

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİNİN
OLASILIK FONKSİYONLARI

DOKTORA TEZİ

Ayşe METİN KARAKAŞ

Anabilim Dalı: İstatistik
Programı: İstatistiksel Bilgi Sistemleri
Danışman: Doç. Dr. Sinan ÇALIK
OCAK- 2014

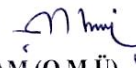
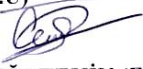
T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİNİN
OLASILIK FONKSİYONLARI

DOKTORA TEZİ
Ayşe METİN KARAKAŞ
(092133202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.01.2014

Tezin Savunulduğu Tarih: 28.01.2014

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Sinan ÇALIK 
Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Vedat SAĞLAM (O.M.Ü) 
Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü) 
Doç. Dr. Cemil ÇOLAK (İ.Ü) 
Yrd. Doç. Dr. Ayşe TURAN BUĞATEKİN (F.Ü) 

OCAK-2014

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Sinan ÇALIK ve yardımını esirgemeyen Yrd. Doç.Dr. Ayşe TURAN BUĞATEKİN' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez sürem boyunca yanımda olan değerli eşim, ailem, dostlarım ve değerli bölüm hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayşe METİN KARAKAŞ

Elazığ- 2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
1. BÖLÜM	1
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	4
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
3. BÖLÜM	7
3.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları.....	7
3.2. Kesikli Dağılımdaki Sıra İstatistikleri	9
3.3. Kesikli Dağılımlarda Sıra İstatistiklerinin Dağılımları.....	10
3.4. Momentler ve Çarpım Momentleri	13
4. BÖLÜM	16
4.1. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri.....	16
5. BÖLÜM	23
Sonuç ve Tartışma	23
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	26

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, sıra istatistiklerinin tarihçesi ve bu alanda yapılan çalışmalar verilmiştir. Ayrıca çalışmada kullanılan dağılım fonksiyonu ve olasılık fonksiyonlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sıra istatistiklerinin dağılımları, kesikli dağılımdaki sıra istatistikleri için temel yaklaşımlar, kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin dağılımı ve momentler ve çarpım momentleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistikleri hakkında bilgi verilmiş ve kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiğinin r . olasılık fonksiyonu elde edilmiştir.

Beşinci bölümde sonuç ve tartışma verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıra İstatistikleri, Dağılım Fonksiyonları, Kesikli Düzgün Dağılım, Momentler, Olasılık Fonksiyonu

ABSTRACT

Probablity Functions of Order Statistics From Discrete Uniform Distribution

This study is arranged four section.

In section 1 history of order statistics and the studies that have been done this area have been given. In addition distrubution functions and probablity functions which used in the study are discussed.

In section 2 some basic definitions and theorems that will be used in other sections have been stated.

In section 3 distrubutions of order statistics, basic approaches for distrubutions of discrete order statistics, distrubutions of order statistics from discrete distrubutions and product moments have been given.

In section 4 information about order statistics from discrete distrubutions and the r. probablity function of order statistics from discrete uniform distrubution were obtained.

In section 5 results and discussion are given.

Key Words: Order statistics, Distrubution function, Discrete Uniform Distrubution, Moments, Probablity Function.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Sıra istatistikleri, istatistik teorisinde önemli bir yer tutmakla birlikte istatistiksel tahmin yöntemlerinde de oldukça yaygın kullanıma sahiptir. Örneğin; sigortacılık, deprem ölçümleri ve analizi, doğal afetlerin tahminlenmesi, en zayıf halka prensibi, mühendislik tasarımı gibi çalışmalarda da kullanılır. Bu alanlardaki pek çok uygulamada sıra istatistiklerinden yararlanılmaktadır.

Matematiksel istatistiğin temel problemlerinden birisi, her zaman tesadüfi değişkenlerin dağılım fonksiyonunun elde edilememesi ve bunun yerine deneysel değerler kullanılarak dağılımın tahmin edilmesidir. Fakat sıra istatistikleri yeterli istatistikler oldukları için örneklem hakkında tüm bilgiyi içerirler. Sıra istatistikleri, dağılımdan bağımsız özellik taşıdığından parametrik olmayan istatistiksel yöntemlerde kullanılan en temel yaklaşımdır.

Literatürde sıralanmış tesadüfi değişkenler yani sıra istatistikleri ve bunlara ilişkin pek çok model yıllar içerisinde farklı kişiler tarafından incelenmiştir. Özellikle 20. yüzyıldan beri sıra istatistikleri ve onların özellikleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Ancak bu konu oldukça eskidir. Özellikle gök bilimciler örneklem ortalaması dışında yer tahmincileri ve sıra istatistikleri ile uzun süre ilgilenmişlerdir. 19. yüzyılın başlarında medyan simetrik kesilmiş ortalamalar, ortanca ve sıra istatistiklerinin fonksiyonları olarak açıklanan ölçümler tanımlanmıştır. 1818’ de Laplace tesadüfi örneklemdeki r . sıra istatistiğinin dağılımın temel olarak vermiş ve ortalamadan asimptotik olarak daha etkin olan medyan sayesinde dağılım ailesi üzerinde koşul tanımlamıştır.

