) J w_i \quad (5.84)$$

$$G_{ks}^3 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi(\xi_i + 1) \ln\left(\frac{1}{r_i}\right) J w_i \quad (5.85)$$

denklemlerine göre hesaplanır.

5.4.1.2. H_{ks}^1 , H_{ks}^2 ve H_{ks}^3 Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.79) ve denk.(5.81)'deki H_{ks} integrallerini hesaplamak için q^* temel çözümün normaline göre türevinin elde edilmesi gerekir.

$$H_{ks}^1 = \int_{\partial B_S} N_1 q^* dS \quad H_{ks}^2 = \int_{\partial B_S} N_2 q^* dS \quad H_{ks}^3 = \int_{\partial B_S} N_3 q^* dS$$

q^* , temel çözümünün normale göre türevi,

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.86)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklemden,

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (5.87)$$

şeklindedir. $\frac{\partial r}{\partial n}$, parabolik elemana göre,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{x}{r} \frac{dy}{d\xi} - \frac{y}{r} \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{r} \left(x \frac{dy}{d\xi} - y \frac{dx}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dS} \quad (5.88)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre 's' elemanı üzerindeki düğümlere ait H_{ks} etki integralleri (ayrıca denk.(4.27) tanımına göre),

$$H_{ks}^1 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi(\xi_i - 1) \left[x \frac{dy}{d\xi} - y \frac{dx}{d\xi} \right] \frac{1}{r_i^2} w_i \quad (5.89)$$

$$H_{ks}^2 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n (1 - \xi_i^2) \left[x \frac{dy}{d\xi} - y \frac{dx}{d\xi} \right] \frac{1}{r_i^2} w_i \quad (5.90)$$

$$H_{ks}^3 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi(\xi_i + 1) \left[x \frac{dy}{d\xi} - y \frac{dx}{d\xi} \right] \frac{1}{r_i^2} w_i \quad (5.91)$$

denklemleriyle elde edilir.

5.4.2. Tekil İntegrallerin Hesaplanması

'k' düğümünün 's' elemanı üzerinde olmasıyla meydana gelen bu durumda; 'k' kaynak düğümünün tanımlanan üç düğüm üzerinde bulunması incelenerek H ve G 'ye ait tekil

Parabolik elemana ait H tekil integralleri denk.(5.73), denk.(5.74) ve denk.(5.75)'de tanımlanan ve G tekil integralleri denk.(5.76), denk.(5.77) ve denk.(5.78)'de tanımlanan integral denklemlerin çözümü sonucunda elde edilir. Bu tekil integrallerin üç düğümde de farklı olarak hesaplanması gerekir. Buna göre birinci durum; 'k' düğümünün 's' elemanının birinci düğümü üzerinde bulunması:


$$\mathbf{x}(\xi) = (1 + \xi) \left(\left(\frac{\mathbf{x}_3 - 2\mathbf{x}_2}{2} \right) \xi + \mathbf{x}_2 \right) \quad (5.92)$$

$$y(\xi) = (1 + \xi) \left(\left(\frac{y_3 - 2y_2}{2} \right) \xi + y_2 \right) \quad (5.93)$$

$$d_x = \left(\frac{x_3 - 2x_2}{2} \right) \quad (5.94)$$

$$d_y = \left(\frac{y_3 - 2y_2}{2} \right) \quad (5.95)$$

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_2 \quad (5.96)$$

$$e_y = y_2 \quad (5.97)$$

olarak ifade edilirse, denk.(5.92) ve denk.(5.93),

$$x(\xi) = (1 + \xi) (d_x \xi + e_x) \quad (5.92)$$

$$y(\xi) = (1 + \xi) (d_y \xi + e_y) \quad (5.93)$$

şeklinde yazılabilir. Bu koordinatların türevleri alınırsa,

$$\frac{dx}{d\xi} = 2d_x \xi + d_x + e_x \quad (5.94)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = 2d_y \xi + d_y + e_y \quad (5.95)$$

denklemleri elde edilir.

Eleman üzerindeki herhangi bir noktanın 'k' düğümüne uzaklığı,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = (1 + \xi) \sqrt{(d_x^2 + d_y^2) \xi^2 + 2(d_x e_x + d_y e_y) \xi + (e_x^2 + e_y^2)} \quad (5.96)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde,

$$D = d_x^2 + d_y^2 \quad (5.97)$$

$$E = 2(d_x e_x + d_y e_y) \quad (5.98)$$

$$F = e_x^2 + e_y^2 \quad (5.99)$$

şeklinde yazılırsa denk.(5.96),

$$r = (1 + \xi) \sqrt{D \xi^2 + E \xi + F} \quad (5.100)$$

denklemini ile gösterilebilir.

Bu tanımlara göre G tekil integrallerinde ifade edilen u^* temel çözümü,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{(1+\xi)\sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}}\right) \quad (5.101)$$

şeklinde hesaplanır. H tekil integrallerinde tanımlanan q^* temel çözümü ise,

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.102)$$

denkleminde,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{(1+\xi)^2}{r} (d_y e_x - e_y d_x) \frac{d\xi}{dS} \quad (5.103)$$

bulunarak,

$$q^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{(1+\xi)^2}{r^2} (d_y e_x - e_y d_x) \frac{d\xi}{dS} \quad (5.104)$$

şeklinde hesaplanır.

Bu tanımlara göre, 'k' kaynak düğümünün 's' elemanının birinci düğümü üzerinde olmasıyla hesaplanması gereken H tekil integralleri;

$$H_{2k-1k}^1 = -\frac{1}{4\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 - \xi}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.105)$$

$$H_{2k-1k}^2 = -\frac{1}{2\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \xi^2}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.106)$$

$$H_{2k-1k}^3 = -\frac{1}{4\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 + \xi}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.107)$$

denklemlerine göre ayrı ayrı hesaplanması gerekir. G tekil integralleri ise,

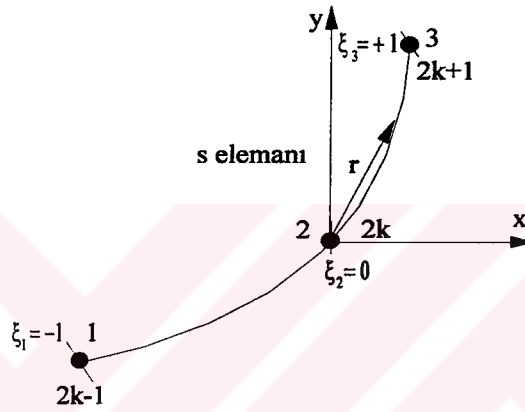
$$G_{2k-1k}^1 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{+1} N_1 \ln\left(\frac{1}{(1+\xi)\sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}}\right) J d\xi \quad (5.108)$$

$$G_{2k-1k}^2 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{+1} N_2 \ln \left(\frac{1}{(1+\xi)\sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.109)$$

$$G_{2k-1k}^3 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{+1} N_3 \ln \left(\frac{1}{(1+\xi)\sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.110)$$

şeklinde tanımlanan denklemlerin çözümü sonucunda elde edilir. Bu denklemlerde ε değerinin sıfıra götürülmesi denklem tanımsızlığının ortadan kaldırılması içindir.

İkinci durum ise, 'k' düğümünün 's' elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunması:



Şekil 5.14 'k' düğümünün, 's' elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunması

Bu durumda, global koordinat sisteminin orjini ikinci düğüm olmak üzere aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$d_x = \frac{x_1 + x_3}{2} \quad (5.111)$$

$$d_y = \frac{y_1 + y_3}{2} \quad (5.112)$$

$$e_x = \frac{x_3 - x_1}{2} \quad (5.113)$$

$$e_y = \frac{y_3 - y_1}{2} \quad (5.114)$$

$$x(\xi) = \xi (d_x \xi + e_x) \quad (5.115)$$

$$y(\xi) = \xi (d_y \xi + e_y) \quad (5.116)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = 2d_x \xi + e_x \quad (5.117)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = 2d_y \xi + e_y \quad (5.118)$$

$$D = d_x^2 + d_y^2 \quad (5.119)$$

$$E = 2(d_x e_x + d_y e_y) \quad (5.120)$$

$$F = e_x^2 + e_y^2 \quad (5.121)$$

$$r = \xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F} \quad (5.122)$$

Tanımlanan bu değerlere göre G tekil integrallerinde ifade edilen u^* temel çözümü,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}}\right) \quad (5.123)$$

şeklinde hesaplanır. H tekil integrallerinde tanımlanan q^* temel çözümü ise,

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.124)$$

denkleminde,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\xi^2}{r} (d_y e_x - e_y d_x) \frac{d\xi}{dS} \quad (5.125)$$

ifadesi yerine yazılarak,

$$q^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{\xi^2}{r^2} (d_y e_x - e_y d_x) \frac{d\xi}{dS} \quad (5.126)$$

şeklinde hesaplanır.

