



**METRİK DEĞERLİ DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Muharrem KARATAŞ
(141121111)**

Anabilim Dalı : Matematik

Program : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

Ağustos-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

METRİK DEĞERLİ DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Muharrem KARATAŞ
(141121111)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Haziran 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 7 Ağustos 2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mikail ET

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yavuz ALTIN

: Doç. Dr. Hacer ŞENGÜL

Ağustos-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail Et'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Muharrem KARATAŞ

ELAZIĞ-2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	4
3.1. İstatistiksel Yakınsak Diziler	4
3.2. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	6
4. α -DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	8
5. METRİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	14
5.1. Metrik Uzaylarda Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	14
5.2. Metrik Uzaylarda α -Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ..	18
6. SONUÇLAR	28
7. KAYNAKLAR	29

ÖZET

Metrik Değerli Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı

" Metrik Değerli Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı " başlıklı çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatür ışığında yapılan çalışma hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, istatistiksel yakınsaklıkla ilgili temel kavramlardan bahsedilmiş olup, istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan lacunary istatistiksel yakınsaklıktan bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, $\alpha \in (0, 1]$ reel sayısı için reel sayı dizilerinin α -dereceden istatistiksel yakınsaklığı ve α -dereceden kuvvetli p -Cesàro yakınsaklığı arasında birkaç bağıntı verilmiştir. Beşinci bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup iki alt başlık halinde düzenlenmiştir. Bu bölümün ilk kısmında metrik değerli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p -Cesàro yakınsaklığı tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki bazı bağıntılar ispatlanmıştır. Bu bölümün ikinci kısmında ise

- 1) α -dereceden lacunary d -istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış,
- 2) α -dereceden kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsaklık tanımlanmış,
- 3) α -dereceden lacunary d -istatistiksel yakınsaklık ile α -dereceden kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsaklık arasındaki ilişki verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yakınsaklık, Cesàro Toplanabilme, Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, Metrik Değerli Dizi

SUMMARY

Statistical Convergence of Metric Valued Sequence

The study titled "Statistical Convergence of Metric Valued Sequences" consists of five parts. In the first part, brief information is given about the studies conducted in literature. In the second part, some basic concepts to be used in the following sections are given. In the third chapter, basic concepts related to statistical convergence and lacunary statistical convergence, a generalization of metric convergence, are mentioned. In the fourth section, a few relations between the statistical convergence of order α of the real number sequences for the real number $\alpha \in (0, 1]$ and the strong p -Cesàro convergence of order α are given. The fifth part is the original part of the study and is organized under two subheadings. In the first part of this section lacunary statistical convergence and strong p -Cesàro convergence of metric-valued sequences are defined and some correlations between these concepts are proved.

In the second part:

- 1) Lacunary d -statistical convergence of order α is defined,
- 2) Strong lacunary pd -Cesàro convergence of order α is defined,
- 3) The relationship between lacunary d -statistical convergence of order α and strong lacunary pd -Cesàro convergence of order α is given.

Keywords: Statistical convergence, Cesàro summability, Lacunary statistical convergence, Metric valued sequence

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi
S_{θ}^d	:	Lacunary d -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
N_{θ}^d	:	Lacunary d -Cesàro yakınsak dizilerin kümesi
S^d	:	d -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$h.h.k$	:	hemen hemen her k
$stat - \lim$	:	İstatistiksel limit
ℓ_{∞}	:	Sınırlı diziler uzayı
$S_{\theta}^{d,\alpha}$	:	α -dereceden lacunary d -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$N_{\theta}^{d,\alpha}(p)$	:	α -dereceden kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık yıllar önce farklı isimler altında Fourier analiz, Ergodik teori, Sayılar teorisi, Ölçüm teorisi, Trigonometrik seriler ve Banach uzayları teorisinde incelenmiştir. Bu kavram literatürde 1900 lü yılların ilk yarısında çeşitli isimler altında çalışılmıştır. Bilinen anlamda yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık son zamanlarda birçok araştırmacı tarafından çalışılmış ve toplanabilme teorisine uygulanmıştır. Bu kavram ilk olarak Zygmund [1] tarafından verildi, daha sonra Steinhaus [2] ve Fast [3] istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladılar ve Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklık kavramını bir toplanabilme metodu olarak verdi. Salat [5] reel terimli istatistiksel yakınsak dizilerin birkaç özelliğini incelemiş ve sınırlı reel değerli istatistiksel yakınsak dizilerin kümesinin sınırlı dizilerin kümesinde hiçbir yerde yoğun küme olduğunu göstermiştir. Zaman içerisinde istatistiksel yakınsaklık Connor [6], Çolak ([7],[8]), Çolak ve Bektaş [9], Çakallı [10], Caserta ve arkadaşları [11], Et ve Şengül ([12],[13]), Fridy [14], Fridy ve Orhan ([15],[16]), Mursaleen [17], Savaş ([18],[19]) gibi yazarlar tarafından toplanabilme teorisine uygulandı ve istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesàro toplanabilme arasındaki bağıntıları incelendiler. 2014 yılında Küçükaslan ([20],[21]) ve arkadaşları istatistiksel yakınsaklığı metrik uzaylara genelleştirerek metrik değerli bir dizinin istatistiksel yakınsaklığını tanımladılar ve bazı özelliklerini verdiler.

Bu çalışmada bir lacunary dizisini kullanarak metrik değerli dizilerin α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve α -dereceden kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsaklığı kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlayacağız ve aralarındaki bazı bağıntıları vereceğiz.

(X, d) metrik uzay, $x = (x_k) \in X$ olsun. $k_0 = 0$, $r \rightarrow \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow 0$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun, $0 < \alpha \leq 1$ alalım ve $[h_r]^\alpha$ nın h_r nin α kuvveti, yani

$$[h]^\alpha = ([h_r]^\alpha) = ([h_1]^\alpha, [h_2]^\alpha, \dots, [h_r]^\alpha, \dots)$$

olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ verilsin

$$\frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(y_k - \zeta) \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

olacak şekilde $\zeta \in X$ sayısı varsa y dizisi ζ ye α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsak denir.

$\alpha > 0$ verilsin $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(y_k - \zeta)]^p \rightarrow 0$$

ise y dizisi ζ sayısına α -dereceden kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsaktır denir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. [22] F boş kümeden farklı bir küme olsun. $m : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b, c \in F$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu dönüşüme F üzerinde bir metrik, (F, m) ikilisine de bir metrik uzay denir.

$$\mathbf{M1)} \quad m(a, b) \geq 0$$

$$\mathbf{M2)} \quad m(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\mathbf{M3)} \quad m(a, b) = m(b, a)$$

$$\mathbf{M4)} \quad m(a, b) \leq m(a, c) + m(c, b)$$

Tanım 2.2. [22] (F, m) bir metrik uzay, $a = (a_n)$ de F de bir dizi olsun. Her $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$m(a_n, k) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir n_0 varsa (a_n) dizisi F 'de yakınsaktır denir ve $a_n \rightarrow k$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3. [22] Bir (F, m) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyor ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.4. [22] Bir $(F, \|\cdot\|)$ normlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa tam uzay yani, Banach uzayı denir.

