

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİROTA SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNİN ANALİTİK
VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ
MUHARREM TUNCAY GENÇOĞLU

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

EYLÜL-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİROTA SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNİN ANALİTİK
VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ
MUHARREM TUNCAY GENÇOĞLU
(95121204)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:18 Eylül 2013
EYLÜL-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİROTA SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNİN ANALİTİK
VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ
MUHARREM TUNCAY GENÇOĞLU
(95121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Eylül 2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 7 Ekim 2013

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Prof. Dr. Alaattin Esen (İ.Ü)

Doç. Dr. Ali YEŞİL (F.Ü)

Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

EYLÜL-2013

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Mustafa İNÇ' e çok teşekkür eder, şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez yazım aşamasında bana yardımcı olan Arş. Gör. Dr. Ebru CAVLAK'a teşekkür ederim.

Bu süreçte, bana destek veren ve hep yanımda olan sevgili aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

Muharrem Tuncay GENÇOĞLU

Elazığ - 2013

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	V
SUMMARY	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
TABLolar LİSTESİ	IX
SEMBOLLER LİSTESİ	X
1. BÖLÜM.....	1
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	5
2.1. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	5
3. BÖLÜM	14
3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ HIROTA-SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİ.....	5
4. BÖLÜM	20
4.1 ADOMIAN AYRIŞIM YÖNTEMİ.....	20
4.2 ADOMIAN POLİNOMLARININ HESAPLANMASI	22
4.2.1 Lineer Olmayan Polinomlar	23
4.2.2.Trigonometrik Lineer olmayanlık	26
4.2.3. Üstel Lineer olmayanlık	29
4.2.4. Logaritmik Lineer olmayanlık	30
4.3 GENİŞLETİLMİŞ ADOMIAN YÖNTEMİ.....	31
5. BÖLÜM	33
5.1 VARYASYONEL İTERASYON METODU.....	33
5.2 GENİŞLETİLMİŞ VARYASYONEL İTERASYON METODU	37

6. BÖLÜM	38
6. GADM VE GVIM METODLARININ HİROTA SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNE UYGULANMASI	38
6.1 HS BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNE GADM'NİN UYGULANMASI	38
6.2 HS BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNE GVIM'NUN UYGULANMASI	43
7. BÖLÜM	47
7. GADM VE GVIM İLE ELDE EDİLEN SAYISAL SONUÇLARIN İRDELENMESİ	47
7.1 SAYISAL SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ	48
8. BÖLÜM	67
8. 1 ($\frac{G'}{G}$)– AÇILIM METODU	67
8. 2 GENİŞLETİLMİŞ (G'/G)– AÇILIM METODU	69
8. 3 İYİLEŞTİRİLMİŞ (G'/G)–AÇILIM METODU	70
9. BÖLÜM	87
9. SONUÇ VE TARTIŞMA	87
KAYNAKLAR	89
ÖZGEÇMİŞ	103

ÖZET

Bu çalışma dokuz bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerle ilgili yapılan çalışmalar ve bizim yapacağımız çalışmayla ilgili bir giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmamızda kullanacağımız genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Adomian ayrışım yöntemi (ADM) ve ortaya çıkan lineer olmayan terimlere göre Adomian polinomlarının nasıl oluşturulacağı gösterilmiş, Genişletilmiş Adomian ayrışım metodu (GADM) verilmiştir.

Beşinci bölümde, çalışmamızda kullanacağımız varyasyonel iterasyon metodu (VIM) ve Genişletilmiş varyasyonel iterasyon metodu (GVIM) tanıtılmış ve yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Altıncı bölümde, daha önceki bölümlerde analizleri yapılan GADM ve GVIM kullanılarak HS birleştirilmiş KdV denkleminin seri çözümleri elde edilmiştir.

Yedinci bölümde, HS birleştirilmiş KdV denkleminin $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ analitik çözümleri için GADM ve GVIM kullanılarak elde edilen sayısal sonuçların literatürde var olan DTM ve HPM ile karşılaştırmaları yapılmış, sonuçlar tablo ve grafiklerle ifade edilmiştir.

Sekizinci bölümde, (G'/G) - açılım metodu, genişletilmiş (G'/G) - açılım metodu ve iyileştirilmiş (G'/G) - açılım metodunun temel yapıları verilmiş. Daha sonra iyileştirilmiş (G'/G) - açılım metodu Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemine uygulanmıştır.

Dokuzuncu bölümde, yukarıda bahsedilen yöntemlerle elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genişletilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV Denklemi, (G'/G) - Açılım metodu, Genişletilmiş Adomian metodu, Genişletilmiş varyasyonel iterasyon Metodu, Adomian polinomları, Soliton.

SUMMARY

This study has been organized as nine sections.

In Section 1, works that are related to nonlinear partial differential equations and systems and an introduction of our work have been given.

In Section 2, some basic definitions and theorems, which will be used in the next sections, have been given.

In Section 3, information related to generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, which will be used in our work, has been given.

In Section 4, Adomian decomposition method (ADM) and the resulting non-linear terms, how to create based on Adomian polynomials, have been shown. Extended Adomian decomposition method (GADM) are provided in this section.

In Section 5, variational iteration method (VIM) that we will use in our work and extended variational iteration method (GVIM) have been defined and some works related to these methods have been given.

In Section 6, series solutions of HS coupled KdV equation have been obtained by using GADM and GVIM that have been analyzed in the previous sections.

In Section 7, numerical results obtained by GADM and GVIM for analytical solutions $u(x, t)$, $v(x, t)$ and $w(x, t)$ of HS coupled KdV equation have been compared with the results that obtained by DTM and HPM and these results have been given by tables and figures.

In Section 8, basic structures of (G'/G) - expansion method, extended (G'/G) - expansion method and improved (G'/G) - expansion method have been given. Then improved (G'/G) - expansion method have been applied to Hirota-Satsuma coupled KdV equation.

In Section 9, results that obtained by the mentioned methods have been evaluated.

Key Words: Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV equation, (G'/G) - expansion method, Modified Adomian method, Modified Variational iteration method, Adomian Polynomials, Soliton.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1. Tek Dalga.....	14
Şekil 3.2. Sırasıyla aynı ve zıt yöne hareket eden iki solitonun etkileşimini gösteren şekiller.....	17
Şekil 7.1. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $u(x, t)$ nin analitik ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görüntümü a) Analitik çözüm b) GVIM ile elde edilen yaklaşık çözüm c) GADM ile elde edilen yaklaşık çözüm d) HPM ve DTM ile elde edilen yaklaşık çözüm	48
Şekil 7.2. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $v(x, t)$ nin analitik ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görüntümü a) Analitik çözüm b) GVIM ile elde edilen yaklaşık çözüm c) GADM ile elde edilen yaklaşık çözüm d) HPM ve DTM ile elde edilen yaklaşık çözüm	50
Şekil 7.3. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $u(x, t)$ nin GADM ve GVIM ile elde edilen $\phi_4(x, t)$ için h eğrisi.....	51
Şekil 7.4. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $w(x, t)$ nin analitik ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görüntümü a) Analitik çözüm b) GVIM ile elde edilen yaklaşık çözüm c) GADM ile elde edilen yaklaşık çözüm d) HPM ve DTM ile elde edilen yaklaşık çözüm	53
Şekil 7.5. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $v(x, t)$ nin GADM ve GVIM ile elde edilen $\psi_4(x, t)$ için h eğrisi.....	54
Şekil 7.6. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $w(x, t)$ nin GADM ve GVIM ile elde edilen $\Omega_4(x, t)$ için h eğrisi.....	56
Şekil 7.7. HSCKdV denklemindeki $u(x, t)$ beş terimi için karşılaştırma.....	57
Şekil 7.8. HSCKdV denklemindeki $v(x, t)$ beş terimi için karşılaştırma.....	58
Şekil 7.9. HSCKdV denklemindeki $w(x, t)$ beş terimi için karşılaştırma.....	59
Şekil 7.10. HSCKdV denklemindeki $u(x, t)$ beş terimi için elde edilen mutlak hataların karşılaştırması.....	60
Şekil 7.11. HSCKdV denklemindeki $v(x, t)$ beş terimi için elde edilen mutlak hataların karşılaştırması.....	62
Şekil 7.12. HSCKdV denklemindeki $v(x, t)$ beş terimi için elde edilen mutlak hataların karşılaştırması.....	64

Şekil 8.1. $u(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, $A = 2$, $B = C = 1, k = 0.05, c_1 = c_2 = 0.1$	75
Şekil 8.2. $v(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, $A = 2$, $B = 1, C = 0.5, k = 0.01, c_1 = c_2 = 0.1, b_1 = 0.5$	76
Şekil 8.3. $w(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, $A = 2$, $B = 1, C = 0.5, k = 0.1, c_1 = c_2 = 0.1, b_1 = 0.5$	77
Şekil 8.4. $u(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, $A = 2$, $B = C = 1, k = 0.05, c_1 = c_2 = 0.1$	78
Şekil 8.5. $v(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, $A = 2$, $B = 1, C = 0.5, k = 0.01, c_1 = c_2 = 0.1, b_1 = 0.5$	79
Şekil 8.6. $w(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, $A = 2$, $B = 1, C = 0.5, k = c_1 = c_2 = 0.1$	80
Şekil 8.7. $u(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, $A = 2$, $B = C = 1, k = 0.05, c_1 = c_2 = 0.1$	82

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 7.1. $0 \leq x \leq 100, t = 20, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(u - \phi_4)$	49
Tablo 7.2. $0 \leq x \leq 100, t = 20, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(v - \psi_4)$	50
Tablo 7.3. $0 \leq x \leq 100, t = 20, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(w - \Omega_4)$	52
Tablo 7.4. $0 \leq x \leq 1, t = 100, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = -0.001$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(u - \phi_4)$	53
Tablo 7.5. $0 \leq x \leq 1, t = 100, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = -0.001$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(v - \psi_4)$	55
Tablo 7.6. $0 \leq x \leq 1, t = 100, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = -0.001$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(w - \Omega_4)$	56
Tablo 7.7. $0 \leq x \leq 1, t = 10, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(u - \phi_4)$	57
Tablo 7.8. $0 \leq x \leq 1, t = 10, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = 0.01$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(v - \psi_4)$	58
Tablo 7.9. $0 \leq x \leq 1, t = 10, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = 0.01$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(w - \Omega_4)$	59
Tablo 7.10. $0.1 \leq x \leq 1, 0.1 \leq t \leq 0.9, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1,$ $h = 0.01$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(u - \phi_{15})$	61
Tablo 7.11. $0.1 \leq x \leq 1, 0.1 \leq t \leq 0.9, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1,$ $h = 0.01$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(v - \psi_{15})$	63
Tablo 7.12. $0.1 \leq x \leq 1, 0.1 \leq t \leq 0.9, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1,$ $h = 0.001$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(w - \Omega_{15})$	65

SEMBOLLER LİSTESİ

L :	Lineer Operatör
L^{-1} :	İntegral Operatörü
Nu :	Lineer Olmayan Operatör
Σ :	Toplam Sembolü
α :	Alpha
β :	Beta
δ :	Delta
ε :	Epsilon
η :	Eta
λ :	Lambda
σ :	Sigma
Γ :	Gamma
ϕ :	Fi
Φ :	Fi
Ω :	Omega
Δ :	Delta
ξ :	Ksi
θ :	Teta
∇ :	Laplace Operatörü

KISALTMALAR

HAM:	Homotopi Analiz Metodu
KdV:	Korteweg-de Vries Denkemi
HsCKdV:	Hirota Satsuma birleştirilmiş Korteweg-de Vries Denkemi
MKdV:	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries Denkemi
HPM:	Homotopi Pertürbasyon Metodu
DTM:	Diferansiyel Dönüşüm Metodu
ADM:	Adomian Ayrışım Metodu
GADM:	Genişletilmiş Adomian Ayrışım Metodu
VIM:	Varyasyonel İterasyon Metod
GVIM:	Genişletilmiş Varyasyonel İterasyon Metodu
AS:	Analitik çözüm

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için diferansiyel denklemlerle modellenmesi gerekir. Daha sonra modellenen problemlerin analitik çözümleri ve kapalı formdaki çözümleri bulunmaya çalışılır. Fakat her problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak çoğunlukla mümkün olmayabilir. Bu durumda ise denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak önem kazanır. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi artarak devam etmiştir.

Bu tezde, matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden biri olan ve farklı dağılım ilişkilerine sahip iki uzun su dalgasının etkileşimini tanımlayan Hirota-Satsuma birleştirilmiş Korteweg-de Vries (HSCkV) denklemini gözönüne alacağız [1]. Başlangıç şartlı bu denklemi yardımcı parametrelili Adomian ayrışım yöntemi (GADM) ve genişletilmiş Varyasyonel iterasyon yöntemi (GVIM) ile yaklaşık olarak çözeceğiz ve literatürde var olan sonuçlarla karşılaştıracacağız. Ayrıca, HSCkV denklemini iyileştirilmiş (G'/G) - açılım yöntemi ile de analitik olarak çözülecektir.

Adomian ayrışım yöntemi 1980'li yılların başında Amerikalı matematikçi George Adomian [2, 3] tarafından ortaya konmuştur. Bu metotla lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemleri çözmek mümkündür. Bu yöntemin temeli bilinmeyen fonksiyonun ayrıştırılmasına dayanır. ADM'nin teorik yakınsaklık ispatları Cherrault ve ekibi tarafından yapılmıştır[4]-[6]. Yöntemin pek çok uygulaması literatürde var olup bazıları için [7]-[15] nolu referanslara bakılabilir. Burada kullanacağımız GADM ise yakınsaklık kontrol parametresi ilave edilerek elde edilmiş bir metottur. Bu sayede elde edeceğimiz seri çözümün yakınsaklık aralığını genişletmeyi düşünüyoruz.

Bir diğer kullanacağımız sayısal yöntemde VIM olup, Çinli matematikçi Ji-Huan He tarafından 1990'lı yılların başında ortaya konmuştur [16, 17]. Bu yöntemin temel esası ise probleme göre değişen Lagranj çarpanının bulunmasına dayanır. Bu metodun da literatürde pek çok uygulaması olup, [18]-[24] nolu referanslara bakılabilir. GVIM ise varyasyonel iterasyon yöntemine yakınsak-

lık kontrol parametresi ve lineer olmayan terimler için kullanılan Adomian polinomlarının ilave edilmesiyle elde edilmektedir.

GADM ve GVIM yardımıyla başlangıç şartlı HSKdV denkleminin dalga (Soliton) çözümlerini bulacağız. Dalga kavramı soyut bir kavramdır. Bir cisim veya ortamdaki titreşime karşılık gelen olay dalga olarak adlandırılabilir. Bir havuza bir taş atıldığında taşın oluşturduğu sarsıntı küçük su dalgaları meydana getirir. Bu dalgalar dışarıya doğru hareket ederek havuzun kenarında son bulur. Su dalgaları bir yerden başka bir yere hareket ederken su onunla birlikte sürüklenmez. Dalgaların tanımlanmasında üç fiziksel büyüklük önemlidir. Bunlar dalga boyu, frekans ve dalganın hızıdır.

Bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemde (kdd) bulunan bilinmeyen u değişkeni, bir dalganın su yüzeyinden itibaren yüksekliğini veya bir elektro manyetik dalganın boyunu temsil ettiğinde bağımlı u değişkenini tespit etmek önemlidir. Burada amaç lineer olmayan kdd'in hareket eden dalga çözümlerini bulmaktır. Eğer çözümler şekillerini değiştirmeden ilerliyorsa bu dalgalara tek dalgalar adı verilir. Soliton ve soliton etkileşimiyle ilgili detaylı bilgileri daha sonraki bölümde vereceğiz.

Fiziksel sistemlerin matematiksel modellemesi genellikle lineer olmayan kdd'le açıklanır. Bu tür denklemlerin analitik çözümleri denklemin yapısı ve karakteri hakkında bize bilgi verdiğinden önemlidir. HSKdV denkleminin analitik çözümlerini iyileştirilmiş (G'/G) - açılım yöntemiyle bulacağız. Literatürde pek çok analitik yöntem mevcuttur. Bu metotlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz: Hirota bi-lineer metodu [25], Backland dönüşümü [26], Cole-Hopf dönüşümü [27], Ters saçılma metodu [28], Darboux dönüşümü [29], Painleve açılım metodu [30], Homojen balans metodu [31], Benzerlik indirgeme metodu [32], Sine-Cosine metodu [33] ve (G'/G) - açılım metodu [34].

Bu tezde analitik ve yaklaşık olarak çözeceğimiz Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi pek çok yazar tarafından gözönüne alınmıştır. Bu çalışmalardan bazılarını kısaca şöyle özetleyebiliriz:

Zhao ve diğerleri [35] varyasyonel iterasyon metodu yardımıyla HSKdV denkleminin yaklaşık

çözümünü buldular ve analitik çözüm ile karşılaştırdılar. Raslan [36] ayrışım metodu yardımıyla başlangıç şartlı HSKdV denkleminin $x \in [-50, 50]$ değerleri için yaklaşık çözümünü elde etti. Elgarayhi ve Abdou [37] genelleştirilmiş Jakobi eliptik fonksiyonları yardımıyla HSKdV denkleminin periyodik dalga ve tek dalga çözümlerini oluşturdular. Fan [38] genişletilmiş tanh fonksiyon metoduyla HSKdV denkleminin soliton çözümlerini buldu. Reza ve Malek [39] diferansiyel dönüşüm ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metotları ile HSKdV denklemini çözüp bu iki metodu karşılaştırdılar. Kangalgil ve Ayaz [40] diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla HSKdV denkleminin yaklaşık çözümünü elde ettikten sonra $x \in [-50, 50]$ için ayrışım yöntemiyle karşılaştırdılar. Darvishi ve diğerleri [41] spektral düzenleme metodu yardımıyla HSKdV denklemini çözüp (x, t) 'nin bazı değerleri için mutlak hata değerlerini hesapladılar. Lu ve diğerleri [42], iyileştirilmiş projektif Ricatti metodu yardımıyla HSKdV denkleminin singüler, periyodik ve tek dalga çözümlerini elde ettiler. Ganji ve Rafei [43] HSKdV denklemini homotopi pertürbasyon yöntemiyle çözüp, x ve t 'nin çeşitli değerleri için mutlak hata tabloları oluşturdular. Abbasbandy [44], HSKdV denkleminin homotopi analiz metoduyla yaklaşık çözümünü bulup, h yardımcı parametresinin hangi değerleri için yaklaşık çözümün yakınsak olduğunu göstermiştir. Zedan [45] tanh ve genişletilmiş tanh metoduyla HSKdV denklemini çözüp bazı yeni soliton çözümleri elde etti. Xie ve Ding [46] başlangıç değer sisteminin bir çeşidini gözönüne alarak HSKdV denklemini DTM ile çözüp metodun yakınsaklığını sayısal örneklerle açıkladılar. Zuo ve Zhang [47] (G'/G) - açılım yöntemiyle HSKdV denklemi ve birleştirilmiş MKdV denklemini içeren dalga çözümlerini oluşturdular. Feng ve Li [48] Fan yardımcı denklem yöntemiyle HSKdV denkleminin çift periyotlu Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerini içeren tam hareketli dalga çözümlerini oluşturdular. Hong [49] bilgisayarda sembolik hesaplama ile genelleştirilmiş jakobi eliptik fonksiyonların genişleme metodunu kullanarak genelleştirilmiş HSKdV denkleminin yeni Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerini oluşturdu. Feng ve Zhang [50] yeni bir yardımcı fonksiyon yöntemi ile genelleştirilmiş HSKdV denkleminin tam hareketli dalga çözümlerini elde ettiler. Yu ve diğerleri [51] genişletilmiş Jakobi eliptik fonksiyon yöntemini kullanarak genelleştirilmiş HSKdV denklemlerini çözdüler. Yan [52]

sembolik hesaplama kullanarak genişletilmiş Jakobiye eliptik fonksiyon yöntemiyle genelleştirilmiş HSKdV denklemlerinin tam çift periyodik çözümlerini buldu. Khater ve diğerleri [53] Spektral sıralama yöntemini kullanarak lineer olmayan birleştirilmiş evolasyon denklemlerin nümerik çözümlerini buldular. Zhong ve diğerleri [47] Varyasyonel iterasyon metoduyla genelleştirilmiş HSKdV ve birleştirilmiş MKdV denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulup, bunları tam çözümlerle karşılaştırdılar. Assas [54] VIM ile genelleştirilmiş HSKdV denkleminin sayısal simülasyonunu yapıp ve analitik çözümle karşılaştırdı. Arife ve diğerleri [55] HAM ile birleştirilmiş MKdV ve HSKdV denklemlerinin sayısal çözümünü bulup, ayrıca HAM ve ADM arasında bir karşılaştırma yaptılar. Bin [86], kesirli HSKdV denklemini (G'/G) - açılım yöntemiyle, Zayed ve diğerleri [87] $\sec h_q - \tanh_q$ metodu yardımıyla HSKdV denkleminin periyodik çözümlerini buldular. Yine aynı denklem Jakobi eliptik açılım metoduyla [52, 88], Adomian ayrışım metodu, homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz metotlarıyla [89, 90, 44] ele alındı. Cavlak [91] zaman kesirli sistemi HAM yardımıyla yaklaşık olarak çözdü.

2. BÖLÜM

2.1 TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1.1

Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [56].

Tanım 2.1.2

Bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir. n . mertebeden adi diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

biçiminde verilir [56].

Tanım 2.1.3

Bağımlı değişkenin iki yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir ve

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0,$$

formunda verilir [56].

Tanım 2.1.4

Bir diferansiyel denklemde ki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir [57].

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit yada bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y) z_x + Q(x, y) z_y + R(x, y) z = S(x, y),$$

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y).$$

Tanım 2.1.5

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) denklem adı verilir [57].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z) z_x + Q(x, y, z) z_y = R(x, y, z),$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y) z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y) z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

Tanım 2.1.6

Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f 'in k . mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k -sınıfındandır denir [57].

Tanım 2.1.7

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir [57].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;
- 2) $\Delta(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;
- 3) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

Tanım 2.1.8

X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler vs...) cümlesi olmak üzere X uzayının herbir elemanına Y uzayının bir elemanını karşılık getiren dönüşüme operatör denir [61].

Tanım 2.1.9

$D(T)$ tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi birer vektör uzayı olan ve her $x, y \in D(T)$, her α skaleri için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özelliğine sahip olan T operatörüne lineer operatör denir [61].

Tanım 2.1.10

X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir [61].

Tanım 2.1.11

X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer olması gerekmeyen herhangi bir operatör olsun. Eğer verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - x_0\| < \delta$$

şartını sağlayan $\forall x \in D(T)$ için

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında sürekli denir. Eğer T ; her $x \in D(T)$ noktasında sürekli ise T operatörüne sürekli denir [61].

Tanım 2.1.12

Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden biri olan ∇ Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla U = 0,$$

şeklindeki bir denkleme de ∇' nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir.

Bu denklemde c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca ∇U , t ye göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0,$$

formundadır. Bu tip denklemler elektro manyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve quantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştiren dalgaları ifade eder [57].

Matematiksel fiziğin diğer bazı denklemlerini şöyle verebiliriz [58];

a) İki boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

b) Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

c) İki boyutlu Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

d) Biharmonik denklem

$$\nabla^4 u = 0,$$

e) Biharmonik dalga denklemi

$$\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

f) Telegraf denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial T} + Au = 0,$$

g) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 u + \alpha [E - V(x, y, z)] u = 0,$$

h) Klein-Gordon denklemi

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu^2 u.$$

Teorem 2.1.1 (Birinci mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi):

$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ve $R(x, y, z)$ fonksiyonları (x_0, y_0, z_0) noktasını kapsayan bir $D \subset R^3$ bölgesinde C^1 sınıfından olsunlar ve kabul edelim ki

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0,$$

olsun. O zaman (x_0, y_0) noktasının bir U komşuluğunda, U 'nun içinde yatan $\tilde{C}$ eğrisinin her noktasında $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$ başlangıç şartını ve $Pz_x + Qz_y = R$ denklemini sağlayan bir tek $z = z(x, y)$ çözümlü vardır [59].

Teorem 2.1.2 (Cauchy-Kovalewsky teoremi):

$$Lz = A(x, y) z_{xx} + 2B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y),$$

denklemindeki katsayılar ve G fonksiyonu, xy -düzleminde, orjini kapsayan bir $\Omega \subset R^2$ bölgesinde analitik olsunlar. Ω da $C(x, y) \neq 0$ olsun. x -ekseninin Ω tarafından kapsanan parçasında tanımlanmış keyfi, analitik $h(x)$ ve $\sigma(x)$ fonksiyonları verilsin. O zaman $(0, 0)$ noktasının bir N komşuluğu vardır ve N de $Lz = G$ denkleminin bir tek analitik $z = \varphi(x, y)$ çözümü vardır, Öyle ki N komşuluğu tarafından kapsanan x -ekseni üzerinde $\varphi(x, 0) = h(x)$, $\varphi_y(x, 0) = \sigma(x)$ sağlanır [59].

Tanım 2.1.13

Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) Sınır Şartları: Kısmi diferensiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α , β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\text{Dirichlet sınır şartı} \quad : \quad u|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann sınır şartı} \quad : \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = g \text{ (veya 0)}$$

$$\text{Robin sınır şartı} \quad : \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g.$$

(ii) Başlangıç Şartı: Sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir [60].

Tanım 2.1.14

Bir f fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f , z_0 da analitiktir denir [62]. Eğer bir f fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f fonksiyonu S üzerinde analitiktir denir. Bu f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f ye tam fonksiyon denir [62].

Tanım 2.1.15

Matematiksel bir terim olarak iyi tanımlı problem kavramı ilk olarak, Jacques Hadamard tarafından verilen bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

- i) Çözüm vardır,
- ii) Çözüm tektir,
- iii) Çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümü tektir denildiği zaman, bu mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Örneğin, bir problemin birkaç çözümü olsun. Fakat bu çözümlerden sadece biri sınırlı olsun. Bu durumda sınırlı fonksiyonlar uzayında çözüm tektir denir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa bunun anlamı, model hakkında elde bulunan bilgiler eksiktir. Bu durumda model için çeşitli ek özellikler verilmelidir. Eğer başlangıç ya da sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm kararlıdır denir. Bir problem kararlı değilse, bu problemin çözümü pratik bir şekilde hesaplanamaz. İyi tanımlı problemlere ilişkin örnekler Laplace denklemi için Dirichlet problemini ve özel başlangıç koşullarına sahip ısı problemi için Dirichlet problemini içermektedir. Bu problemler çözümleri için bazı fiziksel metotlar bulunan doğal problemlerdir. Fakat bunun aksine ters ısı denklemi iyi tanımlı değildir. Hadamard'a göre iyi tanımlı olmayan problemlere ill-posed problem denir. Hadamard, düz problemlerin iyi tanımlı problemler olduğunu söylemiştir. Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

X ve Y iki normlu uzay ve $K : X \rightarrow Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Kararlılık: x çözümü daima y ye bağlıdır. Yani $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \rightarrow Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için, $x_n \rightarrow x$ olmasıdır.

Kısmi diferensiyel denklemlerin klasik teorisi hemen hemen tamamıyla iyi tanımlı problemlerle ilgilenmektedir. Bu nedenle ill-posed problemler matematiksel ve bilimsel açıdan oldukça ilgi çekicidir [63]-[64].

Tanım 2.1.16

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n .mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F\left(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)\right) = 0,$$

ise Φ fonksiyonuna

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

denkleminin çözümüdür denir. Bir adi diferensiyel denklemin genel çözümü, diferensiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. özel olarak, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar şeklinde ise *sınır şartları* ile tanımlanır. Bir diferensiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine *başlangıç değer problemi*, *sınır şartları* ile incelenmesine *sınır değer problemi* denir [58]

Tanım 2.1.17

Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^q u}{d\xi^q}\right)^s$ ile verilsin. m dengeleme terimi olmak üzere $m + q = mp + s(m + r)$ eşitliği yazılabilir [65].

Tanım 2.1.18

Herhangi bir fiziksel büyüklüğün ölçülen değeri ile gerçek değeri arasındaki farka hata denir. Ölçülen bir fiziksel büyüklüğün sayısal değeri, yapılan deneysel hatalardan dolayı hiç bir zaman gerçek değeri ile ifade edilemez [66].

Tanım 2.1. 19

Ölçülen bir fiziksel büyüklüğün gerçek değeri X_0 ile, ölçülen X değeri arasındaki farka X_0 'ın mutlak hatası denir [66].

$$\text{Mutlak hata} = \Delta X = X_0 - X$$

X_0 gerçek değeri genel olarak tam bilinmediğinden ΔX 'in de tam değeri bilinemez. ΔX 'in ancak yaklaşık değeri bazı yollardan hesaplanabilir. Uygulamada mutlak hatanın görünen değeri belirlenebilir. Bu da ölçülen değer ile bir çok ölçümler sonucu elde edilen en iyi değer arasındaki farka eşittir.

Tanım 2.1.20

Mutlak hatanın ölçülen değere oranına bağıl hata denir [66].

$$\text{Bağıl hata} = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\text{Yüzde Bağıl Hata} = \frac{\Delta x}{x} 100$$

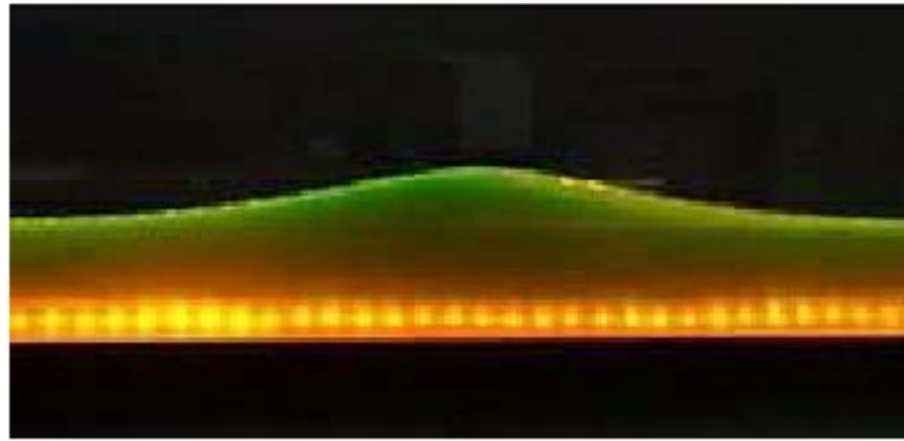
3. BÖLÜM

3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ HİROTA-SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV

DENKLEMİ

KdV denklemi olarak bilinen denklem geçen y.y dan beri var olmasına rağmen fiziksel özellikleri tam olarak elde edilememiştir. KdV denklemi 1834' de İskoç bilim adamı John Scott Russell (1808-1882) tarafından Edinburg-Glasgow kanalında sığ sulara şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgasında gözlemlenmiş "tek dalgalar (solitary wave)" için en basit ve faydalı modellerden biridir [72].