Bu denklemlere göre, 'k' kaynak düğümünün 's' elemanının ikinci düğümü üzerinde olmasıyla hesaplanması gereken H tekil integralleri;

$$H_{2k k}^1 = -\frac{1}{4\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 - \xi}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.127)$$

$$H_{2k k}^2 = -\frac{1}{2\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \xi^2}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.128)$$

$$H_{2k k}^3 = -\frac{1}{4\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 + \xi}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.129)$$

denklemlerine göre ayrı ayrı hesaplanması gerekir. G tekil integralleri ise,

$$G_{2k k}^1 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} N_1 \ln \left(\frac{1}{\xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi + \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+1} N_1 \ln \left(\frac{1}{\xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.130)$$

$$G_{2k k}^2 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} N_2 \ln \left(\frac{1}{\xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi + \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+1} N_2 \ln \left(\frac{1}{\xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.131)$$

$$G_{2k k}^3 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} N_3 \ln \left(\frac{1}{\xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi + \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+1} N_3 \ln \left(\frac{1}{\xi \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.132)$$

şeklinde tanımlanan denklemlerle hesaplanır.

Üçüncü durum ise, 'k' düğümünün 's' elemanının üçüncü düğümü üzerinde bulunması: Bu durum elemanın diğer ucunda bulunduğu için birinci duruma benzerdir. Bu durumda,

$$d_x = \left(\frac{x_1 - 2x_2}{2} \right) \quad (5.133)$$

$$d_y = \left(\frac{y_1 - 2y_2}{2} \right) \quad (5.134)$$

$$e_x = x_2 \quad (5.135)$$

$$e_y = y_2 \quad (5.136)$$

$$x(\xi) = (1 - \xi) (d_x \xi + e_x) \quad (5.137)$$

$$y(\xi) = (1 - \xi) (d_y \xi + e_y) \quad (5.138)$$

$$r = (1 - \xi) \sqrt{D\xi^2 + 2E\xi + F} \quad (5.139)$$

şeklindeki tanımlar ile H tekil integralleri;

$$H_{2k+1k}^1 = -\frac{1}{4\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 - \xi}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.140)$$

$$H_{2k+1k}^2 = -\frac{1}{2\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \xi^2}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.141)$$

$$H_{2k+1k}^3 = -\frac{1}{4\pi} (d_y e_x - e_y d_x) \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 + \xi}{D\xi^2 + E\xi + F} d\xi \quad (5.142)$$

denklemleri ile hesaplanır. G tekil integralleri ise,

$$G_{2k+1k}^1 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1-\varepsilon} N_1 \ln \left(\frac{1}{(1-\xi) \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.143)$$

$$G_{2k-1k}^2 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1-\varepsilon} N_2 \ln \left(\frac{1}{(1+\xi) \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.144)$$

$$G_{2k-1k}^3 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1-\varepsilon} N_3 \ln \left(\frac{1}{(1+\xi) \sqrt{D\xi^2 + E\xi + F}} \right) J d\xi \quad (5.145)$$

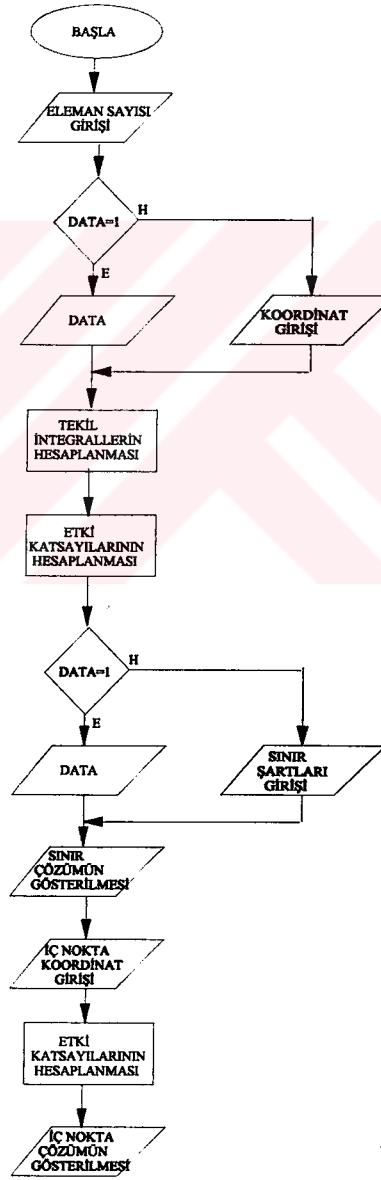
denklemleri ile hesaplanır.

BÖLÜM 6

BİLGİSAYAR PROGRAMI

6.1. Genel Bilgi

Bu bölümde, iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümü için geliştirilen ve Matlab dilinde yazılan üç farklı elemana ait bilgisayar programı açıklanmıştır. Sabit elemana ait programa SABEL, lineer elemana ait programa LİNEL ve parabolik elemana ait programa ise PAREL adı verilmiştir.



Şekil 6.1 Bilgisayar programı akış diyagramı

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMAN TALEP MERKEZİ

Laplace denklemi ile modellenen bir elektrostatik alan probleminin sınır elemanları yöntemiyle çözümü için geliştirilen bu üç programda genel olarak, sınırdaki bilinen değerlere göre sınırdaki bilinmeyen değerler elde edilir. Daha sonra istenilen herhangi bir iç noktadaki gerilim değeri bu değerlere göre hesaplanmaktadır. Bu hesaplamanın akış şemasının ana hatları şekil (6.1)'de verilmiştir. Bu şema, genel olarak üç programda aynıdır.

Geliştirilen bu üç program ana hatlarıyla ve içeriğinden bazı örneklerle aşağıda açıklanmıştır.

6.2. SABEL Programı

Analiz edilecek olan elektrostatik alan probleminin sabit eleman yöntemiyle çözümünde kullanılan bu programı kısaca özetleyecek olursak; ilk önce problem bölgesinin kaç eleman ile analiz edileceği girilir. Daha sonra, bu elemanların global koordinatlarının girilmesi istenir. Bu veri girişi ve diğer girilmek istenen veriler, Matlab programının "save" ve "load" komutları kullanılarak önceden tanımlanmış koordinatlar yüklenebilir. Bu durum, özellikle eleman sayısı fazla olan problemlerde veri girişi için kolaylık sağlar. Bu giriş,

```
a=input('Eleman sayısını giriniz.....');  
DATA=input('baysi dosyasına koordinatlar girilmiş ise 1 elle girmek için 2');  
if DATA==1  
    load baysi  
else  
for t=1:a  
    disp (t)  
    b=input(' inci Eleman başlangıç x koordinatını giriniz...=');  
    c=input(' inci Eleman başlangıç y koordinatını giriniz...=');  
    d=input(' inci Eleman x son koordinatını gir....=');  
    e=input(' inci Eleman y son koordinatını gir....=');  
    xx(t)=(b+(d-b)/2);  
    yy(t)=(c+(e-c)/2);
```

şeklinde yazılmıştır. Bu koordinatlara göre tanımlanan problem bölgesinde, etki katsayılarının hesaplanması için gerekli olan değerler çözümlenir ve etki katsayıları elde edilir. Bununla beraber, sınır noktalarındaki çözümlerde ortaya çıkan tekil integraller de hesaplanarak H ve G matrisleri elde edilir. Bu çözümlerin ardından, sınırdaki bilinmeyen değerlerin elde edilmesi için elemanlardaki akı değerleri ile eleman üzerindeki düğümde bulunan gerilim değerinden bilinenin girilmesi istenir. Bu veri girişinin ardından, sınırdaki bilinmeyen değerler çözümlenir. İç noktadaki çözümler için ise, belirlenen noktanın koordinatlarının girilmesi istenir. Bu girilen nokta ile eleman ilişkisi sonucunda H ve G matrisleri elde edilir. Bu matris ve sınır değerlerine göre tanımlanan noktadaki gerilim değeri hesaplanır.