Tanım 2.5. [22] F dizi uzayı bir Banach uzayı olmak üzere;

$$\tau_k : F \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_k(a) = a_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise F ye bir BK-uzayı denir.

Tanım 2.6. [22] Kompleks terimli tüm $a = (a_i)$, $(i = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin kümesini ω ile göstereceğiz. ω , $a = (a_i)$, $b = (b_i)$ ve, α bir skaler olmak üzere

$$a + b = (a_i) + (b_i)$$

$$\alpha a = (\alpha a_i)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. ω nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir.

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Toplanabilme teorisinde son zamanlarda çok çalışılan istatistiksel yakınsaklık yıllar önce farklı isimler altında Fonksiyonel analizin çeşitli dallarında, örneğin Fourier analiz, Ergodik teori, Sayılar teorisi, Ölçüm teorisi, Trigonometrik seriler ve Banach uzayları teorisinde incelenmiştir. Klasik anlamda bilinen yakınsaklıktan daha genel olan istatistiksel yakınsaklık son zamanlarda birçok araştırmacı tarafından çalışılmış ve toplanabilme teorisine uygulanmıştır. Zygmund [1] ilk olarak bu kavramdan bahsetmiş ancak Steinhaus [2] ve Fast [3] istatistiksel yakınsaklığı tanımlamışlar, Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklık kavramını bir toplanabilme metodu olarak vermiştir. Salat [5] reel terimli istatistiksel yakınsak dizileri incelemiş ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini vermiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Connor [6], Çolak ([7],[8]), Çolak ve Bektaş [9], Çakallı [10], Caserta ve arkadaşları [11], Et ve Şengül ([12],[13]), Fridy [14], Fridy ve Orhan ([15],[16]), Mursaleen [17], Savaş ([18],[19]) gibi yazarlar tarafından çalışılmıştır.

3.1. İstatistiksel Yakınsak Diziler

Bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu, $|\{s \leq t : s \in M\}|$ ifadesi M nın t den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |\{s \leq t : s \in M\}|$$

eşitliği ile tanımlanır. Eğer yukarıdaki limit sıfıra eşit ise M kümesi sıfır yoğunluklu küme olarak tanımlanır. Bu kavramdan faydalanarak istatistiksel yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.1.1. [14] $y = (y_k)$ dizisi verilsin ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |\{k \leq t : |y_s - \zeta| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir ζ sayısı varsa yani $h.h.k$ için

$$|y_k - \zeta| < \varepsilon$$

ise y dizisi ζ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $stat-\lim y_k = \zeta$ veya $y_k \xrightarrow{stat} \zeta$ şeklinde gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer $\zeta = 0$

ise y dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir ve istatistiksel sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir.

Burada " $h.h.k$ " özelliği "bir $y = (y_k)$ dizisinin terimlerinin bir özelliği sıfır yoğunluklu bir cümle dışında bütün k lar için sağlaması" olarak ifade edilir.

İyi bilindiği gibi istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha geneldir. Buna göre yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten

$$y_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $y = (y_k)$ dizisi için

$$|\{k \leq n : y_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

dır. Halbuki bu dizi yakınsak değildir. İstatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda da değildir, hatta sınırlı diziler uzayı ile istatistiksel yakınsak diziler uzayı birbirini kapsamazlar ancak bunların ortak elemanları vardır. Gerçekten yakınsak bir dizi hem sınırlı hemde istatistiksel yakınsaktır, ancak

$$y_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

dizisi istatistiksel yakınsak fakat sınırlı değildir. Diğer taraftan $y = (-1, 1, -1, \dots)$ dizisi sınırlı diziler kümesinin bir elemanıdır, ancak istatistiksel bir limite sahip olmadığından istatistiksel yakınsak değildir. Bilinen anlamda dizilerin yakınsaklığı kavramının istatistiksel yakınsaklığa genelleştirilmesine benzer bir düşünce, Cauchy dizisinin istatistiksel Cauchy dizisine genelleştirme düşüncesidir. Bu genelleştirme yine Fridy tarafından [14] aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.1.2. [14] y dizisi ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin, $h.h.k$ için

$$|y_k - y_{t_0}| < \varepsilon$$

olacak şekilde $t = t_0(\varepsilon)$ sayısı varsa yani;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |\{k \leq t : |y_k - y_{t_0}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise y dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Klasik analizde bilinen yakınsak dizi ile Cauchy dizileri arasında verilen bağıntıya benzer bir bağıntı 1985 yılında Fridy [14] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.1.3. [14] x dizisi istatistiksel yakınsaktır $\Leftrightarrow x$ istatistiksel Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır.

Bilindiği gibi tüm dizilerin uzayı alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı da $stat\text{-}\lim x_k = \alpha$ $stat\text{-}\lim y_k = \beta$ ve k bir skaler olmak üzere $stat\text{-}\lim (x_k + y_k) = \alpha + \beta$ ve $stat\text{-}\lim kx_k = k\alpha$ eşitliklerini sağladığından bir lineer uzayıdır.

3.2. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_r)$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ ve $q_1 = k_1$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir. $\theta = (k_r)$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecek ve

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve uygunluk için $\sum_{I_r} |x_i|$ ile gösterilecek ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olarak alınacaktır.

Kuvvetli Cesáro yakınsak diziler literatürde istatistiksel yakınsaklıktan bağımsız olarak çalışılmış, Schoenberg [4] bu kavramın sınırlı diziler için denk olduğunu göstermiştir. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \zeta| = 0$$

olacak şekilde bir ζ sayısı varsa x dizisi ζ 'ye kuvvetli Cesáro yakınsaktır denir. Kuvvetli Cesáro yakınsak dizilerin kümesi $|\sigma_1|$ ile gösterilir. $|\sigma_1|$ kümesi $\|x\| = \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)$ normu ile bir BK -uzayıdır.

1978 yılında Freedman ve arkadaşları [23] yukarıda tanımını verdiğimiz lacunary dizisini kullanarak kuvvetli Cesáro yakınsak dizilerin kümesini kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin uzayına genelleştirmişler ve bu küme üzerine bir norm inşa etmişlerdir.

Tanım 3.2.1. [23] Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - \zeta| = 0$$

olacak şekilde bir ζ sayısı varsa x dizisi ζ sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir.

Kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin cümlesi N_θ ile gösterilecektir. N_θ uzayı

$$\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k| \right)$$

normu ile bir BK -uzayıdır ve $\theta = (2^r)$ olması halinde $N_\theta = |\sigma_1|$ dir.

1993 yılında Fridy ve Orhan ([15],[16]) bir lacunary dizisi yardımıyla istatistiksel yakınsaklığı lacunary istatistiksel yakınsaklığa aşağıdaki şekilde genelleştirmiş ve bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Tanım 3.2.2. [15] $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \zeta| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi ζ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bir dizi lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\theta - \lim x = \zeta$ veya $x_k \rightarrow \zeta (S_\theta)$ ile gösterilir. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S_θ ile gösterilecektir.