Sıra istatistikleri istatistiksel teorisinin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Sıra istatistiklerinin yaygın çeşitliliği, teorisinin dağılımsal özellikleri ve bunların yanında geçen yüzyılın başlarında yaygın çalışılan çıkarımsal durumdaki özelliklerinden dolayı oldukça hızlı bir şekilde geliştirilmiştir.

Sıra istatistikleri 1942 de ilk olarak Wilks tarafından tanımlanmıştır.

Sıra istatistikleri teorisinde tanımlanan ilk temel nitelikteki çalışma David (1981) tarafından yapılmıştır. Birden çok atıf ve referansları bulunan David ve Nagaraja sıra istatistikleri teorisine çok büyük katkılarda bulunmuşlardır.

Özellikle sürekli dağılımlardaki sıra istatistikleri üzerine çok sayıda çalışmalar vardır. Ayrıca sürekli dağılımda sıra istatistikleri ile ilgili binlerce farklı uygulama alanı bulunmaktadır. Örneğin yaşam analizi, filtreleme teorisi, istatistiksel kalite kontrol, sinyal işleme görüntü işleme, radar hedef algılama vb. Ancak kesikli durumdaki sıra istatistikleri oldukça karışıktır. Bu nedenle sürekli sıra istatistiklerine göre yapısı daha az anlaşılırdır.

Genelde literatürde görülen çalışmalarda kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin momentleri, momentlerin türetilmesi, momentler arası ilişkiler, olasılık fonksiyonları ve dağılım fonksiyonunun bulunması ile karşılaşılır.

Khatri (1962) kesikli aileden alınan sıra istatistiklerinin olasılık fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve iki ya da üç sıra istatistiğinin ortak olasılık fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu üzerinde çalışmıştır.

Ayrıca Bunun yanında Khatri (1963) i. sıra istatistiği olasılık fonksiyonu ve i ve j. sıra istatistiklerinin ortak olasılık fonksiyonu için türevler tanımlamıştır.

Gupta (1967) kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin problemlerini çalışmışlardır.

Morgolin ve Winokur (1967) kesikli durumdaki sıra istatistiklerinin momentleri arasındaki ilişki üzerinde çalışmıştır[13].

Kabe (1969) ortak olasılık fonksiyonu için temel yaklaşımlar vermiştir.

David (1981) kitabında kesikli ve sürekli dağılımların her ikisi içinde sıra istatistikleri ile ilgili uygulamalar, karakterizasyonlar ve istatistiksel özellikleri ile ilgili yaklaşımlardan bahsetmiştir.

Nagaraja (1982) kesikli sıra istatistiklerinin Markov özelliği taşımayan yapısı üzerine çalışmıştır. Yine Nagaraja (1986) da kesikli sıra istatistiklerinin koşullu Markov özelliği ile ilgili çalışmıştır. Balakrishnan (1986) sürekli dağılımdan sıra istatistikleri için türetilen ilişkiler ve benzerlikleri birde kesikli sıra istatistikleri için yapmıştır. Nagaraja ve Srivastava (1987) geometrik dağılımdaki sıra istatistiklerinin karakterizasyonları üzerine çalışmıştır. Nagaraja (1992) kesikli dağılımdan alınan tesadüfi örneklerin sıra istatistikleri üzerine bazı sonuçlar elde etmiştir. Yine Nagaraja (1992) de multinomial, binomial, geometrik ve düzgün dağılımdan alınan sıra istatistikleri üzerine çalışmıştır [13].

Arnold vd. (1992) kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin ilk iki momentini elde etmişlerdir.

Ahsanullah ve Nevzorov (2001) kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin ilk iki momentini farklı bir yolla bulmuşlardır.

Çalık ve Güngör (2004) kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değer için cebirsel ifadeleri vermişlerdir.

Turan (2008) yüksek lisans tezinde, kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin momentlerini elde etmiştir.

Çalık ve vd. (2010) kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin m . momentlerini elde etmişlerdir.

Turan (2011) kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin örnek ekstremlerinin m . momentlerini elde etmiştir.

Bu çalışmada kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin r inci olasılık fonksiyonu elde edilmiştir.

2. BÖLÜM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. (Olasılık yoğunluk fonksiyonu)

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, sürekli bir X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu adını alır.

$$1) f(x) \geq 0, -\infty \leq x \leq \infty \text{ için}$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

[14].

Tanım 2.1.2. (Dağılım fonksiyonu)

X , olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan bir tesadüfi değişken olsun. Herhangi bir x reel değeri için X ' in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

eşitliği ile ifade edilir [14].

Tanım 2.1.3. (Binom Olasılık Dağılımı)

Tesadüfi deneylerde her deneme birbirinden bağımsız ve her denemedeki muhtemel sonuç sayısı iki ise, p parametrelili

$$P_b(x; p : n) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

fonksiyonuna sahip olasılık dağılımına, binom olasılık dağılımı denir [22].