6.3. LİNEL Programı

Analiz edilecek olan elektrostatik alan probleminin lineer eleman yöntemiyle çözümünde kullanılan bu programda ise ilk önce problem bölgesinin kaç eleman ile analiz edileceğinin girilmesi istenir. Bunun ardından, eleman koordinatlarının girilmesi istenir. Bu verilere göre düğüm-eleman ilişkisi sonucunda, eleman üzerindeki düğümlere ait etki katsayılarının hesaplanması için gerekli olan değerler çözümlenerek etki katsayıları elde edilir. Tekil integraller de ayrıca hesaplanarak H^1 , H^2 ve G^1 , G^2 etki matrisleri elde edilir. Bu çözümlerin ardından sınırdaki bilinen değerlerin girilmesi istenir. Bu programda lineer eleman özelliğine göre eleman üzerinde bulunan düğümlerdeki gerilim ve bu düğümden önceki ve sonraki elemana ait akı değerlerinden bilinenin girilmesi istenir. Bu veri girişinin ardından sınırdaki bilinmeyen değerler elde edilir. İç noktadaki çözümler için ise belirlenen noktanın koordinatının girilmesi istenir. Bu giriş,

```
for A=1:a
    disp (A)
    U=input(' inci eleman üzerindeki gerilim değeri var ise yazınız
yoksa enter a basın.....=' );
    Q1=input(' inci elemandan önce akı değeri var ise yazınız yoksa
enter a basın.....=' );
    Q2=input(' inci elemandan sonra akı değeri varsa yazınız yoksa
enter a basın.....=' );
    if U<realmax
        P(A)=U;
        for B=1:a
            SS(B,A)=(-AS(B,A))*U;
            if Q1<realmax
                R(A)=Q1;
                S(A)=realmax;
                RR(B,A)=BS(B,A)*Q1;
                SE(B,A)=SS(B,A)+RR(B,A);
                SF(B,A)=-B1(B,A);
```

şeklinde yazılmıştır. Bu girilen nokta ile elemanlar arasındaki ilişki sonucunda ayrı ayrı etki matrisleri hesaplanır. Bu etki matrisleri ve sınır değerlerine göre tanımlanan iç noktadaki gerilim hesaplanır.

6.4. PAREL Programı

Ele alınan elektrostatik alan probleminin parabolik eleman yöntemiyle çözümünde kullanılan bu program kısaca özetlenecek olursa; yine ilk önce problem bölgesinin kaç eleman ile analiz edileceği girilir ve ardından bu elemanlara ait düğümlerin koordinatlarının girilmesi istenir. Daha sonra bu verilere göre etki katsayılarını hesaplamak için gerekli olan değerler çözümlenerek etki katsayıları elde edilir. Sınırdaki çözümlerde, hesaplanan düğümün eleman üzerinde bulunmasıyla ortaya çıkan tekil integral denklemlerini çözmek için ayrıca alt

programlar yazılmıştır. Bu alt programlara değişkenlerin değerleri "save" ve "load" komutu kullanılarak atanmıştır. Bilgisayar programında bu kullanımın gösterimi,

```
if (i+1)/2==j
    xx2=x2(j)-x1(j);xx3=x3(j)-x1(j);
    yy2=y2(j)-y1(j);yy3=y3(j)-y1(j);
    da=(xx3-2*xx2)/2;db=(yy3-2*yy2)/2;
    ei=xx2;ej=yy2;
    D=da^2+db^2;E=2*(da*ei+db*ej);F=ei^2+ej^2;
    save baysi D E F;
    Q=quad8('int',-1,1);
    H1(i,j)=(ej*da-db*ei)*Q/(4*pi);
```

şeklinde bir parçası gösterilmiştir. Aynı zamanda bu koşul, 'k' düğümü 's' elemanın birinci düğümü üzerinde bulunmasıyla sağlanmaktadır. Bu hesaplamalardan sonra sınır çözümleri için H^1 , H^2 , H^3 ve G^1 , G^2 , G^3 etki matrisleri elde edilir. Bu hesaplamaların ardından sınırdaki bilinmeyenlerin çözümlenmesi için, eleman üzerindeki düğümlere ait gerilim ile düğümden önceki ve sonraki elemanlara ait akı değerlerinden bilinenlerin girilmesi istenir. Bu veri girişinin ardından sınırdaki bilinmeyen değerler hesaplanır. İç noktadaki çözüm için belirlenen noktanın koordinatının girilmesi istenir. Buna göre girilen nokta ile elemanlar arasındaki ilişki sonucunda ayrı ayrı etki matrisleri elde edilir. Bu etki matrisi ve sınır değerlerine göre bu noktadaki gerilim değeri ayrıca hesaplanır.

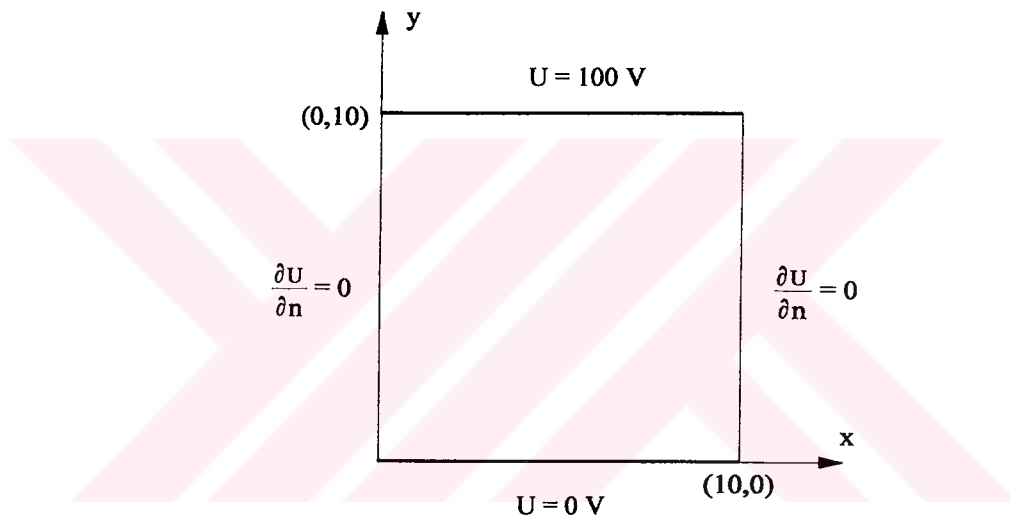
BÖLÜM 7

UYGULAMALAR

7.1. Genel Bilgi

Bu bölümde sınır elemanları yöntemiyle elektrostatik alan problemlerin çözümü için geliştirilen üç farklı elemana (sabit, lineer, parabolik) ait programlar bazı örnek sistemlere uygulanmıştır, elde edilen sonuçlar ve analitik çözümleri (gerçek değerleri) tablolar halinde verilmiştir.

7.2. Düzlemsel Elektrot Sistemi



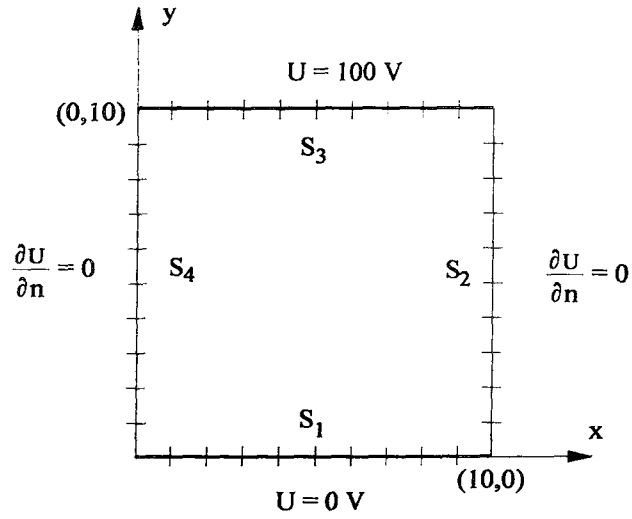
Şekil 7.1 Düzlemsel elektrot sistemi

Şekil (7.1)'de verilen örnek sistem, üç farklı programa uygulanması ile ilk önce sınır noktalarındaki bilinmeyen değerler elde edilmiştir. Bu değerler, sistemin sınırdaki analitik çözümü ile ayrı ayrı karşılaştırılmıştır. Daha sonra belirlenen iç noktalarda program çözümü sonucunda elde edilen gerilim değerleri, analitik çözüm ile ayrı ayrı karşılaştırılarak sonuçlar tablo halinde gösterilmiştir.