Russell bu dalgayı "büyük dalga kayması" olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844' de "Report on wave" isimli yayınında vermiştir. Bu makalede, tek dalgaların periyodik bir dalga olmayıp şeklini koruyan, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş bir biçimde yayılan bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bu çalışmadan 50 yıl kadar sonra 1885' de Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) ve öğrencisi olan Gustav de Vries (1866-1934) adındaki iki Hollandalı bilim adamı, Scott tarafından yapılan gözlemlerin bir açıklamasını veren matematiksel bir yapı ortaya koyarak KdV denklemini elde etmişlerdir [72]-[69]. Martin Kruskal ve Norman Zabusky adındaki iki bilim adamıda, dalga hareketine benzer tekrarlamaları KdV denklemleri ile oluşmuş bir sistemle gözlemlemişlerdir [71]. Bu tek dalganın önemli özelliklerinden biride birbirleriyle çarpışmaları ve bu çarpışma hareketi sonucunda şekil ve biçimlerini korumalarıdır. Buda tek dalgalar için KdV denkleminin elastik olduğunu gösterir. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1. Tek dalga (solitary wave)

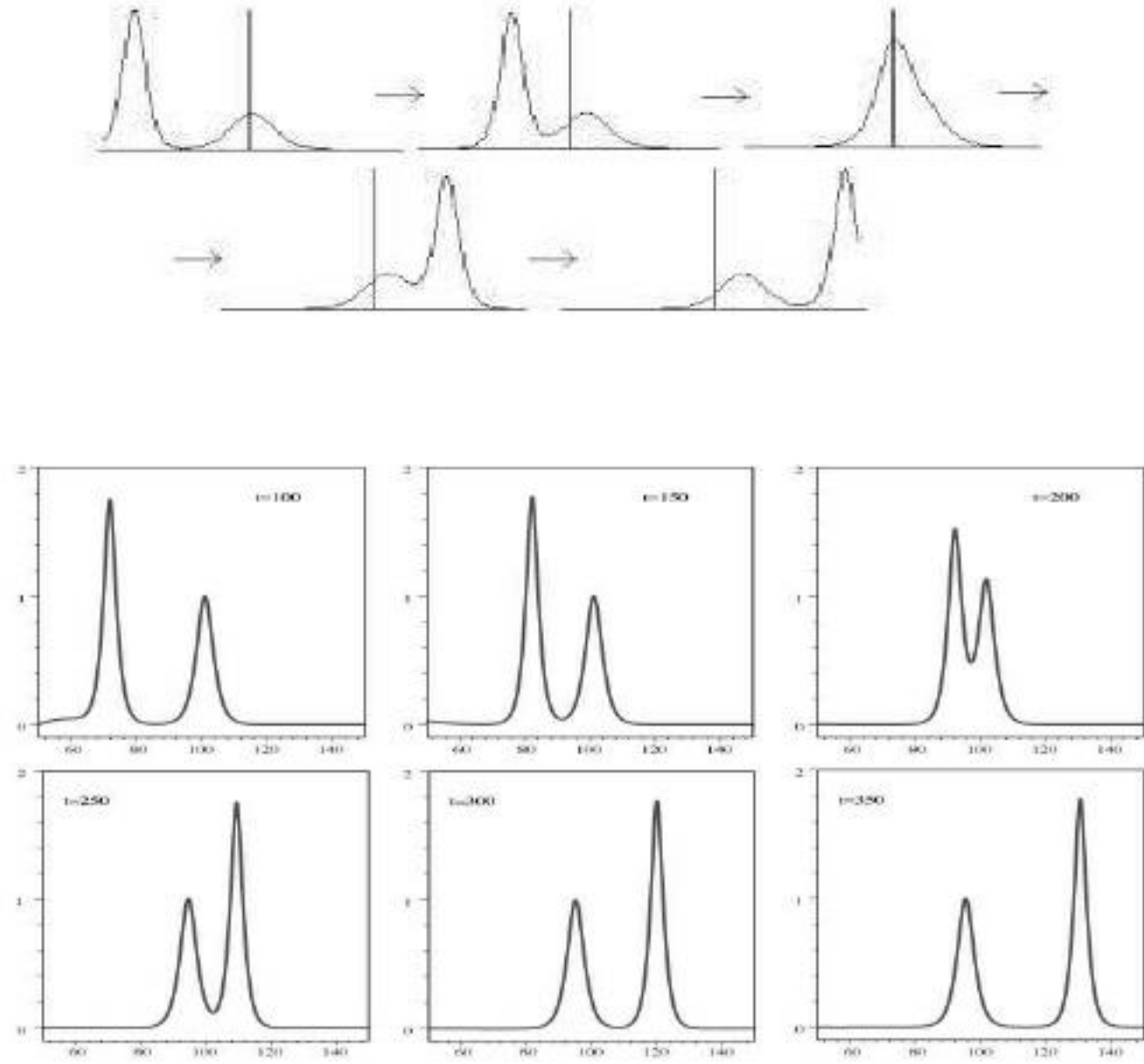
1955'de Fermi, Pasta ve Ulam'ın [70], Los Alamos bilim laboratuvarındaki lineer olmayan kütleyay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine raporlarıyla, KdV denkleminin tek dalgasıyla ilgili teori ve uygulamadaki gelişmeler devam etmiştir. 1914'de Debye iddia etti ki; "Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki iletken olmayan kuvvetler yüzündendir." Bu görüş Fermi, Pasta ve Ulam'ı düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığına inandırmıştır. Fakat onların çalışmaları şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağılmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyede geri döner. Bu gerçek Fermi, Pasta ve Ulam'ın (FPU) tekrarlanan olayı olarak bilinir.

(FPU)'nın dikkate değer bu araştırması, Martin Kruskal ve Norman Zabusky'nin [71], tekrarlanan nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan kütleyay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmelerine neden olmuştur. Kruskal ve Zabusky bu tek dalgaları solitonlar olarak adlandırmışlardır.

Daha sonra, Gardner ve diğerleri [73] ve Hirota [74, 76] herhangi bir pozitif n tamsayısı için n -soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [77], Hammack ve Segur [78], Weidman ve Maxworthy [79] tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bunların bu buluşları son 30 yıl boyunca yaygın, teorik, deneysel ve işlemsel çalışmalara yol açmıştır. Şimdi benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup uygulamalı matematikte ve fizikte çeşitli branşlara ayrılmıştır. Bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metot geliştirilmiştir [80, 81]. Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümleriyle ilişkilendirilebilir.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü varsa solitonlar olarak ad-

landırılır. Başka bir ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca KdV denkleminde başka denklemler için tek dalga çözümü $\sec h^2$ fonksiyonu olmayabilir, fakat $\sec h$ veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir. Gerçekten de bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonlara sahip olmazken, KdV denkleminin gibi denklemler solitonlar olan tek dalgalara sahiptirler. Soliton kavramı matematiksel fizikte yeni bir paradizim olarak şekil almıştır. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin; lineer olmayan Schrödinger denkleminin (NLS) [82]: plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgalarını temsil eder ve NLS denkleminin sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Fiziksel olarak, önceki çalışmalarda bu tür solitonlara düşük frekanslı solitonlar denirdi. Daha sonra Makhanov yaptığı çalışmalarda bu solitonların yüksek frekanslı solitonlar olduğunu söylemiştir [83, 84]. Bir başka önemli model denkleminde Sine-Gordon (sG) denklemdir. Bu denkleminde elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. sG denkleminin ise soliton, antisoliton (veya kinks, antikinks) ve aynı eksene göre simetrik solitonlara (breather solitonlara) sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalganın genliğine bağlı değildir.



Şekil 3.2. Sırasıyla aynı ve zıt yöne hareket eden iki solitonun etkileşimini gösteren şekiller

KdV denkleminin çözümünde solitonlar dağılma özelliği göstermezler. Bununla birlikte genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi (GKdV)

$$u_t + \varepsilon u^n u_x + u_{xxx} = 0,$$

şeklinde verilebilir [72]. Burada $u^n u_x$ ve u_{xxx} terimleri sırasıyla iletim ve dağılma terimlerini gösterir. GKdV denkleminin solitonları lineer olmayan iletim ve dağılma terimleri arasındaki ilişkiyle oluşur ve oluşan solitonlar karşılıklı etkileşimlerine rağmen yapılarını korurlar (Şekil 3.2). Lineer olmayan iletim terimi dalga formunun şeklini oluştururken, dağılma terimide hızını oluşturur. Bu iki terimin karşılıklı etkileşimi ile sabit bir dalga formu yani tek dalga (solitary wave) oluşur.

Daha sonraki yıllarda Gardner ve Hirota gibi bilim adamları herhangi bir pozitif n tamsayısı için n -soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin, analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır [73]-[74]. Bu analitik metod çalışmalarından sonra çeşitli doğrusal olmayan dağılıma sahip sistemler öne sürülmüştür [75]. Bu sistemler arasında farklı modlara sahip bir kaç dalganın birleşimi ile oluşan sistemler oldukça ilginçtir. Ses dalgaları ile Langmuir' in etkileşimleri açıklayan denklemi bu duruma bir örnektir [75]. Birleştirilmiş KdV denklemi (cKdV) farklı dağılım bağıntıları ile iki uzun dalganın etkileşimini tanımlayan bir sistemdir. Eğer bu iki uzun dalgadan birinin diğeri üzerinde etkisi yoksa oluşan sistemdeki ikinci denklem bilinen KdV denklemi olur. Bununla birlikte, ilk denklemin varlığı solitonları etkiler ve çözümler sonucunda görüldü ki KdV solitonunun hızı ilk denkleme bağlıdır. Eğer iki uzun dalganın dağılım ilişkileri arasında özel bir bağıntı söz konusu ise birleştirilmiş KdV denklemi iki veya üç soliton çözüme sahiptir. R. Hirota ve J. Satsuma yaptıkları öncü çalışmada birleştirilmiş KdV denklemlerini

$$u_t - a(u_{xxx} + 6uu_x) = 2b\phi\phi_x, \quad (3.1)$$

$$\phi_t + \phi_{xxx} + 3u\phi_x = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlamışlardır [75]. Burada a ve b keyfi sabitlerdir. (3.1) denklemindeki $2b\phi\phi_x$ terimi $w = ak^3$ lineer dağılım ilişkisi ile KdV dalga sistemindeki bir kuvvet terimi gibidir. Hirota ve Satsuma çalışmalarında ϕ' nin etkisinin yokluğunda (3.1) denkleminin bilinen KdV denklemine indirgendiğini ve soliton çözümünde

$$u = 2P^2 \sec h^2 P(x + 4aP^2 t) \quad (3.3)$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir [76]. Buna rağmen, ϕ' nin varlığı KdV solitonunun davranışını etkiler ve denklem

$$\phi = \pm \sqrt{-6P^4/b} \sec h P(x - P^2 t) \quad (3.4)$$

şeklindeki bir soliton çözümü bulundurur [76]. Bu aşama (3.4) denklemi ile belirlenir. Hirota ve Satsuma (3.3) ve (3.4) denklemlerini cKdV' nin solitonu olarak adlandırmışlardır [76]. (3.1) ve (3.2) denklemlerinin $a = 1/2$ için integrallenebilir olduğunu göstermişlerdir [75].

(3.1) ve (3.2) denklemlerinin genelleştirilmesiyle elde edilen

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} - 3uu_x + 3(vw)_x, \\v_t &= -v_{xxx} + 3uv_x, \\w_t &= -w_{xxx} + 3ww_x\end{aligned}\tag{3.5}$$

denklemler sistemi genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemleri olarak adlandırılır [85].

4. BÖLÜM

Bu bölümde, lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan Adomian ayrışım metodu (ADM), genişletilmiş Adomian ayrışım metodu (GADM) olarak bilinen yarı analitik yöntemlerin analizleri yapılacaktır.

4.1. ADOMIAN AYRIŞIM YÖNTEMİ

Ayrışım yöntemi bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir [2]-[9]. Genel olarak bu metodu verecek olursak, kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(x), \quad (4.1)$$

denklemini ele alalım. (4.1) denkleminde L ; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, R ; lineer operatörün kalan kısmını ve N ; ise diferansiyel denklemde lineer olmayan terimi göstermek üzere;

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (4.2)$$

şeklinde ayrıştırarak yazalım. L bir lineer operatör ve tersi de mevcut olsun. (4.2) eşitliği;

$$Lu = g - Ru - Nu, \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafı L^{-1} integral operatörü ile sol taraftan (4.3) eşitliğine uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (4.4)$$

bağıntısı elde edilir.

L ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğundan, (4.4) ifadesinden

$$u(x, t) = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + L^{-1}g(x)t - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (4.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (4.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu lineer olmayan terim ve $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları Adomian polinomlar olup daha sonra tartışılacaktır. (4.5) eşitliğindeki u ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , $u(x, 0) = f(x)$ ve $u_t(x, 0) = g(x)$ olmak üzere $u_0(x, t) = f(x) + tg(x) + L^{-1}g(x, t)$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu seri çözümü kullanarak (4.5) eşitliği tekrar yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (4.7)$$

şeklinde genel seri formu elde edilir. Benzer olarak, (4.7) eşitliği açık şekilde;

$$\begin{cases} u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 sadece u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0, u_1, u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (4.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0), \\ A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0), \\ A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0), \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\Phi \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

şeklinde verilmektedir [92]. Bu Adomian polinomlarını elde etmek için alternatif bir metot geliştirilmiştir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olması istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (4.9) genel formülünün kullanılması, istenildiği kadar çok sayıda (4.6) ayrıştırma serisinin terimlerinin hesaplanmasında kolaylıklar sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x, t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x, t) \quad n \geq 0 \tag{4.10}$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x, t) \tag{4.11}$$

ifadesi indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (4.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde bir çok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir [6]-[15], [93, 92].

4.2. ADOMIAN POLİNOMLARININ HESAPLANMASI

Wazwaz [15] tarafından lineer olmayan terimlerin Adomian polinomlarını hesaplamak için son derece kullanışlı bir algoritma geliştirmiştir. Bu algoritmanın kullanılmasıyla A_n Adomian polinomlarının hesaplanması aşağıdaki yöntemle yapılır.

4.2.1. LİNEER OLMAYAN POLİNOMLAR

1. DURUM

Eğer $F(y) = y^2$ ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (4.12)$$

olmak üzere $F(y) = y^2$ lineer olmayan terimi (4.1)'de yerine yazılırsa;

$$F(y) = (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 \quad (4.13)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı açılırsa;

$$F(y) = (y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 + \dots) \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14)'deki açılımda indis toplamaları aynı olan terimleri bir araya getirilirse;

$$\begin{aligned} F(y) = & y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 \\ & + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 + 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

olur. (4.14)'den; $F(y) = y^2$ Adomian polinomları;

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2, \\ A_1 &= 2y_0y_1, \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2, \\ A_3 &= 2y_1y_2 + 2y_0y_3, \\ A_4 &= y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_0y_4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.16)$$

formunda bulunur.

2. DURUM

Polinom tipinde verilen lineer olmayan terimler için $n \in Z^+$ olmak üzere aşağıdaki genelleme yapılabilir;

$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0^n, \\
A_1 &= n y_0^{(n-1)}, \\
A_2 &= \frac{1}{2} n(n-1) y_0^{(n-2)} y_1^2 + n y_0^{(n-1)} y_2, \\
A_3 &= \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) y_0^{(n-3)} y_1^3 + n(n-1) y_0^{(n-2)} y_1 y_2 + n y_0^{(n-1)} y_3, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.17}$$

3. DURUM

Eğer $n \in Z^-$ ise bu taktirde Adomian polinomları;

$$\begin{aligned}
A_0 &= -y_0^{-n}, \\
A_1 &= -n y_0^{-(n+1)}, \\
A_2 &= -\frac{1}{2} n(n-1) y_0^{-(n+2)} y_1^2 - n y_0^{-(n+1)} y_2, \\
A_3 &= -\frac{1}{6} n(n-1)(n-2) y_0^{-(n+3)} y_1^3 - n(n-1) y_0^{-(n+2)} y_1 y_2 - n y_0^{-(n+1)} y_3, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.18}$$

formülüyle bulunur.

4. DURUM

Eğer n ondalıklı bir sayı ise bu taktirde Adomian polinomları;

$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0^n, \\
A_1 &= n y_0^{(n-1)} y_1, \\
A_2 &= n y_0^{(n-1)} y_2 + \frac{1}{2} n(n-1) y_0^{(n-2)} y_1^2, \\
A_3 &= n y_0^{(n-1)} y_3 + n(n-1) y_0^{(n-2)} y_1 y_2 + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) y_0^{(n-3)} y_1^3, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olarak hesaplanır.

5. DURUM

Eğer lineer olmayan terim $F(y) = yy_x$ ise

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n \\
y_x &= \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_x}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olmak üzere (4.15) ifadesi;

$$\begin{aligned}
F(y) &= (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)_x \\
&= y_0 y_{0_x} + y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x} + y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0 + y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 \\
&\quad + y_{3_x} y_0 + y_{0_x} y_4 + y_{0_x} y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + \dots
\end{aligned} \tag{4.21}$$

ve indis toplamaları aynı olan ifadeler gruplandırılırsa;

$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0 y_{0x}, \\
A_1 &= y_{0x} y_1 + y_0 y_{1x}, \\
A_2 &= y_{0x} y_2 + y_{1x} y_1 + y_{2x} y_0, \\
A_3 &= y_{0x} y_3 + y_{1x} y_2 + y_{2x} y_1 + y_{3x} y_0, \\
A_4 &= y_{0x} y_4 + y_{1x} y_3 + y_{2x} y_2 + y_{3x} y_1, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur.

4.2.2. TRİGONOMETRİK LİNEER OLMAYANLIK

1. DURUM

$F(y) = \sin y$ ise o zaman ilk olarak $A_0 = F(y_0)$ ifadesini diğer terimlerden ayırmalıyız.

Çünkü diğer terimler y_0 'a bağlı olarak hesaplanmaktadır.

$$F(y) = \sin y$$

lineer olmayan terimi (4.1)'de yerine yazılırsa;

$$F(y) = \sin[y_0 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)] \tag{4.23}$$

ve bu ifade $\theta = y_0$, $\phi = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$ alınır,

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cdot \cos \phi + \cos \theta \cdot \sin \phi \tag{4.24}$$

ifadesinden;

$$F(y) = \sin y_0 \cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \cos y_0 \sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \tag{4.25}$$

bulunur. Burada $\cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ve $\sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ifadeleri Taylor serisine açılırsa;

$$\begin{aligned}
F(y) = & \sin y_0 \left(1 - \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 + \frac{1}{4!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^4 - \dots \right) \\
& + \cos y_0 \left((y_1 + y_2 + y_3 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^3 + \dots \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

ve böylece;

$$\begin{aligned}
F(y) = & \sin y_0 \left(1 - \frac{1}{2!}(y_1^2 + 2y_1y_2 + \dots) + \frac{1}{4!}(y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + \dots) - \dots \right) \\
& + \cos y_0 \left((y_1 + y_2 + y_3 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + \dots) + \dots \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) ifadesi düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sin y_0, \\
A_1 &= y_1 \cos y_0, \\
A_2 &= y_2 \cos y_0 - \frac{1}{2!}y_1^2 \sin y_0, \\
A_3 &= y_3 \cos y_0 - y_1y_2 \sin y_0 - \frac{1}{3!}y_1^3 \cos y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir.

2. DURUM

Eğer $F(y) = \cos y$ ise yukarıda yapılan işlemlerin benzeri lineer olmayan terim için uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
A_0 &= \cos y_0, \\
A_1 &= -y_1 \sin y_0, \\
A_2 &= -y_2 \sin y_0 - \frac{1}{2!} y_1^2 \cos y_0, \\
A_3 &= -y_3 \sin y_0 - y_1 y_2 \cos y_0 - \frac{1}{3!} y_1^3 \sin y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.29}$$

bulunur.

3. DURUM

Eğer $F(y) = \sinh y$ ve $F(y) = \cosh y$ şeklinde hiperbolik lineer olmayanlığa sahip ise aynı algoritma kullanılarak Adomian polinomları sırasıyla;

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sinh y_0, \\
A_1 &= y_1 \cosh y_0, \\
A_2 &= y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \sinh y_0, \\
A_3 &= y_3 \cosh y_0 + y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \cosh y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.30}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_0 &= \cosh y_0, \\
A_1 &= y_1 \sinh y_0, \\
A_2 &= y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \cosh y_0, \\
A_3 &= y_3 \sinh y_0 + y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \sinh y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.31}$$

formüllerleriyle elde edilir.

4.2.3. ÜSTEL LİNEER OLMAYANLIK

1. DURUM

Eğer $F(y) = e^y$ ise bu taktirde $F(y_0) = e^{y_0}$ teriminin diğer terimlerden ayrılması gerekir, $F(y) = e^y$ terimi (4.1)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = e^{(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)} \quad (4.32)$$

veya

$$F(y) = e^{y_0} e^{y_1 + y_2 + y_3 + \dots} \quad (4.33)$$

elde edilir. Bu son ifade de, $e^{y_1 + y_2 + y_3 + \dots}$ terimi Taylor serisine açılırsa;

$$\begin{aligned} F(y) &= e^{y_0} \left[1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 + \dots \right] \\ &= e^{y_0} + y_1 e^{y_0} + \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{y_0} + \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{y_0} \\ &\quad + \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{y_0} + \dots \end{aligned} \quad (4.34)$$

bulunur. Buradan; $F(y) = e^y$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{y_0}, \\ A_1 &= y_1 e^{y_0}, \\ A_2 &= \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{y_0}, \\ A_3 &= \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{y_0}, \\ A_4 &= \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{y_0}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.35)$$

olur.

2. DURUM

Eğer $F(y) = e^{-y}$ ise bu taktirde Adomian polinomları;

$$\begin{aligned}
 A_0 &= e^{-y_0}, \\
 A_1 &= -y_1 e^{-y_0}, \\
 A_2 &= \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2\right) e^{-y_0}, \\
 A_3 &= \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3\right) e^{-y_0}, \\
 A_4 &= \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4\right) e^{-y_0}, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

şeklinde olur.

4.2.4. LOGARİTMİK LİNEER OLMAYANLIK

1. DURUM

Eğer $F(y) = \ln y$, $y > 0$ ise bu taktirde bu ifade (4.1)'de yerine yazılırsa ;

$$F(y) = \ln(y_0 + y_1 + y_2 + \dots) \tag{4.37}$$

bulunur. (4.37) ifadesi ise

$$F(y) = \ln \left[y_0 \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \right] \tag{4.38}$$

formunda yazılabilir.

$$\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta$$

olduğundan (4.38) ifadesi

$$F(y) = \ln y_0 + \ln \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \quad (4.39)$$

olur. (4.39)'de ikinci terim Taylor serisine açılırsa;

$$\begin{aligned} F(y) = & \ln y_0 + \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^2 \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.40)'da indis toplamları aynı olan terimler gruplandırılırsa, Adomian polinomları aşağıdaki formda bulunur.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \ln y_0, \\ A_1 = \frac{y_1}{y_0}, \\ A_2 = \frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2}, \\ A_3 = \frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3}, \end{array} \right. \quad (4.41)$$

2. DURUM

Eğer $F(y) = \ln(1+y)$, $-1 \leq y \leq 1$ ise o zaman Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln(1+y_0), \\ A_1 &= \frac{y_1}{1+y_0}, \\ A_2 &= \frac{y_2}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1+y_0)^2}, \\ A_3 &= \frac{y_3}{1+y_0} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1+y_0)^3}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.42)$$

şeklinde bulunur.

4.3. GENİŞLETİLMİŞ ADOMIAN YÖNTEMİ

Bu metod yukarıda tanımlanan Adomian ayrışım yöntemine yakınsaklık kontrol parametresi olan $h \neq 0$ ve Homotopi Analiz yönteminde lineer olmayan terimler için oluşturulan serinin

kullanılmasıyla elde edilir. Bu şekildeki parametre ilk olarak 1992 yılında Liao tarafından, topolojinin temel kavramlarından biri olan Homotopi yardımıyla Homotopi Analiz Metodu (HAM) olarak isimlendirdiği genel bir analitik yöntem için kullanılmıştır [94]. Buna göre genişletilmiş Adomian ayrışım yönteminde (GADM) (4.7) bağıntısı yerine

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - h \left\{ L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} H_n \right\}, \quad (4.43)$$

ifadesini kullanacağız, burada H_n , HAM yönteminde lineer olmayan terimler için kullanılan polinomlardır. Bu polinomları (3.5) HS birleştirilmiş KdV denklemini çözerken bu denklemde bulunan lineer olmayan terimler için açıklayacağız. Böylece (4.43) denklemine göre GADM ile (4.8) indirgeme formülü

$$\begin{cases} u_1(x, t) = -h \{ L^{-1} R u_0(x, t) + L^{-1} H_0(x, t) \}, \\ u_2(x, t) = -h \{ L^{-1} R u_1(x, t) + L^{-1} H_1(x, t) \}, \\ \vdots \\ u_{n+1}(x, t) = -h \{ L^{-1} R u_n(x, t) + L^{-1} H_n(x, t) \}, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

şeklinde yazılabilir.

5. BÖLÜM

Bu bölümde, Varyasyonel iterasyon metodu (VIM) ve genişletilmiş varyasyonel iterasyon metodu (GVIM) olarak bilinen, lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanılan, yarı analitik yöntemlerin analizleri yapılacaktır.

5.1. VARYASYONEL İTERASYON METODU

Varyasyonel iterasyon metodu (VIM) ilk olarak Çinli matematikçi Je-Huan He tarafından geliştirildi. Bu yöntemin temel özelliği lineerizasyon ve pertürbasyon yapmadan deneme fonksiyonu veya başlangıç koşulları kullanılarak matematiksel modellerin bir kaç adımda hassas yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesidir. Bu yaklaşım farklı denklemlere uygulanarak başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmalardan bazılarını şöyle özetleyebiliriz: otonom adi diferansiyel denklemlere [96], Blasius denklemine [97], Fokker-Planck denklemine [99], Riemann-Liouville kesirli türevi bulunduran lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlere [100], ters Stefan problemine [101], lineer ve lineer olmayan Goursat problemine [102], Klein-Gordon denklemine [116], $K(p,q)$ denkleminin şok-kompakton çözümlerinin bulunmasında [103], genelleştirilmiş Burgers-Huxley denklemine [104], varyasyonların hesaplanması problemlerine [105], genelleştirilmiş Zakharov denklemine [106], Jaulent-Miodek denklemine [107], karakteristik ve nonkarakteristik cauchy-reaksiyon-difüzyon denklemine [117], iki noktalı sınır değer problemine [118], kubik nonlinear Schrödinger denklemine [119], lineer olmayan birleştirilmiş KdV denklemine [120], Lotka-Volterra sistemine [121], dördüncü mertebeden integro diferansiyel denklemlerine [122] başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Ayrıca VIM ve diğer yarı-analitik yöntemlerin karşılaştırmasını çeşitli problemlerde göz önüne alan makalelerde yapılmıştır. Hetmaniok ve diğerleri [123] hareket eden sınır değer problemleri için ADM ve VIM arasında bir karşılaştırma yapmışlardır. Elsayed [124] termal difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için VIM ve HPM arasında bir karşılaştırma sunmuştur. Bildik ve diğerleri [125] Legendre polinom yaklaşımı ve VIM arasındaki bir karşılaştırmayı lineer Fredholm integral denklemi için yapmışlardır. Ganji ve diğerleri [126] lineer olmayan Jeffery-Hamel problemi için He'nin yarı-analitik yöntemleri arasında bir irdeleme sunmuşlardır.

Varyasyonel iterasyon metodu, tam çözüme hızlı bir şekilde yaklaşarak lineer olmayan problemlerin büyük bir sınıfı için etkili, kolay ve tam sonuç veren bir yöntemdir. Bu metoda, kısmi türevli lineer ve lineer olmayan denklemleri çözmek için başvurulabilir. Adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin bu yöntemle çözülmesi; varyasyonel teorisinde tanımlanmış Lagranç çarpanı adındaki bir integral çarpanının kullanılmasıyla oluşturulmuş bir indirgeme formülünden elde edilir. Bu indirgeme formülünü içeren ilave fonksiyon genellikle analitik çözümle yakın olan diferansiyel denklemin çözümünü göz önünde bulundurur. Son yıllarda bu metod lineer olmayan diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için pek çok yazar tarafından kullanılmıştır [95]-[101].

Bu yöntemin temel adımlarını göstermek için

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t) \quad (5.1)$$

genel lineer olmayan diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Burada L bir lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(t)$ ise bilinen sürekli bir fonksiyon olsun. Varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) Lagranç çarpanı metodunun bir genişlemesidir [127].

(5.1) denklemi için düzeltme fonksiyonu

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds, \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ Lagranç çarpanı, u_n ise n . yaklaşık çözümü ve $\tilde{u}_n$ sınırlandırılmış varyasyon olup $\delta \tilde{u}_n(s) = 0$ dır. Lagranç çarpanının

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds = 0, \quad (5.3)$$

denklemini sağlaması gerekir. Lineer olmayan diferansiyel denklemler için Lagranç çarpanı elde ederken sınırlayıcı varyasyon kullanılır. Sınırlayıcı varyasyonun kullanılması daha hassas Lagranç çarpanının bulunmasına ve dolayısıyla hızlı yakınsayan yaklaşık çözümlerin bulunmasına neden olur. Sonuç olarak yaklaşık çözüm

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t), \quad (5.4)$$

bağıntısı yardımıyla elde edilir. Varyansların hesabı, Lagranç çarpanı ve sınırlayıcı varyasyon için [95, 128] nolu referanslara bakılabilir.

Lagranç çarpanının nasıl bulunduğunu

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \gamma u^2 = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad (5.5)$$

şeklindeki Duffing denklemi üzerinde göstermeye çalışalım. Burada

$$L = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad R = u, \quad N = \gamma u^2, \quad f = 0, \quad (5.6)$$

alınarak (5.5) denklemi operatör formunda yazılabilir. (5.5) denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyonu

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left[\frac{d^2u_n(s)}{ds^2} + u_n(s) + \gamma \tilde{u}_n^2(s) \right] ds, \quad (5.7)$$

biçiminde yazılabilir. (5.7) düzeltme fonksiyonunu kararlı yapmak için δ varyasyon operatörlü uygulanırsa

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left[\frac{d^2u_n(s)}{ds^2} + u_n(s) + \gamma \tilde{u}_n^2(s) \right] ds, \quad (5.8)$$

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left[\frac{d^2u_n(s)}{ds^2} + u_n(s) \right] ds, \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.9) denkleme kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \lambda(s) \delta u'_n(s) \big|_{s=t} - \lambda'(s) \delta u_n(s) \big|_{s=t} + \int_0^t (\lambda''(s) + \lambda(s)) \delta u_n(s) ds = 0, \quad (5.10)$$

bulunur. Buradan Euler-Lagranç denklemi

$$\lambda''(s) + \lambda(s) = 0, \quad (5.11)$$

ve başlangıç koşulları

$$\lambda(s) \big|_{s=t} = 0, \quad 1 - \lambda'(s) \big|_{s=t} = 0. \quad (5.12)$$

formunda bulunur. (5.11) ve (5.12) denklemi çözülürse verilen (5.5) Duffing denklemi için Lagranç çarpanı

$$\lambda(s) = \sin(s - t), \quad (5.13)$$

olur. (5.13) Lagranç çarpanı (5.7) denkleminde yerine yazılırsa yaklaşık çözümü hesaplayacağımız iterasyon formülü

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \sin(s-t) \left[\frac{d^2 u_n(s)}{ds^2} + u_n(s) + \gamma u_n^2(s) \right] ds, \quad (5.14)$$

olur.

Teorem 5.1.

$$A[u] = \int_0^t \lambda \{ L u_n(s) + N \hat{u}_n(s) - g(s) \} ds, \quad (5.15)$$

şeklinde tanımlanan bir integral operatörü olsun ve z_k , $k = 0, 1, \dots$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} z_0 &= u_0, \\ z_1 &= A[u_0 + u_1], \\ z_2 &= A[u_0 + u_1 + u_2], \\ &\vdots \\ z_k &= A[u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_{k-1}], \end{aligned} \quad (5.16)$$

formunda tanımlansın. Sonuçta analitik çözüm

$$u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k, \quad (5.17)$$

bağıntısı yardımıyla bulunur. (5.16) ile tanımlanan A operatörü H Hilbert uzayından H Hilbert uzayına tanımlanan bir operatör olmak üzere (5.17) ile tanımlanan çözüm serisi $0 < \alpha < 1$ için

$$\|A[u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_k]\| \leq \|A[u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_{k-1}]\|, \quad (5.18)$$

yakınsaktır [129].

Teorem 5.2.

Kabul edelimki $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ serisi $u(t)$ çözümüne yakınsasın. Eğer $\sum_{k=0}^j z_k$ kesme serisi (5.1) probleminin çözümü olarak kullanılırsa, bu takdirde maksimum hata

$$E_j(t) \leq \frac{1}{1-\alpha} \alpha^j \|z_0\|, \quad (5.19)$$

ifadesi yardımıyla hesaplanır [129].

5.2. GENİŞLETİLMİŞ VARYASYONEL İTERASYON METODU (GVIM)

Bu metod Varyasyonel İterasyon Metodunun düzeltme fonksiyonunun değiştirilmesi ile elde edilir. Bu metotta, çözüm serisinin yakınsaklığını kontrol altına almak için $h \neq 0$ şeklindeki yardımcı bir parametre ile Adomian ayrışım yönteminde lineer olmayan terimlerde ortaya çıkan Adomian polinomlarını kullanacağız. Bu şekildeki parametre ilk olarak 1992 yılında Liao tarafından, topolojinin temel kavramlarından biri olan Homotopi yardımıyla Homotopi Analiz Metodu olarak isimlendirdiği genel bir analitik yöntem için kullanılmıştır [108]. Şimdi (5.2) düzeltme fonksiyonunda h yardımcı parametresini ve (4.9) ile tanımlanan Adomian polinomlarını yerine yazarsak (5.2) denklemi

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + h \int_0^t \lambda \{Lu_n(s) + A_n(s) - g(s)\} ds, \quad n \geq 0, \quad (5.20)$$

formuna dönüştür, burada $N\tilde{u}_n(s) = A_n(s)$ dir.