Tanım 2.1.4. (Çoklu Binom Dağılımı)

Tesadüfi deneylerde her deneme birbirinden bağımsız ve her denemedeki muhtemel sonuç sayısı ikiden fazla ise, $p_1, p_2, \dots, p_k$ parametrelili

$$P_m(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}, x_i = 1, 2, \dots, n; i =$$

$$1, 2, \dots, k, \sum_{i=1}^k x_i = n, \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

fonksiyonuna sahip olasılık dağılımına, multinom olasılık dağılımı denir [22].

Tanım 2.1.5. (Kesikli Düzgün Dağılım)

Bir X tesadüfi değişkeni,

$$f(x) = \frac{1}{k}, \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k \quad \text{için}$$

olasılık fonksiyonuna sahip ise X 'e kesikli düzgün dağılım denir. Burada $i \neq j$ iken $x_i \neq x_j$ olur [10].

Tanım 2.1.6. (Beta Fonksiyonu)

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

olarak tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir [10].

Tanım 2.1.7. (Tam Olmayan Beta Fonksiyonu)

$$I_p(\alpha, \beta) = \int_0^p x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha > \beta > 0, 0 < p < 1$$

olarak tanımlanan fonksiyona tam olmayan beta fonksiyonu denir [8].

Tanım 2.1.8. (Gamma Fonksiyonu)

Bir X tesadüfi değişkeni,

$$g(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

ile gösterilen fonksiyona sahipse X ' e gamma tesadüfi değişkeni, g fonksiyonuna da gamma fonksiyonu denir. Burada $\alpha > 0, \beta > 0$ dır [10].

Teorem 2.1.1.

X , olasılık fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan sürekli bir tesadüfi değişken olmak üzere

$$f(x) = F'(x)$$

eşitliği vardır [14, 25].

Teorem 2.1.2.

Bir tesadüfi değişken olan X ' in aralığı $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ değerlerinden oluşuyorsa, $f(x_1) = F(x_1)$ ve $i = 2, 3, \dots, n$ için $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ olur [14].

Teorem 2.1.3.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip bir örneklem olmak üzere, $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$ bu örneklemün sıra istatistiklerini gösterebilir.

$$U_{1:n} = F(X_{1:n}), U_{2:n} = F(X_{2:n}), \dots, U_{n:n} = F(X_{n:n})$$

olmak üzere $U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}$ (0,1) aralığındaki düzgün dağılımdan alınmış örneklemün sıra istatistikleridir [11].

3. BÖLÜM

3.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleme artan sırada $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ biçiminde sıralansın, buna göre $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ tesadüfi değişkenlerine sıra istatistikleri denir. Burada $X_{r:n}$ r -inci sıra istatistiği olarak adlandırılır. $X_{1:n}$ örnek minimumu ve $X_{n:n}$ örnek maksimumu olmak üzere

$$X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

yazılabilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$, mutlak sürekli bir anakütleden seçilen, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenler olsun. $1 \leq r \leq n$ olmak üzere $X_{r:n}$ 'nin dağılım fonksiyonu;

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} \leq x) \\ &= \Pr(X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ' lerin en az } r \text{ tanesi } \leq x) \\ &= \sum_{i=r}^n \Pr(X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ' lerin tam } i \text{ tanesi } \leq x) \\ &= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir.

(3.1)' de $r=1$ ve $r=n$ alınırsa en küçük ve en büyük sıra istatistiklerin dağılım fonksiyonları sırasıyla,

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (3.2)$$

ve

$$F_{n:n}(x) = [F(x)]^n \quad (3.3)$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$\sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i [1-p]^{n-i} = \int_0^p \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, \quad 0 < p < 1 \quad (3.4)$$

eşitliği kullanılarak (3.1)' deki ifadeye benzer şekilde $X_{r:n}$ 'nin, dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, \\ &= I_{F(x)}(r, n-r+1), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak da yazılabilir. (3.5) denklemindeki $F_{r:n}(X)$ 'in ifadesi kesikli veya sürekli herhangi bir anakütle için sağlanır.

$1 \leq r \leq n$ olmak üzere $X_{r:n}$ sıra istatistiğinin olasılık fonksiyonu için $(x < X_{r:n} \leq x + \Delta x)$ olayı gözönüne alınsın. Buna göre,

$$P(x < X_{r:n} \leq x + \Delta x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [F(x + \Delta x) - F(x)] [1 - F(x + \Delta x)]^{n-r} + O((\Delta x)^2) \quad (3.6)$$

yazılabilir. (3.6)'daki $O((\Delta x)^2)$ ifadesi $(x, x + \Delta x]$ aralığında birden fazla $X_{r:n}$ 'nin bulunması durumuna karşılık gelir. (3.6)'nın her iki tarafı Δx 'e bölünür ve Δx sıfıra yaklaştırılırsa, $X_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (3.7)$$

olarak ifade edilir [11].