7.2.1. Elektrot Sisteminde, Sınır Değerlerinin Analizi

Şekil (7.2)'de gösterilen örnek elektrot sisteminin sınırları 40 eleman ile bölmelenmiştir. Bu sistemin Sabit Eleman (SABEL), Lineer Eleman (LİNEL) ve Parabolik Eleman (PAREL) programları ile çözümü sonucunda sınırdaki bilinmeyen değerler elde edilmiştir. Örnek olarak

S_2 sınırında, düğümler üzerindeki elde edilen gerilimler, düğümlerin koordinatları, analitik çözümleri ve farkları tablolar halinde verilmiştir (Tablo 7.1, 7.2, 7.3).



Şekil 7.2 40 elemana bölünmüş düzlemsel elektrot sistemi

Şekil (7.2)'de gösterilen 40 eleman ile bölünmüş düzlemsel elektrot sisteminde, sabit eleman ve lineer eleman yöntemine göre 40 düğüm bulunur. Parabolik eleman yöntemine göre ise 80 düğüm bulunur. İncelenen S_2 sınırında ise toplam 10 eleman vardır. Buna göre S_2 sınırında, sabit eleman yöntemine göre 10, lineer eleman yöntemine göre 11, parabolik eleman yöntemine göre ise toplam 21 düğüm vardır.

Tablo 7.1 40 Elemanlı düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında SABEL programı çözüm sonuçları

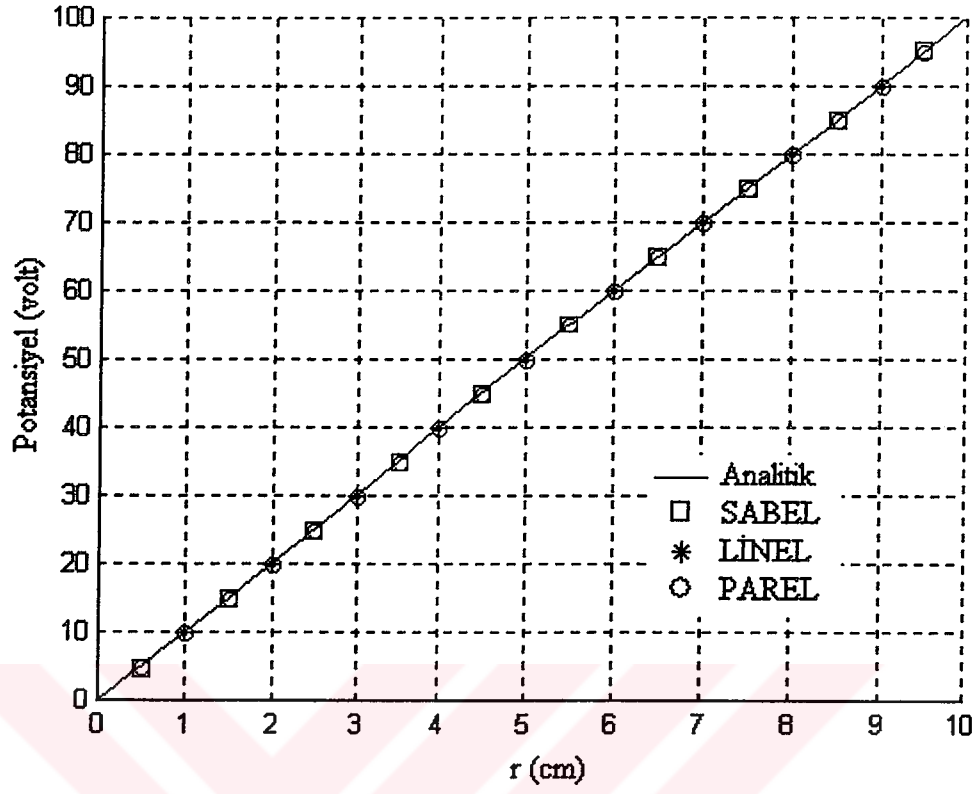
Düğüm No	Koordinatlar		SABEL Programı	Analitik Çözümü	FARK
	x	y			
1	10	0.5	4.7195	5.0000	-0.2805
2	10	1.5	14.8363	15.0000	-0.1637
3	10	2.5	24.8999	25.0000	-0.1001
4	10	3.5	34.9447	35.0000	-0.0553
5	10	4.5	44.9822	45.0000	-0.0178
6	10	5.5	55.0178	55.0000	0.0178
7	10	6.5	65.0553	65.0000	0.0553
8	10	7.5	75.1001	75.0000	0.1001
9	10	8.5	85.1637	85.0000	0.1637
10	10	9.5	95.2805	95.0000	0.2805

Tablo 7.2 40 Elemanlı düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında LİNEL programı çözüm sonuçları

Düğüm No	Koordinatlar		LİNEL Programı	Analitik Çözümü	FARK
	x	y			
1	10	0	0.0000	0.0000	0.0000
2	10	1	10.0000	10.0000	0.0000
3	10	2	20.0000	20.0000	0.0000
4	10	3	30.0000	30.0000	0.0000
5	10	4	40.0000	40.0000	0.0000
6	10	5	50.0000	50.0000	0.0000
7	10	6	60.0000	60.0000	0.0000
8	10	7	70.0000	70.0000	0.0000
9	10	8	80.0000	80.0000	0.0000
10	10	9	90.0000	90.0000	0.0000
11	10	10	100.0000	100.0000	0.0000

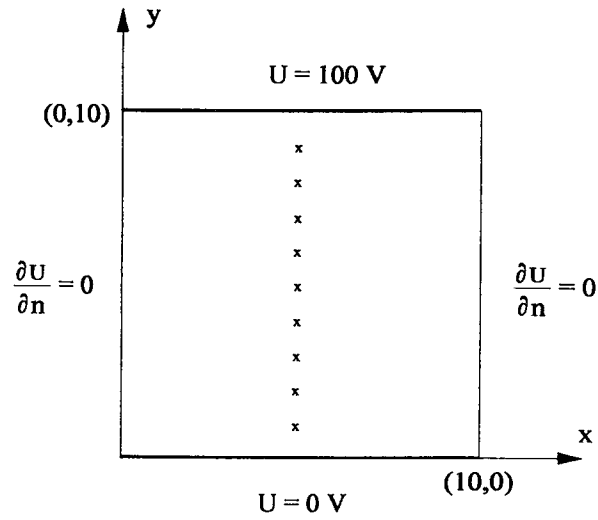
Tablo 7.3 40 Elemanlı düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında PAREL programı çözüm sonuçları

Düğüm No	Koordinatlar		PAREL Programı	Analitik Çözümü	FARK
	x	y			
1	10	0	0.0000	0.0000	0.0000
2	10	0.5	4.9540	5.0000	-0.0460
3	10	1.0	9.9643	10.0000	-0.0357
4	10	1.5	14.9704	15.0000	-0.0296
5	10	2.0	19.9750	20.0000	-0.0250
6	10	2.5	24.9790	25.0000	-0.0210
7	10	3.0	29.9826	30.0000	-0.0174
8	10	3.5	34.9859	35.0000	-0.0141
9	10	4.0	39.9891	40.0000	-0.0109
10	10	4.5	44.9921	45.0000	-0.0079
11	10	5.0	49.9950	50.0000	-0.0050
12	10	5.5	54.9979	55.0000	-0.0021
13	10	6.0	60.0006	60.0000	0.0006
14	10	6.5	65.0032	65.0000	0.0032
15	10	7.0	70.0056	70.0000	0.0056
16	10	7.5	75.0079	75.0000	0.0079
17	10	8.0	80.0099	80.0000	0.0099
18	10	8.5	85.0113	85.0000	0.0113
19	10	9.0	90.0114	90.0000	0.0114
20	10	9.5	95.0070	95.0000	0.0070
21	10	10	100.0000	100.0000	0.0000