6. BÖLÜM

6. GADM VE GVIM METODLARININ HİROTA SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde analizleri yapılan GADM ve GVIM kullanılarak, başlangıç şartlı HS birleştirilmiş KdV denkleminin seri çözümleri elde edilecek ve literatürde var olan bazı sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

6.1. HS BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNE GADM'NİN UYGULANMASI

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \frac{\beta - 2\alpha^2}{3} + 2\alpha^2 \tanh^2(\alpha x), \\v(x, 0) &= -\frac{4\alpha^2 c_0 (\beta + \alpha^2)}{3c_1^2} + \frac{4\alpha^2 (\beta + \alpha^2)}{3c_1} \tanh(\alpha x), \\w(x, 0) &= c_0 + c_1 \tanh(\alpha x),\end{aligned}\tag{6.1}$$

başlangıç şartları ile verilmiş olan

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} - 3uu_x + 3(vw)_x, \\v_t &= -v_{xxx} + 3uv_x, \\w_t &= -w_{xxx} + 3ww_x\end{aligned}\tag{6.2}$$

HS birleştirilmiş KdV denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü ise

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{\beta - 2\alpha^2}{3} + 2\alpha^2 \tanh^2(\alpha x + \alpha\beta t), \\v(x, t) &= -\frac{4\alpha^2 c_0 (\beta + \alpha^2)}{3c_1^2} + \frac{4\alpha^2 (\beta + \alpha^2)}{3c_1} \tanh(\alpha x + \alpha\beta t), \\w(x, t) &= c_0 + c_1 \tanh(\alpha x + \alpha\beta t),\end{aligned}\tag{6.3}$$

şeklindedir [88]. (6.2) denklemini operatör formunda yazarsak

$$\begin{aligned}
L_t u &= \frac{1}{2} L_{3x} u - 3N_1(u) + 3N_2(u), \\
L_t v &= -L_{3x} v + 3N_3(u), \\
L_t w &= -L_{3x} w + 3N_4(u),
\end{aligned} \tag{6.4}$$

elde edilir. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_{3x} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$, $N_1(u) = uu_x$, $N_2(u) = (vw)_x$, $N_3(u) = uv_x$, ve $N_4(u) = uw_x$ olacak şekilde lineer olmayan terimleri ifade etmektedir. L_t türev operatörü tersi alınabilen bir operatör olduğundan $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ şeklinde tanımlanarak (6.4) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned}
L_t^{-1}(L_t u) &= \frac{1}{2} L_t^{-1}(L_{3x} u) - 3L_t^{-1}(N_1(u)) + 3L_t^{-1}(N_2(u)), \\
L_t^{-1}(L_t v) &= L_t^{-1}(-L_{3x} v) + 3L_t^{-1}(N_3(u)), \\
L_t^{-1}(L_t w) &= L_t^{-1}(-L_{3x} w) + 3L_t^{-1}(N_4(u)),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
u(x, t) - u(x, 0) &= \frac{1}{2} L_t^{-1}(L_{3x} u) - 3L_t^{-1}(N_1(u)) + 3L_t^{-1}(N_2(u)), \\
v(x, t) - v(x, 0) &= L_t^{-1}(-L_{3x} v) + 3L_t^{-1}(N_3(u)), \\
w(x, t) - w(x, 0) &= L_t^{-1}(-L_{3x} w) + 3L_t^{-1}(N_4(u)),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

olur. (6.6) denklemindeki lineer olmayan terimler yerine HAM'da kullanılan

$$\begin{aligned}
N_1(u) &= \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t) \frac{\partial u_{m-1-i}(x, t)}{\partial x}, \\
N_2(u) &= \sum_{i=0}^{m-1} v_i(x, t) \frac{\partial w_{m-1-i}(x, t)}{\partial x} + w_i(x, t) \frac{\partial v_{m-1-i}(x, t)}{\partial x}, \\
N_3(u) &= \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t) \frac{\partial v_{m-1-i}(x, t)}{\partial x}, \\
N_4(u) &= \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t) \frac{\partial w_{m-1-i}(x, t)}{\partial x},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

serilerini ve $h \neq 0$ yakınsaklık kontrol parametresini kullanırsak

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(x, 0), \\
u_{n+1} &= h \left\{ \frac{1}{2} L_t^{-1}(L_{3x} u_n) - 3L_t^{-1}(N_1(u_n)) + 3L_t^{-1}(N_2(u_n)) \right\}, \\
v_0 &= v(x, 0), \\
v_{n+1} &= h \left\{ L_t^{-1}(-L_{3x} v_n) + 3L_t^{-1}(N_3(u_n)) \right\}, \quad n \geq 0 \\
w_0 &= w(x, 0), \\
w_{n+1} &= h \left\{ L_t^{-1}(-L_{3x} w_n) + 3L_t^{-1}(N_4(u_n)) \right\},
\end{aligned} \tag{6.8}$$

şeklindeki indirgeme bağıntıları bulunur. Buradan (6.1) ile verilen başlangıç şartları ve (6.8) indirgeme bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \frac{\beta - 2\alpha^2}{3} + 2\alpha^2 \tanh^2(\alpha x), \\
v_0(x, t) &= -\frac{4\alpha^2(\beta + \alpha^2)}{3c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} - \tanh(\alpha x) \right), \\
w_0(x, t) &= c_0 + c_1 \tanh(\alpha x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= -\frac{2}{3c_1^2} h t \alpha^3 \sec h^4(\alpha x) \left(\begin{array}{c} -8\alpha^3(\alpha^2 + \beta)^2 c_0^2 + c_1^2 \tanh(\alpha x) \\ 3(2\alpha^2 + \beta) \\ +3(2\alpha^2 + \beta) \cosh(2\alpha x) \\ +8\alpha^3(\alpha^2 + \beta)^2 \tanh(\alpha x) \end{array} \right), \\
v_1(x, t) &= -\frac{2}{3c_1} h t \alpha^3 (\alpha^2 + \beta) \left(\begin{array}{c} -16\alpha^2 + \beta + (8\alpha^2 + \beta) \\ \cosh(2\alpha x) \end{array} \right) \sec h(\alpha x)^4, \\
w_1(x, t) &= -\frac{1}{2} h t \alpha (-16\alpha^2 + \beta + (8\alpha^2 + \beta) \cosh(2\alpha x)) \sec h(\alpha x)^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= \frac{1}{48c_1^2} h^2 t^2 \alpha^4 \sec h(\alpha x)^9 \left(\begin{aligned} &-256\alpha^3 (\alpha^2 + \beta)^2 \cosh(\alpha x)^2 \left(\begin{aligned} &-8\alpha^2 - \beta + (4\alpha^2 - \beta) \\ &\cosh(2\alpha x) \end{aligned} \right) \\ &\sinh(\alpha x) c_0^2 + \\ &\left(\begin{aligned} &-15(92\alpha^4 + 82\alpha^2\beta - 15\beta^2) \cosh(\alpha x) \\ &+ 27(20\alpha^4 + 22\alpha^2\beta + 3\beta^2) \\ &\cosh(3\alpha x) + 516\alpha^4 \cosh(5\alpha x) \\ &+ 510\alpha^2\beta \cosh(5\alpha x) - 9\beta^2 \cosh(5\alpha x) - 60\alpha^4 \\ &\cosh(7\alpha x) - 66\alpha^2\beta \cosh(7\alpha x) - 9\beta^2 \cosh(7\alpha x) \\ &+ 12160\alpha^9 \sinh(\alpha x) + 24448\alpha^7\beta \sinh(\alpha x) \\ &+ 12416\alpha^5\beta^2 \sinh(\alpha x) + 128\alpha^3\beta^3 \sinh(\alpha x) \\ &- 3072\alpha^9 \sinh(3\alpha x) - 6048\alpha^7\beta \sinh(3\alpha x) \\ &- 2880\alpha^5\beta^2 \sinh(3\alpha x) - 96\alpha^3\beta^3 \sinh(3\alpha x) \\ &+ 128\alpha^9 \sinh(5\alpha x) + 224\alpha^7\beta \sinh(5\alpha x) \\ &+ 64\alpha^5\beta^2 \sinh(5\alpha x) - 32\alpha^3\beta^3 \sinh(5\alpha x) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) c_1^2, \\
v_2(x, t) &= -\frac{1}{12c_1^3} h^2 t^2 \alpha^4 (\alpha^2 + \beta) \sec h(\alpha x)^6 \left(\begin{aligned} &128\alpha^5 (\alpha^2 + \beta)^2 c_0^2 + \sec h(\alpha x) \\ &\left(\begin{aligned} &2(3416\alpha^4 - 208\alpha^2\beta + 5\beta^2) \cosh(\alpha x) \\ &+ (-2224\alpha^4 - 112\alpha^2\beta + 5\beta^2) \cosh(3\alpha x) \\ &+ 64\alpha^4 \cosh(5\alpha x) + 16\alpha^2\beta \cosh(5\alpha x) \\ &\beta^2 \cosh(5\alpha x) - 128\alpha \sinh(\alpha x) \\ &- 256\alpha^7\beta \sinh(\alpha x) - 128\alpha^5\beta^2 \sinh(\alpha x) \end{aligned} \right) \\ &c_1^2 \tanh(\alpha x) \end{aligned} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2(x, t) &= -\frac{1}{16c_1} h^2 t^2 \alpha^2 \sec h(\alpha x)^6 \left(\begin{aligned} &128\alpha^5 (\alpha^2 + \beta)^2 c_0^2 + \sec h(\alpha x) \\ &\left(\begin{aligned} &2(3416\alpha^4 - 208\alpha^2\beta + 5\beta^2) \cosh(\alpha x) \\ &+ (-2224\alpha^4 - 112\alpha^2\beta + 5\beta^2) \cosh(3\alpha x) \\ &+ 64\alpha^4 \cosh(5\alpha x) + 16\alpha^2\beta \cosh(5\alpha x) \\ &\beta^2 \cosh(5\alpha x) - 128\alpha \sinh(\alpha x) \\ &- 256\alpha^7 \beta \sinh(\alpha x) - 128\alpha^5 \beta^2 \sinh(\alpha x) \end{aligned} \right) \\ &c_1^2 \tanh(\alpha x) \end{aligned} \right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

terimleri bulunur. Bulunan bu terimleri

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \\
v(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t), \\
w(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t),
\end{aligned}$$

denklemlerinde yerine yazarsak ilk üç terim için

$$\begin{aligned}
\phi_4(x, t) &= \sum_{n=0}^3 u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \\
\phi_4(x, t) &= \frac{\beta - 2\alpha^2}{3} + 2\alpha^2 \tanh^2(\alpha x) - \frac{2}{3c_1^2} h t \alpha^3 \sec h^4(\alpha x) \\
&\left(\begin{aligned} &-8\alpha^3 (\alpha^2 + \beta)^2 c_0^2 + c_1^2 \tanh(\alpha x) \left(\begin{aligned} &3(2\alpha^2 + \beta) \\ &+ 3(2\alpha^2 + \beta) \cosh(2\alpha x) \\ &+ 8\alpha^3 (\alpha^2 + \beta)^2 \tanh(\alpha x) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\
&+ \frac{1}{48c_1^2} h^2 t^2 \alpha^4 \left(\begin{aligned} &\sec h(\alpha x)^9 - 256\alpha^3 (\alpha^2 + \beta)^2 \\ &\cosh(\alpha x)^2 \\ &\left(\begin{aligned} &-8\alpha^2 - \beta + (4\alpha^2 - \beta) \\ &\cosh(2\alpha x) \end{aligned} \right) \sinh(\alpha x) c_0^2 + \dots \end{aligned} \right),
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
\psi_4(x, t) &= \sum_{n=0}^3 v_n(x, t) = v_0(x, t) + v_1(x, t) + v_2(x, t) + v_3(x, t), \\
\psi_4(x, t) &= -\frac{4\alpha^2(\beta + \alpha^2)}{3c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} - \tanh(\alpha x) \right) - \frac{2}{3c_1} h t \alpha^3 (\alpha^2 + \beta) \\
&\quad (-16\alpha^2 + \beta + (8\alpha^2 + \beta) \cosh(2\alpha x)) \sec h(\alpha x)^4 \\
&\quad - \frac{1}{12c_1^3} h^2 t^2 \alpha^4 (\alpha^2 + \beta) \sec h(\alpha x)^6 \\
&\quad \left(128\alpha^5 (\alpha^2 + \beta)^2 c_0^2 + \sec h(\alpha x) + \dots \right),
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_4(x, t) &= \sum_{n=0}^3 w_n(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + w_3(x, t), \\
\Omega_4(x, t) &= c_0 + c_1 \tanh(\alpha x) - \frac{1}{2} h t \alpha \left(\frac{-16\alpha^2 + \beta + (8\alpha^2 + \beta)}{\cosh(2\alpha x)} \right) \\
&\quad \sec h(\alpha x)^4 - \frac{1}{16c_1} h^2 t^2 \alpha^2 \sec h(\alpha x)^6 \\
&\quad \left(128\alpha^5 (\alpha^2 + \beta)^2 c_0^2 + \sec h(\alpha x) + \dots \right),
\end{aligned} \tag{6.11}$$

şeklindeki yaklaşık çözümler elde edilir.

6.2. HS BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNE GVIM'NUN UYGULANMASI

(6.1) ve (6.2) ile verilen problemi tekrar gözöntüne alalım. (6.2) denklemleri için düzeltme fonksiyonları Genişletilmiş Varyasyonel İterasyon yöntemiyle

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x, t) &= u_n(x, t) + h \int_0^t \lambda_1 \left\{ \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_n(x, s)}{\partial x^3} + 3\widetilde{u_n}(x, s) \frac{\partial \widetilde{u_n}(x, s)}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. - 3 \frac{\partial [\widetilde{v_n}(x, s) \widetilde{w_n}(x, s)]}{\partial x} \right\} ds,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) + h \int_0^t \lambda_2 \left\{ \frac{\partial v_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial^3 v_n(x, s)}{\partial x^3} - 3\widetilde{u_n}(x, s) \frac{\partial \widetilde{v_n}(x, s)}{\partial x} \right\} ds, \tag{6.13}$$

$$w_{n+1}(x, t) = w_n(x, t) + h \int_0^t \lambda_3 \left\{ \frac{\partial w_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial^3 w_n(x, s)}{\partial x^3} - 3\widetilde{u_n}(x, s) \frac{\partial \widetilde{w_n}(x, s)}{\partial x} \right\} ds, \tag{6.14}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, Lagranç çarpanı olup $\widetilde{u_n(u_n)_x}, \widetilde{(v_n w_n)_x}, \widetilde{u_n(v_n)_x}$ ve $\widetilde{u_n(w_n)_x}$ terimleri sınırlayıcı varyasyonlardır. δ varyasyonel operatör olmak üzere

$$\widetilde{\delta u_n(u_n)_x} = \widetilde{\delta(v_n w_n)_x} = \widetilde{\delta u_n(v_n)_x} = \widetilde{\delta u_n(w_n)_x} = 0, \quad (6.15)$$

olarak tanımlanır. Böylece Lagranç çarpanları

$$\frac{d\lambda_i}{d\eta} = 0, \quad 1 + \lambda_i|_{\eta=t} = 0, \quad (6.16)$$

denklemlerinden

$$\lambda_i(\eta) = -1, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.17)$$

olarak bulunur. Böylece (6.2) denklemi için indirgeme bağıntısı

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - h \int_0^t \left\{ \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_n(x, s)}{\partial x^3} + 3A_n - 3B_n \right\} ds, \quad (6.18)$$

$$v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) - h \int_0^t \left\{ \frac{\partial v_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial^3 v_n(x, s)}{\partial x^3} - 3C_n \right\} ds, \quad (6.19)$$

$$w_{n+1}(x, t) = w_n(x, t) - h \int_0^t \left\{ \frac{\partial w_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial^3 w_n(x, s)}{\partial x^3} - 3D_n \right\} ds, \quad (6.20)$$

olur. Burada A_n, B_n, C_n ve D_n Adomian polinomları olup, bazı terimlerini (4.9) genel formülünden

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 u_{0_x}, \\ A_1 &= u_0 u_{1_x} + u_1 u_{0_x}, \\ A_2 &= u_0 u_{2_x} + u_1 u_{1_x} + u_2 u_{0_x}, \\ A_3 &= u_0 u_{3_x} + u_1 u_{2_x} + u_2 u_{1_x} + u_3 u_{0_x}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= v_{0_x} w_0 + v_0 w_{0_x}, \\ B_1 &= v_{0_x} w_1 + v_{1_x} w_0, \\ B_2 &= v_{0_x} w_2 + v_{1_x} w_1 + v_{2_x} w_0 + v_0 w_{2_x} + v_1 w_{1_x} + v_2 w_{0_x}, \\ B_3 &= v_{0_x} w_3 + v_{1_x} w_2 + v_{2_x} w_1 + v_{3_x} w_0 + v_0 w_{3_x} + v_1 w_{2_x} + v_2 w_{1_x} + v_3 w_{0_x}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= u_0 v_{0_x}, \\
C_1 &= u_0 v_{1_x} + u_1 v_{0_x}, \\
C_2 &= u_0 v_{2_x} + u_1 v_{1_x} + u_2 v_{0_x}, \\
C_3 &= u_0 v_{3_x} + u_1 v_{2_x} + u_2 v_{1_x} + u_3 v_{0_x}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}
D_0 &= u_0 w_{0_x}, \\
D_1 &= u_0 w_{1_x} + u_1 w_{0_x}, \\
D_2 &= u_0 w_{2_x} + u_1 w_{1_x} + u_2 w_{0_x}, \\
D_3 &= u_0 w_{3_x} + u_1 w_{2_x} + u_2 w_{1_x} + u_3 w_{0_x}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.24}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (6.18) - (6.20) indirgeme formüllerini ve (6.21) - (6.24) Adomian polinomlarını kullanırsak GVIM ile

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \frac{\beta - 2\alpha^2}{3} + 2\alpha^2 \tanh^2(\alpha x), \\
v_0(x, t) &= -\frac{4\alpha^2(\beta + \alpha^2)}{3c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} - \tanh(\alpha x) \right), \\
w_0(x, t) &= c_0 + c_1 \tanh(\alpha x), \\
u_1(x, t) &= \frac{1}{12} \sec h(\alpha x)^3 \begin{pmatrix} 3(-4\alpha^2 + \beta) \cosh(\alpha x) \\ + (4\alpha^2 + \beta) \cosh(3\alpha x) \\ + 48ht\alpha^3 \beta \sinh(\alpha x) \end{pmatrix}, \\
v_1(x, t) &= \frac{2}{3c_1^2} \alpha^2 (\alpha^2 + \beta) \sec h(\alpha x)^2 \begin{pmatrix} -2 \cosh(\alpha x)^2 c_0 \\ + (2ht\alpha\beta + \sinh(2\alpha x)) c_1 \end{pmatrix}, \\
w_1(x, t) &= c_0 + c_1 \left(ht\alpha\beta \sec h(\alpha x)^2 + \tanh(\alpha x) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= \frac{1}{48} \sec h(\alpha x)^5 \left(\begin{array}{c} 2(-16\alpha^2 + 5\beta + 144h^2t^2\alpha^4\beta^2) \cosh(\alpha x) \\ + (-4\alpha^2 + 5\beta - 96h^2t^2\alpha^4\beta^2) \\ \cosh(3\alpha x) + 4\alpha^2 \cosh(5\alpha x) + \beta \cosh(5\alpha x) \\ + 1056hta^5 \sinh(\alpha x) + 144ta^3\beta \sinh(\alpha x) \\ - 96hta^5 \sinh(3\alpha x) + 144hta^3\beta \sinh(3\alpha x) \end{array} \right), \\
v_2(x, t) &= \frac{1}{6c_1^2} \alpha^2 (\alpha^2 + \beta) \sec h(\alpha x)^4 \left(\begin{array}{c} -8 \cosh(\alpha x)^4 c_0 \\ -32hta^3\beta \\ +12hta\beta + 4hta(4\alpha^2 + 3\beta) \cosh(2\alpha x) \\ +2 - 8h^2t^2\alpha^2\beta^2 \\ \sinh(2\alpha x) + \sinh(4\alpha x) c_1 \end{array} \right), \\
w_2(x, t) &= \frac{1}{8} \sec h(\alpha x)^4 \left(\begin{array}{c} 8 \cosh(\alpha x)^4 c_0 + \left(\begin{array}{c} -32hta^3\beta + 12hta\beta \\ +4hta(4\alpha^2 + 3\beta) \cosh(2\alpha x) \\ +2 - 8h^2t^2\alpha^2\beta^2 \end{array} \right) \\ \sinh(2\alpha x) + \sinh(4\alpha x) c_1 \end{array} \right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

terimleri bulunur.

7. BÖLÜM

7. GADM VE GVIM İLE ELDE EDİLEN SAYISAL SONUÇLARIN İRDELENMESİ

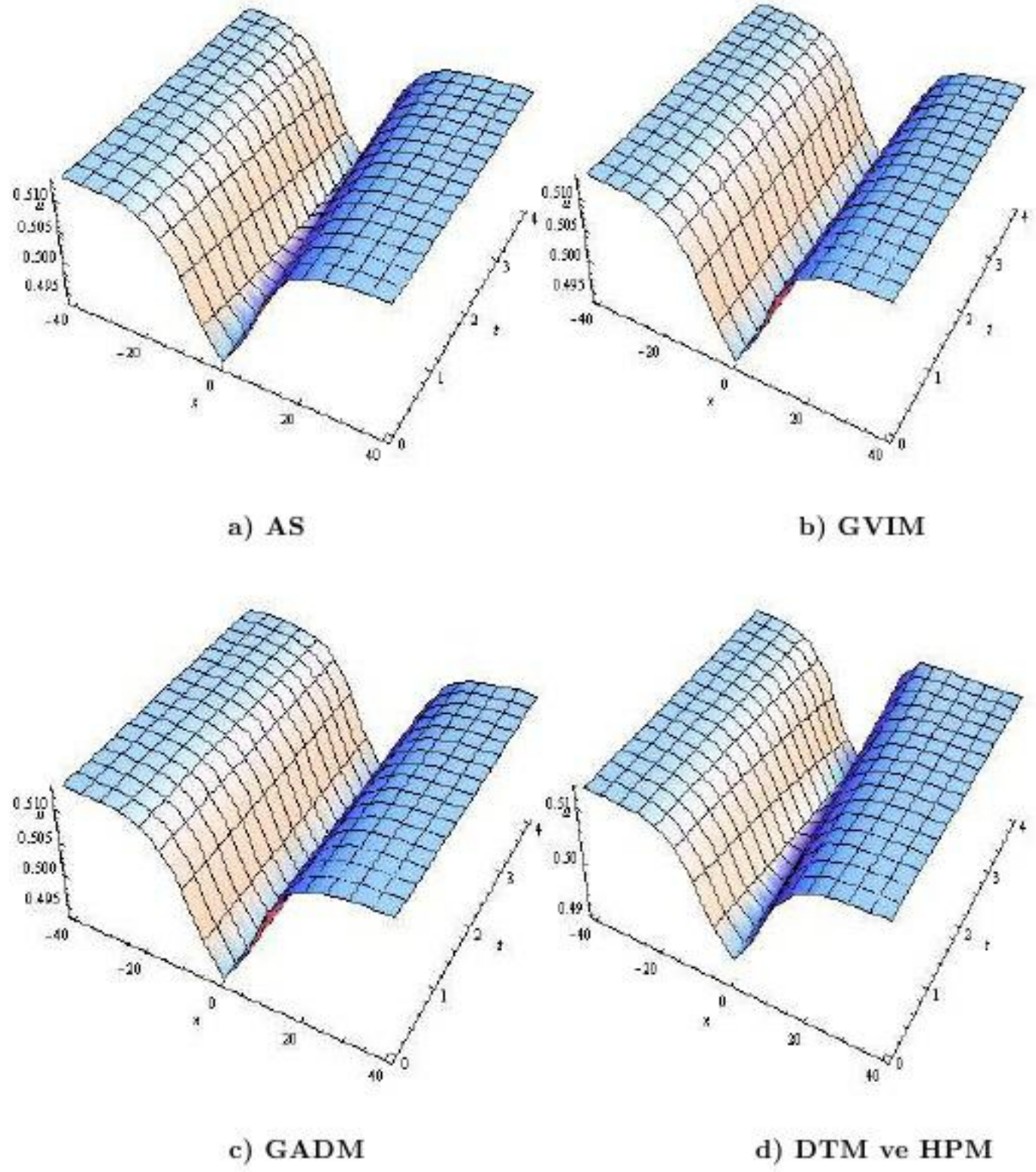
Bu bölümde, (6.2) HS birleştirilmiş KdV denkleminin (6.3) ile verilen $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ analitik çözümleri için GADM ve GVIM kullanılarak elde edilen sayısal sonuçların literatürde var olan DTM ve HPM ile karşılaştırmaları yapılacak, sonuçlar tablo ve grafiklerle ifade edilecektir. Ayrıca GADM ve GVIM ile elde edilen yaklaşık çözümlerin yakınsaklık aralığını belirlemede önemli rol oynayan $h \neq 0$ yakınsaklık kontrol parametresinin bağımsız değişkenler olan x ve t 'nin çeşitli değerleri için grafikleri çizilecek. Belirlenen bu yakınsaklık aralığı içerisindeki noktalarda h parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın h parametresinin hangi değerinde olduğu tespit edilecektir.

HS birleştirilmiş KdV denkleminin analitik çözümleri $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ olmak üzere GADM ve GVIM kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm serisi

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x, t), \\ \psi_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x, t), n \geq 1, \\ \Omega_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x, t), \end{array} \right. \quad (7.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

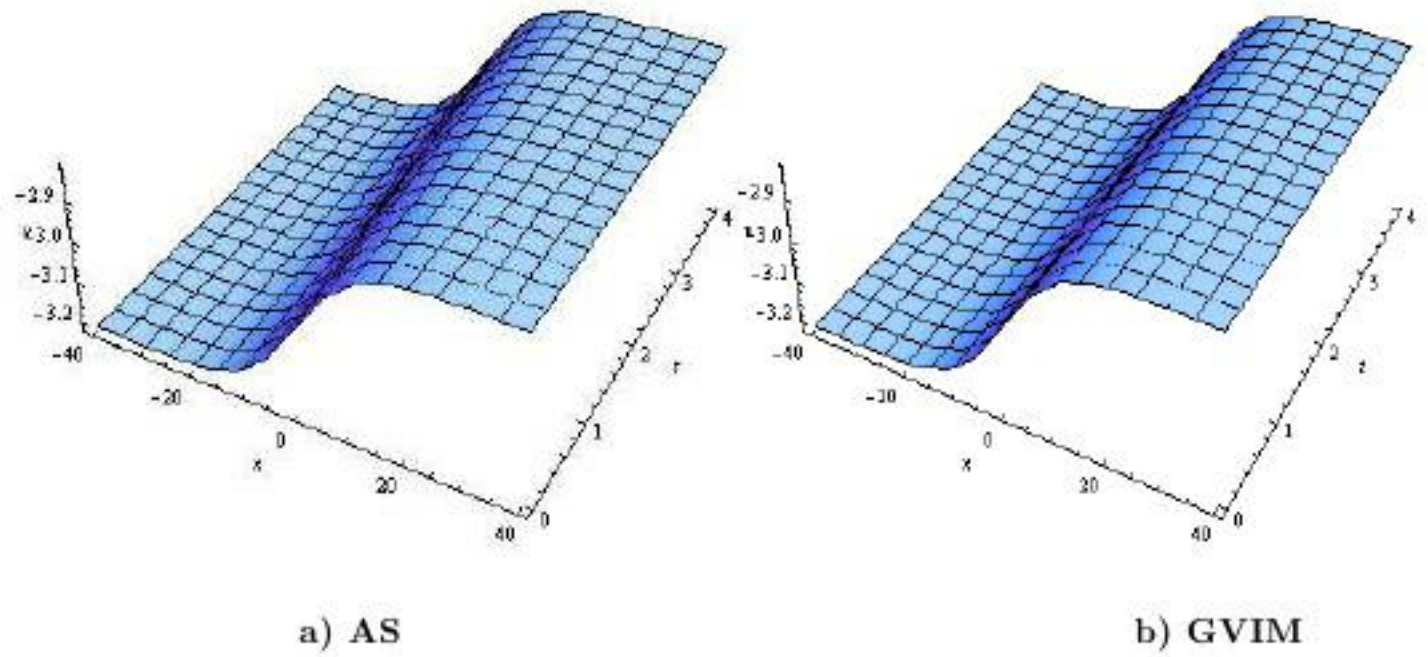
7.1. SAYISAL SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

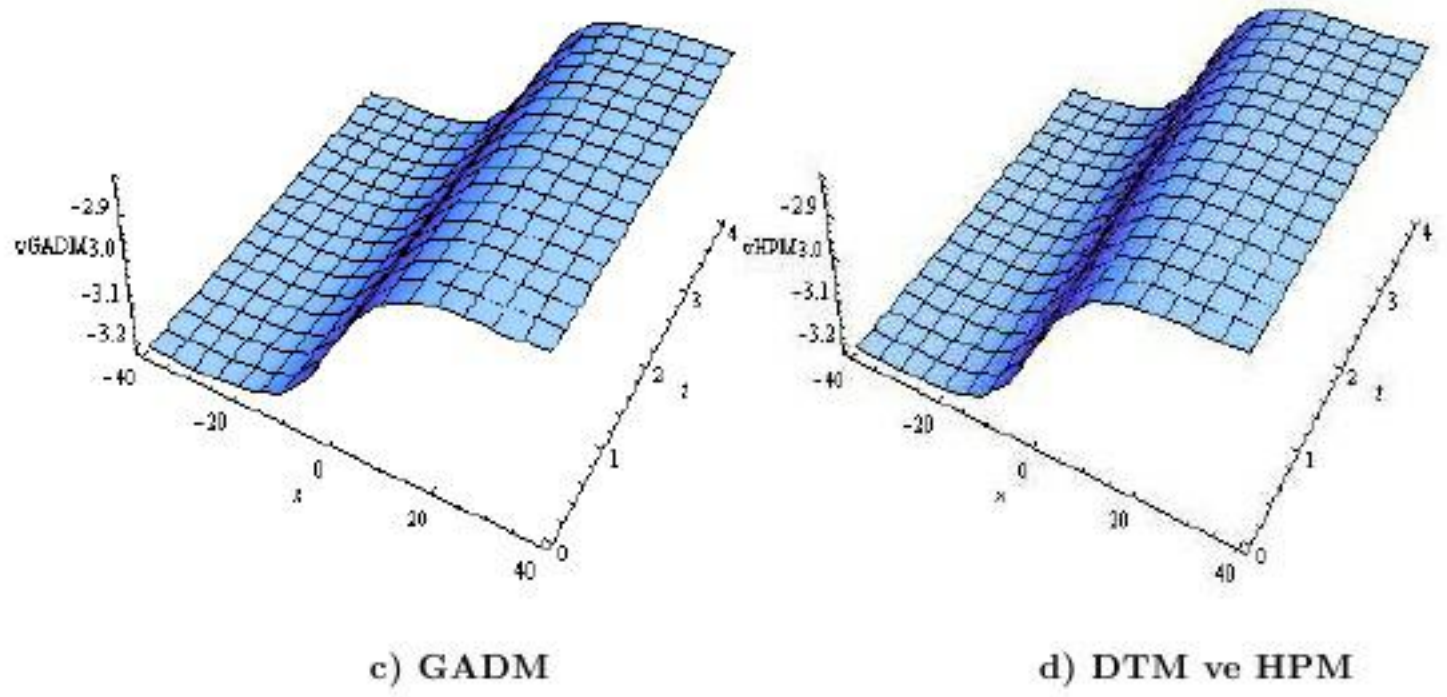


Şekil 7.1. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $u(x, t)$ nin analitik ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM $h = -0.286$	GVIM $h = 0.1$
0	0.160197	0.160197	0.0159664	0.0323914
10	0.32643	0.32643	0.0209219	0.0154344
20	0.119015	0.119015	0.000163073	0.0144796
30	0.0184432	0.0184432	0.000110088	0.000172296
40	0.00254226	0.00254226	0.0000176614	0.0000228431
50	0.000344914	0.000344914	2.441772×10^{-6}	3.08268×10^{-6}
60	0.0000466948	0.0000466948	3.31397×10^{-7}	4.17034×10^{-7}
70	6.31974×10^{-6}	6.31974×10^{-6}	4.4867×10^{-8}	5.64365×10^{-8}
80	8.55289×10^{-7}	8.55289×10^{-7}	6.07241×10^{-9}	7.6378×10^{-9}
90	1.15751×10^{-7}	1.15751×10^{-7}	8.21817×10^{-10}	1.03366×10^{-9}
100	1.56652×10^{-8}	1.56652×10^{-8}	1.11221×10^{-10}	1.39861×10^{-10}

Tablo 7.1. $0 \leq x \leq 100$, $t = 20$, $c_0 = \beta = 1.5$, $c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri iin elde edilen mutlak hatalar $(|u - \phi_4|)$.