4. α -DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklığın geneleştirilmelerinden biriside α -dereceden istatistiksel yakınsaklık veya dereceli istatistiksel yakınsaklıktır. Bu kavram 0 ile 1 arasındaki sayılara göre istatistiksel yakınsaklığı derecelendirmektedir. Fikir ilk defa Gadjiev ve Orhan [24] tarafından ifade edilmiştir. Dereceli istatistiksel yakınsaklık Çolak ([7],[8]), Bhunia ve arkadaşları [25] tarafından birbirinden bağımsız olarak çalışıldı. Dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili literatürdeki çalışmaların Çolak ([7],[8]) tarafından verilen " α -dereceden istatistiksel yakınsaklık" ve " λ -istatistiksel yakınsaklık" başlıklı çalışmadan sonra arttığını görüyoruz. Daha sonra Çolak ve Bektaş [9], Et ve Şengül ([12],[13]) dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramlarını çalıştılar. Konunun güncelliğini koruduğu ve son zamanlarda birçok yazar tarafından çalışıldığı gözlenmektedir. Şimdi Et ve Şengül ([12],[13]) tarafından verilen dereceli yoğunluk ve dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili temel bazı kavramları verelim.

Tanım 4.1. ([12],[13]) $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi olsun. Bir E kümesinin α -dereceden θ -yoğunluğu, $|\{k \leq n : k \in E\}|$ ifadesi E kümesinin n doğal sayısından büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta_\theta^\alpha(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : k \in E\}|$$

eşitliği ile tanımlanır (limit sonlu ya da sonsuz olabilir). Bu limitin sonlu olması durumunda E kümesi α -dereceden θ -yoğunluğuna sahiptir denir. Eğer bu limitin değeri sıfır ise E kümesi sıfır α -dereceden θ -yoğunluğa sahiptir denir. Bu tanım $\alpha = 1$ ve $\theta = \{(2^r)\}$ için doğal yoğunluk kavramı ile aynıdır. $E \subseteq \mathbb{N}$ herhangi bir küme olmak üzere $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $\delta_\theta^\beta(E) \leq \delta_\theta^\alpha(E)$ olduğu açıktır (aşağıdaki lemmada bunu gösteriyoruz). Sıfır α -yoğunluklu küme tanımından hareketle α -dereceden istatistiksel yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanır.

Lemma 4.2. ([12],[13]) $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. α ve β sayılarını $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlanacak şekilde seçelim ve θ bir lacunary dizisi olsun, bu takdirde $\delta_\theta^\beta(E) \leq \delta_\theta^\alpha(E)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $[h_r]^\alpha \leq [h_r]^\beta$ olması nedeniyle $\frac{1}{[h_r]^\beta} \leq \frac{1}{[h_r]^\alpha}$ olup

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\beta} |\{k \in I_r : k \in E\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : k \in E\}|$$

dır. Buradan $\delta_\theta^\beta(E) \leq \delta_\theta^\alpha(E)$ elde edilir.

Tanım 4.3. ([12],[13]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ sayısı verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : |y_k - \zeta| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

olacak şekilde bir ζ kompleks sayısı varsa $y = (y_k)$ dizisi ζ sayısına α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. $y = (y_k)$ dizisinin ζ sayısına α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsak olması halinde $S_\theta^\alpha - \lim y_k = \zeta$ yazarız. α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık her $\alpha \in (0, 1]$ sayısına bir lacunary istatistiksel yakınsaklık karşılık getireceğinden lacunary istatistiksel yakınsaklığı derecelendirmektedir. α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi S_θ^α ile $\zeta = 0$ olması durumunda ise $S_{\theta,0}^\alpha$ gösterilecektir. α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık $\alpha = 1$ ve $\theta = (2^r)$ için bilinen anlamda istatistiksel yakınsaklık ile aynı olur.

$\alpha > 1$ olması durumunda α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı olmayabilir. Gerçekten

$$y_k = \begin{cases} 1, & k = 2r \\ 0, & k \neq 2r \end{cases} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

eşitliği ile verilen bir y dizisini tanımlayalım. $\alpha > 1$ olması durumunda

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : |y_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2[h_r]^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2[h_r]^\alpha} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : |y_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2[h_r]^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2[h_r]^\alpha} = 0$$

olacağından y dizisi hem 1 hem de 0 sayılarına α -dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Kompleks (reel) terimli bütün dizilerin kümesi w nin $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ iki dizi ve c bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$cx = (cx_k)$$

işlemleri ile bir lineer uzay olduğunu, w nin her alt kümesinin de bu işlemler altında kapalı olması durumunda bir lineer uzay olduğunu biliyoruz. S_θ^α nın yukarıdaki işlemler altında kapalı olduğunu aşağıdaki teoremden olduğu gibi kolayca gösterebiliriz. Buna göre S_θ^α bir lineer uzaydır.

Teorem 4.4. ([12],[13]) S_θ^α bir lineer uzaydır.

Yakınsak her dizinin α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsak ancak tersinin doğru olmadığını söyleyebiliriz. Gerçekten $\theta = (2^r)$ olsun $y = (y_k)$ dizisini

$$y = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |y_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} (2\sqrt{n} + 1)$$

olacağından $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $S^\alpha - \lim y_k = 0$ dir, ancak $y \notin c$ dir.

Aşağıdaki teorem $\alpha, \beta \in (0, 1]$ sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olmak üzere α -dereceden istatistiksel yakınsaklık ile β -dereceden istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntıyı verir.

Teorem 4.5. ([12],[13]) $\alpha, \beta \in (0, 1]$ sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun α -dereceden istatistiksel yakınsak her sayı dizisi β -dereceden istatistiksel yakınsak, fakat tersi doğru değildir.

Gerçekten $\alpha, \beta \in (0, 1]$ sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{[h_r]^\beta} |\{k \in I_r : |y_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : |y_k - \xi| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlandığından α -dereceden istatistiksel yakınsak her sayı dizisi β -dereceden istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir. Gerçekten $\theta = (2^r)$ olsun $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} 3, & k = n^3 \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1)$$

olarak tanımlarsak $\frac{1}{3} < \beta \leq 1$ için $S^\beta - \lim x_k = 0$, ancak $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ için $x \notin S_\theta^\alpha$ olduğu görülür.