Şekil 7.3 Düzlemsel elektrot sisteminin S_2 sınırında elde edilen çözümlerin karşılaştırılması

7.2.2. Düzlemsel Elektrot Sisteminde, Belirlenen İç Noktalardaki Değerlerin Analizi

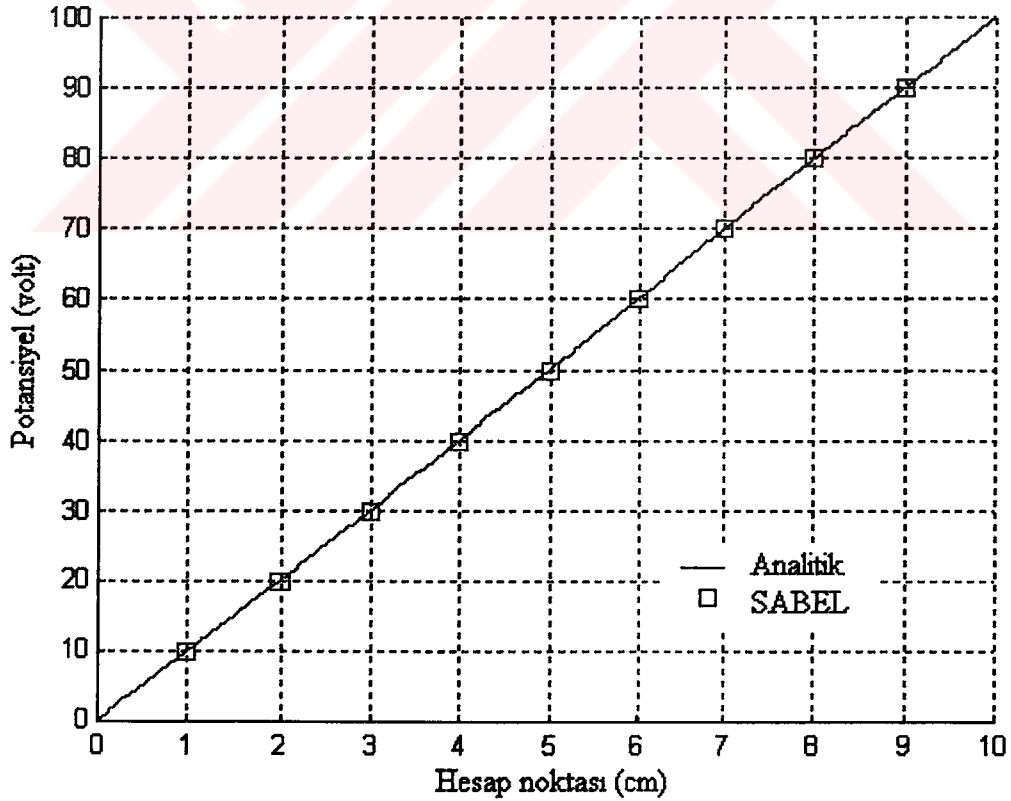


Şekil 7.4 Düzlemsel elektrot sisteminde belirlenen iç noktaların gösterimi

Şekil (7.4)'de görülen düzlemsel elektrot sisteminde, elde edilen sınır değerlerine göre belirlenen iç noktadaki gerilim değerleri her üç program için ayrı ayrı tablolar halinde verilmiştir. Ayrıca bu sistemin analizinde, problem bölgesi sınırları 20, 40, 100 ve 500 eleman ile bölmelenerek sonuçlar Tablo 7.4, Tablo 7.5 ve Tablo 7.6'da gösterilmiştir.

Tablo 7.4 İç noktalarda SABEL programı çözüm sonuçları

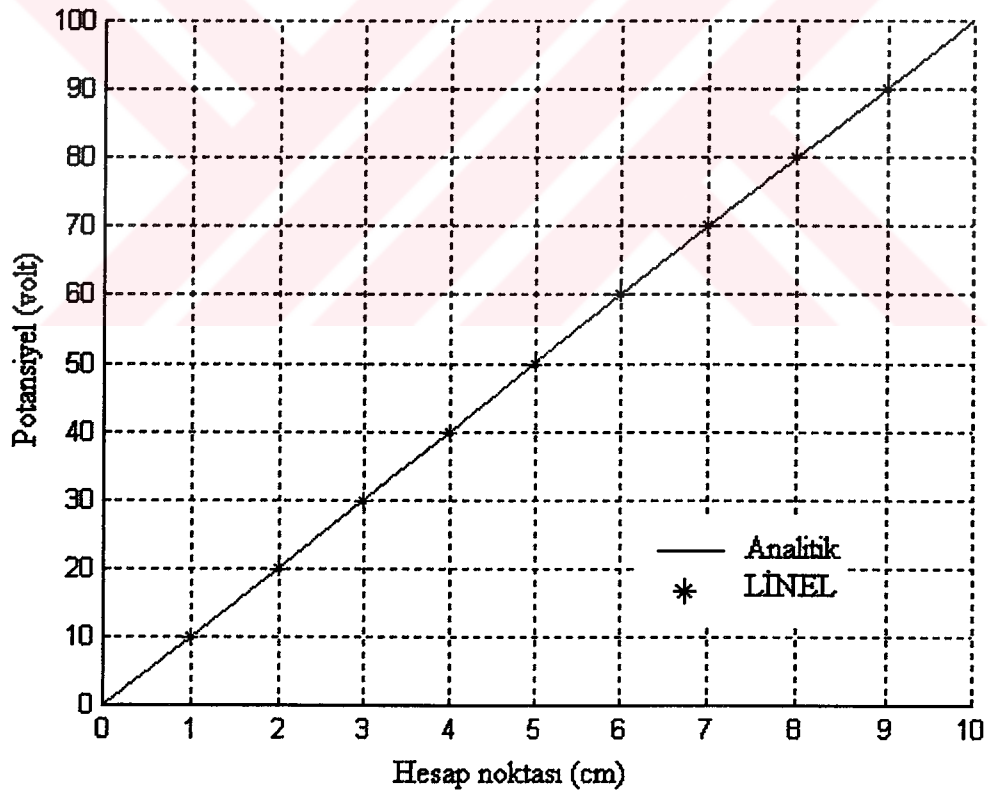
Hesap noktası	Koordinatlar		SABEL Programı				Analitik Çözümü
	x	y	20 eleman	40 eleman	100 eleman	500 eleman	
1	5	1	9.9804	9.9922	9.9981	9.9999	10.0000
2	5	2	19.9667	19.9878	19.9970	19.9998	20.0000
3	5	3	29.9677	29.9882	29.9971	29.9998	30.0000
4	5	4	39.9806	39.9929	39.9983	39.9999	40.0000
5	5	5	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
6	5	6	60.0194	60.0071	60.0017	60.0001	60.0000
7	5	7	70.0323	70.0118	70.0029	70.0002	70.0000
8	5	8	80.0331	80.0122	80.0030	80.0002	80.0000
9	5	9	89.9855	90.0079	90.0019	90.0001	90.0000



Şekil 7.5 Tanımlanan iç noktalarda analitik çözümler ile SABEL program çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 7.5 İ noktalarla LİNEL programı çözüm sonuçları