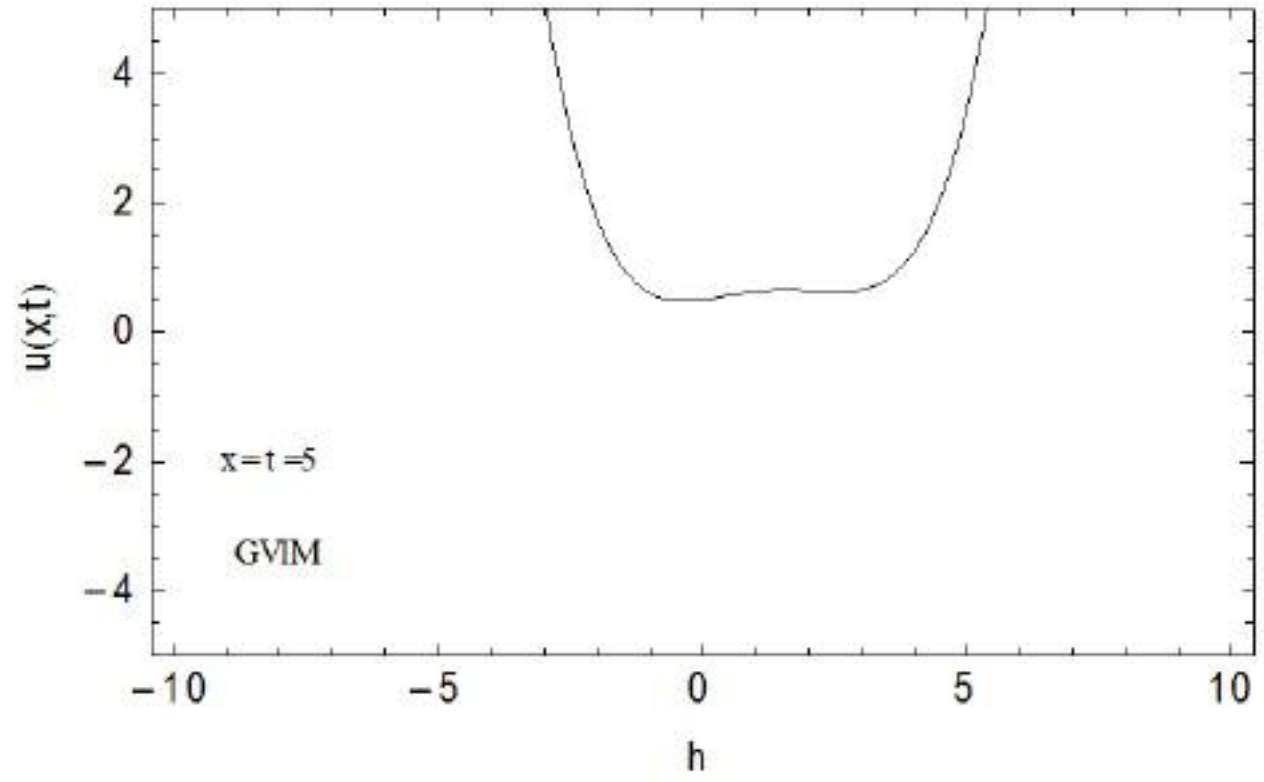
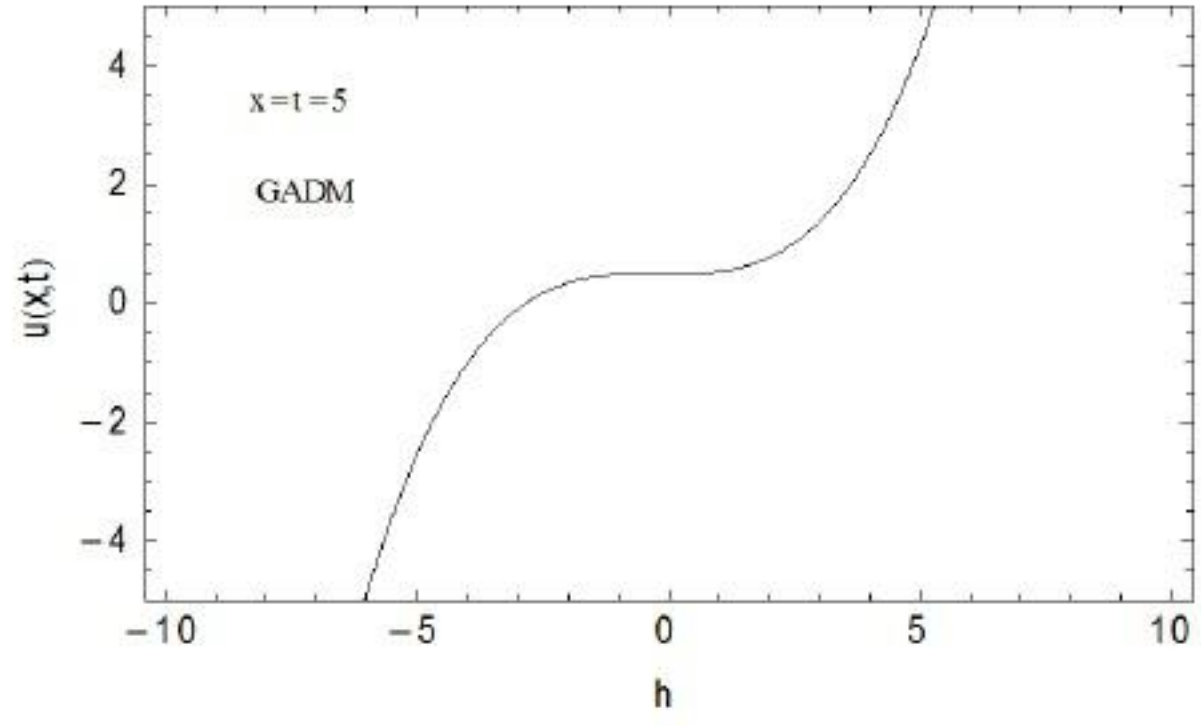




Şekil 7.2. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $v(x, t)$ nin analitik ve yaklaşık çözümleri

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM $h = -0.256$	GVIM $h = 0.1$
0	-4.228	-4.228	-2.89105	0.324651
10	-2.62938	-2.62938	-2.83121	0.0588127
20	-2.67775	-2.67775	-2.81908	0.00750515
30	-2.79627	-2.79627	-2.81866	0.00100224
40	-2.81557	-2.81557	-2.81866	0.000135378
50	-2.81825	-2.81825	-2.81867	3.0000183166
60	-2.81861	-2.81861	-2.81867	2.47879×10^{-6}
70	-2.81866	-2.81866	-2.81867	3.35466×10^{-7}
80	-2.81867	-2.81867	-2.81867	4.54004×10^{-8}
90	-2.81867	-2.81867	-2.81867	6.14427×10^{-9}
100	-2.81867	-2.81867	-2.81867	8.31537×10^{-10}

Tablo 7.2. $t = 20, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $|v - \psi_4|$

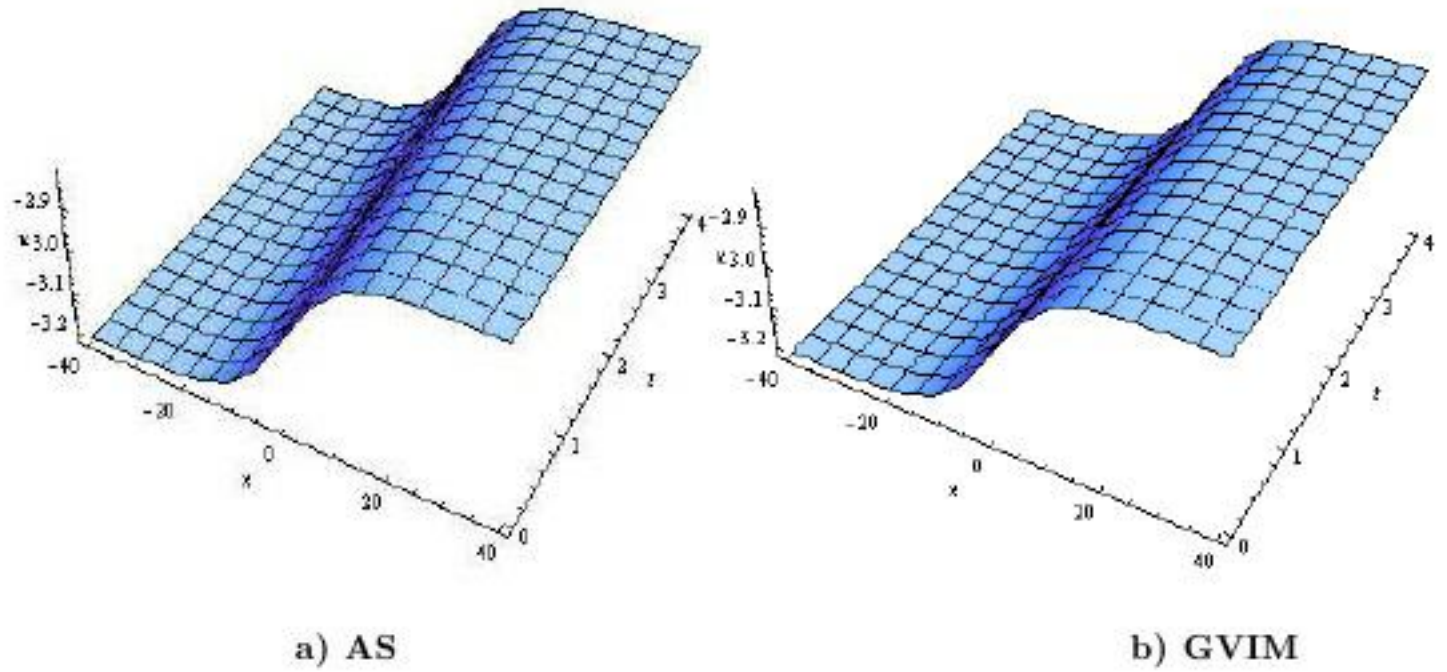


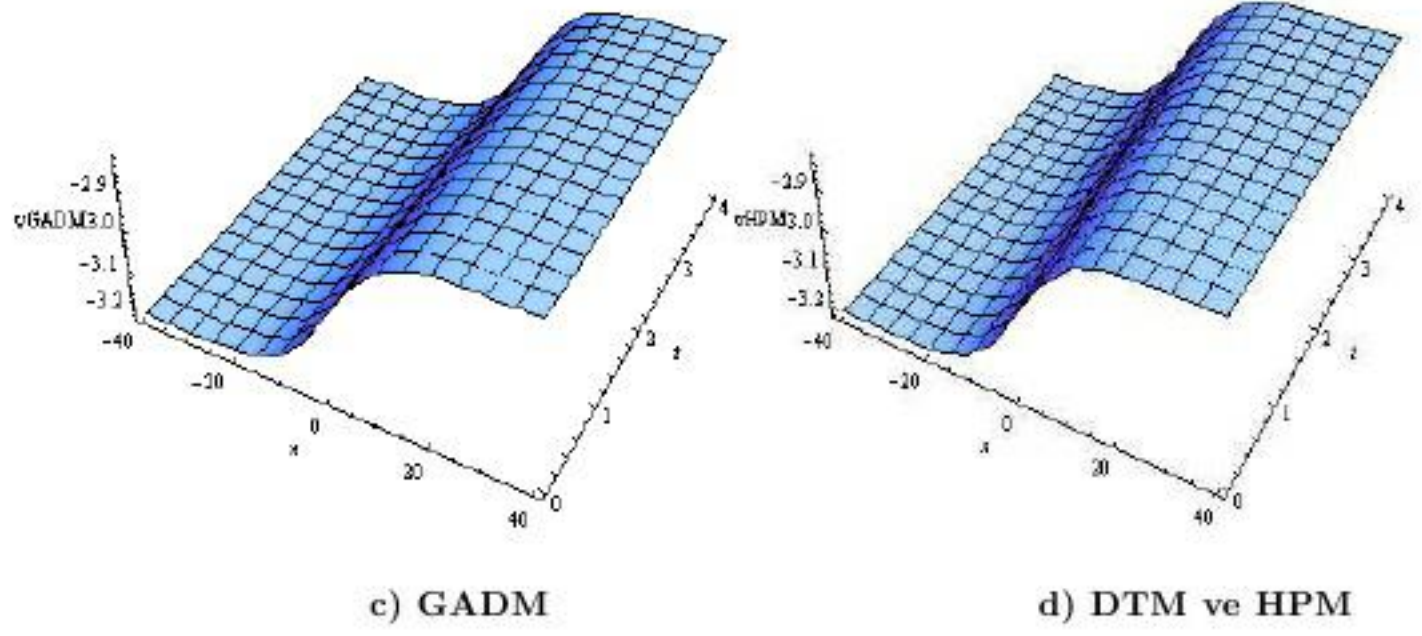
Şekil 7.3. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $u(x,t)$ nin GADM ve GVIM ile elde edilen

$\phi_4(x,t)$ için h eğrisi

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM $h = -0.1$	GVIM $h = 0.1$
0	1.40834	1.40834	0.258302	0.324651
10	0.189426	0.189426	0.0797491	0.0588127
20	0.140939	0.140939	0.0132823	0.00750515
30	0.0224025	0.0224025	0.00185789	0.00100224
40	0.00309689	0.00309689	0.00252593	0.000135378
50	0.000420321	0.000420321	0.0000342061	3.0000183166
60	0.0000569063	0.0000569063	4.62968×10^{-6}	2.47879×10^{-6}
70	7.70183×10^{-6}	7.70183×10^{-6}	6.26566×10^{-7}	3.35466×10^{-7}
80	1.04234×10^{-6}	1.04234×10^{-6}	8.47966×10^{-8}	4.54004×10^{-8}
90	1.41065×10^{-7}	1.41065×10^{-7}	1.1476×10^{-8}	6.14427×10^{-9}
100	1.90911×10^{-8}	1.90911×10^{-8}	1.5531×10^{-9}	8.31537×10^{-10}

Tablo 7.3. $0 \leq x \leq 100, t = 20, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(|w - \Omega_4|)$

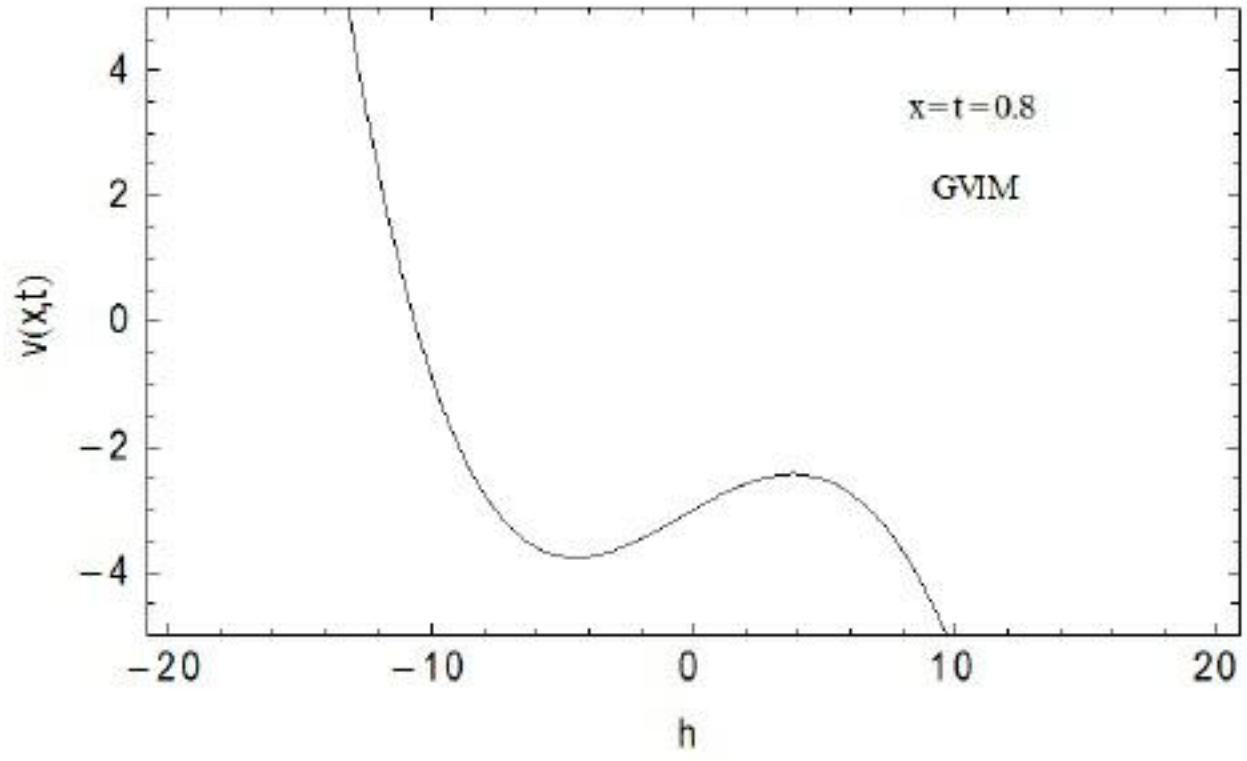
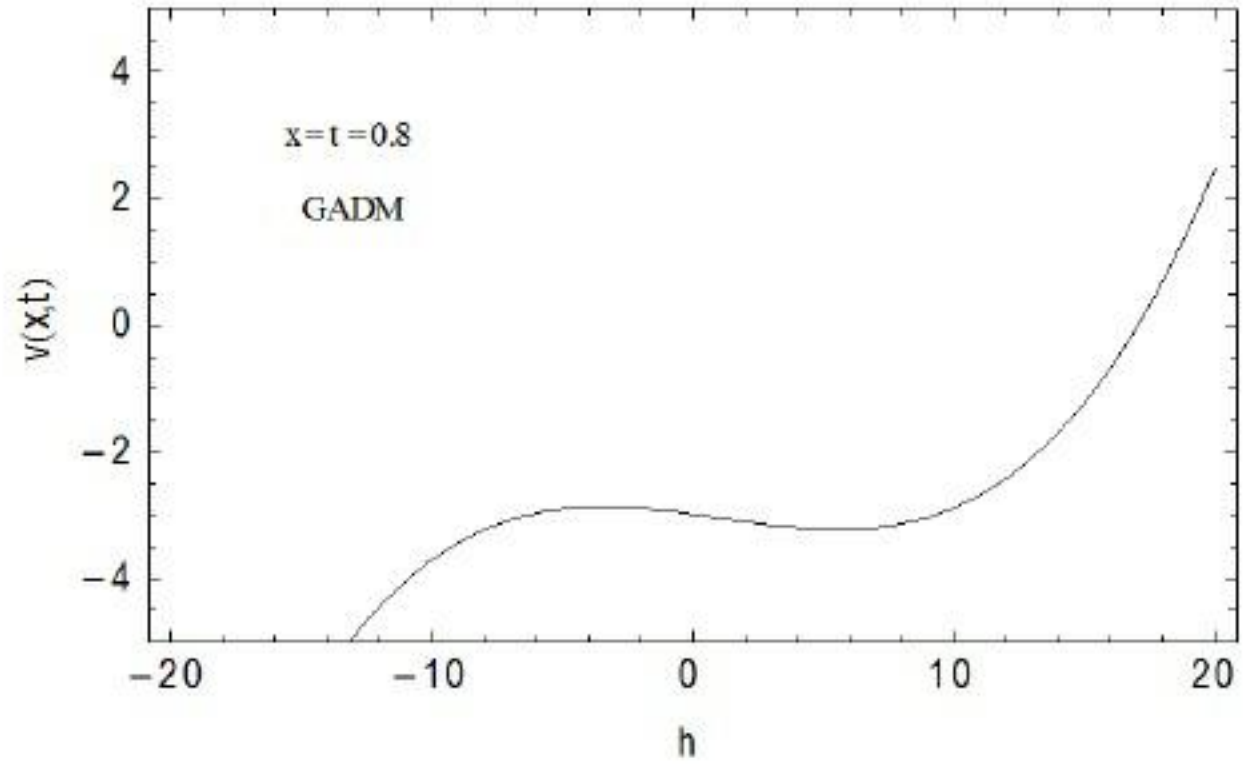




Şekil 7.4. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $w(x, t)$ nin analitik ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM	GVIM
0	0.026897	0.026897	2.16032×10^{-4}	0.00480931
0.1	0.0269955	0.0269955	1.65862×10^{-4}	0.00427565
0.2	0.0270644	0.0270644	1.21552×10^{-4}	0.00374807
0.3	0.0271057	0.0271057	8.33545×10^{-5}	0.00322698
0.4	0.027121	0.027121	5.15071×10^{-5}	0.00271278
0.5	0.0271125	0.0271125	2.62352×10^{-5}	0.00220585
0.6	0.027082	0.027082	7.74959×10^{-6}	0.00170657
0.7	0.0270314	0.0270314	3.75353×10^{-6}	0.00121527
0.8	0.0269628	0.0269628	8.09345×10^{-6}	0.000732302
0.9	0.0268782	0.0268782	5.10539×10^{-6}	0.000257973
1.0	0.0267795	0.0267795	5.35892×10^{-6}	0.0002071416

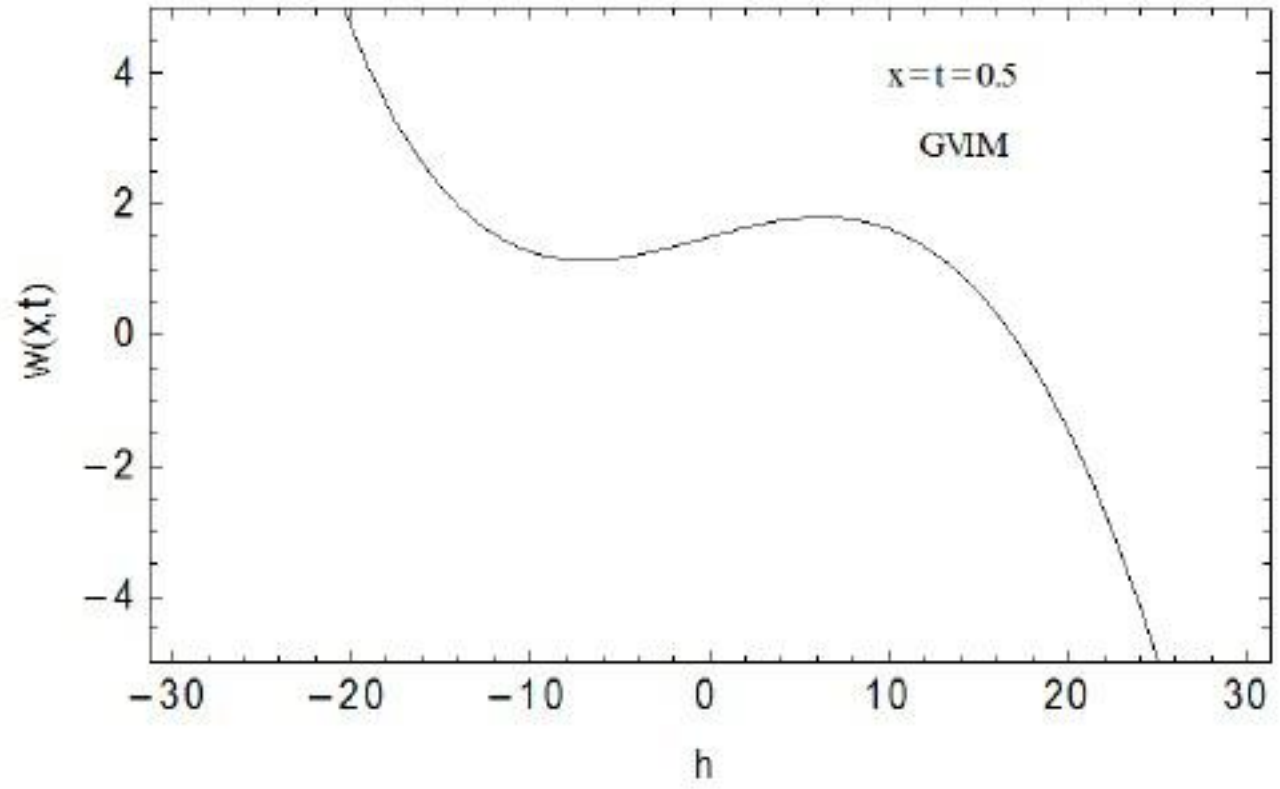
Tablo 7.4. $0 \leq x \leq 1, t = 10, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = -0.001$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $(|u - \phi_4|)$.

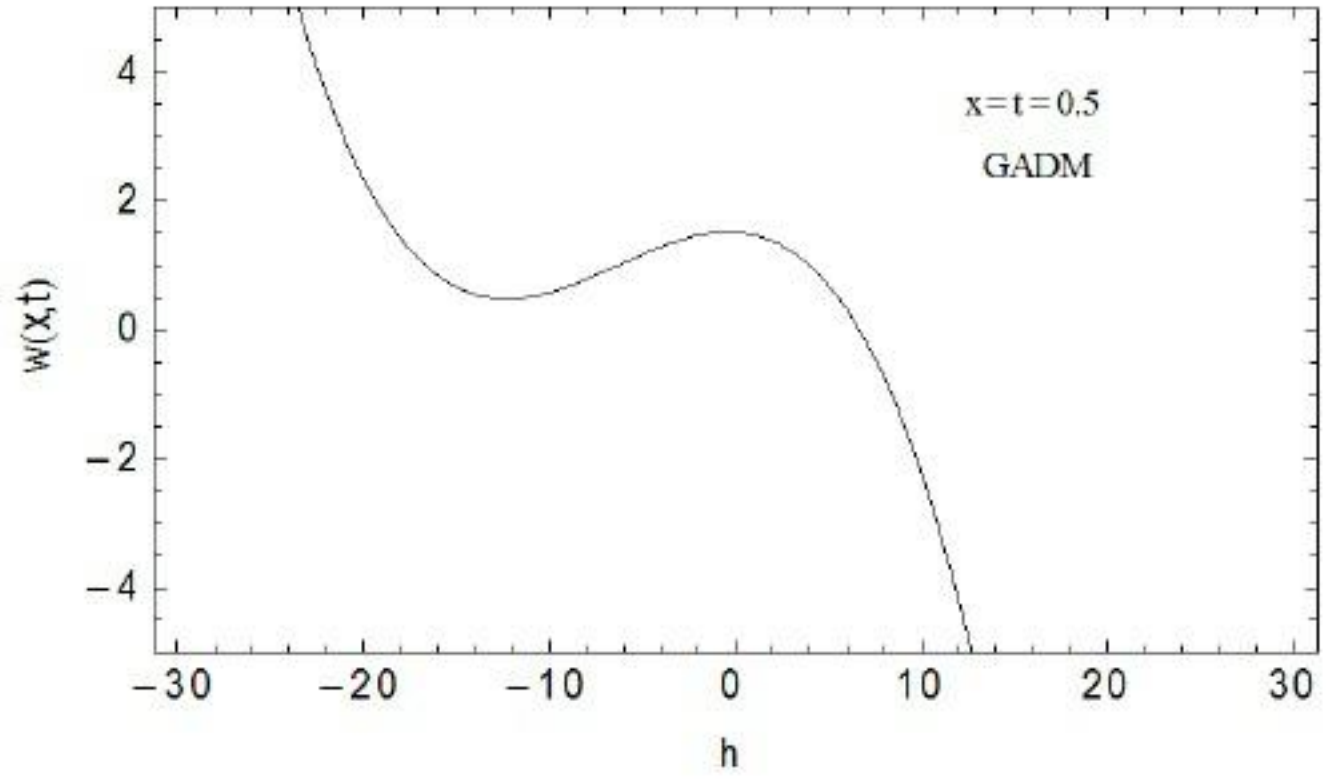


Şekil 7.5. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $v(x,t)$ nin GADM ve GVIM ile elde edilen $\psi_4(x,t)$ için h eğrisi

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM $h = -0.286$	GVIM $h = 0.1$
0	0.0530148	0.0530148	0.00919752	0.00756394
0.1	0.0544136	0.0544136	0.00911543	0.00748265
0.2	0.0557477	0.0557477	0.00903302	0.00740134
0.3	0.0570157	0.0570157	0.0089503	0.00732005
0.4	0.0582164	0.0582164	0.00886731	0.0072879
0.5	0.0593486	0.0593486	0.00878406	0.00715759
0.6	0.0604116	0.0604116	0.00870058	0.00707647
0.7	0.0614044	0.0614044	0.0086169	0.00699546
0.8	0.0623263	0.0623263	0.00853304	0.00691458
0.9	0.0631761	0.0631761	0.00844903	0.00683385
1.0	0.0639558	0.0639558	0.00836488	0.00675329

Tablo 7.5. $t = 10, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $|v - \psi_4|$

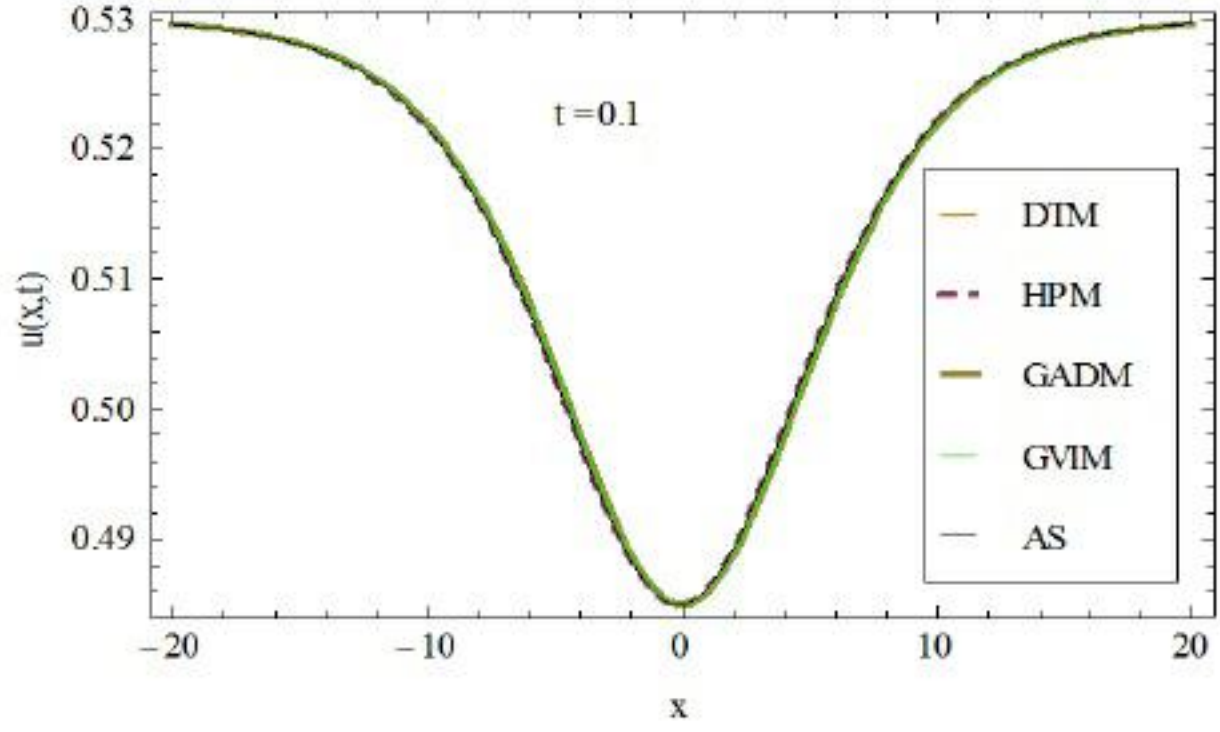




Şekil 7.6. HsckdV denklemindeki $w(x, t)$ nin GADM ve GVIM ile elde edilen h eğrisi

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM	GVIM
0	0.0530148	0.0530148	0.00507729	0.00904999
0.1	0.0544136	0.0544136	0.00500964	0.00896791
0.2	0.0557477	0.0557477	0.00494235	0.00888552
0.3	0.0570157	0.0570157	0.00487544	0.00880285
0.4	0.0582164	0.0582164	0.00480892	0.00871993
0.5	0.0593486	0.0593486	0.00474281	0.00863679
0.6	0.0604116	0.0604116	0.00467713	0.00855344
0.7	0.0614044	0.0614044	0.0046188	0.00846992
0.8	0.0623263	0.0623263	0.00454709	0.00838624
0.9	0.0631761	0.0631761	0.00448277	0.00830244
1.0	0.0639558	0.0639558	0.00441892	0.00821853