Benzer şekilde, $1 \leq r < s \leq n$ olmak üzere $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{r,s:n}(x, y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} f(x) [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) [1-F(y)]^{n-r} \\ &\quad -\infty < x < y < \infty \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve

$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k; n}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{(r_1 - 1)!(r_2 - r_1 - 1)! \dots (n - r_k)!} [F(x_1)]^{r_1 - 1} f(x_1) [F(x_2) - F(x_1)]^{r_2 - r_1 - 1} \dots f(x_k) [1 - F(x_k)]^{n - r_k}, -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq \infty \quad (3.9)$$

olur. Burada $x_{k+1} = \infty$, $x_0 = -\infty$, $r_{k+1} = n$ ve $r_0 = 0$ şartlarının sağlanması durumunda $f_{r_1, r_2, \dots, r_k; n}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k; n}(x_1, x_2, \dots, x_k) = n! \prod_{i=1}^k f(x_i) \prod_{i=0}^k \frac{[F(x_{i+1}) - F(x_i)]^{r_{i+1} - r_i - 1}}{(r_{i+1} - r_i - 1)!} \quad (3.10)$$

olarak da yazılabilir. Buna göre n tane sıra istatistiğinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{1,2,\dots,n;n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) & , x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\ 0 & , d.d. \end{cases} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir [2].

3.2. Kesikli Dağılımdaki Sıra İstatistikleri

Yaklaşım- 1 (Binom Toplamı): Teorem 2.1.2 gereğince $F_{r;n}(x)$ ifadesini sağlayan denklem kesikli durumda $X_{r;n}$ 'nin her bir mümkün x değeri için,

$$f_{r;n}(x) = F_{r;n}(x) - F_{r;n}(x-) \quad (3.12)$$

dir. Bu nedenle,

$$f_{r;n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \{ [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} - [F(x-)]^i [1 - F(x-)]^{n-i} \} \quad (3.13)$$

yazılabilir. Benzer olarak $F_{r;n}(x)$ için negatif binom toplam formu kullanılabilir.

Yaklaşım- 2 (Beta İntegral Formu): Hesaplama, amaçları için önceki Binom Toplam yaklaşımından daha iyidir. (3.5) ve (3.12) denklemlerinde verilen $F_{r;n}(x)$ 'in formu kullanılırsa,

$$f_{r;n}(x) = C(r; n) \int_{F(x-)}^{F(x)} u^{r-1} (1 - u)^{n-r} du \quad (3.14)$$

olur. Burada,

$$C(r; n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Yaklaşım- 3 (Çoklu Argument) : Mutlak sürekli durumlarda, çoklu denemeleri gerektiren bir ifade (3.13) ile verilen $X_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonunu elde etmek için kullanılmıştır. Fakat $X_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonu için sonuç ifadesi bulmak zordur. Çünkü kesikli tesadüfi değişkenler için sıra istatistiklerin dağılımı genelde daha karışıktır.

Bir X gözlem değeri için şu üç farklı olayı göz önüne alalım. $\{X < x\}$, $\{X = x\}$, $\{X > x\}$ Bu olayların olasılıkları sırasıyla $F(x-)$, $f(x)$ ve $1 - F(x)$ dir. $\{X_{r:n} = x\}$ olayı $r(n-r+1)$ farklı şekilde meydana gelebilir. $i = 0, 1, \dots, r-1$ ve $s = 0, 1, \dots, n-r$ olmak üzere $(r-1-i)$ tane gözlem değeri x' den küçük, $(n-r-s)$ tanesi x' den büyük ve kalanlar ise x değerine eşittir. O halde,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{n! [F(x-)]^{r-1-i} [1-F(x)]^{n-r-s} [f(x)]^{s+i+1}}{(r-1-i)!(n-r-s)!(s+i+1)!} \quad (3.16)$$

yazılabilir. Burada $x = 0$ ise $F(x-) = 0$ 'dır.

$$f_{r:n}(x) = r \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{r-1-i}{i} \binom{n-r}{s} [F(x-)]^{r-1-i} [1-F(x)]^{n-r-s} f(x) \int_0^1 [yf(x)]^i [(1-y)f(x)]^s dy \quad (3.17)$$

şeklinde de ifade edilebilir [2,20].

3.3. Kesikli Dağılımlarda Sıra İstatistiklerinin Dağılımları

X , $f(k) = \Pr(X = k)$ olasılık fonksiyonlu ve dağılım fonksiyonu $F(k) = \Pr(X \leq k)$ olan ve $0, 1, 2, \dots$ değerlerini alan bir kesikli tesadüfi değişken olsun.