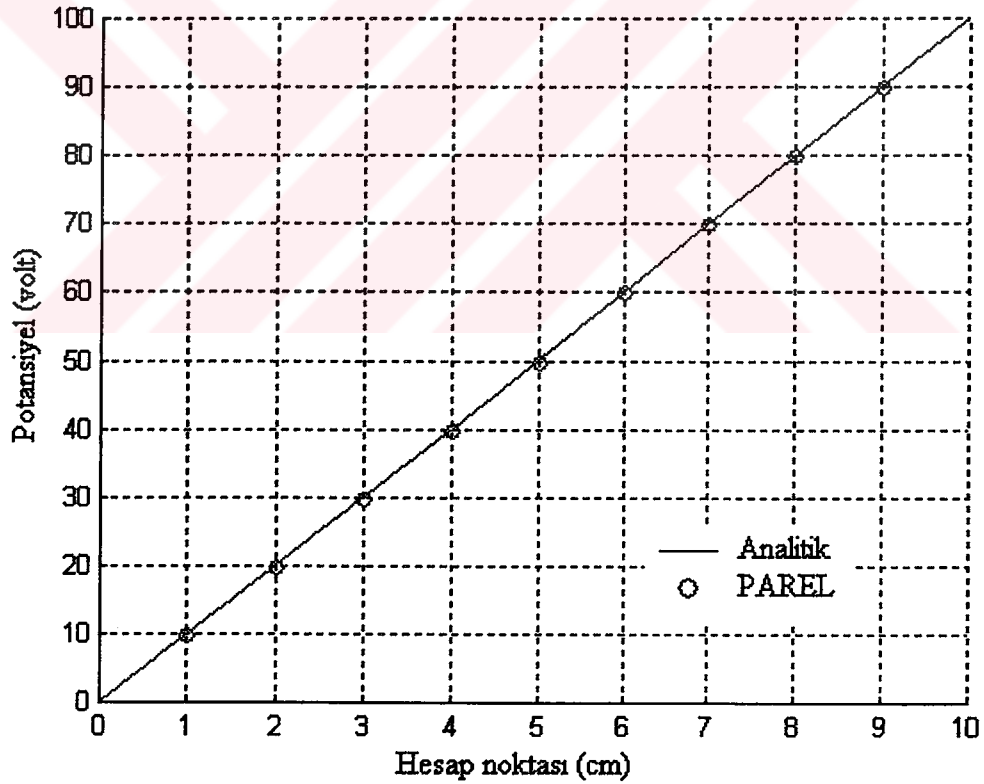
Hesap noktası	Koordinatlar		LİNEL Programı				Analitik özümü
	x	y	20 eleman	40 eleman	100 eleman	500 eleman	
1	5	1	10.5027	10.1130	10.0170	10.0007	10.0000
2	5	2	20.3622	20.0812	20.0122	20.0005	20.0000
3	5	3	30.2255	30.0507	30.0076	30.0003	30.0000
4	5	4	40.1062	40.0240	40.0036	40.0001	40.0000
5	5	5	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
6	5	6	59.8938	59.9760	59.9964	59.9999	60.0000
7	5	7	69.7745	69.9493	69.9924	69.9997	70.0000
8	5	8	79.6375	79.9188	79.9878	79.9995	80.0000
9	5	9	89.4631	89.8872	89.9830	89.9993	90.0000



Şekil 7.6 Tanımlanan iç noktalarda analitik çözümle İİNEL program özümlemlerinin karşılaştırılması

Tablo 7.6 İç noktalarda PAREL programı çözüm sonuçları

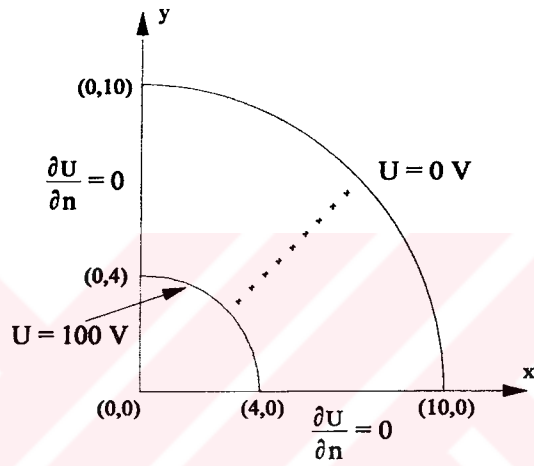
Hesap noktası	Koordinatlar		PAREL Programı				Analitik Çözümü
	x	y	20 eleman	40 eleman	100 eleman	500 eleman	
1	5	1	9.9666	9.9819	9.9928	9.9986	10.0000
2	5	2	19.9727	19.9863	19.9945	19.9989	20.0000
3	5	3	29.9816	29.9907	29.9963	29.9993	30.0000
4	5	4	39.9907	39.9953	39.9981	39.9996	40.0000
5	5	5	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
6	5	6	60.0093	60.0047	60.0019	60.0004	60.0000
7	5	7	70.0184	70.0093	70.0037	70.0007	70.0000
8	5	8	80.0270	80.0137	80.0055	80.0011	80.0000
9	5	9	89.9992	90.0183	90.0072	90.0014	90.0000



Şekil 7.7 Tanımlanan iç noktalarda analitik çözümler ile PAREL program çözümlerinin karşılaştırılması

7.3. Koaksiyel Kablo

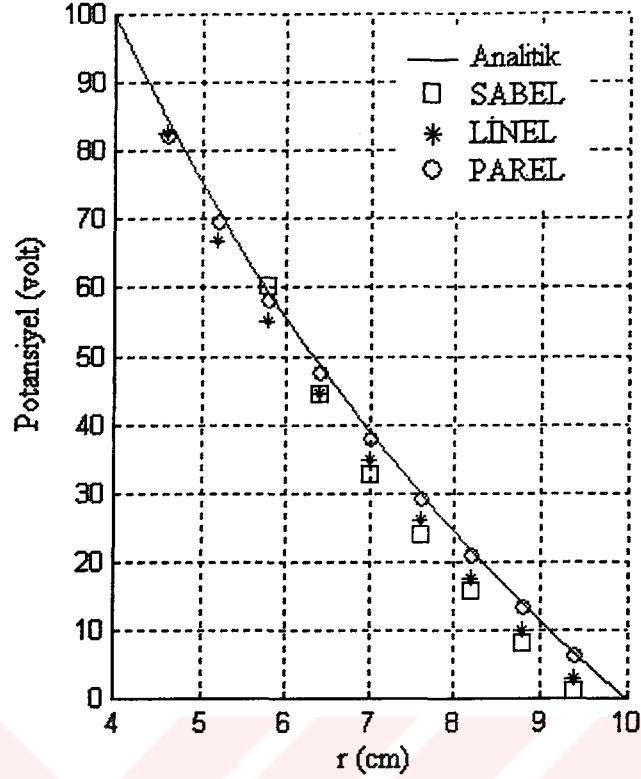
Şekil (7.8)'de gösterildiği gibi bir koaksiyel kablonun çeyrek kesiti alınarak 28 ve 112 eleman ile bölmelenmiştir. Verilen sınır şartları ile belirlenen iç noktalarda radyal yöndeki gerilim değerleri her üç programda ayrı ayrı bulunmuştur. Bu değerler ve analitik olarak bulunan çözümler Tablo (7.7) ve Tablo (7.8)'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 7.8 Koaksiyel kablonun çeyrek kesiti

Tablo 7.7 28 Eleman ile bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımı

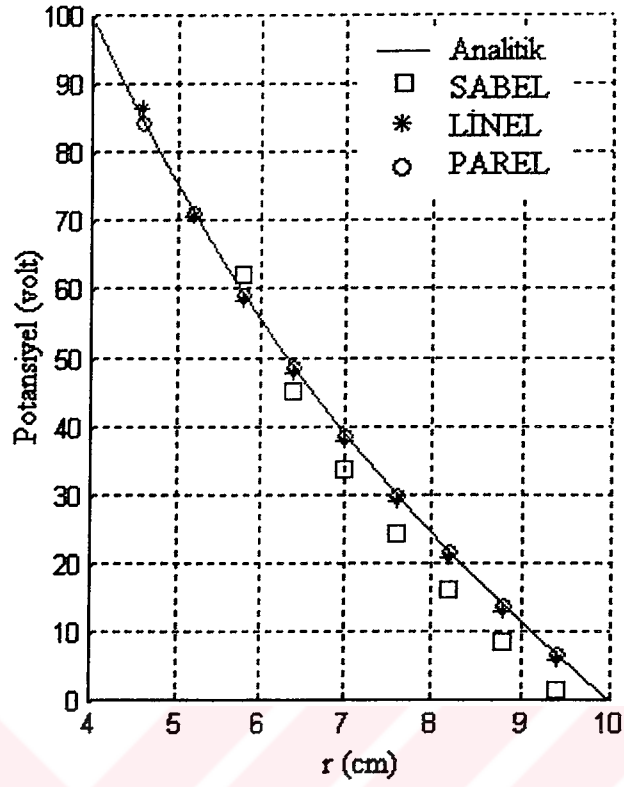
Hesap noktası	Koordinatlar		SABEL Programı	LİNEL Programı	PAREL Programı	Analitik Çözümü
	x	y				
1	3.2526	3.2526	-----	82.6341	82.4712	84.7469
2	3.6769	3.6769	-----	66.7742	69.8825	71.3667
3	4.1012	4.1012	60.5241	55.0747	58.3420	59.4491
4	4.5254	4.5254	44.4286	44.5010	47.8337	48.7058
5	4.9497	4.9497	32.9586	34.8471	38.2271	38.9259
6	5.3740	5.3740	24.1255	25.9619	29.3924	29.9508
7	5.7982	5.7982	15.8908	17.7297	21.2197	21.6580
8	6.2225	6.2225	8.1801	10.0600	13.6187	13.9511
9	6.6468	6.6468	1.1049	2.8855	6.5182	6.7528