Lacunary istatistiksel yakınsak diziler ile kuvvetli lacunary toplanabilir diziler arasındaki ilişki 1993 yılında Fridy ve Orhan ([15],[16]) tarafından verildi. α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsak diziler ile α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir diziler arasında öncekilere benzer bir bağıntı vermek mümkündür. Bu bağıntıyı vermeden

önce α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir diziler uzayı $N_\theta^\alpha(p)$ yı aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 4.6. ([12],[13]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun ve α sayısını $0 < \alpha \leq 1$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçelim.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} |z_k - \eta|^p = 0$$

olacak şekilde bir η kompleks sayısı varsa $z = (z_k)$ dizisi η sayısına α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir. $z = (z_k)$ dizisinin η sayısına α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir olması halinde $N_\theta^\alpha(p) - \lim z_k = \eta$ yazarız. α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilirlik her $\alpha \in (0, 1]$ sayısına bir toplanabilme metodu karşılık getireceğinden kuvvetli lacunary toplanabilirlik kavramını derecelendirmektedir. α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir tüm dizilerin kümesi $N_\theta^\alpha(p)$ ile $\eta = 0$ olması durumunda ise $N_{\theta,0}^\alpha(p)$ gösterilecektir. $\alpha = 1$ ve $\theta = (2^r)$ için bilinen anlamda kuvvetli p -Cesàro toplanabilme α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilirlik ile aynı olur.

Teorem 4.7. ([12],[13]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ sayısı verilsin. $N_\theta^{\alpha_0}(p)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.2)$$

normu ile bir Banach uzayı $0 < p < 1$ için

$$\|x\|_{\theta_1} = \sup_r \frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k|^p. \quad (4.3)$$

normu ile bir tam p -normlu uzaydır.

İspat. $N_\theta^{\alpha_0}(p)$ uzayının denklem (4.2) ile tanımlanan norm ile bir normlu uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi (x^s) dizisi $x^s = (x_k^s)_k = (x_1^s, x_2^s, \dots)$ olmak üzere $N_\theta^{\alpha_0}(p)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

yazabiliriz, böylece $r \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\left(\frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

elde ederiz. Buradan $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

olurki, bu $(x_k^s)_k = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisi $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olup $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_s x_k^s = x_k$ dir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq n_0$ olarak seçildiğinde

$$\|x^s - x^t\|_\theta < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı bulabiliriz. Buradan her $r \in \mathbb{N}$ ve $s, t \geq n_0$ için

$$\frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^p < \varepsilon^p.$$

elde ederiz. Son ifade de $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_t \frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^p = \frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k|^p < \varepsilon^p$$

elde edilir. Bu

$$\|x^s - x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

olmasını gerektirir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \leq 2^p \left\{ \frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^{n_0} - L|^p + \frac{1}{[h_r]^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^{n_0} - x_k|^p \right\}$$

olup $x \in N_\theta^{\alpha_0}(p)$ dir.

$0 < p < 1$ için $N_\theta^{\alpha_0}(p)$ uzayının denklem (4.3) deki norm ile tam p -normlu uzay olduğu yukarıdaki yol takip edilerek kolayca gösterilebilir.

Teorem 4.8. ([12],[13]) $\alpha, \beta \in (0, 1]$ sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir her sayı dizisi α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.

İspat. İspatın ilk kısmı kolaydır, bu kısmın ispatını vermiyoruz. Ters için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} [\sqrt{h_r}], & k = 1, 2, 3, \dots, [\sqrt{h_r}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in S_\theta^\beta$, fakat $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ $x \notin N_\theta^\alpha(p)$ dir.

Bu konuya ilişkin son bağıntımız α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir diziler ile β -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir diziler arasında olacaktır.

Teorem 4.9. ([12],[13]) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun, α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir her sayı dizisi β -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilirdir.

İspat. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olmak üzere $p \in \mathbb{R}^+$ için

$$\frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} |y_k - \xi|^p \leq \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |y_k - \xi|^p$$

olduğundan α -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir her real sayı dizisi β -dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir. Tersini için $\theta = (2^r)$ olsun ve denklem (4.1) de tanımlanan diziyi göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |y_k - 0|^p \leq \frac{2\sqrt[3]{n}}{n^\beta} = \frac{2}{n^{\beta-\frac{1}{3}}} \rightarrow 0$$

olup $\beta \in (\frac{1}{3}, 1]$ için $y \in N_\theta^\beta(p)$, ancak $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |y_k - 0|^p \geq \frac{2\sqrt[3]{n} - 1}{n^\alpha} \rightarrow \infty$$

olduğundan $x \notin N_\theta^\alpha(p)$ dir.

5. METRİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

5.1. Metrik Uzaylarda Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.1.1. (X, d) keyfi bir metrik uzay, $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(x_k, a) \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir a sayısı varsa x dizisi bir a sayısına d_r -istatistiksel yakınsaktır (veya lacunary d -istatistiksel yakınsaktır) denir. Bu durumda $B_\varepsilon(a)$, a merkezli, ε yarıçaplı bir açık yuvar, yani

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k \notin B_\varepsilon(a)\}| = 0$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $a \in X$ elemanı mevcut demektir. Bu tür dizilerin kümesini S_θ^d ile göstereceğiz.

Tanım 5.1.2. (X, d) keyfi bir metrik uzay, $x \in X$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, a)]^p = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir a sayısı varsa x dizisi bir a sayısına lacunary d -Cesàro yakınsaktır (veya kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsaktır) denir. Bu tür dizilerin kümesini N_θ^d ile göstereceğiz.

Teorem 5.1.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun.

i) $x = (x_k)$ dizisi a sayısına kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsak ise lacunary d -istatistiksel yakınsaktır ve bu kapsama kesindir,

ii) $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ve x dizisi a sayısına lacunary d -istatistiksel yakınsak ise kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsaktır.

İspat. i) $x \in N_\theta^d$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, a)]^p &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ x_k \notin B_\varepsilon(a)}} [d(x_k, a)]^p + \sum_{\substack{k \in I_r \\ x_k \in B_\varepsilon(a)}} [d(x_k, a)]^p \\ &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ x_k \notin B_\varepsilon(a)}} [d(x_k, a)]^p \\ &\geq \varepsilon^p \cdot |\{k \in I_r : x_k \notin B_\varepsilon(a)\}| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, a)]^p &\geq \frac{\varepsilon^p}{h_r} |\{k \in I_r : x_k \notin B_\varepsilon(a)\}| \\ \lim \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, a)]^p &\geq \lim \frac{\varepsilon^p}{h_r} |\{k \in I_r : x_k \notin B_\varepsilon(a)\}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Tersine için $X = \mathbb{R}$ seçelim ve $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini

$$x_k = \begin{cases} [\sqrt{h_r}], & k = 1, 2, 3, \dots, [\sqrt{h_r}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım, bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ ve $r \rightarrow \infty$ için

$$\lim \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} = 0$$

olup $x \in S_\theta^d$ dir. Diğer taraftan $p = 1$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} [\sqrt{h_r}] \rightarrow 1$$

olup, $x \notin N_\theta^d$ dir.

ii) $x = (x_k)$ dizisinin sınırlı ve lacunary d -istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $d(x_k, a) \leq K$ olacak şekilde $K \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ için N_ε sayısını $\forall r > N_\varepsilon$ için

$$h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(x_k, a) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$E_r = \left\{ k \in I_r : d(x_k, a) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

kümesini gözönüne alalım. Bu takdirde $\forall r > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, a)]^p &= h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \notin E_r}} [d(x_k, a)]^p + h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \in E_r}} [d(x_k, a)]^p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2h_r} h_r + h_r^{-1} \left(\frac{h_r \varepsilon}{2K^p} \right) K^p = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $x = (x_k)$ dizisi kuvvetli lacunary yakınsaktır.