Farz edelim ki; $X_1, X_2, \dots, X_n$ X 'de olduğu gibi aynı olasılık fonksiyonlu n tane bağımsız ve aynı dağılmış tesadüfi değişken olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ uygun sıralı istatistikler olsun. $f_{r:n}(x)$ $X_{r:n}$ 'in olasılık fonksiyonunu olarak yazabiliriz.

$$\sum_{k=r}^n C(k:n) \{ [F(x)]^k [1-F(x)]^{n-k} \} = \int_0^{F(x)} r C(r,n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \quad 0 < u < 1.$$

Biz

$$f_{r:n}(x) = \int_0^{F(x)} r C(r, n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \quad (3.18)$$

yazabiliriz. $r=1$ için $X_{1:n}$ ' in olasılık fonksiyonunu;

$$f_{1:n}(x) = n \int_{F(x-1)}^{F(x)} (1-u)^{n-1} du = [\bar{F}(x-1)]^n - [\bar{F}(x)]^n, \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x)$$

olarak yazarız. $r = n$ için $X_{n:n}$ ' in olasılık fonksiyonunu;

$$f_{n:n}(x) = n \int_{F(x-1)}^{F(x)} u^{n-1} du = [F(x)]^n - [1 - F(x)]^n$$

yazabiliriz [10].

$f_{r:n}(x)$ başka bir ifadeyle;

$$p_1 = P\{X < x\} = F(x) - f(x) = P\{X \leq x\} - P\{X = x\} \quad (3.19)$$

$$p_2 = P\{X = x\} = f(x) \quad (3.20)$$

$$p_3 = P\{X > x\} = 1 - F(x) \quad (3.21)$$

olasılıkları yazılabilir. Burada bu olasılıklar yardımıyla

$$P\{X_{(r:n)} \leq x\} = P\{x' \text{ den büyük ve } x' \text{ eşit en çok } n-r \text{ tane gözlem vardır.}\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n}{j} p_3^j (p_1 + p_2)^{n-j} \quad (3.22)$$

$$P\{X_{(r:n)} < x\} = P\{x' \text{ den büyük en çok } n-r \text{ tane gözlem vardır}\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n}{j} (p_2 + p_3)^j (p_1)^{n-j} \quad (3.23)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak

$$\begin{aligned} P(X_{(r:n)} = x) &= P\{X_{(r:n)} \leq x\} - P\{X_{(r:n)} < x\} = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n}{j} [(p_3)^j (p_1 + p_2)^{n-j} - (p_2 + p_3)^j (p_1)^{n-j}] \end{aligned} \quad (3.24)$$

yazılabilir. (3.24) de (3.19), (3.20) ve (3.21) yerine koyulursa

$$= \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n}{j} \{[(1 - F(x))^j [F(x)]^{n-j} - [1 - F(x) + f(x)]^j [(F(x) - f(x))]^{n-j}\} \quad (3.25)$$

olarak elde edilir.

$1 \leq r \leq s \leq n$ olmak üzere $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ ' in bileşik olasılık fonksiyonunu;

$$f_{r,s;n} = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{n-s} \sum_{u,w=0}^{u+w \leq l-k-1} C(r-k-1, r+w, s-1-u, s+l, n) \\ \{[F(x-1)]^{s-1-k} [F(x)]^{w+1+k}\} [F(y-1) - F(y)]^{s-u-r-w-1} [F(y)]^{u+1+l} [1-F(y)]^{n-s-k}$$

olarak yazılır. Basit olarak verilen ifadeden

$$f_{r,s;n}(x, y) = P_r(X_{(r)} = x, Y_{(s)} = y) \\ = r(s-r) C(s, r; n) \\ = \int_{F(x-1)}^{F(x)} \int_{F(y-1)}^{F(y)} \alpha^{r-1} (\beta - \alpha)^{s-r-1} (1-\beta)^{n-s} d\alpha d\beta$$

elde edilir.

$W_{1:n}$ örnek aralığı $W_{1:n} = X_{n:n} - X_{1:n}$ ile tanımlanır. Kolayca

$$P(W_{1:n} = 0) = \sum_{u=0}^{\infty} [P_r(X = u)]^n$$

gösterilir. $k > 0$ için

$$P(W_{1:n} = k) = \sum_{u=0}^{\infty} P_r(X_{1:n} = u, X_{n:n} = u+k) \\ = \sum_{u=0}^{\infty} \{F(u+k) - F(u-1)\}^n - [F(u+k) - F(u)]^n \\ + [F(u+k-1) - F(u)]^n - [F(u+k-1) - F(u-1)]^n \} \\ = \sum_{u=0}^{\infty} n(n-1) \int_{F(u-1)}^{F(u)} \int_{F(u+k-1)}^{F(u+k)} (\beta - \alpha)^{n-2} d\alpha d\beta$$

yazabiliriz. $X_{i_1} \leq X_{i_2} \leq \dots \leq X_{i_r}$ ' in bileşik olasılık fonksiyonu;

$$f_{i_1, i_2, \dots, i_r}(x_1, x_2, \dots, x_r) = C(k_1, k_2, \dots, k_r; n) \\ \int_D \prod (i_k - i_{k-1})(u_k - u_{k-1})^{i_k - i_{k-1} - 1} (1 - u_k)^{n - i_k} du_1 du_2 \dots du_r \quad (3.26)$$

buradan $k_o = 0, u_0 = 0$ ve $\int_D = \int_{F(x_1-1)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-2)}^{F(x_2)} \dots \int_{F(x_r-1)}^{F(x_r)}$ dır. Burada $C(r_1, r_2, \dots, r_k; n)$

$$C(r_1, r_2, \dots, r_k; n) = \frac{n!}{(n-r_k)! \prod_{i=1}^k (r_i - r_{i-1} - 1)!}$$

ile tanımlanır [11].