Şekil 7.9 28 Elemana bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımının karşılaştırılması

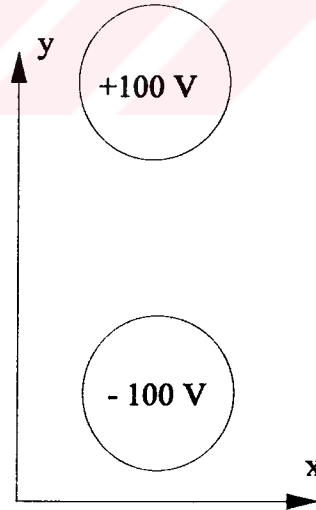
Tablo 7.8 112 Elemana bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımı

Hesap noktası	Koordinatlar		SABEL Programı	LİNEL Programı	PAREL Programı	Analitik Çözümü
	x	y				
1	3.2526	3.2526	—	86.4164	84.4232	84.7469
2	3.6769	3.6769	—	70.6185	71.1292	71.3667
3	4.1012	4.1012	62.1870	58.4705	59.2571	59.4491
4	4.5254	4.5254	45.0231	47.7462	48.5482	48.7058
5	4.9497	4.9497	33.6713	37.9726	38.7977	38.9259
6	5.3740	5.3740	24.4328	28.9948	29.8487	29.9508
7	5.7982	5.7982	16.1887	20.6934	21.5799	21.6580
8	6.2225	6.2225	8.6266	12.9742	13.8950	13.9511
9	6.6468	6.6468	1.5988	5.7610	6.7172	6.7528



Şekil 7.10 112 Elemana bölmelenmiş çeyrek kesitli koaksiyel kablonun radyal yöndeki potansiyel dağılımının karşılaştırılması

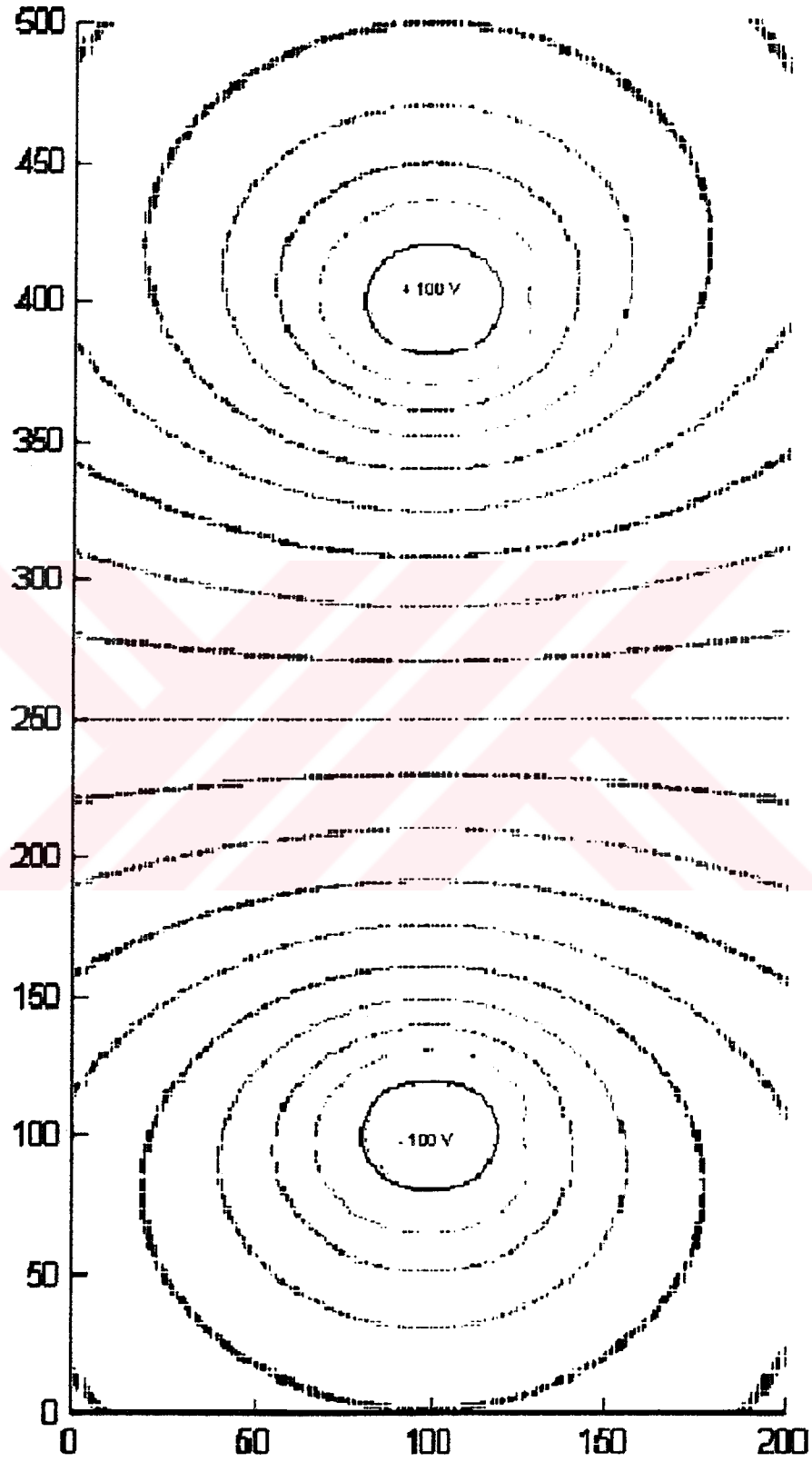
7.4. Küre-Küre Sistemi



Şekil 7.11 -100 V ve + 100 V'luk küre-küre sistemi

Şekil (7.10)'da gösterildiği gibi -100 ve +100 V'luk küre-küre sisteminde, her bir küre 16 elemana bölmelenerek bu iki küre etrafındaki potansiyel dağılımı PAREL programı ile hesaplanmıştır. Bu dağılım, MATLAB'de çizdirilerek şekil (7.11)'de gösterilmiştir. Bu şekilde

tam orta nokta ekseninde 0 volt elde edilmiştir ve 10'ar V aralıklarla potansiyel değerler belirtilmiştir.



Şekil 7.12 Küre-küre sisteminde küreler etrafındaki potansiyel dağılım

BÖLÜM 8

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Sınır Elemanları Yöntemi'nin matematiksel teorisi incelenerek, bu yöntemin uygulamasında bir interpolasyon fonksiyonu olarak kullanılan parabolik elemanların elektrostatik alan problemlerine uygulanması incelenerek gerekli sayısal formülasyonlar verilmiştir. Bu incelemeler sonucunda, parabolik eleman yöntemiyle elektrostatik alan analizi için PAREL isimli bilgisayar programı MATLAB dilinde yazılmıştır. Ayrıca Sınır Elemanları Yöntemi'nin diğer fonksiyonlarından olan sabit ve lineer eleman yöntemleri açıklanarak sayısal formülasyonları verilmiştir. Bu elemanlara ait SABEL ve LİNEL programları yazılmıştır. 7. Bölümde uygulama örneklerinin bu üç programa uygulanması ile elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler halinde verilmiştir.