Sonuç 5.1.4. $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi ise lacunary d -istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli lacunary d -yakınsaklık denktir.

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 5.1.5. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. q_r ,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} q_r > 1$$

şartını sağlayacak şekilde seçilirse $S^d \subset S_\theta^d$ dir.

Teorem 5.1.6. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. q_r ,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} q_r < \infty$$

şartını sağlayacak şekilde seçilirse $S_\theta^d \subset S^d$ dir.

İspat.

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} q_r < \infty$$

olsun. Bu takdirde $\forall r$ için $q_r < H$ olacak şekilde $H > 0$ sayısı vardır. $x_k \rightarrow a$ (S_θ^d) ve

$$T_r = |\{k \in I_r : d(x_k, a) \geq \varepsilon\}|$$

diyelim. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall r > r_0$ olacak şekilde $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $r > r_0$ için $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ yazabiliriz.

$M = \max \{T_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ ve n de $k_{r-1} < n < k_r$ şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x_k, a) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : d(x_k, a) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{T_1 + T_2 + \dots + T_{r_0} + T_{r_0+1} + \dots + T_r\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup \frac{T_r}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\ &\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon q_r \leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon H \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S_\theta^d \subset S^d$ dir.

Uyarı. Bir dizinin d_r -istatistiksel limiti herhangi bir lacunary dizisi için tektir. Ancak farklı lacunary dizileri için limitler farklı olabilir. Fridy ve Orhan [15] tarafından inşa edilen aşağıdaki örnekte kullanılan dizi bizim amacımıza hizmet eder.

Örnek 5.1.7. $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun ve $x = (x_i)$ dizisini;

$$x_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ 0, & (2n-1)! < i \leq (2n)! \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ 1, & (2n)! < i \leq (2n+1)! \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve lacunary dizisini $\theta = \{(2r)!\}$ olarak alalım, bu takdirde

$$\frac{1}{h_{r+1}} |\{k \in I_{r+1} : |x_k| \geq \varepsilon\}| = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1 \\ \frac{(2r+1)! - (2r)!}{2(r+1)! - (2r)!}, & 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

olur. Buradan $x_i \rightarrow 0 (S_\theta)$ dir. $\theta' = \{(2r+1)!\}$ lacunary dizisi için

$$\frac{1}{h_{r+1}} |\{k \in I_{r+1} : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1 \\ \frac{(2r)! - (2r-1)!}{(2r+1)! - (2r-1)!}, & 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

olup $x_i \rightarrow 1 (S_{\theta'})$ dir.

Görüldüğü gibi θ lacunary dizisine göre x dizisinin limiti 0 ancak θ' lacunary dizisine göre x dizisinin limiti 1 dir.

Aşağıdaki iki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 5.1.8. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\liminf_r q_r > 1$$

ise $W^d(p) \subseteq N^d(p)$ dir.

Teorem 5.1.9. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $\limsup_r q_r < \infty$ ise $N_\theta^d(p) \subseteq W^d(p)$ dir.

Teorem 5.1.10. (X, d_1) ve (X, d_2) iki metrik uzay olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.

i) Lacunary d_1 - istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi lacunary d_2 - istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ile çakışır,

ii) (X, d_1) metrik uzayında yakınsak dizilerin uzayı (X, d_2) metrik uzayında yakınsak dizilerin uzayı ile çakışır.

İspat. (X, d_1) metrik uzayında her lacunary yakınsak dizi lacunary d_1 - istatistiksel yakınsaktır. Diğer taraftan (X, d_2) metrik uzayında lacunary yakınsak dizi lacunary d_2 - istatistiksel yakınsaktır.

Buradan $i \iff ii$ elde edilir.

5.2. Metrik Uzaylarda α . Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.2.1. (X, d) metrik uzay $x = (x_n) \in X$ olsun. $k_0 = 0, r \rightarrow \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow 0$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ alalım. $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $[h_r]^\alpha$, h_r nin α kuvveti yani

$$[h]^\alpha = ([h_r]^\alpha) = ([h_1]^\alpha, [h_2]^\alpha, \dots, [h_r]^\alpha, \dots)$$

şeklinde ifade edilmek üzere verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, a) \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : x_k \notin B_\varepsilon(a)\}| = 0$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $a \in X$ elemanı mevcut ise x dizisi a sayısına d_r^α -istatistiksel yakınsaktır (veya lacunary d^α -istatistiksel yakınsak veya α -dereceden lacunary d -istatistiksel yakınsaktır). Bu tür dizilerin kümesini $S_\theta^{d, \alpha}$ ile göstereceğiz. Özel olarak α sayısı 1 seçilirse $S_\theta^{d, \alpha} = S_\theta^d$ olur.

Dereceli yakınsaklığın daha önceki özelliklerine paralel olarak α sayısının 0 ile 1 arasında olması durumunda α -dereceden lacunary d -istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı, α nın 1 den büyük olması halinde iyi tanımlı değildir. Bunun için bir örnek verelim.

Örnek 5.2.2. $X = \mathbb{R}$ seçelim. $d(x, y) = |x - y|$ metriğini alalım ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1 & k = 2r \text{ ise} \\ 0 & k \neq 2r \text{ ise} \end{cases} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde alalım. $r > 1$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, 1) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2[h_r]^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2[h_r]^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^{d,\alpha} - \lim x_k = 1$ ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, 0) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2[h_r]^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2[h_r]^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^{d,\alpha} - \lim x_k = 0$ dır. Bu durumda $x = (x_k)$ hem 1 hemde 0 sayılarına α -dereceden lacunary d -istatistiksel yakınsak olur. Fakat bu mümkün değildir.

Tanım 5.2.3. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun. $\alpha > 0$ verilsin $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, a)]^p = 0$$

ise x dizisi a ya α -dereceden kuvvetli lacunary pd -Cesàro yakınsaktır denir. Bu tür dizilerin kümesini $N_\theta^{d,\alpha}(p)$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.2.4. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun. $p \in \mathbb{R}^+$ için $x_k \rightarrow L \left(N_\theta^{d,\alpha}(p) \right)$ ise $x_k \rightarrow L \left(S_\theta^{d,\beta} \right)$ olup $\alpha \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan α ve β sayıları için $N_\theta^{d,\alpha}(p) \subset S_\theta^{d,\beta}$ kapsaması kesindir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L \left(N_\theta^{d,\alpha}(p) \right)$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(x_k, L) \geq \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p + \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(x_k, L) < \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p \\ &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(x_k, L) \geq \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p &\geq \frac{\varepsilon^p}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\varepsilon^p}{[h_r]^\beta} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazabilir. r ye göre limit alınırsa $x_k \rightarrow L \left(S_\theta^{d,\beta} \right)$ elde edilir. Böylece $N_\theta^{d,\alpha}(p) \subset S_\theta^{d,\beta}$ dir.