3.4. Momentler ve Çarpım Momentleri

$\mu_{r:n}^m$ ($1 \leq r \leq n$) ile sıra istatistiklerinin tekli momentleri tanımlansın. Bu momentler sürekli olması durumunda,

$$\begin{aligned}\mu_{r:n}^{(m)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^m f_{r:n}(x) dx \\ &= C(r; n) \int_{-\infty}^{\infty} x^m [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r} f(x) dx\end{aligned}\quad (3.27)$$

ifadesi ile ve olması durumunda,

$$\mu_{r:n}^{(m)} = \sum_x x^m f_{r:n}(x), \quad 1 \leq r \leq n \quad (3.28)$$

ifadesi ile hesaplanabilir.

Standart düzgün dağılıma ait sıra istatistikleri kullanılarak (3.27) formülü daha sade bir biçimde yazılabilir. Bunun için önce sıra istatistiklerin önemli bir özelliği ifade edilecektir.

$U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}$ sürekli standart düzgün dağılımdan tesadüfi seçilmiş bir örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. $F(x)$ sürekli ise $U = F(X)$ dönüşümü ile X tesadüfi değişkeni U standart düzgün tesadüfi değişkenine dönüşür. Bu durumda $F(X_{r:n})$ ile $U_{r:n}$ tesadüfi değişkenlerinin dağılımı birbirine eşittir. Bu kısaca,

$$F(X_{r:n}) \stackrel{d}{=} U_{r:n}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

şeklinde gösterilecektir. F dağılım fonksiyonunun ters fonksiyonu

$$F^{-1}(y) = \sup \{x : F(x) \leq y\}$$

(3.29) olmak üzere herhangi bir F dağılım fonksiyonu için

$$F^{-1}(U_r) \stackrel{d}{=} X_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

yazılabilir. F^{-1} sıralamayı koruyan bir fonksiyon olduğundan,

$$F^{-1}(U_{r:n}) \stackrel{d}{=} X_{r:n}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.31)$$

şeklinde olacaktır. O halde (3.26) kullanılarak,

$$\mu_{r:n}^{(m)} = C(r; n) \int_0^1 [F^{-1}(u)]^m u^{r-1} (1-u)^{n-r} du, \quad 1 \leq r \leq m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

yazılabilir. Bu ifadede beta fonksiyonu bulunduğu göz önüne alınırsa $g_{r:n}(u)$, Beta $(r, n+1-r)$ yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\mu_{r:n}^{(m)} = \int_0^1 [F^{-1}(u)]^m g_{r:n}(u) du, \quad 1 \leq r \leq m, \quad m \geq 1 \quad (3.33)$$

yazılabilir.

Benzer olarak $\mu_{r:n}^{(m,l)}$ ($1 \leq r < s \leq n$) ile sıra istatistiklerin çarpım momentleri tanımlansın. Bu momentlerin sürekli durumda,

$$\begin{aligned} \mu_{r:n}^{(m,l)} &= \int \int_{x < y} x^m y^l f_{r,s:n}(x,y) dx dy \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \int \int_{x < y} x^k y^l [F(x)]^{r-1} [F(x) - F(y)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s} f(x) f(y) dx dy \end{aligned} \quad (3.34)$$

ifadesi ile ve kesikli durumda,

$$\mu_{r:n}^{(m,l)} = \sum \sum_{x \leq y} x^m y^l f_{r,s:n}(x,y), \quad (1 \leq r < s \leq n) \quad (3.35)$$

ifadesi ile hesaplanabildiği açıktır.

Sıra istatistiklerin varyansı $Var(X_{r:n})$, $\sigma_{r,r:n}$ ($1 \leq r \leq n$) ile tanımlanır ve

$$\sigma_{r:n}^2 = Var(X_{r:n}) = \mu_{r:n}^{(2)} - \mu_{r:n}^2, \quad (1 \leq r \leq n) \quad (3.36)$$

olarak hesaplanır.

Benzer olarak sıra istatistiklerin kovaryansı, $\sigma_{r,s:n}$ ($1 \leq r \leq s \leq n$) ile tanımlanır ve

$$\sigma_{r,s:n} = Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \mu_{r,s:n} - \mu_{r:n} \mu_{s:n}, \quad (1 \leq r \leq s \leq n) \quad (3.37)$$

olarak hesaplanır. Burada $\mu_{r,s:n} = E(X_{r:n}, X_{s:n})$ ' dir.