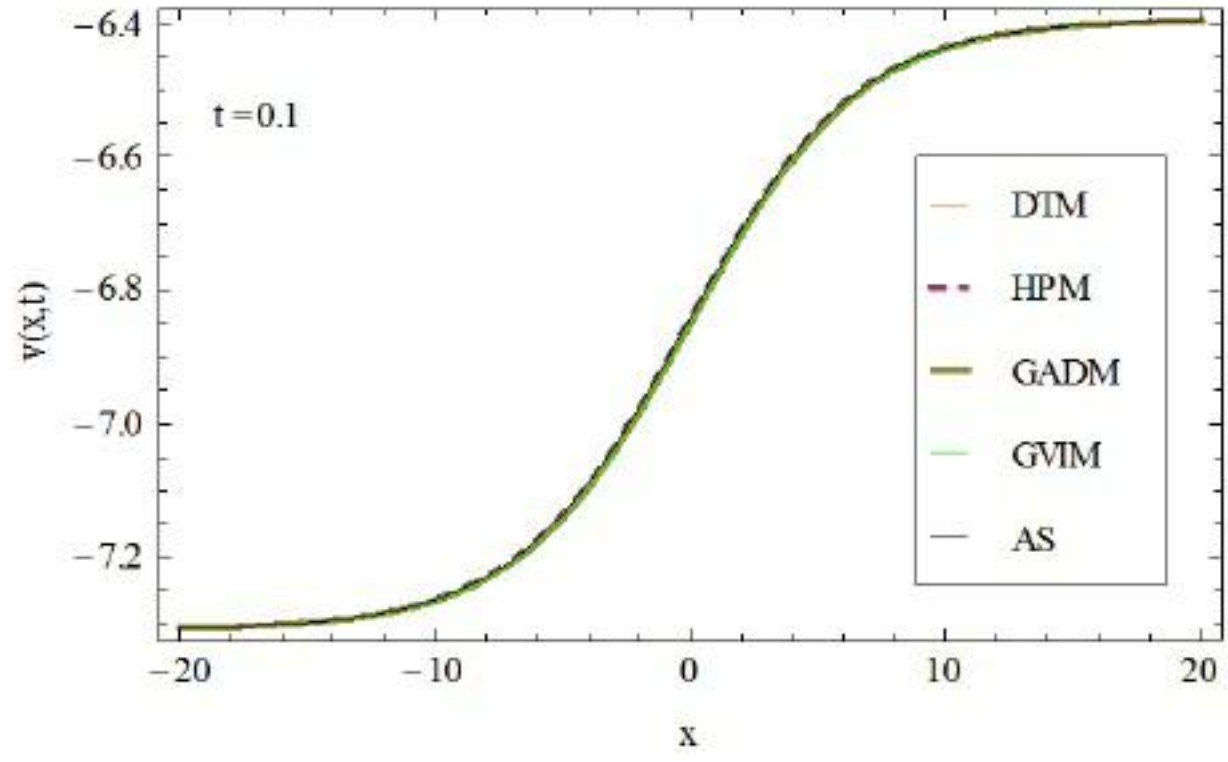
Tablo 7.6. $t = 10, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = -0.001$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $|w - \Omega_4|$



Şekil 7.7. HSEKdV denklemindeki $u(x, t)$ nin beş terim için karşılaştırılma

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM $h = -0.286$	GVIM $h = 0.1$
0	312	312	0.605465	0.501629
0.1	55.1173	55.1173	0.603395	0.500536
0.2	176.062	176.062	0.597833	0.496865
0.3	352.195	352.195	0.588901	0.490668
0.4	449.048	449.048	0.576815	0.48205
0.5	449.425	449.425	0.56185	0.47117
0.6	344.291	344.291	0.544338	0.458229
0.7	133.032	133.032	0.524644	0.443467
0.8	177.113	177.113	0.503159	0.427149
0.9	572.288	572.288	0.480279	0.409554
1.0	1033.72	1033.72	0.456393	0.387432

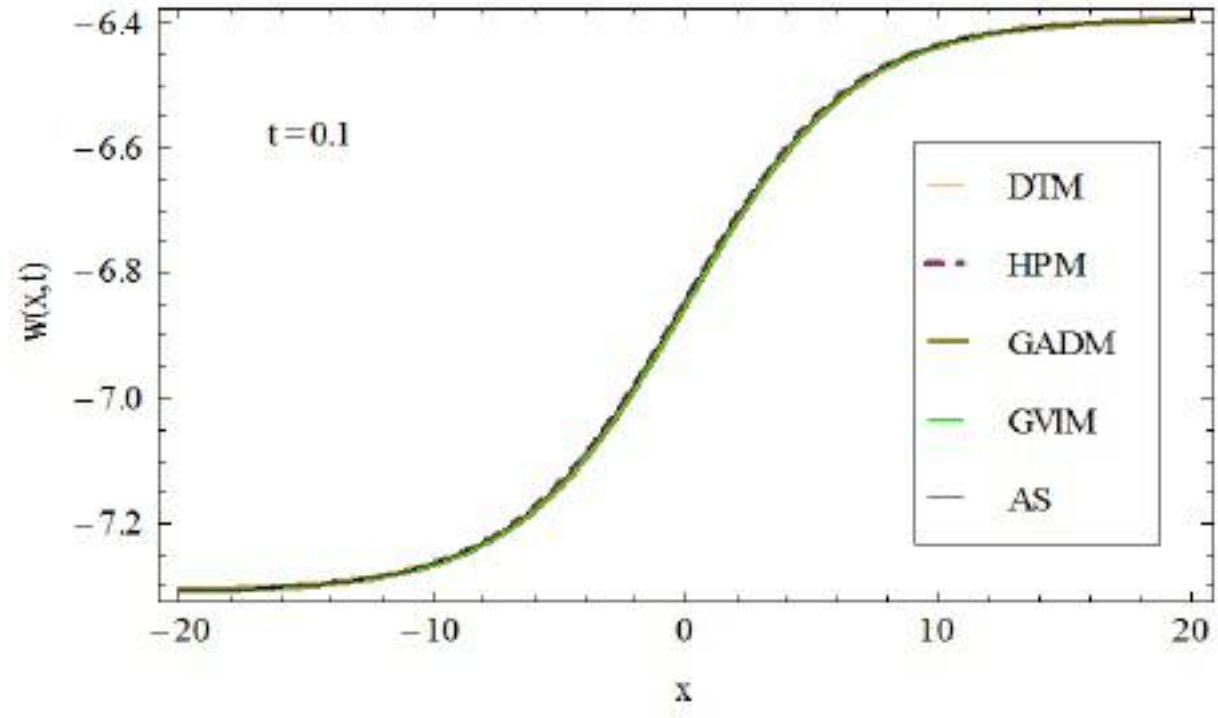
Tablo 7.7. $t = 100, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $|u - \phi_4|$



Şekil 7.8. HSKdV denklemindeki $v(x, t)$ nin beş terim için karşılaştırılma

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM	GVIM
0	12960.8	12960.8	0.501263	0.505008
0.1	12909.0	12909.0	0.476271	0.480019
0.2	12601.9	12601.9	0.45136	0.455242
0.3	12054.0	12054.0	0.42655	0.430794
0.4	11289.4	11289.4	0.402275	0.406784
0.5	10340.0	10340.0	0.378338	0.383307
0.6	9243.33	9243.33	0.35495	0.360451
0.7	8040.13	8040.13	0.332211	0.338285
0.8	6772.13	6772.13	0.310207	0.316872
0.9	5479.65	5479.65	0.289013	0.296258
1.0	4199.8	4199.8	0.268691	0.276481

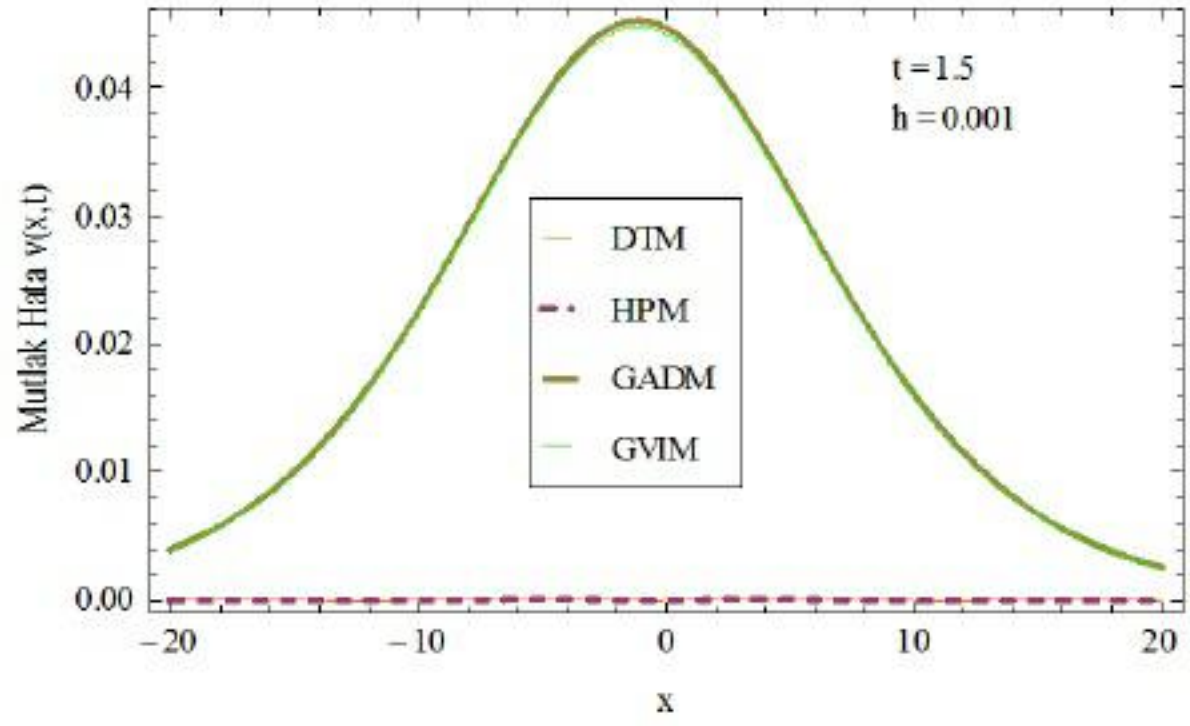
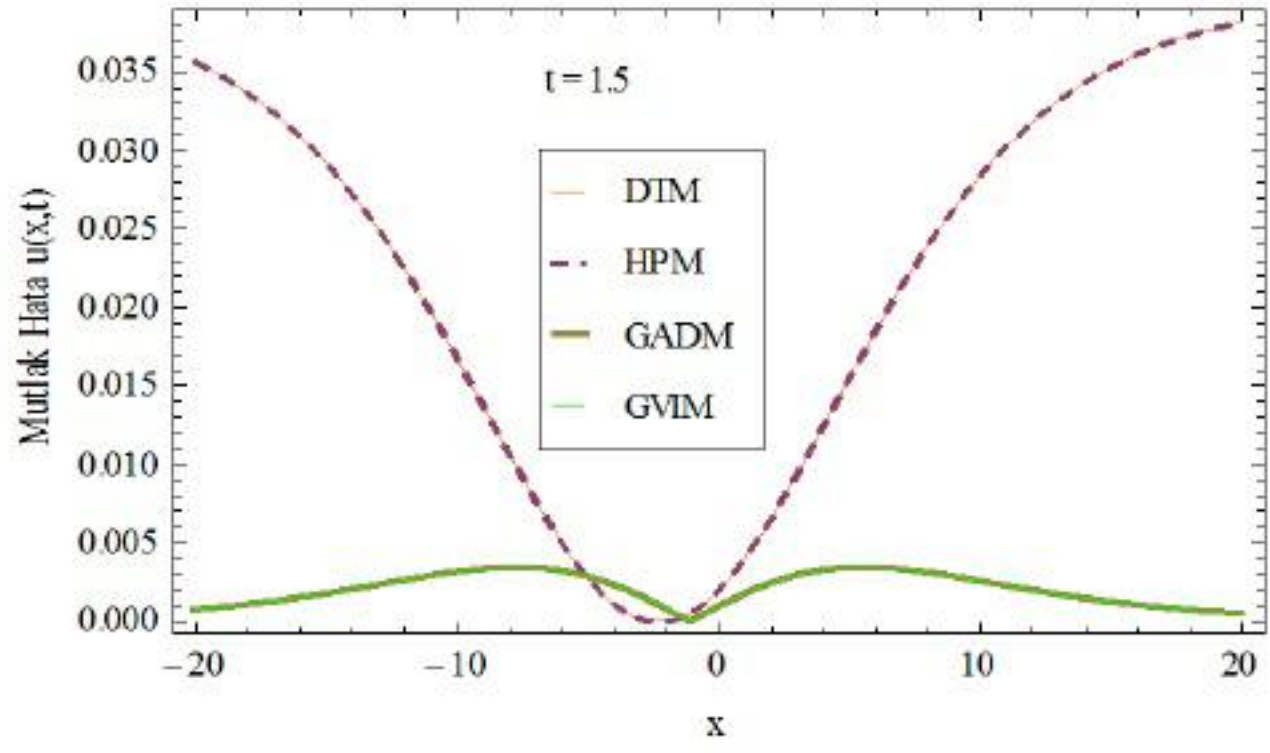
Tablo 7.8. $0 \leq x \leq 1, t = 100, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = 0.01$ için mutlak hatalar $|v - \psi_4|$



Şekil 7.9. HsCKdV denklemindeki $w(x, t)$ nin beş terim için karşılaştırılma

x	DTM[43]	HPM[46]	GADM $h = -0.286$	GVIM $h = 0.1$
0	518.433	518.433	0.100026	0.1001
0.1	516.359	516.359	0.0950295	0.0951049
0.2	504.075	504.075	0.0900573	0.0901364
0.3	482.16	482.16	0.0851335	0.0852187
0.4	451.577	451.577	0.0802816	0.0803751
0.5	413.601	413.601	0.0755239	0.0756271
0.6	369.733	369.733	0.0708806	0.0709948
0.7	321.605	321.605	0.0663702	0.0664959
0.8	270.885	270.885	0.0620085	0.0621458
0.9	219.186	219.186	0.0578092	0.0579578
1.0	167.992	167.992	0.0537832	0.0539422

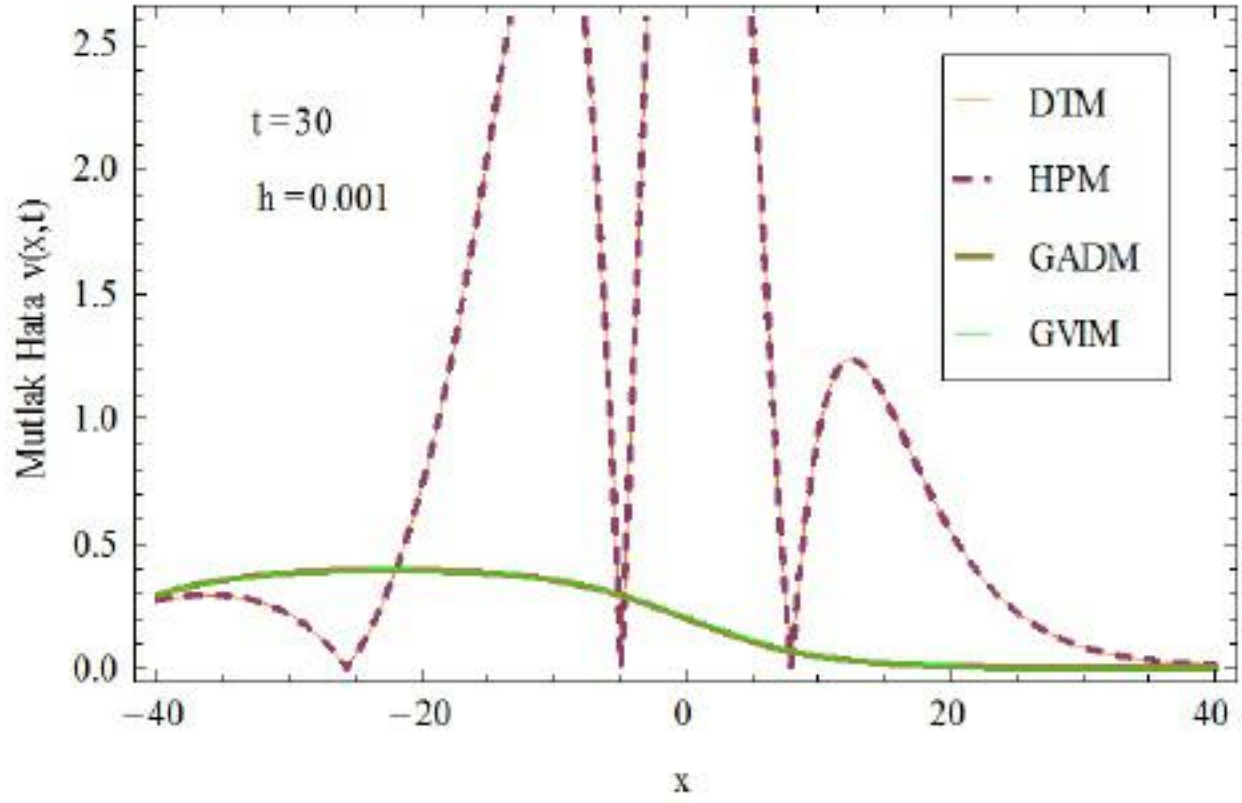
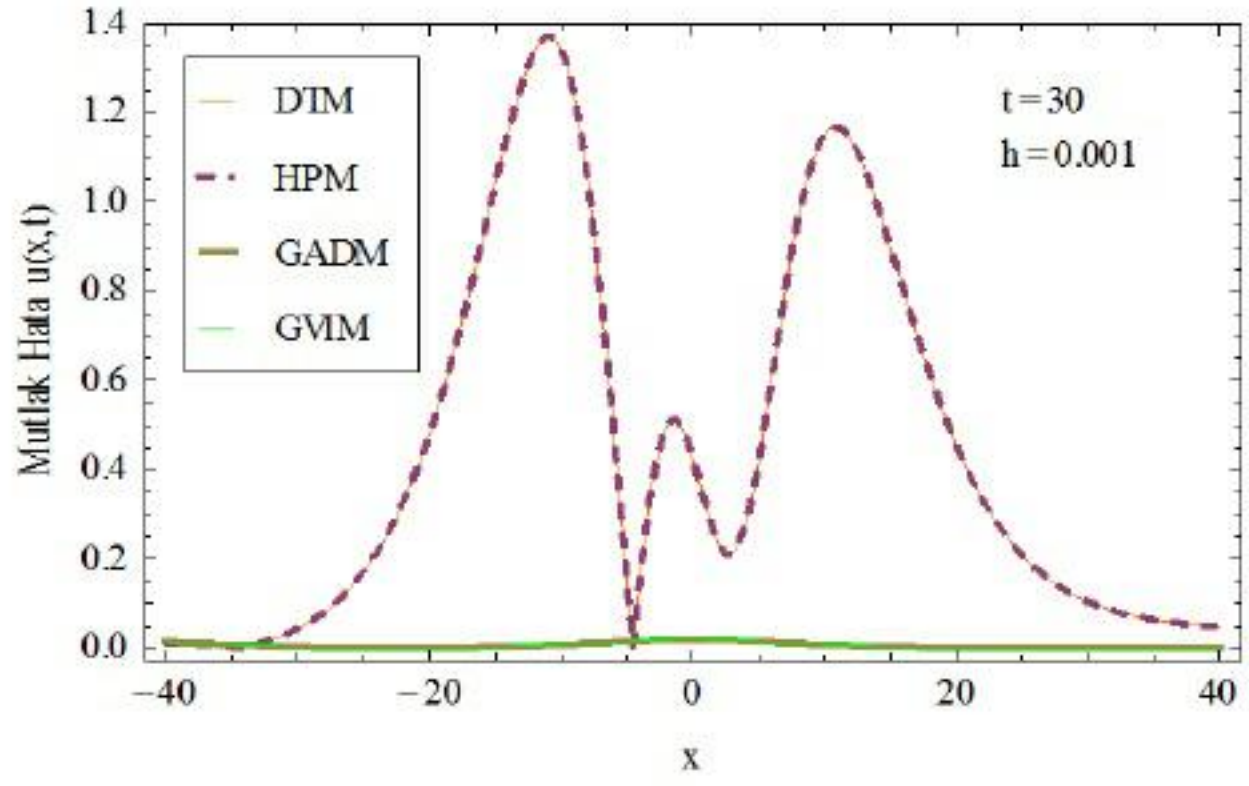
Tablo 7.9. $t = 100, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için mutlak hatalar $|w - \Omega_4|$



Şekil 7.10. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $u(x, t)$ nin beş terim için elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

(x, t)	DTM[43]	HPM[46]	GVIM $h = 0.0001$	GADM $h = 0.286$
(0.1, 0.1)	2.02386×10^{-9}	2.02386×10^{-9}	4.49932×10^{-11}	7.4852×10^{-11}
(0.1, 0.2)	3.3785×10^{-9}	3.3785×10^{-9}	1.04888×10^{-11}	6.71087×10^{-11}
(0.2, 0.2)	3.23272×10^{-8}	3.23272×10^{-8}	1.647×10^{-11}	5.93429×10^{-11}
(1, 0.2)	1.16719×10^{-7}	1.16719×10^{-7}	2.24379×10^{-12}	5.1561×10^{-11}
(0.5, 0.3)	2.34842×10^{-7}	2.34842×10^{-7}	2.8388×10^{-12}	4.37691×10^{-11}
(0.9, 0.3)	3.75608×10^{-7}	3.75608×10^{-7}	3.43154×10^{-12}	3.59735×10^{-11}
(0.4, 0.4)	5.13767×10^{-7}	5.13767×10^{-7}	4.02155×10^{-12}	2.81804×10^{-11}
(1, 0.4)	1.01021×10^{-6}	1.01021×10^{-6}	4.60837×10^{-12}	2.033962×10^{-11}
(0.2, 0.5)	7.54335×10^{-7}	7.54335×10^{-6}	5.19153×10^{-12}	1.26269×10^{-11}
(0.7, 0.5)	1.57142×10^{-6}	1.57142×10^{-6}	5.77059×10^{-12}	4.8787×10^{-11}
(0.9, 0.8)	8.63227×10^{-6}	8.63227×10^{-6}	6.3451×10^{-12}	2.84212×10^{-10}
(1, 0.9)	1.35746×10^{-5}	1.35746×10^{-5}	3.12134×10^{-11}	5.34427×10^{-10}

Tablo 7.10. $c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar $|u - \phi_{15}|$

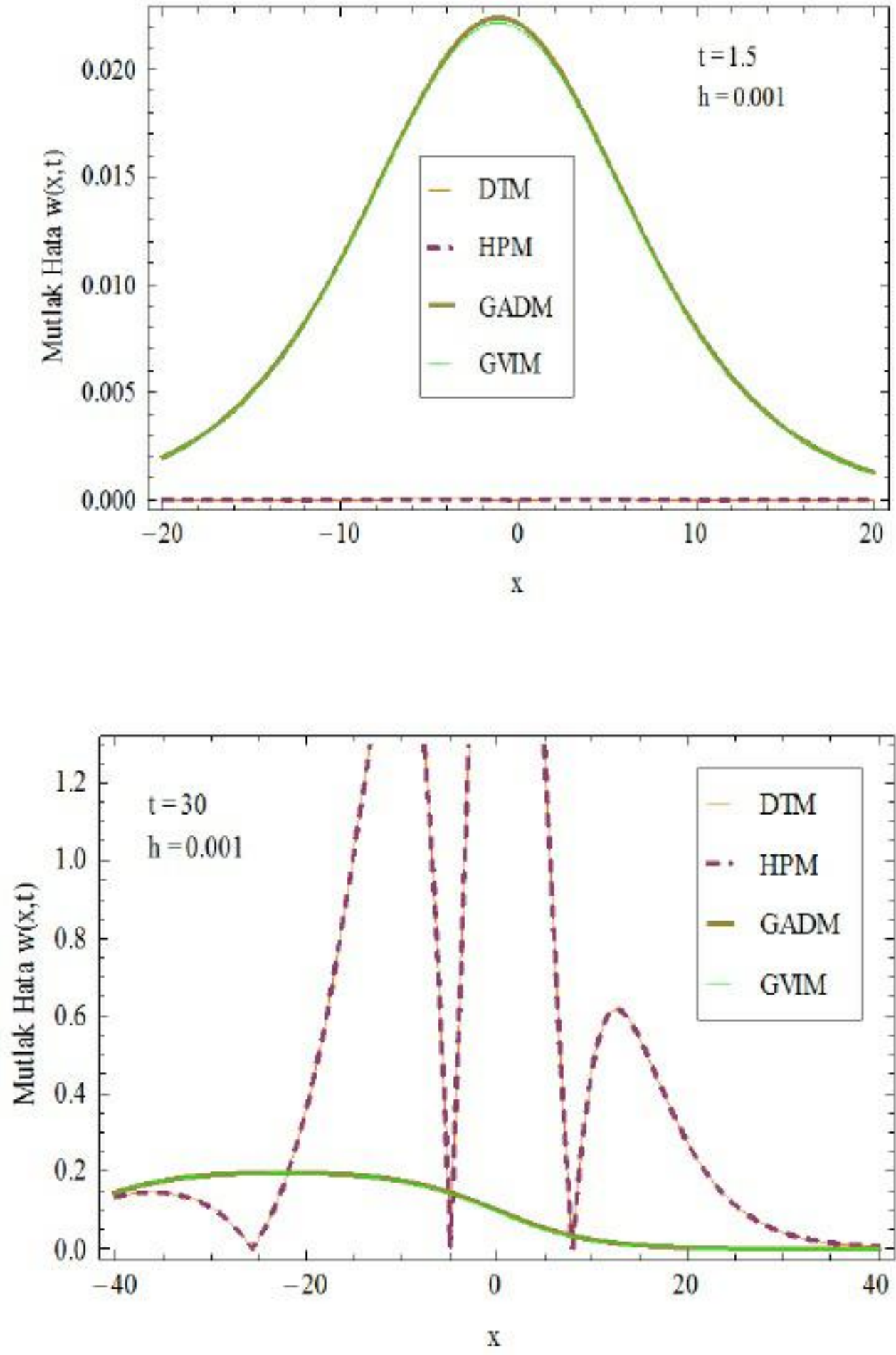


Şekil 7.11. HSKdV denklemindeki $v(x,t)$ nin beş terim için elde edilen mutlak hatalar

(x, t)	DTM[43]	HPM[46]	GVIM	GADM
(0.1, 0.1)	8.82876×10^{-11}	8.82876×10^{-11}	3.01977×10^{-12}	3.01977×10^{-12}
(0.1, 0.2)	1.56042×10^{-10}	1.56042×10^{-10}	3.01766×10^{-12}	3.01766×10^{-12}
(0.2, 0.2)	2.8207×10^{-9}	2.8207×10^{-9}	6.03215×10^{-12}	6.03215×10^{-12}
(1, 0.2)	1.11611×10^{-8}	1.11611×10^{-8}	5.96038×10^{-11}	5.96038×10^{-11}
(0.5, 0.3)	3.21394×10^{-8}	3.21394×10^{-8}	9.01104×10^{-11}	9.01104×10^{-11}
(0.9, 0.3)	5.2973×10^{-8}	5.2973×10^{-8}	8.94483×10^{-10}	8.94483×10^{-10}
(0.4, 0.4)	8.96873×10^{-8}	8.96873×10^{-8}	1.120174×10^{-9}	1.120174×10^{-9}
(1, 0.4)	1.87873×10^{-7}	1.87873×10^{-7}	1.118747×10^{-9}	1.118747×10^{-9}
(0.2, 0.5)	1.47915×10^{-7}	1.47915×10^{-7}	1.150432×10^{-9}	1.150432×10^{-9}
(0.7, 0.5)	3.53207×10^{-7}	3.53207×10^{-7}	1.49201×10^{-9}	1.49201×10^{-9}
(0.9, 0.8)	3.04804×10^{-6}	3.04804×10^{-6}	2.3598×10^{-9}	2.3598×10^{-9}
(1, 0.9)	5.38653×10^{-6}	5.38653×10^{-6}	2.3528×10^{-9}	2.3528×10^{-9}

Tablo 7.11. $c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = 0.01$ değerleri için elde edilen mutlak hatalar

$$|v - \psi_{15}|$$



Şekil 7.12. HS birleştirilmiş KdV denklemindeki $w(x,t)$ nin beş terim için elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

(x, t)	DTM[43]	HPM[46]	GVIM	GADM
(0.1, 0.1)	4.38516×10^{-11}	4.38516×10^{-11}	1.49987×10^{-11}	1.08204×10^{-10}
(0.1, 0.2)	8.63179×10^{-10}	8.63179×10^{-10}	3.99787×10^{-11}	2.98786×10^{-9}
(0.2, 0.2)	1.40101×10^{-9}	1.40101×10^{-9}	4.99583×10^{-11}	4.89561×10^{-9}
(1, 0.2)	5.54361×10^{-9}	5.54361×10^{-9}	1.29273×10^{-10}	1.29374×10^{-8}
(0.5, 0.3)	1.59633×10^{-8}	1.59633×10^{-8}	9.47151×10^{-11}	9.47152×10^{-9}
(0.9, 0.3)	2.63111×10^{-8}	2.63111×10^{-8}	1.34186×10^{-10}	7.48597×10^{-9}
(0.4, 0.4)	4.45467×10^{-8}	4.45467×10^{-8}	9.96681×10^{-11}	9.96681×10^{-9}
(1, 0.4)	9.33146×10^{-8}	9.33146×10^{-8}	1.58648×10^{-11}	1.58649×10^{-8}
(0.2, 0.5)	7.34676×10^{-8}	7.34676×10^{-8}	9.47151×10^{-11}	9.47152×10^{-9}
(0.7, 0.5)	1.75434×10^{-7}	1.75434×10^{-7}	1.43992×10^{-10}	1.43992×10^{-8}
(0.9, 0.8)	1.51393×10^{-6}	1.51393×10^{-6}	2.06966×10^{-10}	1.97375×10^{-8}
(1, 0.9)	2.67543×10^{-6}	2.67543×10^{-6}	2.30767×10^{-10}	2.30768×10^{-8}

Tablo 7.12. $0.1 \leq x \leq 1, 0.1 \leq t \leq 0.9, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1, h = 0.001$ degerleri için elde edilen mutlak hatalar $|w - \Omega_{15}|$

(6.1) ve (6.2) ile verilen HSKdV denkleminin GADM ve GVIM ile elde edilen sayısal sonuçları Şekil 7.1, 7.2, 7.4, 7.7 - 7.12, Tablo 7.1 - 7.12 de verilmiştir. Tablo 7.1 - 7.3'de $t = 20, c_0 = \beta = 1.5, c_1 = \alpha = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 100$ için seri çözümün ilk dört terimi alınarak $u(x, t), v(x, t)$ ve $w(x, t)$ için mutlak hata tabloları oluşturulmuştur. Bu tablolarda h yakınsaklık kontrol parametreleri Şekil 7.3, 7.5 ve 7.6'ya göre seçilmiştir. Çünkü bu şekillerde sırasıyla GADM ve GVIM ile bulunan çözümlerin ilk dört terimi kullanılarak h 'ın hangi degerleri için yaklaşık çözümlerin yakınsak olduğu tespit edilmiştir. Bu tablo ve şekillerde görüldüğü gibi x ve t bağımsız değişkenlerinin artan değerlerinde h yakınsaklık kontrol parametresinin uygun seçilmesi ile GADM ve GVIM analitik çözüme yakın değerler vermiştir. α katsayısını daha küçük alırsak bağımsız değişkenlerin hemen hemen her değeri için hassas sonuçlar elde etmek mümkündür. Tablo 7.4 -7.6'da ise sırasıyla $u(x, t), v(x, t)$

ve $w(x, t)$ GADM ve GVIM yöntemleriyle elde edilen serilerin ilk dört terimi kullanılarak $t = 10$, $0 \leq x \leq 1.0$, $h = -0.001$, $c_0 = \beta = 1.5$ ve $c_1 = \alpha = 0.1$ alınarak elde edilen mutlak hatalar görülmektedir. Bu tablolara göre GADM ve GVIM yöntemleri DTM ve HPM'ye göre daha iyi sonuçlar vermiştir. Tablo 7.7 - 7.9'da $0 \leq x \leq 1$ ve $t = 100$ için çözüm serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen mutlak hatalar görülmektedir. Tablolara göre zaman büyüdükçe DTM ve HPM'nin analitik çözümden uzaklaştığı, buna karşılık GADM'nin $h = -0.286$ ve GVIM'in $h = 0.1$ için analitik çözüme yakın değerler verdiği tespit edildi. Şekil 7.7 - 7.9'da elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırması ve yine Şekil 7.10 - 7.12'de ise mutlak hataların bir karşılaştırması yapılmıştır. DTM ve HPM çözümleri x ve t bağımsız değişkenlerinin $0.1 \leq x, t \leq 1$ değerleri için aynı terim sayısında GADM ve GVIM'e göre daha hassas sonuç vermesine rağmen Tablo 7.10 - 7.12'de çözüm serilerinin onbeş terimi kullanılarak $c_0 = \beta = 1.5$, $c_1 = \alpha = 0.1$ için GADM ve GVIM ile DTM ve HPM'ye göre daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Bu tablolarda GVIM'de yakınsaklık parametresi $h = 0.0001$ ve GADM'de $h = 0.286$ alınmıştır. Sonuç olarak tablo ve şekillerden görüldüğü gibi başlangıç şartlı Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi için GADM ve GVIM yöntemleri tavsiye edilebilir bir yöntemdir. Elde edilen çözüm serilerinde $h = -1$ alırsak ADM ve VIM ile bulunacak sonuçlara ulaşılır.

8. BÖLÜM

Bu bölümde (G'/G) - açılım metodu, genişletilmiş (G'/G) - açılım metodu ve iyileştirilmiş (G'/G) - açılım metodunun temel yapıları verilecek. Daha sonra iyileştirilmiş (G'/G) - açılım metodu (4.5) ile verilen Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemine uygulanacak.