$\alpha = \beta$ ve $p = 1$ için kapsamının kesin olduğunu gösterelim.

θ lacunary dizisi verilsin,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{h_r} & k = 1, 2, 3, \dots, \sqrt{h_r} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ ve $r \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, 0) \geq \varepsilon\}| = \frac{\sqrt{h_r}}{[h_r]^\alpha} \rightarrow 0$$

elde edilir, yani $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x_k \rightarrow 0$ ($S_\theta^{d,\alpha}$) dır. Diğer taraftan $0 < \alpha < 1$ ve $p = 1$ için

$$\frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p = \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)] = \frac{\sqrt{h_r} \sqrt{h_r}}{[h_r]^\alpha} \rightarrow \infty$$

olup $\alpha = 1$ için

$$\frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)] = \frac{\sqrt{h_r} \sqrt{h_r}}{[h_r]^\alpha} \rightarrow 1$$

dir. $0 < \alpha \leq 1$ için $x_k \rightarrow 0$ ($N_\theta^{d,\alpha}(p)$) dir yani $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x \in S_\theta^{d,\alpha} - N_\theta^{d,\alpha}(p)$ dir.

Not. (X, d) metrik uzayında $x = (x_k)$ dizisi sınırlı olması durumunda teoremin tersi sağlanmaz.

Teorem 5.2.5. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\liminf_r q_r > 1$ ise $S^{d,\alpha} \subseteq S_\theta^{d,\alpha}$ dir.

İspat. (q_r) dizisi $\liminf_r q_r > 1$ şartını sağlıyorsa $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz. Bu durumda

$$q_r \geq 1 + \delta \Rightarrow \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1 + \delta \Rightarrow -\left(\frac{k_{r-1}}{k_r}\right) \geq -\frac{1}{1 + \delta} \Rightarrow 1 - \left(\frac{k_{r-1}}{k_r}\right) \geq 1 - \frac{1}{1 + \delta}$$

olup buradan $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \Rightarrow \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^\alpha \geq \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{[k_r]^\alpha} \geq \frac{\delta^\alpha}{(1 + \delta)^\alpha} \frac{1}{[h_r]^\alpha}$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L$ ($S^{d,\alpha}$) olsun, bu takdirde

$$\frac{1}{[k_r]^\alpha} |\{k \leq k_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\delta^\alpha}{(1 + \delta)^\alpha} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}|$$

olup $x_k \rightarrow L \left(S_\theta^{d,\alpha} \right)$ dır. Bu da $S^{d,\alpha} \subseteq S_\theta^{d,\alpha}$ olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.6. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$\limsup_r q_r < \infty$$

ise $S_\theta^{d,\alpha} \subseteq S^d$ dir.

İspat.

$$\limsup_r q_r < \infty$$

ise $\forall r$ için $q_r < H$ olacak şekilde $H > 0$ vardır. $x_k \rightarrow L \left(S_\theta^{d,\alpha} \right)$ ve

$$N_r^d = |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}|$$

olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Öyleki $\forall r > r_0$ için

$$\frac{N_r^d}{[h_r]^\alpha} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $[h_r]^\alpha < h_r$ olduğundan

$$\frac{N_r^d}{h_r} < \frac{N_r^d}{[h_r]^\alpha}$$

olup

$$\frac{N_r^d}{h_r} < \varepsilon$$

dur.

$$M = \max \{N_r^d : 1 < r \leq r_0\}$$

ve n de $k_{r-1} < n < k_r$ şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x_k, a) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : d(x_k, a) \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1^d + N_2^d + \dots + N_{r_0}^d + N_{r_0+1}^d + \dots + N_r^d\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}^d}{h_r} + \dots + h_r \frac{N_r^d}{h_r} \right\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup \frac{N_r^d}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon q_r \leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon H
\end{aligned}$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L(S^d)$ olup $S_\theta^{d,\alpha} \subset S^d$ dir.

Aşağıdaki teoremin sadece ifadesini veriyoruz.

Teorem 5.2.7. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\liminf_r \frac{[h_r]^\alpha}{k_r} > 0$$

ise $S^d \subseteq S_\theta^{d,\alpha}$ dir.

Teorem 5.2.8. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun. $\liminf_r q_r > 1$ ise $W_p^{d,\alpha} \subseteq N_\theta^{d,\alpha}(p)$ dir.

İspat. $x \in W_{p,0}^{d,\alpha}$ olsun,

$$\begin{aligned}
\tau_r^{d,\alpha} &= \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, a)]^p = \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} [d(x_i, a)]^p - \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} [d(x_i, a)]^p \\
&= \frac{[k_r]^\alpha}{[h_r]^\alpha} \frac{1}{[k_r]^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} [d(x_i, a)]^p - \frac{[k_{r-1}]^\alpha}{[h_r]^\alpha} \frac{1}{[k_{r-1}]^\alpha} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} [d(x_i, a)]^p
\end{aligned}$$

yazılabilir. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğu için

$$\frac{[k_r]^\alpha}{[h_r]^\alpha} \leq \frac{(1+\delta)^\alpha}{\delta^\alpha} \quad \text{ve} \quad \frac{[k_{r-1}]^\alpha}{[h_r]^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{[k_r]^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} [d(x_i, a)]^p \rightarrow 0$$

hemde

$$\frac{1}{[k_{r-1}]^\alpha} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} [d(x_i, a)]^p \rightarrow 0$$

ve $\tau_r^{d,\alpha}$ da 0 a yakınsar, $x \in N_\theta^{d,\alpha}(p)$ dir. Böylece $W_p^{d,\alpha} \subseteq N_\theta^{d,\alpha}(p)$ elde edilir.

Teorem 5.2.9. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun. $p \in \mathbb{R}^+$ için $N_\theta^{d,\alpha}(p) \subset N_\theta^{d,\beta}(p)$ olup, bu kapsama en az $\alpha < \beta$ eşitsizliğini sağlayan α ve β sayıları için kesindir.

İspat. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{[h_r]^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p \leq \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p$$

yazılabilir. Bu da $N_\theta^{d,\alpha}(p) \subset N_\theta^{d,\beta}(p)$ olduğunu verir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x_k, y) = |x - y|$ metriğini göz önüne alalım.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \text{ bir tam kare ise} \\ 0, & \text{aksi hallerde} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dizisini tanımlayalım $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in N_\theta^{d,\beta}(p)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin N_\theta^{d,\alpha}(p)$ olduğu görülür.

Teorem 5.2.10. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı ise $S_\theta^{d,\alpha} \subset S_\theta^{d,\beta}$ olup, bu kapsama $\alpha < \beta$ eşitsizliğini sağlayan α, β reel sayıları için kesindir.