$X_{r:n}$ ' nin momentini elde etmek için Teorem 2.1.3' deki $X_{r:n} \stackrel{d}{=} F^{-1}(U_{r:n})$ dönüşümü kullanılabilir. Yani, $X_{r:n}$ ' nin ortalaması

$$\mu_{r:n} = C(r; n) \int_0^1 F^{-1}(u) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \quad (3.38)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $C(r; n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$ olarak verilmiştir. Fakat $F^{-1}(u)$

kesikli dağılımların hemen hemen hepsi için iyi bir formda yazılamadığından bu yaklaşım pratik değildir [11].

S, negatif olmayan tamsayıların bir alt kümesi olduğunda, kesikli dağılımlar için aşağıda ifade edilen teoremden, $X_{r:n}$ ' nin momentlerini elde etmek için $F_{r:n}(x)$ kullanılabilir.

Teorem 3.4.1.

S destek kümesi, dağılıma ait negatif olmayan tam sayıların bir alt kümesi olsun. O zaman sağ taraftaki momentler her zaman mevcut olmak üzere

$$\mu_{r:n}^{(m)} = \sum_{x=0}^{\infty} [(x+1)^m - x^m] (1 - F_{r:n}(x)) \quad (3.39)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

Not edelim ki; $\mu_{r:n}^{(m)}$ mevcut ve $k \rightarrow \infty$ iken $k^m P(X_{r:n} > k) \rightarrow 0$ 'dır. Şimdi $k \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} x^m f_{r:n}(x) &= \sum_{x=0}^k x^m [P(X_{r:n} > x-1) - P(X_{r:n} > x)] \\ &= \sum_{x=0}^{k-1} [(x+1)^m - x^m] P(X_{r:n} > x) - k^m P(X_{r:n} > k) \end{aligned}$$

göz önüne alınsın. Buna göre,

$$\begin{aligned} \mu_{r:n}^{(m)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{x=0}^{k-1} [(x+1)^m - x^m] P(X_{r:n} > x) - \lim_{k \rightarrow \infty} k^m P(X_{r:n} > k) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} [(x+1)^m - x^m] (1 - F_{r:n}(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispat edilmiş olur [9].

Özel olarak $m=1$ ve $m=2$ için

$$\mu_{r:n}^{(1)} = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F_{r:n}(x)] \quad (3.40)$$

ve

$$\mu_{r:n}^{(2)} = 2 \sum_{x=0}^{\infty} x [1 - F_{r:n}(x)] + \mu_{r:n} \quad (3.41)$$

elde edilir [2,21].

4. BÖLÜM

4.1. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık fonksiyonu $f(x) = 1/k$ ve dağılım fonksiyonu $F(x) = x/k$ $x = 1, 2, \dots, k$ olan n tane bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli anakütledeki düzgün tesadüfi değişkenler olsun. (3.1)' den $X_{r:n}$ ' nin dağılım fonksiyonu;

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x}{k}\right)^i \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{n-i}, \quad x = 1, 2, \dots, k \quad (4.1)$$

dir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık fonksiyonu $f(x) = 1/k$ ve dağılım fonksiyonu $F(x) = x/k$ $x = 1, 2, \dots, k$ olan n tane bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli anakütledeki düzgün tesadüfi değişkenler olsun. O zaman $X_{r:n}$ ' nin olasılık fonksiyonunu (3.14) deki eşitlikten

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \int_{F(x-)}^{F(x)} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \\ &= \int_{(x-1)/k}^{x/k} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$C(r;n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ kesikli düzgün dağılıma sahip tesadüfi değişkenler ve $X_{r:n}$ bu tesadüfi değişkenlere karşılık gelen r inci sıra istatistiği olsun. $X_{r:n}$ ' nin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k}\right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k}\right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k}\right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k}\right)^{n-i+1} \right]$$

veya

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k}\right)^i \left(\frac{k-x}{k}\right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k}\right)^i \left(\frac{k-x+1}{k}\right)^{n-i} \right]$$

dir.

İspat.

(4.2)' de $r=1$ için integral alınır,

$$\begin{aligned} f_{1:n}(x) &= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{0!(n-1)!} u^0 (1-u)^{n-1} du \\ &= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-1)!} (1-u)^{n-1} du = n \frac{(1-u)^n}{n} \Big|_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \end{aligned}$$

ifadesinde sınırlar yerine yazılırsa

$$f_{1:n}(x) = \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^n - \left(\frac{k-x}{k} \right)^n \quad (4.3)$$

elde edilir.

$r=2$ için integral alınır,

$$\begin{aligned} f_{2:n}(x) &= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{1!(n-2)!} u^1 (1-u)^{n-2} du \\ &= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-2)!} u (1-u)^{n-2} du \end{aligned}$$

son eşitlikte $a = u$ ve $db = (1-u)^{n-2} du$ kısmi integrasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned} f_{2:n}(x) &= \frac{n!}{(n-2)!} \left[-u \frac{(1-u)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n-1} \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} (1-u)^{n-1} du \right] \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \left[-u \frac{(1-u)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n-1} f_{1:n}(x) \right] \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right) \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-1} - \left(\frac{x}{k} \right) \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-1} \right] + f_{1:n}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$f_{2:n}(x) = n \left[\left(\frac{x-1}{k} \right) \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-1} - \left(\frac{x}{k} \right) \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-1} \right] + f_{1:n}(x) \quad (4.4)$$

olarak bulunur.