8.1. $(\frac{G'}{G})$ - AÇILIM METODU

Akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, optik fiberler, biyoloji, katıhal fiziği, kimyasal kinematik, kimyasal fizik gibi mühendislik alanları yada diğer bilimsel çalışmaların dahil olduğu tüm alanlarda lineer olmayan olaylar mevcuttur. Geçmişteki çalışmalarda bazı lineer olmayan evolution denklemlerinin hareketli dalga çözümlerinin incelenmesi bazı olayların analizinde önemli bir rol oynadı.

Hareketli dalga denklemlerini elde etmek için bir çok metod denendi, örneğin ters saçılım metodu [109], Hirota bilineer dönüşümü [76], tanh metodu [110]-[112], sine-cosine metodu [113], homogen denge metodu [114], üstel fonksiyon metodu [115] ve benzeri. Bu metodlarla lineer olmayan dalga denklemlerinin analitik çözümleri türetildi. Son yıllarda arasında (G'/G) - genişleme metodunun da bulunduğu bazı yeni metodlar oluşturuldu [130]-[134].

Bu metod başlangıçta lineer olmayan denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için önerildi. Bu metodun ana düşüncesi lineer olmayan denklemlerin hareketli dalga çözümlerinin (G'/G) nin bir polinomu olarak ifade edilebilmesidir, burada λ, μ, c sabitler ve $\xi = x - ct$ olmak üzere $G = G(\xi)$ fonksiyonu

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0, \quad (8.1)$$

ikinci dereceden lineer adi diferansiyel denklemini sağlar.

Bir başka deyişle 2008 yılında ilk defa Wang ve arkadaşları tarafından sunulan bu metodun tanh metodlarından farklı olan tarafı Ricatti diferansiyel denkleminin yerine (8.1) ile verilen ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemin seçilmesidir. Ayrıca

$$H(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0,$$

denklemini için,

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^m a_i y^i,$$

çözümünü yerine

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i, \quad (8.2)$$

olacak şekilde çözüm aranır. (8.2) çözümü yazılırken (G'/G) fonksiyonunun değeri (8.1)

denkleminin çözümünde hesaplanan $G(\xi)$ çözüm fonksiyonu yardımıyla elde edilir [34].

(8.1) ile verilen ikinci basamaktan lineer denklemin genel çözümünü bulalım. Bunun için (8.1) denkleminin karakteristik denklemini yazarsak

$$\varphi(k) = k^2 + \lambda k + \mu = 0, \quad (8.3)$$

bulunur. Bu karakteristik denklemin kökleri ise $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$ olmak üzere

$$k_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}, \quad (8.4)$$

şeklindedir. $\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$ ise

$$G(\xi) = c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}, \quad (8.5)$$

genel çözümü bulunur. Genel çözümde ξ ye göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$G'(\xi) = k_1 c_1 e^{k_1 \xi} + k_2 c_2 e^{k_2 \xi}, \quad (8.6)$$

elde edilir. Buradan $G(\xi)$ ve $G'(\xi)$ değerlerini $G'(\xi)/G(\xi)$ ifadesinde yerine yazarsak

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{k_1 c_1 e^{k_1 \xi} + k_2 c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}, \quad (8.7)$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} + c_2 \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}, \quad (8.8)$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-c_1 \frac{\lambda}{2} e^{k_1 \xi} - c_1 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} - c_2 \frac{\lambda}{2} e^{k_2 \xi} + c_2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}, \quad (8.9)$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\frac{\lambda}{2} [c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}] + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} [-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}]}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}, \quad (8.10)$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2}, \quad (8.11)$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2}, \quad (8.12)$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{(-c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} + (c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{(-c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} + (c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}} \right] - \frac{\lambda}{2}, \quad (8.13)$$

bağıntıları bulunur. (8.13) ifadesinde

$$-c_1 + c_2 = A,$$

ve

$$c_1 + c_2 = B,$$

olarak alınırsa (8.1) denkleminin genel çözümü

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}} \right] - \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0 \text{ için} \\ \\ \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}} \right] - \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0 \text{ için} \\ \\ \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A}{A\xi + B} - \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta = \lambda^2 - 4\mu = 0 \text{ için} \end{array} \right. \quad (8.14)$$

olur [34],[130]-[132],[135].

8.2. GENİŞLETİLMİŞ (G'/G) - AÇILIM METODU

Bu metodun (G'/G) - açılım metodundan farkı

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i, \quad (8.15)$$

şeklinde ifade edilen çözüm yerine

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G} \right)^{-i}, \quad (8.16)$$

bağıntısının kullanılmasıdır. (8.16) ifadesinde a_0 , a_i ve b_i katsayıları bulunur. Bu katsayılar ve (8.14) çözümü (8.7) de yerine yazılarak verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin soliton çözümleri bulunmuş olur.

8.3. İYİLEŞTİRİLMİŞ (G'/G) -AÇILIM METODU

İyileştirilmiş (G'/G) -açılım metodunda

$$F(\xi) = \frac{G'(\xi)}{G(\xi)}, \quad (8.17)$$

olmak üzere çözüm fonksiyonunun

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i F_i(\xi), \quad (8.18)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim.

Burada $G(\xi)$

$$G(\xi)G''(\xi) = AG^2(\xi) + BG(\xi)G'(\xi) + C(G'(\xi))^2, \quad (8.19)$$

yardımcı adi lineer olmayan ikinci basamaktan diferansiyel denklemin çözümünü ifade eder. A , B , C ler reel parametrelerdir. Matematica programı yardımıyla (8.19) denkleminin çözümünü yaparsak aşağıdaki dört durum elde edilir [136].

1.Durum:

$B \neq 0$, $\Delta = B^2 + 4A - 4AC \geq 0$ ve c_1, c_2 reel parametreler olmak üzere

$$F(\xi) = \frac{B}{2(1-c)} + \frac{B\sqrt{\Delta}}{2(1-c)} \frac{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}}{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}}. \quad (8.20)$$

2.Durum:

$B \neq 0$ ve $\Delta = B^2 + 4A - 4AC < 0$ olduğunda

$$F(\xi) = \frac{B}{2(1-c)} + \frac{B\sqrt{-\Delta}}{2(1-c)} \frac{ic_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi - ic_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi}{ic_1 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi + ic_2 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi}, \quad (8.21)$$

3.Durum:

$B = 0$ ve $\Delta = A(c-1) \geq 0$ olduğunda

$$F(\xi) = \frac{\sqrt{\Delta}}{(1-c)} \frac{c_1 \cos(\sqrt{\Delta})\xi + c_2 \sin(\sqrt{\Delta})\xi}{c_1 \sin(\sqrt{\Delta})\xi - c_2 \cos(\sqrt{\Delta})\xi}, \quad (8.22)$$

4.Durum:

$B = 0$ ve $\Delta = A(c - 1) < 0$ olduğunda

$$F(\xi) = \frac{\sqrt{\Delta}}{(1-c)} \frac{ic_1 \cosh(\sqrt{-\Delta})\xi - c_2 \sinh(\sqrt{-\Delta})\xi}{ic_1 \sinh(\sqrt{-\Delta})\xi - c_2 \cosh(\sqrt{-\Delta})\xi}. \quad (8.23)$$

bulunur.

Yukarıda tanımlanan iyileştirilmiş (G'/G) - açılım metodunu Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminde uygulayalım. Bunun için (3.5) denkleminde $u(x, t) = u(\xi)$, $v(x, t) = v(\xi)$, $w(x, t) = w(\xi)$ ve k dalganın hızı olmak üzere $\xi = x - kt$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{cases} -ku' - \frac{1}{2}u''' + 3uu' - 3(vw)' = 0, \\ -kv' + v''' - 3uv' = 0, \\ -kw' + w''' - 3uw' = 0, \end{cases} \quad (8.24)$$

elde edilir. (8.24) denklemlerindeki en yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan terimlerden dolayı dengeleme sırasıyla $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 1$ olarak alınabilir [137]. Böylece (8.24) denklemi için

$$\begin{cases} u(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi), \\ v(\xi) = b_0 + b_1 F(\xi), \\ w(\xi) = c_0 + c_1 F(\xi), \end{cases} \quad (8.25)$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Burada $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, c_0, c_1$ ler belirlenecek sabitler olup $F(\xi)$ ise (8.19) denkleminin çözüm fonksiyonudur. (8.25) çözümlerinde gerekli türevleri alıp (8.24) denkleminde yerlerine yazarsak aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : A^2 a_1 + 3Aa_0 a_1 - 3A^2 a_2 B - \frac{1}{2}Aa_1 B^2 - A^2 a_1 C - 3Ab_1 c_0 - 3Ab_0 c_1 - Aa_1 k = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : A^2 a_1^2 + 8A^2 a_2 + 6Aa_0 a_2 + 4Aa_1 B + 3a_0 a_1 B - 7Aa_2 B^2 - \frac{1}{2}a_1 B^3 - 8A^2 a_2 C$$

$$-4Aa_1 BC - 3Bb_1 c_0 - 3Bb_0 c_1 - 6Ab_1 c_1 - 2Aa_2 k - a_1 Bk = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : -4Aa_1 - 3a_0a_1 + 9Aa_1a_2 + 3a_1^2B + 26Aa_2B + 6a_0a_2B + \frac{7}{2}a_1B^2 - 4a_2B^3 + 8Aa_1C + 3a_0a_1C$$

$$-26Aa_2BC - \frac{7}{2}D_1B^2C - 4Aa_1C^2 + 3b_1c_0 - 3b_1Cc_0 + 3b_0c_1 - 6Bb_1c_1 - 3b_0Cc_1 + a_1k - 2a_2Bk - a_1Ck = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : -3a_1^2 - 20Aa_2 - 6a_0a_2 + 6Aa_2^2 - 6a_1B + 9a_1a_2B + 19a_2B^2 + 3a_1^2C + 40Aa_2C$$

$$+ 6a_0a_2C + 12a_1BC - 19a_2B^2C - 20Aa_2C^2 - 6a_1BC^2 + 6b_1c_1 - 6b_1Cc_1 + 2a_2k - 2a_2Ck = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : 3a_1 - 9a_1a_2 - 27A^2B + 6a_2^2B - 9a_1C + 9a_1a_2C + 54a_2BC + 9a_1C^2 - 27a_2BC^2 - 3a_1C^3 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^5 : 12a_2 - 6a_2^2 - 36a_2C + 6a_2^2C + 36a_2C^2 - 12a_2C^3 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : -2A^2b_1 - 3Aa_0b_1 + AB^2b_1 + 2A^2b_1C - Ab_1k = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -3Aa_1b_1 - 8ABb_1 - 3a_0Bb_1 + B^3b_1 + 8ABb_1C - Bb_1k = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : 8Ab_1 + 3a_0b_1 - 3Aa_2b_1 - 3a_1Bb_1 - 7B^2b_1 - 16Ab_1C - 3a_0b_1C + 7B^2b_1C + 8Ab_1C^2$$

$$+ b_1k - 16Ab_1C - 3a_0b_1C + 7B^2b_1C + 8Ab_1C^2 + b_1k - b_1Ck = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : 3a_1b_1 + 12Bb_1 - 3a_2Bb_1 - 3a_1b_1C - 24Bb_1C + 12Bb_1C^2 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : -6b_1 + 3a_2b_1 + 18b_1C - 3a_2b_1C - 18b_1C^2 + 6b_1C^3 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : -2A^2c_1 - 3Aa_0c_1 + AB^2c_1 + 2A^2Cc_1 - Ac_1k = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -3Aa_1c_1 - 8ABc_1 - 3a_0Bc_1 + B^3c_1 + 8ABCc_1 - Bc_1k = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 : 8Ac_1 + 3a_0c_1 - 3Aa_2c_1 - 3a_1Bc_1 - 7B^2c_1 - 16ACc_1 - 3a_0Cc_1 \\ + 7B^2Cc_1 + 8AC^2c_1 + c_1k - Cc_1k = 0, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : 3a_1c_1 + 12Bc_1 - 3a_2Bc_1 - 3a_1Cc_1 - 24BCc_1 + 12BC^2c_1 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : -6c_1 + 3a_2c_1 + 18Cc_1 - 3a_2Cc_1 - 18C^2c_1 + 6C^3c_1 = 0.$$

Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica bilgisayar programı yardımıyla çözüldüğünde

$$\begin{aligned} B &= 0, \\ a_0 &= \frac{1}{3}(-2A + B^2 + 2AC - k), \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2(1 - 2C + C^2), \\ b_0 &= 0, \quad b_1 \neq 0, \\ c_0 &= 0, \quad c_1 = \frac{4(1 - C)^2(A(1 - C) + k)}{3b_1}, \end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} B &\neq 0, \\ a_0 &= \frac{1}{3}(-2A + 2AC - k), \quad a_1 = 2(-B + BC), \quad a_2 = 2(1 - 2C + C^2), \\ b_0 &= 0, \quad b_1 \neq 0, \\ c_0 &= \frac{(1 - C)B(-B^2 - 4A(1 - C) + 4k)}{3b_1}, \quad c_1 = \frac{-c_0 + Cc_0}{B} \end{aligned} \tag{8.27}$$

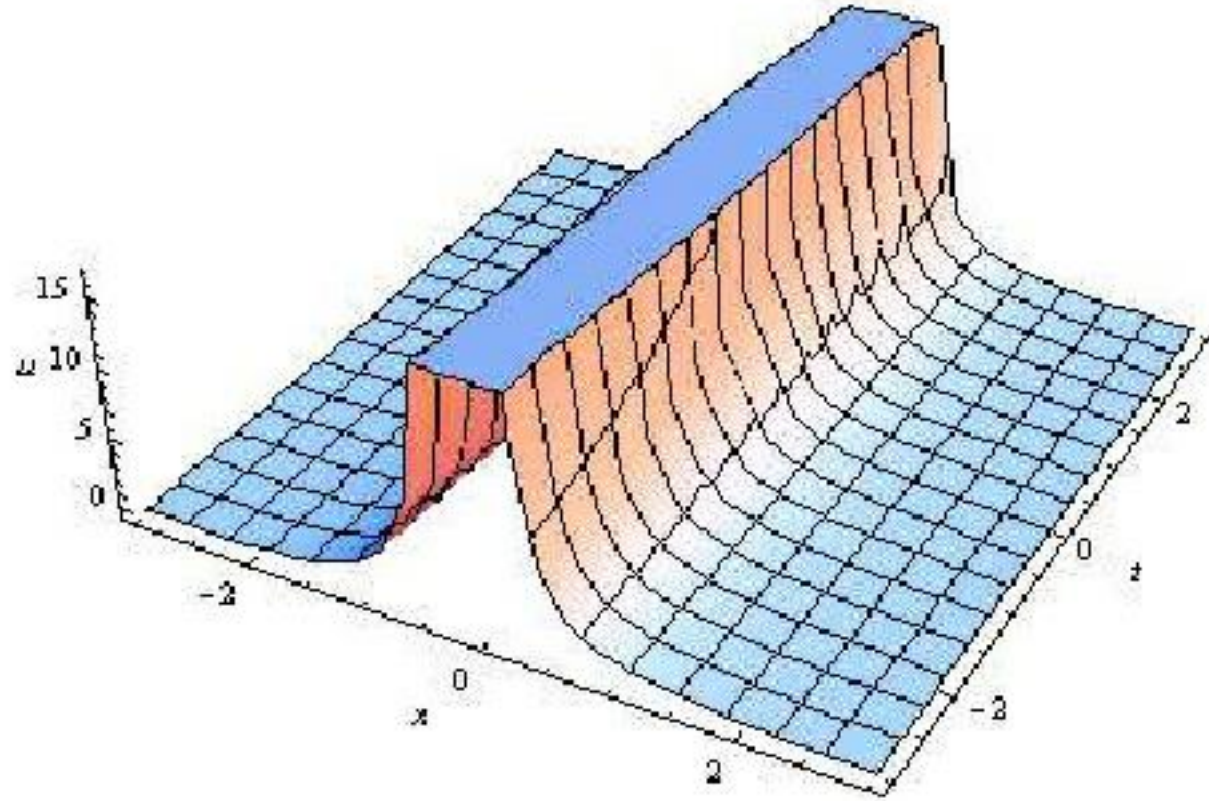
olarak istenilen sabitler bulunur. Bulunan bu sabitler (8.25) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.5) Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi olur.

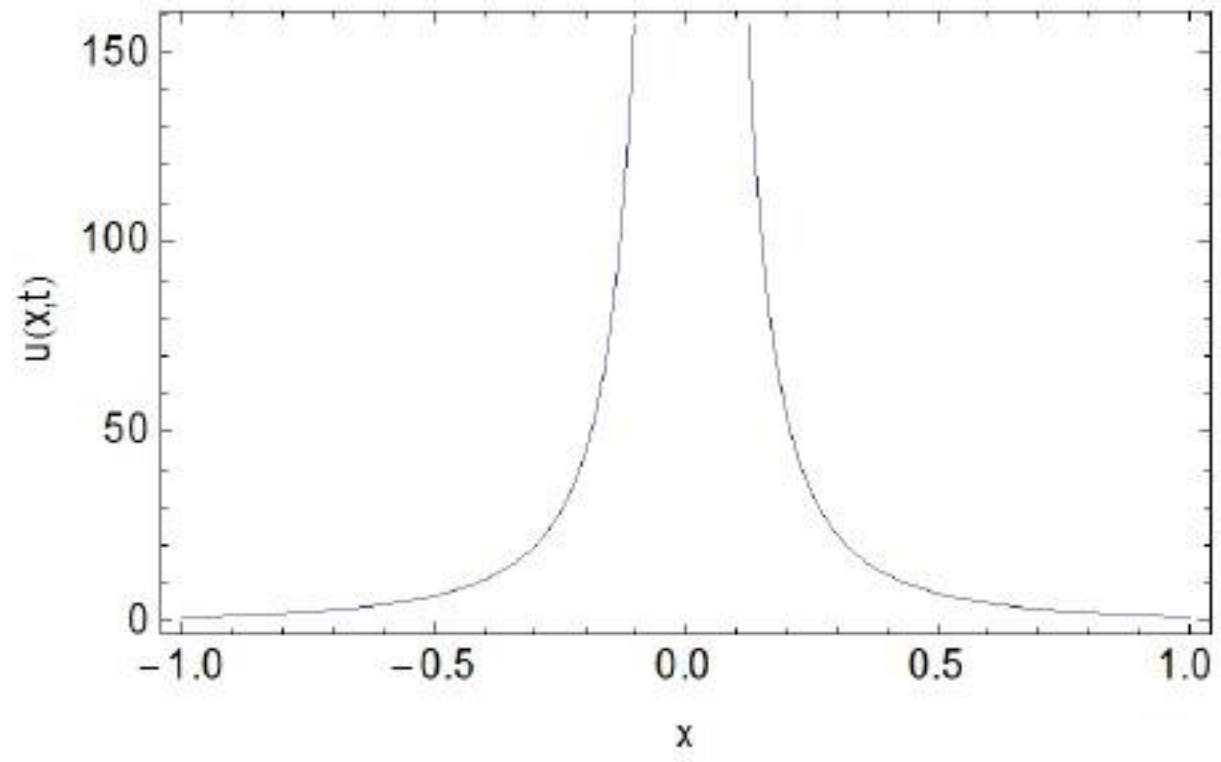
1. Durum:

$$u(x, t) = \frac{1}{3}(-2A(1-C) - k) - \frac{B^2}{2} \left[1 - \Delta \left(\frac{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}}{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}} \right)^2 \right], \quad (8.28)$$

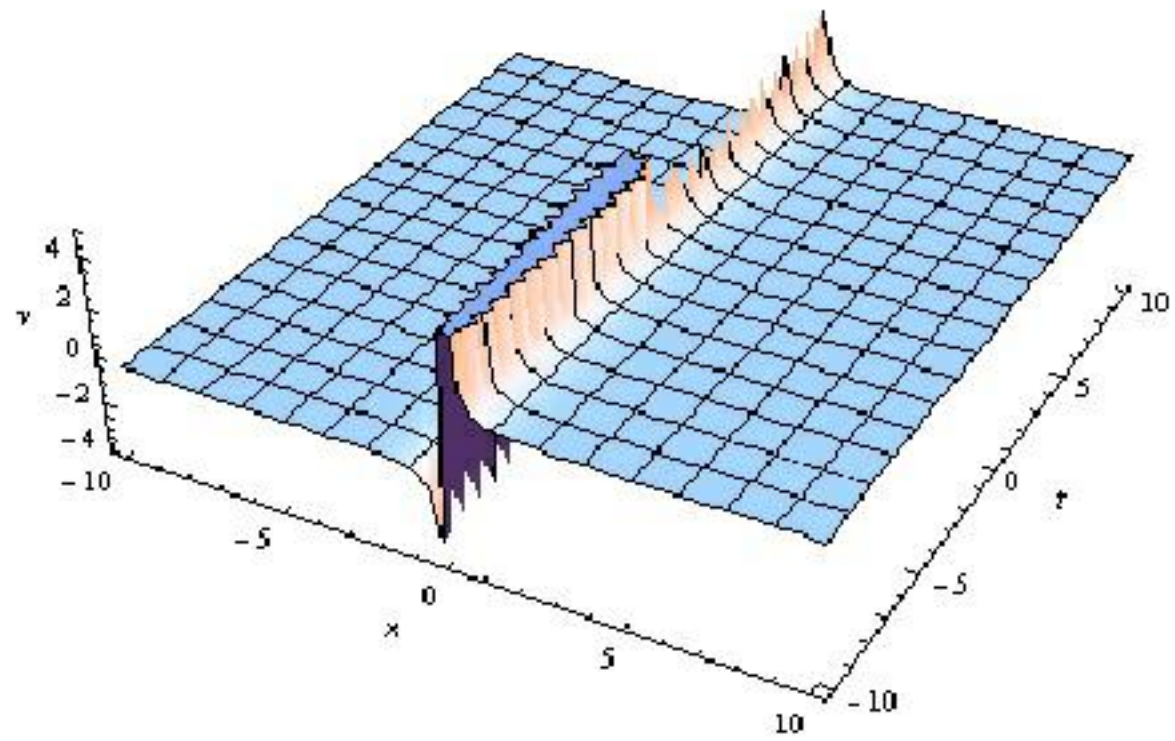
$$v(x, t) = \frac{b_1 B}{2(1-C)} \left[1 + \sqrt{\Delta} \left(\frac{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}}{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}} \right) \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.29)$$

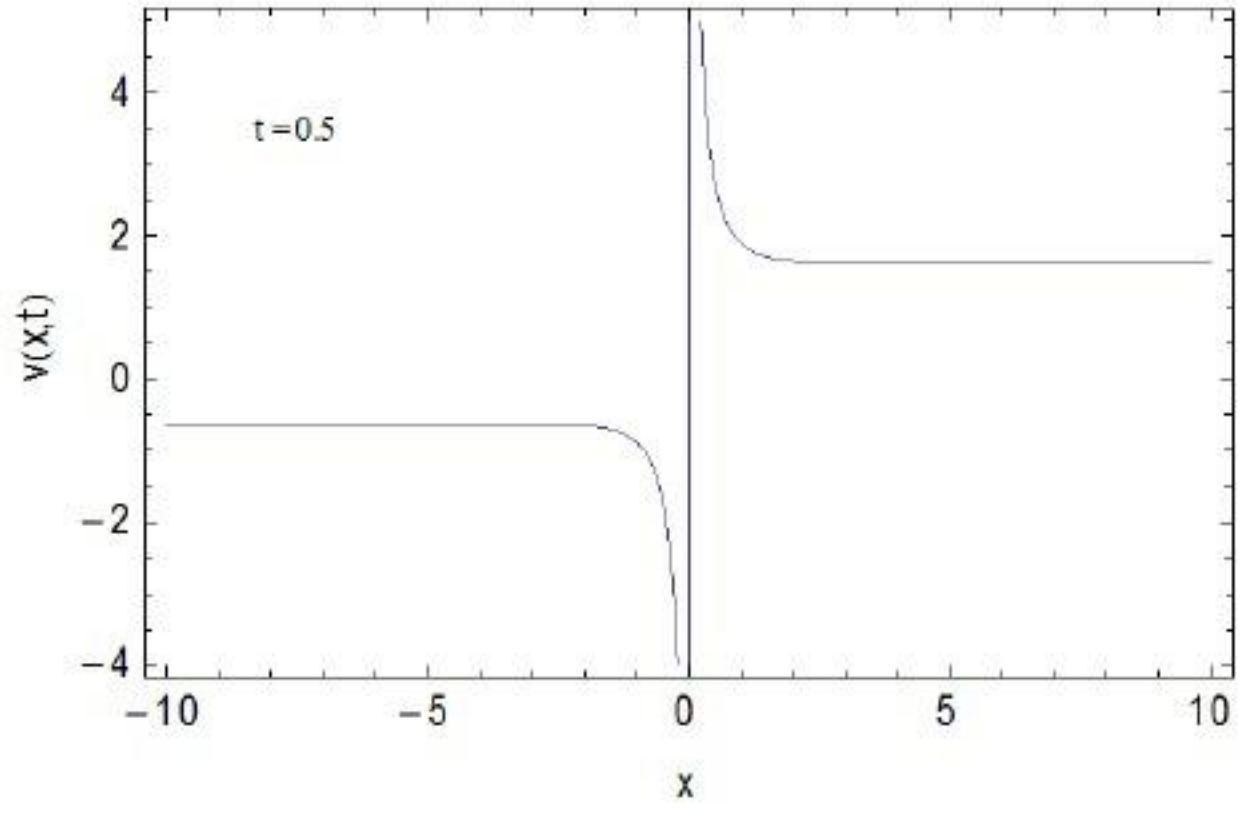
$$w(x, t) = \frac{B(1-C)(-B^2 - 4A(1-C) + 4k)}{6b_1} \left[1 - \sqrt{\Delta} \left(\frac{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}}{c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi}} \right) \right], \quad (8.30)$$



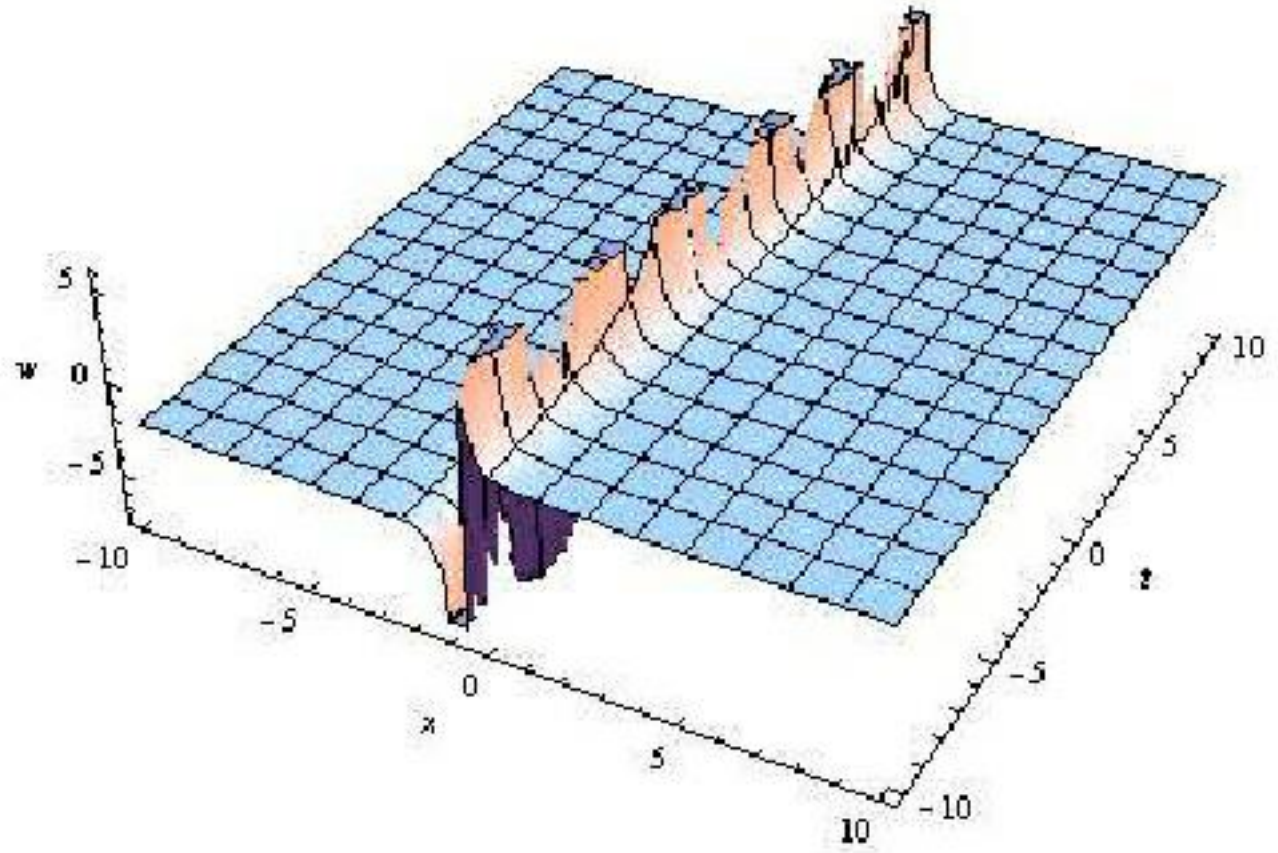


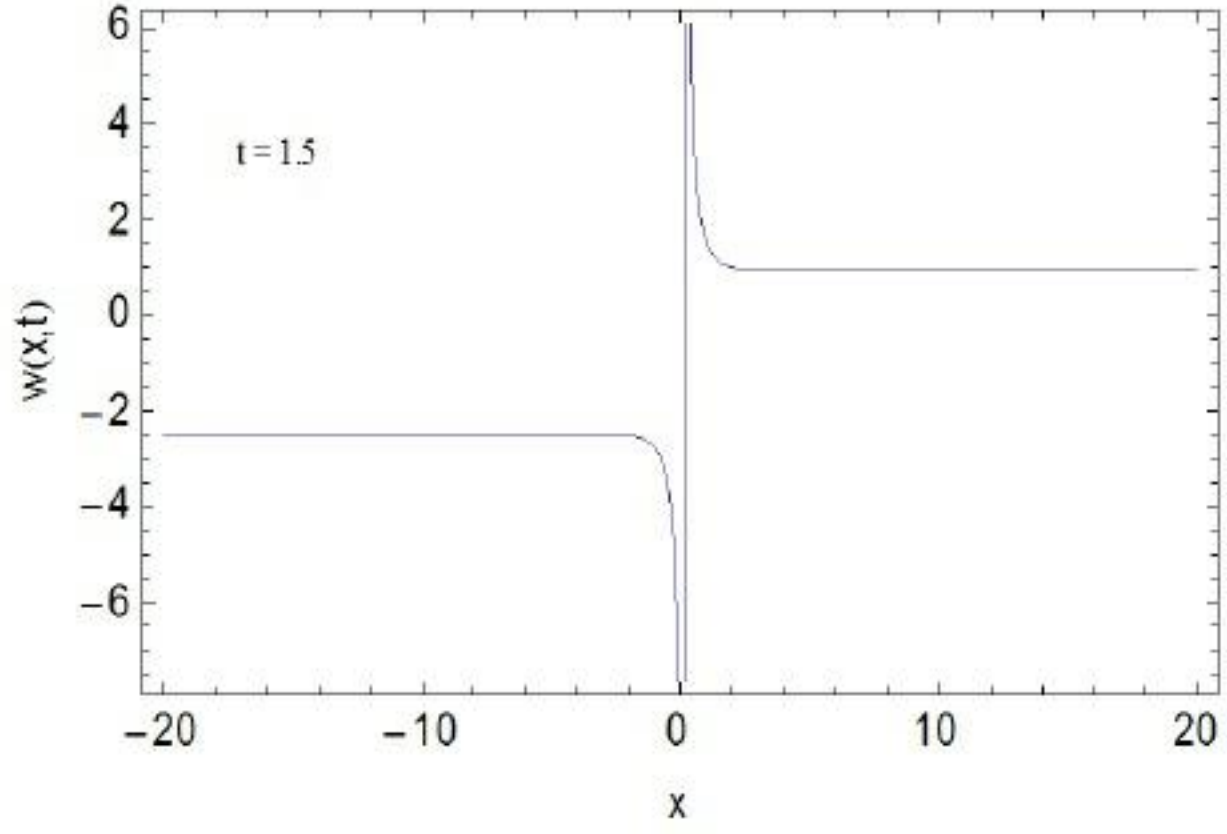
Şekil 8.1. (8.28) ile elde edilen $u(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, burada $A = 2, B = C = 1, k = 0.05, c_1 = c_2 = 0.1$ olarak alınmıştır.





Şekil 8.2. (8.29) ile elde edilen $v(x,t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, burada $A = 2, B = 1, C = 0.5, k = 0.01, c_1 = c_2 = 0.1, b_1 = 0.5$ olarak alınmıştır.