İspat. Kapsama bağıntısı kolayca gösterilebilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x_k, y) = |x - y|$ metriğini ve $x = (x_n)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} [\sqrt{h_r}], & k = 1, 2, 3, \dots, \sqrt{h_r} \\ 0, & \text{aksi hallerde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in S_\theta^{d,\beta}$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x \notin S_\theta^{d,\alpha}$ dir.

Teorem 5.2.11.

$$\limsup_r \frac{k_r}{[k_{r-1}]^\alpha} < \infty$$

ise $\alpha \in (0, 1]$ için $N_\theta^d(p) \subseteq W_p^{d,\alpha}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat.

$$\limsup_r \frac{k_r}{[k_{r-1}]^\alpha} < \infty$$

ise $\forall r \geq 1$ için $\frac{k_r}{[k_{r-1}]^\alpha} < S$ olacak şekilde $S > 0$ sayısı vardır. $x \in N_{\theta,0}^d(p)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\sup_{i \geq R} \tau_i < \varepsilon$ ve $\tau_i < K$ olacak şekilde $R > 0$ ve $K > 0$ sayılarını bulabiliriz. $k_{r-1} < t < k_r$ ve $r > R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^t [d(x_i, 0)]^p &\leq \frac{1}{[k_{r-1}]^\alpha} \sum_{i=1}^{k_r} [d(x_i, 0)]^p \\ &= \frac{1}{[k_{r-1}]^\alpha} \left(\sum_{I_1} [d(x_i, 0)]^p + \sum_{I_2} [d(x_i, 0)]^p + \dots + \sum_{I_r} [d(x_i, 0)]^p \right) \\ &= \frac{k_1}{[k_{r-1}]^\alpha} \tau_1 + \frac{k_2 - k_1}{[k_{r-1}]^\alpha} \tau_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{[k_{r-1}]^\alpha} \tau_R + \frac{k_{R+1} - k_R}{[k_{r-1}]^\alpha} \tau_{R+1} \\ &\quad + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{[k_{r-1}]^\alpha} \tau_r \\ &\leq \left(\sup_{i \geq 1} \tau_i \right) \frac{k_R}{[k_{r-1}]^\alpha} + \left(\sup_{i \geq R} \tau_i \right) \frac{k_r - k_R}{[k_{r-1}]^\alpha} \\ &< K \frac{k_R}{[k_{r-1}]^\alpha} + \varepsilon S \end{aligned}$$

$k_{r-1} \rightarrow \infty$ iken $t \rightarrow \infty$ olduğundan

$$\frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^t [d(x_i, 0)]^p \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece $x \in W_{p,0}^{d,\alpha}$ dır.

Teorem 5.2.12. $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $x \in W^{d,\alpha} \cap N_{\theta}^{d,\alpha}$ ve

$$\limsup_r \frac{k_r}{[k_{r-1}]^\alpha} < \infty$$

ise $L_{W_p^{d,\alpha}}(x) = L_{N_{\theta}^{d,\alpha}}(x)$ dir.

İspat. $W_p^{d,\alpha} - \lim x_k = L$, $N_{\theta}^{d,\alpha} - \lim x_k = L'$ ve $L \neq L'$ olsun. $\limsup_r \frac{k_r}{[k_{r-1}]^\alpha} < \infty$ olduğundan bir önceki teoremden $N_{\theta,0}^{d,\alpha}(p) \subset W_{p,0}^{d,\alpha}$ olur. $(x - L') \in N_{\theta,0}^d(p)$ olduğundan $(x - L') \in W_{p,0}^{d,\alpha}$ dır. $p = 1$ alalım, bu durumda

$$\frac{1}{s^\alpha} \sum_{i=1}^s d(x_i, 0) \rightarrow 0$$

olup

$$\frac{1}{s^\alpha} \sum_{i=1}^s d(x_i, L') + \frac{1}{s^\alpha} \sum_{i=1}^s d(x_i, L) \geq \frac{1}{s^\alpha} d(L, L') > 0$$

yazabiliriz. Sol taraftaki iki terim sıfıra yakınsadığı için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $L = L'$ dir.

Teorem 5.2.13. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı ve $\theta = \{k_r\}$, $\theta' = \{s_r\}$ farklı iki lacunary dizisi ve her r doğal sayısı için $I_r \subset J_r$ olmak üzere

i)

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{[h_r]^\alpha}{[l_r]^\beta} > 0 \quad (5.1)$$

ise $S_{\theta'}^{d,\beta} \subset S_\theta^{d,\alpha}$ dir.

ii)

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{l_r}{[h_r]^\beta} = 1 \quad (5.2)$$

ise $S_\theta^{d,\alpha} \subset S_{\theta'}^{d,\beta}$ dir.

İspat. Teoremin ispatı literatürde mevcut olan teknikler kullanılarak yapılabilir.

Teorem 5.2.14. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı ve $\theta = \{k_r\}$, $\theta' = \{s_r\}$ farklı iki lacunary dizisi ve her r doğal sayısı için $I_r \subset J_r$ olmak üzere

i) Denklem (5.1) sağlanırsa $N_{\theta'}^{d,\beta}(p) \subset N_\theta^{d,\alpha}(p)$ dir.

ii) Denklem (5.2) sağlansın ve $x \in l_\infty(X)$ olsun. O zaman $N_\theta^{d,\alpha}(p) \subset N_{\theta'}^{d,\beta}(p)$ olur.

İspat. i) $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve (5.2.1) sağlansın

$$\frac{1}{[l_r]^\beta} \sum_{k \in J_r} [d(x_k, L)]^p > \frac{[h_r]^\alpha}{[l_r]^\beta} \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_i, L)]^p$$

olduğundan $N_{\theta'}^{d,\beta}(p) \subset N_\theta^{d,\alpha}(p)$ elde edilir.

ii) $x = (x_k) \in l_\infty(X) \cap N_\theta^{d,\alpha}(p)$ olsun ve (5.2.2) sağlansın. $x = (x_k) \in l_\infty(X)$ olduğundan $d(x_k, L) \leq C$ olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Her r doğal sayısı için

$I_r \subset J_r$ olduğundan $h_r \leq l_r$ dir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[l_r]^\beta} \sum_{k \in J_r} [d(x_k, L)]^p &= \frac{1}{[l_r]^\beta} \sum_{k \in J_r - I_r} [d(x_k, L)]^p + \frac{1}{[l_r]^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r - h_r}{[l_r]^\beta} \right) C^p + \frac{1}{[l_r]^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r - [h_r]^\beta}{[l_r]^\beta} \right) C^p + \frac{1}{[h_r]^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r}{[h_r]^\beta} - 1 \right) C^p + \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $l_\infty(X) \cap N_\theta^{d,\alpha}(p) \subset N_{\theta'}^{d,\beta}(p)$ elde edilir.