Sınır Elemanları Yöntemi'nin elektrostatik alan problemlerine uygulamasındaki matematiksel teori genel olarak özetlenirse; ilk önce problemi bölgede sağlayan Laplace ve Poisson tipindeki bölge denklemleri ağırlıklı artıklar ve kısmi integrasyon sonucunda sınır integral denklemlerine dönüştürülmüştür. Bu sınır integral denklemlerinde tanımlanan fiziksel değişkenler (gerilim ve normale göre türevi) interpolasyon fonksiyonları ile ifade edildikten sonra sınır integral denklemi ayrıştırılmış ve sistem matrisi elde edilmiş olur. Sınırdaki çözümler için sınır şartları (bilinen sınır değerleri) uygulandıktan sonra sınırdaki bilinmeyen değerler sistem matrislerin çözümü sonucunda elde edilir. Bulunan ve bilinen sınır değerleri kullanılarak, iç noktalarda oluşturulan sistem matrisi çözümü sonucunda iç noktalardaki gerilim değeri hesaplanır.

7. Bölümde verilen uygulama örneklerinde, analitik olarak hesaplanan sonuçlarla SABEL, LİNEL ve PAREL programları kullanılarak elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler halinde verilmiştir. Bu örneklerde düzlemsel elektrot sistemi, koaksiyel kablo, küre-küre sistemi analizi yapılmıştır.

Düzlemsel elektrot sisteminde, ilk önce Sınır Elemanları Yöntemi'ne göre program sonuçlarında sınırdaki bilinmeyenler elde edilmiştir. Bu örnekte, problem bölgesi 40 eleman ile bölmelenmiştir. S_2 sınırındaki bilinmeyen değerler elde edilerek tablolar halinde verilmiştir. Bu bulunan değerler incelendiğinde, SABEL ve PAREL program sonuçlarının analitik sonuçlara çok yakın değerler olduğu görülmektedir. LİNEL programında ise sınırdaki tam değerler elde edilmiştir. Bu S_2 sınırında, gerilim değeri lineer bir değişim göstermektedir. Bunun sonucunda LİNEL programı ile lineer eleman tanımına göre sınırdaki tam değerler elde etmiştir.

Düzlemsel elektrot sisteminin iç noktalarındaki gerilim dağılımı, 20, 40, 100 ve 500 eleman ile bölmelendirilip bu üç programa göre ayrı ayrı sonuçlar elde edilerek tablolar halinde verilmiştir. Bu sonuçlar incelendiğinde, analitik çözüme yakın değerler elde edildiği görülür. Bu örnekte görülüyor ki, problem bölgesindeki elemanlar arttırıldıkça daha hassas değerler elde edilmektedir. Özellikle 500 elemanda oldukça hassas sonuçlar bulunmuştur.

İkinci örnek olan koaksiyel kablo sisteminde çeyrek dilimlik koaksiyel kablonun sınırları 28 ve 112 eleman ile bölmelendirilip bu üç programa göre ayrı ayrı sonuçlar elde edilmiştir. Bu örnekte, $U=100$ V ve $U=0$ V değerine sahip sınırlar eğrisel sınırlardan meydana gelmiştir. Bu sınırlarda, parabolik elemanın sınıra denk geometrisi (fonksiyonu) söz konusu olduğundan PAREL programına göre iç noktalarda elde edilen gerilim değerlerinin çok hassas olduğu görülmektedir. Ayrıca eleman sayısı 28'den 112'ye çıkarılarak elde edilen sonuçların daha da hassaslaştığı görülmektedir.

Üçüncü örnek küre-küre sisteminde, her bir küre 16 elemana bölmelenerek PAREL programın çözümü sonucunda küreler etrafındaki potansiyel dağılım MATLAB'da çizdirilmiştir. Bu sistemde iki kürenin tam orta nokta ekseninde potansiyel değerinin 0 V olması gerekir. Bu sonuç, hesaplamanın ardından elde edilmiştir. Bu problem aynı zamanda açık sınırlı bir problem türüdür.

Sonuç olarak, Sınır Elemanları Yöntemi'nde parabolik elemanlar kullanılarak elektrostatik alan problemleri incelenmiştir. Ayrıca, Sınır Elemanları Yöntemi'nin genelde kullanılan eleman tipleri olan sabit ve lineer eleman tipleri de incelenmiştir. Parabolik elemanların bu elemanlara göre daha karmaşık bir yapıya sahip olduğu ve problem geometrisini tam olarak temsil ettiği için elde edilen değerlerin daha hassas değerler olduğu sonucuna varılmıştır.

İleride yapılacak olan çalışmalarda, bu çalışmanın içeriğinden de faydalanılarak süreksiz eleman yöntemleri ile bölge çözümleri yapılabilir. Ayrıca bu eleman türü ile homojen olmayan problemlerin çözümü geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- Bayrakçı, H. E., 2000, Elektromagnetik Alan Teorisi, İstanbul, 436s.
- Beer, G. and Watson, J. O., 1991, Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers, John Wiley and Sons, New York.
- Brebbia, C. A. (Ed), 1978, Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech Press, London.
- Brebbia, C. A., 1978, (Reprinted, 1980, 1982, 1984), The Boundary Element for Engineers, Pentech Press, London.
- Bächtold, M., 1997, Efficient 3D Computation of Electrostatic Fields and Forces in Microsystems, Zurich, 66p.
- Cebeci, M., 1991, Zincir İzolatörlerde Elektrik Alan Dağılımının İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Çağal, B., 1989, Sayısal Analiz, İstanbul, 501s.
- Çolakoğlu, K., 2000, Fizik İlkeleri 2, Ankara, 436s.
- Danson, D. J., Brebbia, C. A. and Adey, R. A., 1985, BEASY, A Boundary Element Analysis System, in Finite Element Systems Handbook, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York.
- DeFigueiredo, T. G. B., 1991, A New Boundary Element Formulation in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, New York, London.
- Gürdal, O., 2000, Elektromanyetik Alan Teorisi, Ankara, 464s.
- Gönenç, İ., 1977, Yüksek Gerilim Tekniği Cilt.1, İTÜ, İstanbul.
- Hunter, P. and Pullan A., 2002, FEM/BEM Notes, New Zealand, 145p.
- Integrated Engineering Software Inc., 1997, ELECTRO: Two-Dimensional Electric Field Solver, Version 4.1, Users and Technical Manual, Winnipeg, Manitoba, Canada.
- Jaswon, M. A. and Symm, G. T., 1977, Integral Equation Method in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press, London.
- Kato, S., Kokai, H., Nakajima, Y., Kouna, T., 1979, Finite Element Method for the Calculation of Potential Distribution to the Porcelain Insulator with Semiconducting Surface Layer, Third Int. Sym. on High Voltage Engineering, 12,11,1-4, Milan.
- Karadeniz, A.A., 1983, Yüksek Matematik Cilt.3, İstanbul, 439s.
- Klimpke, B. W., 1983, A Two-Dimensional, Multi-Media Boundary Element Method, Master Thesis The University of Manitoba, Canada.
- Mathews, J. H., 1992, Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, Prentice-Hall, Inc., USA.

- Mukherjee, S. And Morjaria, M., 1984, on the Efficiency and Accuracy of the Boundary Element Method and Finite Element Method, New York.
- Nowak, A. J. and Neves, A. C., 1994, The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Computational, Mechanics Publications, Southampton, UK.
- Özkaya, M., 1988, Yüksek Gerilim Tekniği 1, İTÜ, İstanbul.
- Paris, F. and Canas J., 1997, Boundary Element Method, Oxford, New York, Tokyo, 389p.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., and Wrobel, L. C., 1992, The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.
- Rumeli, A., 1969, Yüksek Gerilim Sistemlerinin İzolasyon Dizayn ve Koordinasyonu, ODTÜ-TEK Eğitim Konferansları Notları, Ankara.
- Yıldır, Y. B., 1985, A Boundary Element Method for the solution of Laplace's Equation in Three-Dimensional Space, Ph. D. Thesis, The University of Manitoba, Canada.
- Yıldırım, S., 1999, Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanların Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 113s.
- Zienkiewicz, O. C., and Morgan K., 1982, Finite Elements and Approximation, Swansea, United King Dom, 328p.

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**