Şekil 8.3. (8.30) ile elde edilen $w(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli,

$$A = 2, B = 1, C = 0.5, k = 0.1, c_1 = c_2 = 0.1, b_1 = 0.5$$

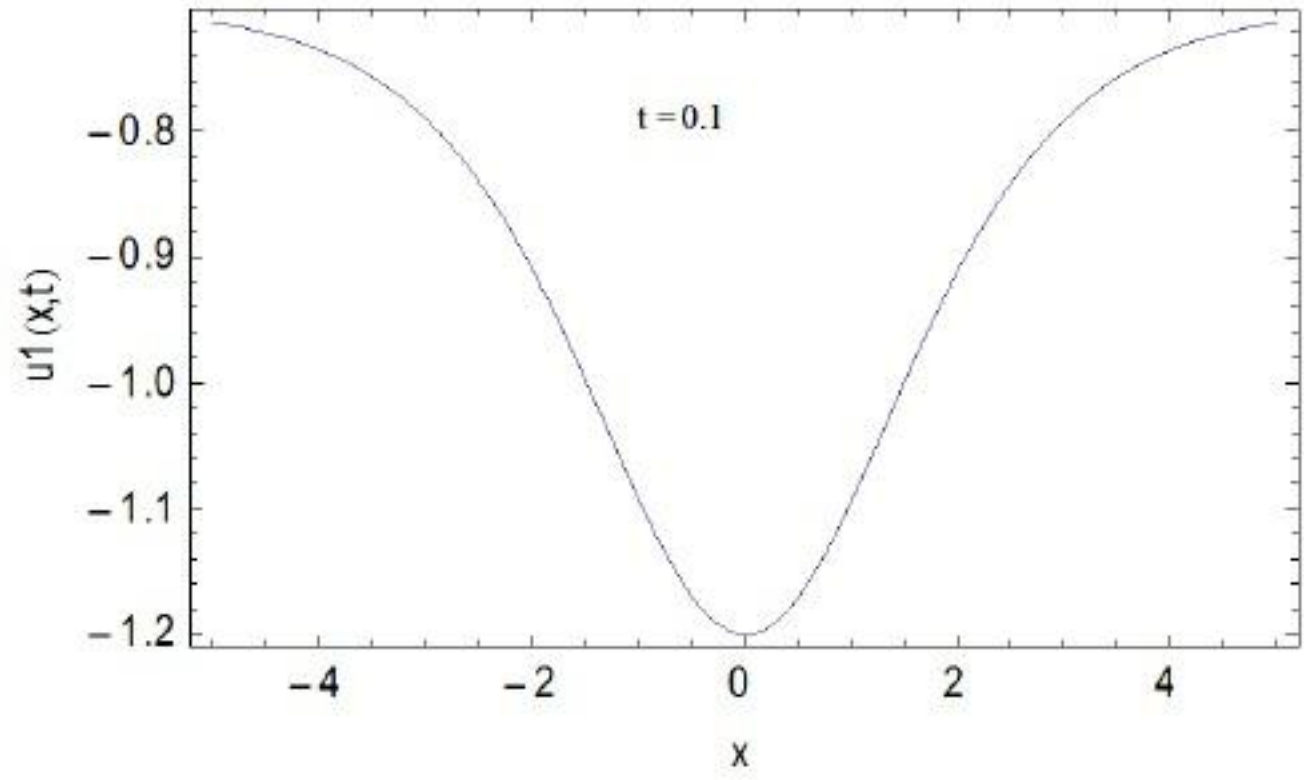
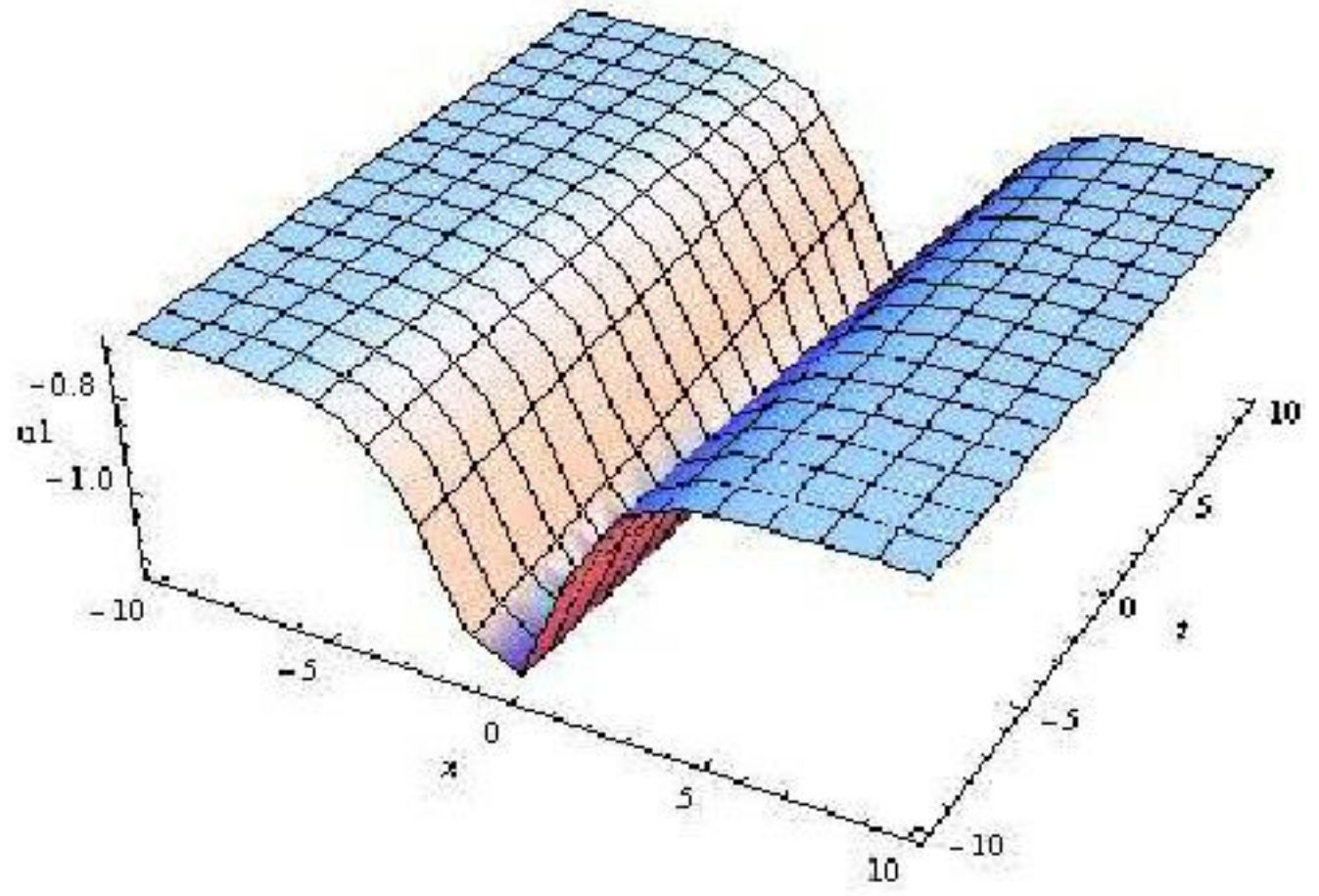
(8.28)-(8.30) denklemlerinde $-c_1 = c_2$ alınırsa

$$u(x, t) = \frac{1}{3}(-2A(1-C) - k) - \frac{B^2}{2} \left[1 - \Delta \tanh^2 \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi \right], \quad (8.31)$$

$$v(x, t) = \frac{b_1 B}{2(1-C)} \left[1 + \sqrt{\Delta} \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi \right], \quad (8.32)$$

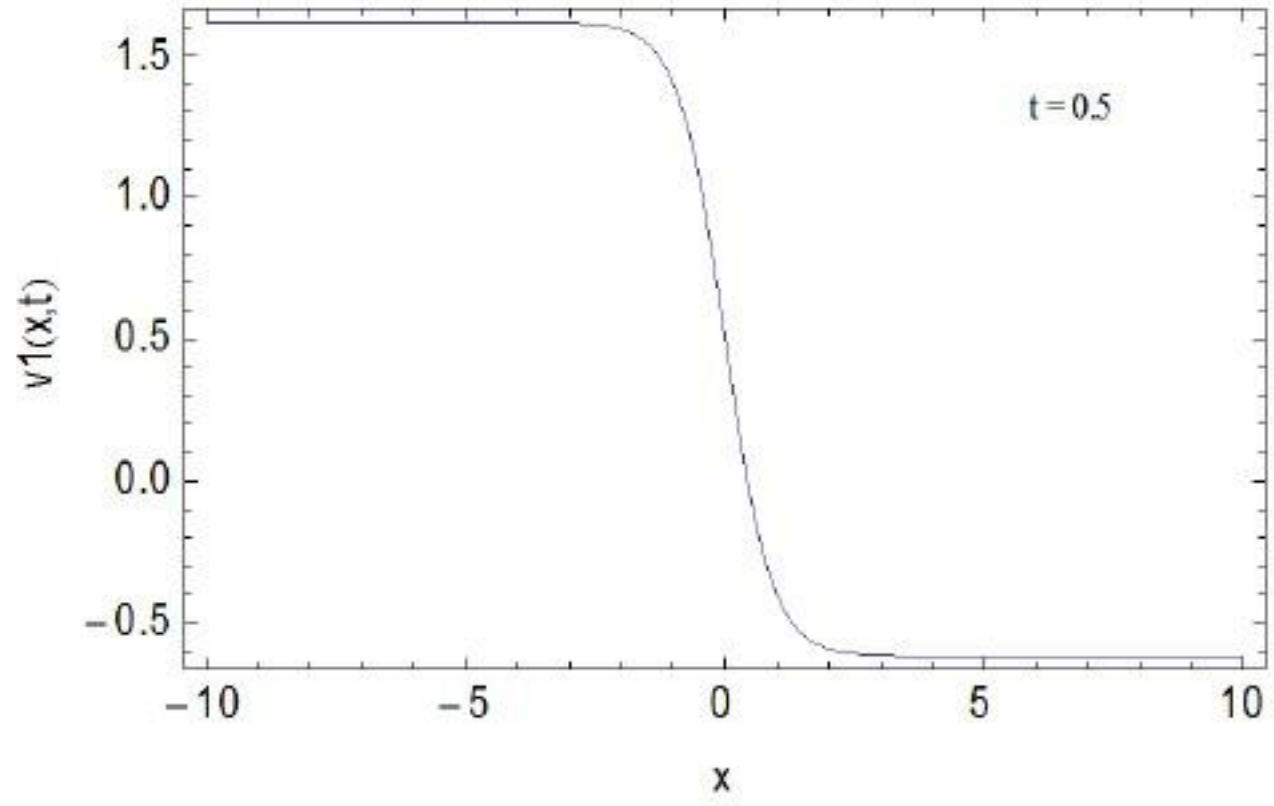
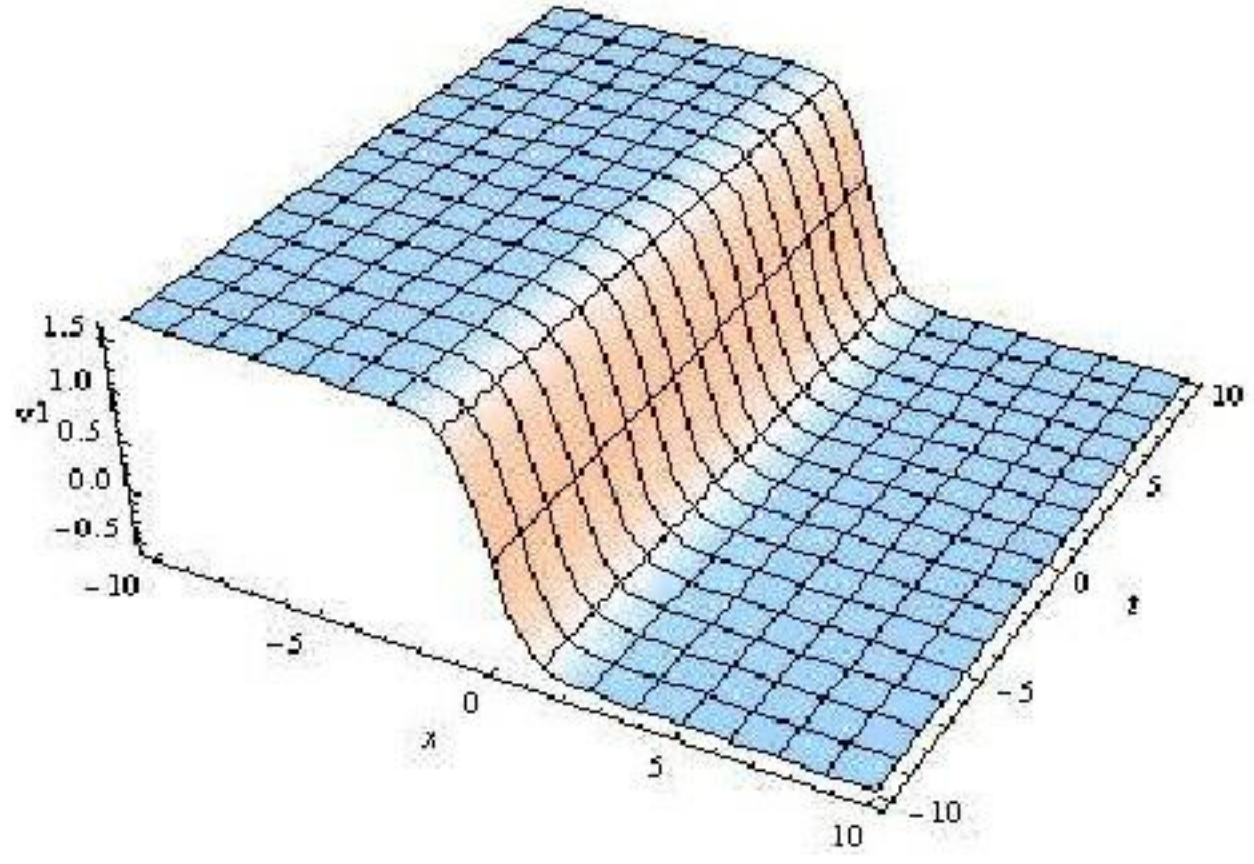
$$w(x, t) = \frac{B(1-C)(-B^2 - 4A(1-C) + 4k)}{6b_1} \left[1 - \sqrt{\Delta} \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi \right], \quad (8.33)$$

soliton çözümleri bulunur.



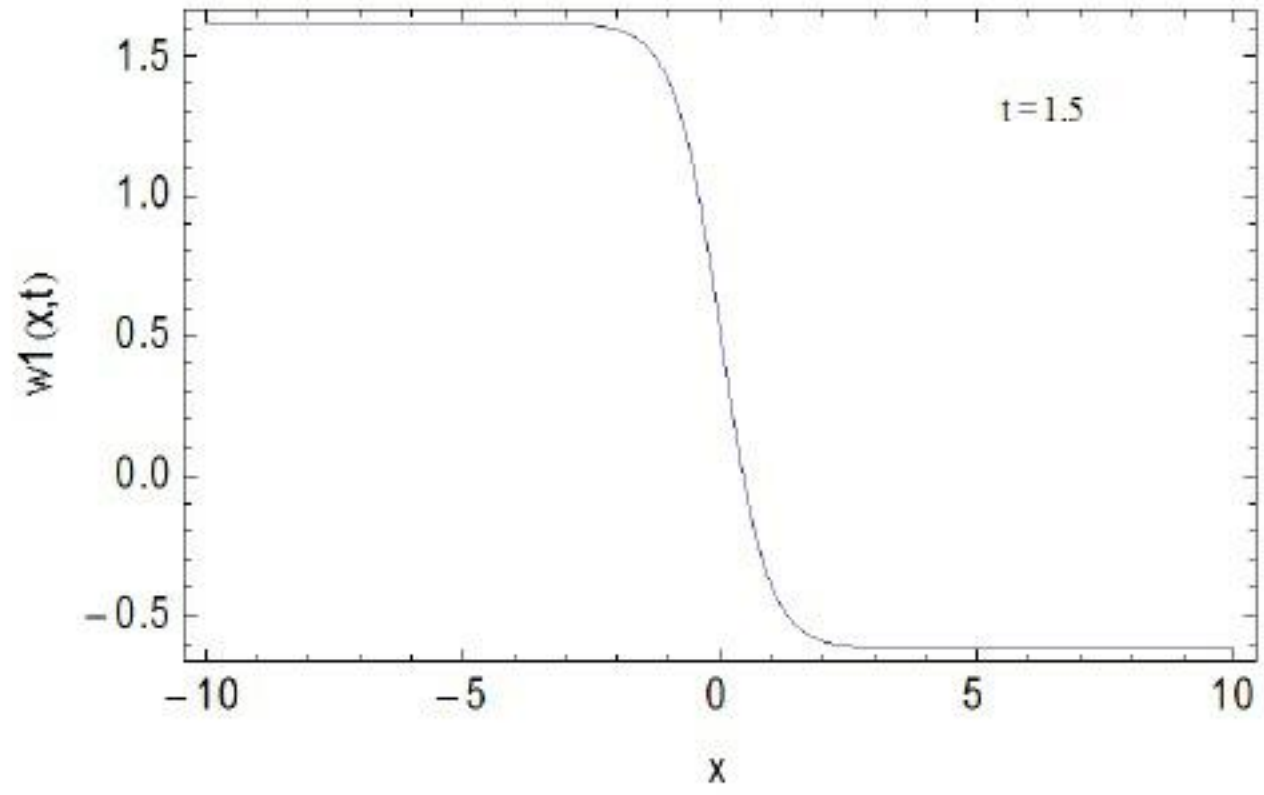
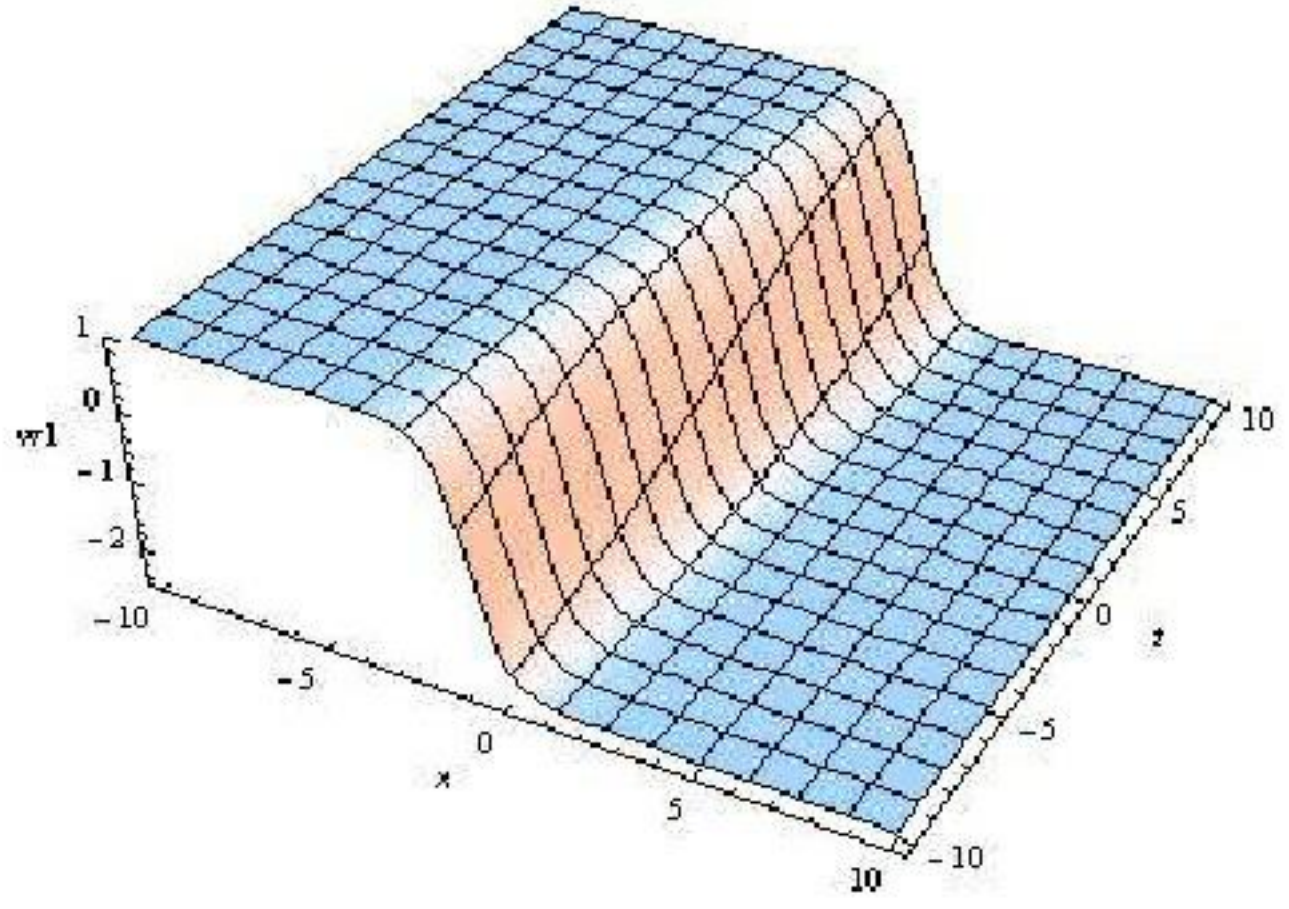
Şekil 8.4. (8.31) ile elde edilen $u(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, burada

$A = 2, B = C = 1, k = 0.05, c_1 = c_2 = 0.1$ olarak alınmıştır.



Şekil 8.5. (8.32) ile elde edilen $v(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, burada

$A = 2, B = 1, C = 0.5, k = 0.01, c_1 = c_2 = 0.1, b_1 = 0.5$ olarak alınmıştır.



Şekil 8.6. (8.33) ile elde edilen $w(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, burada

$A = 2, B = 1, C = 0.5, k = c_1 = c_2 = 0.1$ olarak alınmıştır.

(8.31) denkleminde $\tanh^2 y = 1 - \sec^2 h^2 y$ bağıntısını kullanırsak

$$u(x, t) = \frac{1}{3}(-2A(1-C) - k) + \frac{B^2}{2}(\Delta - 1) - \frac{B^2}{2}\Delta \sec^2 h^2 \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi, \quad (8.34)$$

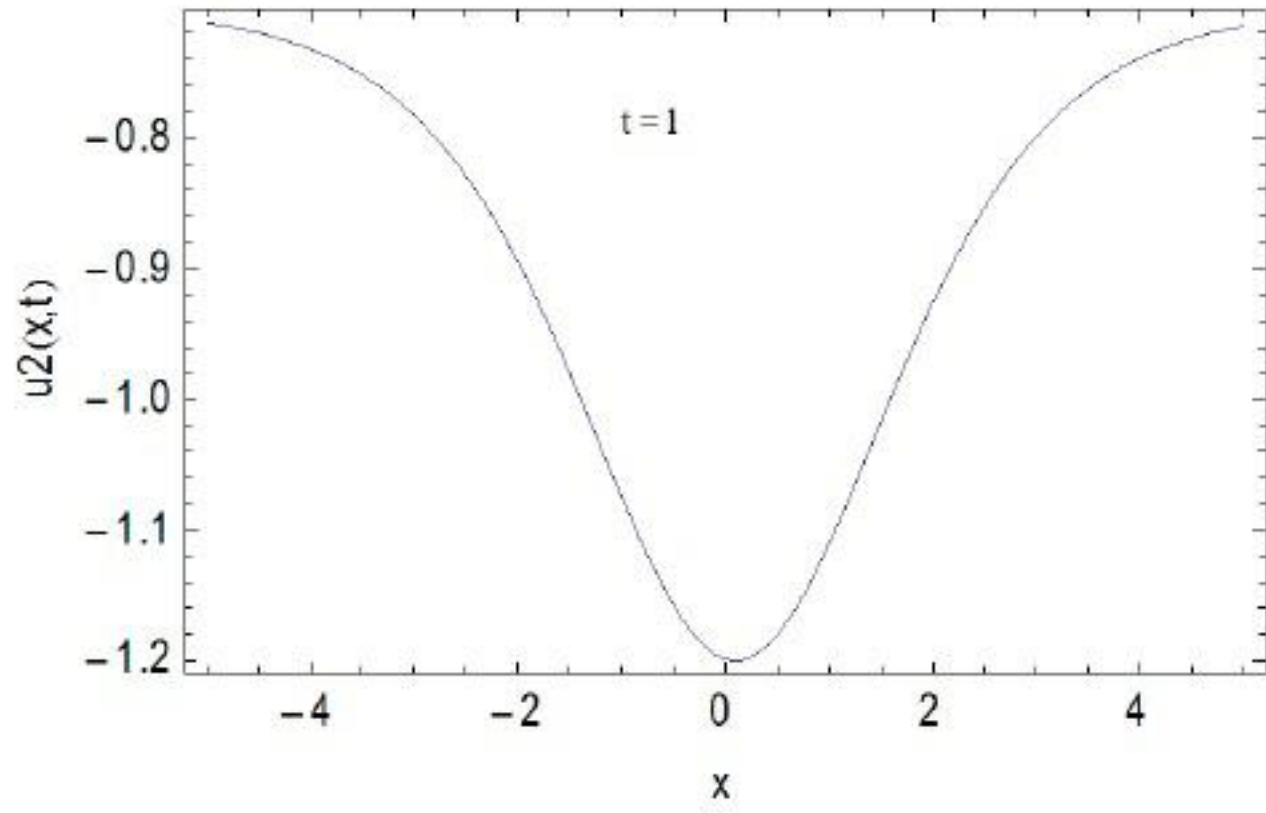
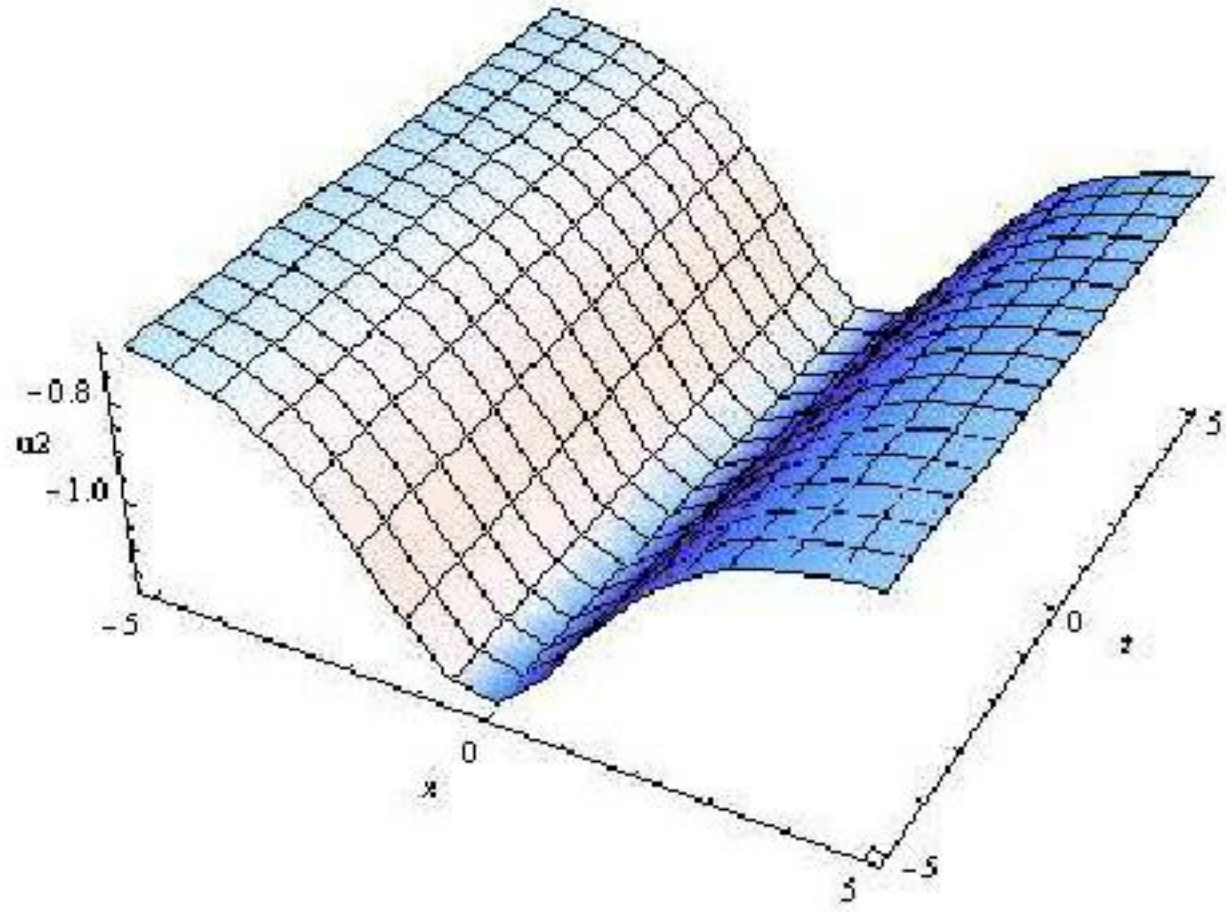
bir diğer tek dalga çözümü elde edilir. Tekrar (8.28)-(8.30) denklemlerinde $c_1 = c_2$ alınırsa

$$u(x, t) = \frac{1}{3}(-2A(1-C) - k) - \frac{B^2}{2} \left[1 - \Delta \coth^2 \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi \right], \quad (8.35)$$

$$v(x, t) = \frac{b_1 B}{2(1-C)} \left[1 + \sqrt{\Delta} \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi \right], \quad (8.36)$$

$$w(x, t) = \frac{B(1-C)(-B^2 - 4A(1-C) + 4k)}{6b_1} \left[1 - \sqrt{\Delta} \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi \right], \quad (8.37)$$

bulunur.



Şekil 8.7. (8.34) ile elde edilen $u(x, t)$ soliton çözümünün üç ve iki boyutlu şekli, burada

$A = 2, B = C = 1, k = 0.05, c_1 = c_2 = 0.1$ olarak alınmıştır.