Teorem 5.2.15. α ve β sayıları $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı ve $\theta = \{k_r\}, \theta' = \{s_r\}$ farklı iki lacunary dizisi ve her r doğal sayısı için $I_r \subset J_r$ olmak üzere

i) Denklem (5.1) sağlansın ve x dizisi L ye kuvvetli $N_{\theta'}^{d,\beta}(p)$ –toplanabilir olsun. Bu dizi L ye $S_\theta^{d,\alpha}$ –istatistiksel yakınsaktır.

ii) Denklem (5.2) gerçeklensin ve x sınırlı bir dizi olsun. Eğer x dizisi L ye $S_\theta^{d,\alpha}$ –istatistiksel yakınsak ise L ye kuvvetli $N_{\theta'}^{d,\beta}(p)$ –toplanabilirdir.

İspat. i) $\forall x = (x_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in J_r} [d(x_k, L)]^p &= \sum_{\substack{k \in J_r \\ d(x_k, L) \geq \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p + \sum_{\substack{k \in J_r \\ d(x_k, L) < \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p \\
&\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(x_k, L) \geq \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\sum_{k \in J_r} [d(x_k, L)]^p \geq |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

yazılabilir, böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[l_r]^\beta} \sum_{k \in J_r} [d(x_k, L)]^p &\geq \frac{1}{[l_r]^\beta} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\
&> \frac{[h_r]^\alpha}{[l_r]^\beta} \frac{1}{[h_r]^\alpha} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p
\end{aligned}$$

Denklem (5.1) sağlandığı için $x = (x_k)$ dizisi L ye kuvvetli $N_{\theta'}^{d,\beta}(p)$ –toplanabilir ise L ye $S_{\theta}^{d,\alpha}$ –istatistiksel yakınsaktır.

ii) $S_{\theta}^{d,\alpha} - \lim x_k = L$ ve $x = (x_k) \in l_{\infty}(X)$ olsun. $x \in l_{\infty}(X)$ olduğundan $d(x_k, L) \leq C$ olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[l_r]^{\beta}} \sum_{k \in J_r} [d(x_k, L)]^p &= \frac{1}{[l_r]^{\beta}} \sum_{k \in J_r - I_r} [d(x_k, L)]^p + \frac{1}{[l_r]^{\beta}} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r - h_r}{[l_r]^{\beta}} \right) C^p + \frac{1}{[l_r]^{\beta}} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r - [h_r]^{\beta}}{[l_r]^{\beta}} \right) C^p + \frac{1}{[l_r]^{\beta}} \sum_{k \in I_r} [d(x_k, L)]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r}{[h_r]^{\beta}} - 1 \right) C^p + \frac{1}{[h_r]^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(x_k, L) \geq \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p \\
&\quad + \frac{1}{[h_r]^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(x_k, L) < \varepsilon}} [d(x_k, L)]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r}{[h_r]^{\beta}} - 1 \right) C^p + \frac{C^p}{[h_r]^{\beta}} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| + \frac{h_r}{[h_r]^{\beta}} \varepsilon^p \\
&\leq \left(\frac{l_r}{[h_r]^{\beta}} - 1 \right) C^p + \frac{C^p}{[h_r]^{\alpha}} |\{k \in I_r : d(x_k, L) \geq \varepsilon\}| + \frac{l_r}{[h_r]^{\beta}} \varepsilon^p
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Denklem (5.2) sağlandığı için $x = (x_k)$ dizisi L ye $S_{\theta}^{d,\alpha}$ –istatistiksel yakınsak ise L ye kuvvetli $N_{\theta'}^{d,\beta}(p)$ –toplanabilirdir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada $\alpha \in (0, 1]$ reel sayı olmak üzere reel sayı dizilerin α -dereceden istatistiksel yakınsaklığı ve α -dereceden kuvvetli p -Cesàro yakınsaklığı kavramları bir lacunary dizisi yardımıyla metrik değerli dizilere genelleştirildi. Elde edilen sonuçlar oldukça genel sonuçlar olup p, α sayıları, lacunary dizisi ve X metrik uzayının seçilişine göre literatürde daha önceden elde edilmiş sonuçları verir.



7. KAYNAKLAR

- [1] **Zygmund, A.** 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2] **Steinhaus, H.** 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math. 2, 73-74.
- [3] **Fast, H.** 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2 241-244.
- [4] **Schoenberg, I. J.** 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly 66, 361-375.
- [5] **Šalát, T.** 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150.
- [6] **Connor, J. S.** 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, Analysis 8.47-63.
- [7] **Çolak, R.** , 2010, Statistical convergence of order α , Modern Methods in Analysis and Its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121–129.
- [8] **Çolak, R.** 2011, On λ -statistical convergence, Conference on Summability and Applications, May 12-13, Istanbul Turkey.
- [9] **Çolak, R. , Bektaş, C. A.** 2011, λ -statistical convergence of order α . Acta Math. Sci. 31(3), 953-959.
- [10] **Çakallı, H.** 1996, On statistical convergence in topological groups, Pure Appl. Math. Sci., 43, 27–31.
- [11] **Caserta, A.; Maio, G.D. and Kočinac, L.D.R.** 2011, Statistical convergence in function spaces, Abstr. Appl. Anal. 11. Article ID420419.
- [12] **Et, M. , Şengül, H.** 2014, Some Cesàro-type summability spaces of order α —and lacunary statistical convergence of order α , Filomat 28(8), 1593–1602.
- [13] **Şengül, H. , Et, M.** 2014, On lacunary statistical convergence of order α , Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 34(2), 473–482.

- [14] **Fridy, J. A.** 1985, On statistical convergence, *Analysis* 5,301-313.
- [15] **Fridy, J. A. , Orhan, C.** 1993, Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.* 160, 43-51.
- [16] **Fridy, J. A. , Orhan, C.** 1993, Lacunary statistical summability, *J. Math. Anal. Appl.* 173(2), 497-504
- [17] **Mursaleen, M.** 2000, λ - statistical convergence, *Math. Slovaca* 50(1), 111-115.
- [18] **Savaş, E.** 2014, Lacunary statistical convergence of double sequences in topological groups, *J. Inequal. Appl.* 480, 10 pp.
- [19] **Savaş, E.** 2014, Lacunary statistical convergence of multiple sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces, *Math. Comput. Appl.* 19(3), 241-254
- [20] **Küçükaslan, M. , Değer, U. , Dovgoshey, O.** 2014, On the statistical convergence of metric-valued sequences, *Ukrainian Math. J.* 66(5), 796-805.
- [21] **Küçükaslan, M. , Değer, U.** 2012, On statistical boundedness of metric valued sequences, *Eur. J. Pure Appl. Math.* 5(2), 174-186.
- [22] **Maddox, I.J.,** 1988, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [23] **Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M.,** 1978, Some Cesàro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37(3), 508-520.
- [24] **Gadjiev, A. D. , Orhan, C.** 2002, Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain J. Math.* 32(1), 129-138.
- [25] **Bhunia, S. , Das, P. , Pal, S. K.** 2012, Restricting statistical convergence. *Acta Math. Hungar.* 134(1-2), 153-161.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım ve 2005 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2012 de Elazığ Çalışma ve İş kurumunda İş ve Meslek Danışmanı olarak atanarak göreve başladım. Halen aynı yerde görev yürütmekteyim. 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.