2. Durum:

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{3} - 2A(1 - C) - k \right) - \frac{B^2}{2} \left[1 + \Delta \left[\frac{ic_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi - c_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi}{ic_1 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi + c_2 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi} \right]^2 \right], \quad (8.38)$$

$$v(x, t) = \frac{b_1 B}{2(1 - C)} \left[1 + \sqrt{-\Delta} \frac{ic_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi - c_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi}{ic_1 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi + c_2 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi} \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.39)$$

$$w(x, t) = \frac{B(1 - C)(-B^2 - 4A(1 - C) + 4k)}{6b_1} \left[1 - \sqrt{-\Delta} \frac{ic_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi - c_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi}{ic_1 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi + c_2 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi} \right], \quad (8.40)$$

3. Durum:

$$u(x, t) = \frac{1}{3} (-2A(1 - C) + B^2 - k) + 2\Delta \left[\frac{c_1 \cos(\sqrt{\Delta} \xi) + c_2 \sin(\sqrt{\Delta} \xi)}{c_1 \sin(\sqrt{\Delta} \xi) - c_2 \cos(\sqrt{\Delta} \xi)} \right]^2, \quad (8.41)$$

$$v(x, t) = \frac{b_1 \sqrt{\Delta}}{(1 - C)} \left[\frac{c_1 \cos(\sqrt{\Delta} \xi) + c_2 \sin(\sqrt{\Delta} \xi)}{c_1 \sin(\sqrt{\Delta} \xi) - c_2 \cos(\sqrt{\Delta} \xi)} \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.42)$$

$$w(x, t) = \frac{4(1 - C)(A(1 - C) + k)}{3b_1} \left[\sqrt{\Delta} \frac{c_1 \cos(\sqrt{\Delta} \xi) + c_2 \sin(\sqrt{\Delta} \xi)}{c_1 \sin(\sqrt{\Delta} \xi) - c_2 \cos(\sqrt{\Delta} \xi)} \right], \quad (8.43)$$

4. Durum:

$$u(x, t) = \frac{1}{3} (-2A(1 - C) + B^2 - k) - 2\Delta \left[\frac{ic_1 \cosh(\sqrt{-\Delta} \xi) - c_2 \sinh(\sqrt{-\Delta} \xi)}{ic_1 \sinh(\sqrt{-\Delta} \xi) - c_2 \cosh(\sqrt{-\Delta} \xi)} \right]^2, \quad (8.44)$$

$$v(x, t) = \frac{b_1 \sqrt{\Delta}}{(1 - C)} \left[\frac{ic_1 \cosh(\sqrt{-\Delta} \xi) - c_2 \sinh(\sqrt{-\Delta} \xi)}{ic_1 \sinh(\sqrt{-\Delta} \xi) - c_2 \cosh(\sqrt{-\Delta} \xi)} \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.45)$$

$$w(x, t) = \frac{4(1 - C)(A(1 - C) + k)}{3b_1} \left[\sqrt{-\Delta} \frac{ic_1 \cosh(\sqrt{-\Delta} \xi) - c_2 \sinh(\sqrt{-\Delta} \xi)}{ic_1 \sinh(\sqrt{-\Delta} \xi) - c_2 \cosh(\sqrt{-\Delta} \xi)} \right]. \quad (8.46)$$

(8.38)-(8.40) soliton çözümlerinde sırasıyla $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ ve $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ alınır,

$$u_1(x, t) = \frac{1}{3} - 2A(1 - C) - k - \frac{B^2}{2} \left[1 - \Delta \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (x - kt) \right]^2, \quad (8.47)$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{3} - 2A(1 - C) - k - \frac{B^2}{2} \left[1 + \Delta \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (x - kt) \right]^2, \quad (8.48)$$

$$v_1(x, t) = \frac{b_1 B}{2(1 - C)} \left[1 - \sqrt{-\Delta} \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (x - kt) \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.49)$$

$$v_2(x, t) = \frac{b_1 B}{2(1 - C)} \left[1 + \sqrt{-\Delta} \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (x - kt) \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.50)$$

$$w_1(x, t) = \frac{B(1 - C)(-B^2 - 4A(1 - C) + 4k)}{6b_1} \left[1 + \sqrt{-\Delta} \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (x - kt) \right], \quad (8.51)$$

$$w_2(x, t) = \frac{B(1 - C)(-B^2 - 4A(1 - C) + 4k)}{6b_1} \left[1 - \sqrt{-\Delta} \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (x - kt) \right], \quad (8.52)$$

elde edilir. (8.41)-(8.43) çözümlerinde sırasıyla $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ ve $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ alınır,

$$u_3(x, t) = \frac{1}{3} (-2A(1 - C) + B^2 - k) - 2\Delta \tan^2 \left[\sqrt{\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.53)$$

$$u_4(x, t) = \frac{1}{3} (-2A(1 - C) + B^2 - k) + 2\Delta \cot^2 \left[\sqrt{\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.54)$$

$$v_3(x, t) = -\frac{b_1 \sqrt{\Delta}}{(1 - C)} \tan \left[\sqrt{\Delta} (x - kt) \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.55)$$

$$v_4(x, t) = \frac{b_1 \sqrt{\Delta}}{(1 - C)} \cot \left[\sqrt{\Delta} (x - kt) \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.56)$$

$$w_3(x, t) = -\frac{4(1 - C)(A(1 - C) + k)}{3b_1} \sqrt{\Delta} \tan \left[\sqrt{\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.57)$$

$$w_4(x, t) = \frac{4(1-C)(A(1-C)+k)}{3b_1} \cot \left[\sqrt{-\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.58)$$

soliton çözümleri bulunur. (8.44)-(8.46) denklemlerinde tekrar sırasıyla $c_1 = 0, c_2 \neq 0$

ve $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ alınırsa,

$$u_5(x, t) = \frac{1}{3} (-2A(1-C) + B^2 - k) - 2\Delta \tanh^2 \left[\sqrt{-\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.59)$$

$$u_6(x, t) = \frac{1}{3} (-2A(1-C) + B^2 - k) - 2\Delta \coth^2 \left[\sqrt{-\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.60)$$

$$v_5(x, t) = \frac{b_1 \sqrt{-\Delta}}{(1-C)} \tanh \left[\sqrt{-\Delta} (x - kt) \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.61)$$

$$v_6(x, t) = \frac{b_1 \sqrt{-\Delta}}{(1-C)} \coth \left[\sqrt{-\Delta} (x - kt) \right], \quad b_1 \neq 0, \quad (8.62)$$

$$w_5(x, t) = \frac{4(1-C)(A(1-C)+k)}{3b_1} \sqrt{-\Delta} \tanh \left[\sqrt{-\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.63)$$

$$w_6(x, t) = \frac{4(1-C)(A(1-C)+k)}{3b_1} \sqrt{-\Delta} \coth \left[\sqrt{-\Delta} (x - kt) \right], \quad (8.64)$$

şeklindeki farklı solitonlar elde edilir.

Bu bölümde, (3.5) ile verilen HSKdV denkleminin analitik çözümleri Liu ve diğerleri [136] tarafından ortaya konan iyileştirilmiş $(\frac{G'}{G})$ - açılım metodu yardımıyla yapıldı. Bu metodla (3.5) denkleminin kompleks, tek dalga, soliton, trigonometrik ve singüler çözümlerini elde ettik. Ayrıca bu çözümlerin (3.5) sistemini sağladığını Mathematica programı yardımıyla gördük.

Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi analitik olarak pek çok yazar tarafından çeşitli yöntemler kullanılarak çözülmüştür. Şöyleki; Zou ve Zhang [47] tarafından $(\frac{G'}{G})$ - açılım yöntemi kullanılarak birleştirilmiş mKdV ve HSKdV denklemleri çözülmüştür. Feng ve Li [137] tarafından Fan sub-denklemler metodu kullanılarak dengeleme terimleri $m = 2$ ve $m = 1$ alınarak çözüldü. Hong

[49], Jakobi eliptik fonksiyon metodu yardımıyla HSKdV denkleminin pek çok periyodik dalga çözümlerini buldu. Feng ve Zhang [50], yardımcı fonksiyon metoduyla HSKdV denkleminin Jakobi eliptik çözümlerini elde ettiler, Yan [52], HSKdV denklemin α, β, γ, A ve B belirlenecek sabitler olmak üzere $u = \alpha v^2 + \beta v + \gamma$, $w = Av + B$ dönüşümlerini uygulayarak genişletilmiş Jakobi eliptik fonksiyon metodu yardımıyla dalga çözümlerini bulmuştur.

Bizim elde ettiğimiz çözümlerde katsayıların uygun seçilmesiyle yukarıda bahsedilen yöntemlerle bulunan solitonların bazılarını ve ilaveten farklı çözümlerde elde ettik.

9. BÖLÜM

9. SONUÇ VE TARTIŞMA

Doğadaki fiziksel olayların matematiksel modellerle ifade edilerek yaklaşık ve analitik çözümlerinin bulunması önemlidir. Çünkü bu çözümler yardımıyla modellenen olay hakkında daha detaylı bilgiler elde edilebilir. Bu nedenle lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem ve sistemlerin çözümlerinin bulunması fen ve mühendislikte önemli bir yere sahiptir. Son zamanlarda bilim adamları başlangıç ve sınır şartlı kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerin yaklaşık ve analitik çözümlerini bulmak için pek çok yöntem geliştirdiler. Bu metotlar yardımıyla lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerin dalga çözümleri bulunmaya çalışıldı. Dalga bir ortamda yada boşlukta yayılan ve enerjinin taşınmasını sağlayan bir titreşimdir. Bu dalgalar suda ilerleyen yüzey dalgaları, ses ve ışık dalgalarıdır. Dalgalarda titreşimler sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak hareket ederler. Ses dalgaları ilerleyebileceği bir ortama ihtiyaç duymadan boşlukta yayılabilirler.

Bu tezde, iki lineer olmayan dalganın girişimini ifade eden HSCkV denklemini ele aldık. Bu denklemin yaklaşık ve analitik çözümlerini bulmaya çalıştık. Literatürde var olan Adomian ayrışım ve Varyasyonel iterasyon yöntemlerine yakınsaklık kontrol parametresi olan $h \neq 0$ terimini ilave ederek GADM ve GVIM yöntemlerini elde ettik. h parametresi sayesinde x ve t nin küçük ve büyük değerleri için hassas sonuçlar bulduk. Çünkü standart ADM ve VIM yöntemlerinde yakınsaklık aralığı küçük olduğu için x ve t nin hem küçük hem büyük değerlerinde iyi sonuçlar elde etmek mümkün değildir.

Başlangıç şartlı HSCkV denklemini GADM ve GVIM ile yaklaşık olarak çözdük ve literatürde var olan HPM ve DTM ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırdık. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerin çözümleri lineer denklemlere göre daha zordur. Bu nedenle bu tip denklemlerin seri çözümlerinin bulunmasına ihtiyaç duyulur. Yarı analitik metotlar olan Adomian ayrışım metodu (ADM), Homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ve varyasyonel iterasyon metodu (VIM) ile yaklaşık çözüm aranırken x ve t bağımsız değişkenlerinin ya küçük yada büyük değer-

lerinde analitik çözümden uzaklaşan çözümler elde edilir. Biz durumu ortadan kaldırmak için ADM ve VIM yöntemlerine yakınsaklık kontrol parametresi olan $h \neq 0$ terimini ilave ettik ve bu yöntemleri, sırasıyla GADM ve GVIM olarak adlandırdık. Bulunan tablo ve şekillere bakıldığı zaman diferansiyel denklemde bulunan bağımsız değişkenlerin çoğu değeri için seri çözümler analitik çözüme hızlı yakınsayan sonuçlar vermişlerdir.

Lineer olmayan denklem veya sistemler yarı-analitik metotlarla çözülürken denklemdeki lineer olmayan terimin sayısı ve lineer olmayanlığın kuvvetliliği çözüm sırasında bazı zorlukların ortaya çıkmasına neden olabilir. Bu yüzden ADM ve HAM yöntemleri kullanılırken bu zorlukları aşmak için bazı özel polinomlar kullanılır. Lineer olmayan terim sayısına ve lineer olmayanlığın durumuna göre çözüm serisinin bir kaç terimi ile iyi sonuçlar bulunamayabilir. Bu durumda çözüm serisinin daha fazla teriminin hesaplanması gerekebilir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerin analitik çözümlerini bulmak için pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerinin soliton çözümlerini bulmak için kullanılır. Bu metotların işleyişi dengeleme terimi olarak adlandırılan en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılmasına dayanır. Biz bu çalışmada HSKdV denklemini iyileştirilmiş $(G'/G) -$ açılım yöntemiyle analitik olarak çözdük. Bu yöntemin diğer analitik yöntemlerden farkı kısmi diferansiyel denklem bir dönüşüm yardımıyla adi diferansiyel denkleme dönüştürüldükten sonra kullanılan yardımcı denklemin ikinci basamaktan lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem olması ve bu denklemin çözümlerine dayanmasıdır. Bu çalışmada iyileştirilmiş $(G'/G) -$ açılım yöntemiyle HSKdV denkleminin pek çok soliton çözümlerini elde ettik. Bu çözümler arasında tek dalga, singüler soliton, trigonometrik ve üstel tipten çözümleri sayabiliriz. Bulunan solitonların bir çoğu HSKdV denklemi için literatürde diğer yöntemlerle elde edilmeyen çözümlerdir. Bu tip çözümler yardımıyla HSKdV denkleminde ait karmaşık olayların açıklanması mümkün olabilir.

References

- [1] **Hirota, R., Satsuma, J.** 1981, Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation, Phys. Lett. A, **85**, 407-408.
- [2] **Adomian, G.** 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, **San Diego**.
- [3] **Adomian, G.** 1994, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, **Boston**.
- [4] **Abbaoui, K., Cherruault, Y.** 1994, Convergence of Adomians method applied to nonlinear equations, Math. Comput. Modelling, **20 (9)**, 69-73.
- [5] **Abbaoui, K., Cherruault, Y.** 1995, New ideas for proving convergence of decomposition methods, Comp. Math. Applic., **29(7)**, 103-108.
- [6] **Cherruault, Y.** 1989, Convergence of Adomians method, Kybernetes, **18(2)**, 31-38.
- [7] **Wazwaz, A.M.** 2000, A reliable technique for solving linear and nonlinear Schrodinger equations by Adomian decomposition method, Bull. Inst. Math. Academia Sinica, **29(2)**, 125-134.
- [8] **Wazwaz, A.M.** 2001, Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by Adomian decomposition method, Chaos, Solitons and Fractals, **12**, 2283-2293.
- [9] **Wazwaz, A.M.** 2009, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, Springer, Higher Education Press., **Berlin**.

- [10] **Cherruault, Y., Inc, M., Abbaoui, K.** 2002, On the solution of the KdV equation by the decomposition method, *Kybernetes*, **31**, 766-772.
- [11] **Inc, M., Cherruault, Y.,** 2003, A new approach to travelling wave solution of a fourth-order semi-linear diffusion equation, *Kybernetes*, **32(9/10)**, 1492-1503.
- [12] **Inc, M., Evans, D. J.,** 2003, The decomposition method for solving of a class of singular two-point boundary value problems, *Int. J. Computer Math.* **80(7)**, 869-882.
- [13] **Bauogoffa, L., Rach, R. C., Mennouni, A.,** 2011, A convenient technique for solving linear and nonlinear Abel integral equations by the ADM, *Appl. Math. Comput.* **218(5)**, 1785-1793.
- [14] **Duan, J. S., Rach, R. C., Wazwaz, A. M.,** 2013, Solution of the model of beam type micro and nano-scale electrostatic actuators by a new modified ADM for nonlinear boundary value problems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **49**, 159-169.
- [15] **Wazwaz, A.M., Rach, R. C., Duan, J. S.,** 2013, Adomian decomposition method for solving the volterra integral form of the Lane-Emden equation with initial values and boundary conditions, *Appl. Math. Comput.* **219(10)**, 5004-5019.
- [16] **He, J. H.,** 1998, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*, **167(1)**, 57-68.
- [17] **He, J. H.,** 2000, Exact resonance of nonlinear vibration of motor-bearings system without small parameter, *Mech. Resarch Commun.*, **27(4)**, 451-456.
- [18] **Inc, M.,** 2007, Numerical doubly-periodic solution of the (2+1)-dimensional Boussinesq equation with initial conditions by The VIM, *Phys. Lett. A*, **366(1)**, 20-24.
- [19] **Inc, M.,** 2008, The approximate and exact solutions of the space and time-fractional Burgers equations with initial conditions by VIM, *J. Math. Anal. Applic.*, **345(1)**, 476-484.

- [20] **Elsaid, A.**, 2010, The VIM for solving Riesz fractional partial differential equations, *Comp. Math. Applic.*, **60**(7), 1940-1947.
- [21] **Lu, J.**, 2011, An analitical approach to the Formberg-Whitham type equations by using the VIM, *Comp. Math. Applic.*, **61**(8), 2010-2013.
- [22] **Rezazadeh, G., Madinei, H., Shabani, R.**, 2012, Study of parametric ascillation of an electrostatically actuated microbeam using VIM, *Appl. Math. Modelling*, **36**(1), 430-443.
- [23] **He, J. H.**, 2012, Notes on the optimal VIM, *Appl. Math. Lett.*, **25**(10), 1579-1581.
- [24] **Huang, Y. J., Liu, H. K.**, 2013, A new modification of the VIM for Van Der Pol equations, *Appl. Math. Modelling*, **37**(16), 8118-8130.
- [25] **Hu, X. B., Mu, W. X.**, 2002, Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, *Phys. Lett. A*, **293**, 161-165.
- [26] **Shang, Y.**, 2007, Backlund transformation, lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Appl. Math. Comput*, **187**, 1286-1297.
- [27] **Abourabia, A. M., El-Horbaty, M.M.**, 2006, On solitary wave solutions for the two-dimensional nonlinear modified KdV-Burger equation, *Chaos, Soliton and Fractals*, **29**, 354-364.
- [28] **Bock, T. L., Kruskal, M. D.**, 1979, A two-parameter miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Phys. Lett. A*, **74**, 173-176.
- [29] **Drazin, P. G., Jhanson, R. S.**, 1989, *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, **Cambridge**.
- [30] **Matveev, V. B., Salle, M. A.**, 1991, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, **Berlin**.

- [31] **Cariello, F., Tabor, M.**, 1989, Painleve expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica, D* **39**, 77-94.
- [32] **Fan, E.**, 2000, Two new applications of the homogeneous balance method, *Phys. Lett. A*, **265**, 353-357.
- [33] **Chuntao, Y.**, 1996, A simple transformation for nonlinear waves, *Phys. Lett. A*, **224**, 77-84.
- [34] **Wang, M. L., Li, X. Z., Zhang, J. L.**, 2008. The $\frac{G'}{G}$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A*, **372**, 417-423.
- [35] **Zhao, G. Z., Yu, X.J., Xu, Y., Wu, D.**, 2010, Approximate analytic solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation and a coupled mKdV equation, *Chin. Phys. B* **19**(18), 080204.
- [36] **Raslan, K. R.**, 2004. The decomposition method for a Hirota-Satsuma coupled KdV equation and a coupled mKdV equation, *Appl. Math. Comput.* **81**, 1497-1505.
- [37] **Elgaraghi, A., Abdou, M. A.**, 2010, New travelling wave solutions for two generalized Hirota-Satsuma coupled KdV systems, *Studies Non. Sci.* **1**(2), 29-36.
- [38] **Fan, E.**, 2001, Soliton solutions for a generalized HSKdV equation and a coupled mKdV equation, *Phys. Lett. A*, **282**, 18-22.
- [39] **Abazari, R., Abazari, M.**, 2012, Numerical simulation of generalized HSKdV equation by DTM and comparison with DTM, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **17**, 619-629.
- [40] **Kangalgil, F., Ayaz, F.**, 2010, Solitary wave solutions for HSKdV equation and coupled mKdV equation by DTM, *Arabian J. Sci. Eng.*, **35**(2D), 203-213.
- [41] **Darvishi, M. T., Khani, F., Kheybari, S.**, 2007, Spectral collocation solution of a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, *Int. J. Computer Math.*, **80**(14), 541-551.

- [42] **Lu, D., Hong, B., Tian, L.**, 2007, New explicit exact solutions for the generalized coupled Hirota-Satsuma KdV system, *Comp. Math. Applic.*, **53**, 1181-1190.
- [43] **Ganji, D. D., Rafei, M.**, 2006, Solitary wave solutions for a generalized HSKdV equation by homotopy perturbation method, *Phys. Lett. A*, **356**, 131-137.
- [44] **Abbasbandy, S.**, 2007. The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, *Phys. Lett. A*, **361**, 6, 478-483.
- [45] **Zedan, H. A.**, 2009, New approach for tanh and extended tanh methods with applications on Hirota-Satsuma equations, *Comp. Appl. Math.*, **28(1)**, 1-14.
- [46] **Xie, M., Ding, X.**, 2011, A new method for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, *Appl. Math. Comput.*, **217**, 7117-7125.
- [47] **Zuo, J., Zhang, Y.**, 2011, Application of the $\frac{G'}{G}$ -expansion method to solve coupled MKdV equations and coupled Hirota-Satsuma coupled KdV equations, *Appl. Math. Comput.*, **217**, 5936-5941.
- [48] **Feng, D., Kezan, L.**, 2011, Exact traveling wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by Fan sub-equation method, *Phys. Lett. A*, **375**, 2201-2210.
- [49] **Hong, B.**, 2010, New exact Jacobi elliptic functions solutions for the generalized coupled Hirota-Satsuma KdV system, *Appl. Math. Comput.*, **217**, 472-479.
- [50] **Feng, D., Zhang, H.**, 2008, A new auxiliary function method for solving the generalized coupled Hirota-Satsuma KdV system, *Appl. Math. Comput.*, **200**, 283-288.
- [51] **Yu, Y., Wang, Q., Zhang, H.**, 2005, The extended Jacobi elliptic function method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, **26**, 1415-1421.

- [52] **Yan, Z.**, 2003, The extended Jacobian elliptic function expansion method and its application in the generalized Hirota–Satsuma coupled KdV system, *Chaos, Solitons and Fractals*, **15**, 575–583.
- [53] **Khater, A. H., Temsah, R. S., Callebaut, D. K.**, 2008, Numerical solutions for some coupled nonlinear evolution equations by using spectral collocation method, *Appl. Math. Modelling*, **48**, 1237-1253.
- [54] **Assas, M. B.**, 2009, Numerical simulation of the generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equations by variational iteration method, *Int. J. Nonlinear Sci.*, **7**, 67-74.
- [55] **Arife, A. S., Vanani, S. K., Yıldırım, A.**, 2011, Numerical solution of Hirota-Satsuma coupled KdV and a coupled MKdV equation by means of homotopy analysis method, *World Appl. Sci. J.*, **13 (11)**, 2271-2276.
- [56] **Debnath, L.**, 1998. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhauser, **Boston**.
- [57] **Koca, K.**, 2001. *Kismi Türevli Denklemler*, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, **Ankara**.
- [58] **Pala, Y.**, 2006, *Modern Fiziğin Uygulamaları*, Nobel Yayıncılık, **Ankara**.
- [59] **Anar, İ. E.**, 2005, *Kısmi Diferansiyel Denklemler*, Palme Yayıncılık, **Ankara**.
- [60] **Myint-U, T., Debnath, L.**, 2006. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhauser, **Boston**.
- [61] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.**, 1957. *Elements of The Theory of Functions and Functional Analysis*, Graylock Presses, **Rochester, N. Y.**
- [62] **Başkan, T.**, 2010. *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Dora Yayıncılık. **Ankara**.
- [63] http://en.wikipedia.org/wiki/well-posed_problem. well-posed problem, 20 Aralık 2011.

- [64] **Kirsh, A.**, 1996. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer, Berlin.
- [65] **Uğurlu, Y.**, 2010. Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin periyodik dalga çözümleri, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü-Matematik Bölümü, Elazığ.
- [66] **Karagöz, İ.**, 2008. Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [67] **Boussinesq, J.**, 1871. Theorie de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, Comptes rendus, **72**, 755-759.
- [68] **Rayleigh, L.**, 1876. On waves, Phil. Mag. **1**, 257-279.
- [69] **Korteweg, D. J., de Vries, G.**, 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, Philosophical Magazine, **39**, 5, 422-443.
- [70] **Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S.**, 1955. Studies of nonlinear problems, Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A.C. Newell) Amer. Math. Soc., **15**, 143-156.
- [71] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states , Physical Review Letters, **15**, 240-243.
- [72] **Wazwaz, A. M.**, 2008. The KdV Equation, Elsevier, **4**, 485-568.
- [73] **Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M.**, 1974. Korteweg-de Vries equation and generalizations, Methods for exact solution, Communications on Pure and Applied Mathematics, **27**, 97-133.
- [74] **Hirota, R.**, 1971. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, Physical Review Letters, **27**, 1192-1194.

- [75] **Satsuma, J., Hirota, R.**, 1982. A coupled KdV equations one case of the four-reduction of the KP hierarchy, *Journal of the Physical Society of Japan*, **51**, 10, 3390-3397.
- [76] **Hirota, R.**, 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **14**, 805-809.
- [77] **Zabusky, N.J., Galvin, C. J.**, 1971. Shallow water waves, the KdV equation and solitons, *J. Fluid Mech.*, **47**, 811-824.
- [78] **Hammack, J. L., Segur, H.**, 1974. The Korteweg-de Vries equation and water waves, *J. Fluid Mech.*, **65**, 289-314.
- [79] **Weidman, P. D., Maxworthy, T.**, 1978. Experiments on strong interactions between solitary waves, *J. Fluid Mech.*, **85**, 417-431.
- [80] **Hirota, R.**, 1980. *Direct Methods in Soliton Theory, Solitons*, Springer, **Berlin**.
- [81] **Ablowitz, M., Segur, H.**, 1981. *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM, **Philadelphia**.
- [82] **Öziş, T., Yıldırım, A.**, 2008. Reliable analysis for obtaining exact solutions of nonlinear Schrödinger (NLS) equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, **38**, 209-212.
- [83] **Makhanhov, V. G., Fedyanin, V. K.**, 1978. Soliton-like solution of the S3-equation perturbed by resonance interaction, *Phys. Lett. A*, **68**, 169-171.
- [84] **Makhanhov, V. G.**, 1978. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems), *Phys. Rep.*, **35**, 1-128.
- [85] **Ganji, Z. Z., Ganji, D. D., Rostamiyan, Y.**, 2009. Solitary wave solutions for a time-fraction generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by an analytical technique, *Appl. Math. Modelling*, **33**, 3107-3113.

- [86] **Bin, Z.**, 2012. (G'/G) -Expansion method for solving fractional differential equations in the theory of mathematical Physics, Communications Theoretical Physics, **58**, 623-630.
- [87] **Zayed, E. M. E., Zedan, H. A., Gepreel, K. A.**, 2004. On the solitary wave solutions for nonlinear Hirota-Satsuma coupled KdV equations, Chaos, Solitons and Fractals, **22**, 285-303.
- [88] **Fan, E., Hon, B. Y. C.**, 2002. Double periodic solutions with Jacobi elliptic functions for two generalized Hirota-Satsuma coupled KdV systems, Phys Lett. A, **292**, 6, 335-337.
- [89] **Kaya, D.**, 2004. Solitary wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, Appl. Math. Comput., **147**, 1, 69-78.
- [90] **Ganji, D. D., Rafei, M.**, 2006. Solitary wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by homotopy perturbation method, Phys. Lett. A, **356**, 2, 131-137.
- [91] **Cavlak, E.**, 2013. Kesirli Kuvvetlere Sahip Kismi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemleriyle Sayısal Çözümlerinin İrdelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü-Matematik Bölümü, **Elazığ**.
- [92] **Inc, M.**, 2002. Ayrışım Metodunun Matematiksel Temelleri ve Bazı Uygulamaları, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü-Matematik Bölümü, **Elazığ**.
- [93] **Ngarhasta, N., Some, B., Abboui, K., Cherruault, Y.**, 2002. New numerical study of Adomian method applied to a diffusion model, Kybernetes, **31**, 61-75.
- [94] **Liao, S. J.**, 1992. The Proposed Homotopy Analysis Techniuqe for The Solution of Nonlinear Problems, PhD Thesis, Jiao Tong University, **Shanghai**.
- [95] **He, J. H.**, 2005. Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems, Donghua University, **Shanghai**.
- [96] **He, J.H.**, 2000. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, Appl. Math. Comput., **114**, 115-123.

- [97] **Momani, S., Abuasad, S.**, 2006. Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, **27**, 1119-1123.
- [98] **Abdou, M. A.**, 2007. The extended tanh-method and its applications for solving nonlinear physical models, *Appl. Math. Comput.*, **190** , 988–996.
- [99] **Abdou, M .A.,Soliman, A. A.**, 2005. Variational iteration method for solving Burgers' and coupled Burgers' equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **181**, 245-251.
- [100] **Momani, S., Odibat, Z.**, 2006. Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics , *Phys. Lett. A*, **355**, 271-279.
- [101] **Inc, M.**, 2007. Numerical simulation of KdV and mKdV equations with initial conditions by the variational iteration method, *Chaos, Solitons and Fractals*, **34**, 1075-1081.
- [102] **Soliman, A.A.**, **2006.** A numerical simulation and explicit solutions of KdV Burgers' and Lax's seventh-order KdV equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, **29**, 294 302.
- [103] **Tatari, M., Dehghan, M.**, 2007. He's variational iteration method for computing a control parameter in a semi-linear inverse parabolic equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, **33**, 671 677.
- [104] **Dehghan, M., Tatari, M.**, 2008. Identifying an unknown function in a parabolic equation with overspecified data via He's variational iteration method, *Chaos, Solitons and Fractals*, **36**, 157 166.
- [105] **Dehghan, M., Shakeri, F.**, 2008. M. Dehghan, S. Shakeri, Application of He's variational iteration method for solving the Cauchy reaction diffusion problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **214**, 435 446.
- [106] **Shakeri, F., Dehghan, M.**, 2008. Solution of a model describing biological species living together using the variational iteration method, *Math. Comp. Modelling*, **48**, 685 699.

- [107] **Tatari, M., Dehghan, M.**, 2007. On the convergence of He's variational iteration method, Journal of Computational and Applied Mathematics, **207**, 121–128.
- [108] **Liao, S., J.**, 2012. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations, Higher Education Press, Springer, **Berlin**.
- [109] **Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A.**, 1991. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform, Cambridge University Press, **Cambridge**.
- [110] **Malfliet, W.**, 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Am. J. Phys., **60**, 650–654.
- [111] **Parkes, E. J., Duffy, B. R.**, 1996. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to nonlinear evolution equations, Comput. Phys. Commun., **98**, 288–300.
- [112] **Fan, E. G.**, 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, Phys. Lett. A, **277**, 212–218.
- [113] **Wang, M.L.**, 1996. Exact solutions of a compound KdV-Burgers equation, Phys. Lett. A, **213**, 279–287.
- [114] **Wang, M.**, 1995. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, Phys. Lett. A, **199**, 169–172.
- [115] **He, J. H., Wu, X. H.**, 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, Chaos, Solitons and Fractals, **30**, 700–708.
- [116] **He, J. H.**, 1999. Variational iteration method a kind of non-linear analytical technique: some examples, International Journal of Nonlinear Mechanics, **34**, 699–708.
- [117] **He, J. H., Wu, X. H.**, 2007. Variational iteration method: New development and applications, Comp. Math. Applic., **54**, 881–894.

- [118] **He, J. H.**, 2007. Variational iteration method Some recent results and new interpretations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **207**, 3-17.
- [119] **Özer, H.**, 2007. Application of the variational iteration method to the boundary value problems with jump discontinuities arising in solid mechanics, *International, Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **8**, 513-518.
- [120] **Biazar, J., Ghazvini, H.**, 2007. He's variational iteration method for solving hyperbolic differential equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **8**, 311-314.
- [121] **Odibat, Z., Momani, S.**, 2007. Application of variational iteration method to Nonlinear differential equations of fractional order, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **7**, 27-34.
- [122] **Shakeri, F., Denghan, M.**, 2008. Numerical solution of the Klein Gordon equation via He's variational iteration method, *Nonlinear Dynamics*, **51**, 89-97.
- [123] **Hetmaniok, E., Slota, D., Witula, R., Zielonka, A.**, 2011. Comparison of Adomian decomposition method and the variational iteration method in solving the moving boundary problem, *Comp. Math. Applic.*, **61**, 1931-1934.
- [124] **Elsayed, A. F.**, 2013. Comparison between variational iteration method and homotopy perturbation method for thermal diffusion and diffusion thermo effects of thixotropic fluid through biological tissues with laser radiation existence, *Appl. Math. Modelling*, **37**, 3660-3673.
- [125] **Bildik, N., Konuralp, A., Yalçınbaş, S.**, 2010. Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro-differential equations, *Comp. Math. Applic.*, **59**, 1909-1917.

- [126] **Ganji, Z. Z., Ganji, D. D., Esmailpour, M.,** 2009. Study on nonlinear Jeffery-Hamel flow by He's semi-analytical methods and comparison with numerical results, *Comp. Math. Applic.*, **58**, 2107-2116.
- [127] **Inokuti, M., Sekine, H., Mura, T.,** 1978. General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical Physics, in S. Nemat-Nasser, Editor, *Variational Methods in the Mechanics of Solids*, Proceedings of the JUTAM Symposium held at Northwestern University, Pergamon Press, **Oxford**.
- [128] **Batiha, B.,** 2012. *Variational Iteration Method and Its Applications*, Lambert Academic Publishing, **Deutschland**.
- [129] **Odibat, Z. M.,** 2010. A study on the convergence of variational iteration method, *Math. Comput. Modelling*, **51**, 1181-1192.
- [130] **Bekir, A.,** 2008. Application of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method for nonlinear evolution equations, *Phys. Lett. A*, **372** , 3400-3406.
- [131] **Zhang, S. Tong ,J. L., Wang, W.,** 2008. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients, *Phys. Lett. A*, **372**, 2254-2257.
- [132] **Zhang, J. , Wei, X., Lu, Y.,** 2008. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications, *Phys. Lett. A*, **372** , 3653-3658.
- [133] **Zayed, E. M. E., Khaled A. Gepreel,** 2009. Some applications of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method to non-linear partial differential equations, *Appl. Math. Comput.*, **212**,1-13.
- [134] **Ling-Xiao, L., Ming-Liang, W.,** 2009. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions for a higher-order nonlinear Schrödinger equation, *Appl. Math. Comput.*, **208** , 440-445.
- [135] **Aslan, İ., Öziş, T.,** 2009. On the validity and reliability of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method by using higher-order nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.*, **211**, 531-536.

- [136] **Liu, X., Zhang, W., Li, Z.**, 2012. Application of improved $(\frac{G'}{G})$ -expansion method to travelling wave solutions of two nonlinear evolution equations, *Adv. App. Math. Mech.*, **4(1)**, 122-130.
- [137] **Feng, D., Li, K.**, 2011. Exact travelling wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by Fan sub-equation method, *Phys. Lett. A*, **375**, 2201-2210.

ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 1988 yılında kazandığım Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1992 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım. 1993 yılında aynı bölüme araştırma görevlisi olarak atandım. 1995 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora başladım. 1996 yılında istifa ederek ayrıldım ve uzun yıllar özel sektörde yönetici ve işletmeci olarak çalıştım. 2010 yılında Tunceli Üniversitesine öğretim görevlisi olarak atamp akademi hayatına döndüm. Halen Tunceli Üniversitesi MYO Pertek yerleşkesinde öğretim görevlisi ve Koordinatör yardımcısı olarak çalışmaktayım. Evli ve iki çocuk babasıyım.