$r = 3$ için integral alınır,

$$f_{3:n}(x) = \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{2!(n-3)!} u^2 (1-u)^{n-3} du$$

bu ifadede $u^2 = a$ ve $db = (1-u)^{n-3} du$ kısmi integrasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned} f_{3:n}(x) &= \frac{n!}{2!(n-3)!} \left[-u^2 \frac{(1-u)^{n-2}}{n-2} + \frac{2}{n-2} \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} u(1-u)^{n-2} du \right] \\ &= \frac{n!}{(n-3)!} \left[-u^2 \frac{(1-u)^{n-2}}{n-2} + \frac{2}{n-2} f_{2:n}(x) \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{2!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^2 \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-2} - \left(\frac{x}{k} \right)^2 \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-2} \right] + f_{2:n}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$f_{3:n}(x) = \frac{n(n-1)}{2!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^2 \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-2} - \left(\frac{x}{k} \right)^2 \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-2} \right] + f_{2:n}(x) \quad (4.5)$$

.

.

.

elde edilir. Buna göre genel bir ifade yazarsak,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{r-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-r+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{r-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-r+1} \right] + f_{r-1:n}(x) \quad (4.6)$$

olur. (4.3), (4.4), (4.5), ..., (4.6)'daki ifadeler taraf tarafa yazılıp toplanır,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right] \quad (4.7)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (4.2)'de $r = n$ için integral alınır,

$$f_{n:n}(x) = \left(\frac{x}{k} \right)^n - \left(\frac{x-1}{k} \right)^n \quad (4.8)$$

$r = n-1$ için integral alınır,

$$\begin{aligned}
f_{n-1:n}(x) &= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-1))!} u^{n-2} (1-u)^{n-(n-1)} du \\
&= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-2)!1!} u^{n-2} (1-u) du
\end{aligned}$$

ifadesinde $(1-u) = a$ ve $u^{n-2} du = db$ kısmi integrasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
f_{n-1:n}(x) &= \frac{n!}{(n-2)!1!} \left[\frac{u^{n-1}}{n-1} (1-u) + \frac{1}{n-1} \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} u^{n-1} du \right] \\
&= n \left[\left(\frac{x}{k} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \left(\frac{x-1}{k} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{x-1}{k} \right) \right] + f_{n:n}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$f_{n-1:n}(x) = n \left[\left(\frac{x}{k} \right)^{n-1} \left(\frac{k-x}{k} \right) - \left(\frac{x-1}{k} \right)^{n-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right) \right] + f_{n:n}(x) \quad (4.9)$$

bulunur.

$r = n-2$ için integral alınır,

$$\begin{aligned}
f_{n-2:n}(x) &= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-3)!(n-(n-2))!} u^{n-3} (1-u)^{n-(n-2)} du \\
&= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-3)!2!} u^{n-3} (1-u)^2 du
\end{aligned}$$

ifadesinde $(1-u)^2 = a$ ve $u^{n-3} du = db$ kısmi integrasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
f_{n-2:n}(x) &= \frac{n!}{(n-3)!2!} \left[\frac{u^{n-2}}{n-2} (1-u)^2 + \frac{2}{n-2} \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} u^{n-2} (1-u) du \right] \\
&= \frac{n(n-1)}{2!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^{n-2} \left(1 - \frac{x}{k} \right)^2 - \left(\frac{x-1}{k} \right)^{n-2} \left(1 - \frac{x-1}{k} \right)^2 \right] + f_{n-1:n}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$f_{n-2:n}(x) = \frac{n(n-1)}{2!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^{n-2} \left(\frac{k-x}{k} \right)^2 - \left(\frac{x-1}{k} \right)^{n-2} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^2 \right] + f_{n-1:n}(x) \quad (4.10)$$

•
•
•

elde edilir. Buna göre genel bir ifade yazarsak,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^r \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-r} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^r \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-r} \right] + f_{r+1:n}(x) \quad (4.11)$$

olur. (4.8), (4.9), (4.10), ..., (4.11)' deki ifadeler taraf tarafa yazılıp toplanırsa,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right] \quad (4.12)$$

elde edilir.

(4.7) ve (4.12)' deki ifadelerin birbirine eşit olduğunu gösterelim.

$$\sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right] = \sum_{i=r}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right]$$

eşitliğin doğruluğunu tümevarım metodu ile ispatlayalım.

$r = 1$ için,

$$\left[\left(\frac{k-x+1}{k} \right)^n - \left(\frac{k-x}{k} \right)^n \right] = \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right]$$

olur. n ' ye değer verilirse eşitliğin sağlandığı görülür. Örneğin; $n = 1$ alınırsa,

$$\left[\left(\frac{k-x+1}{k} \right) - \left(\frac{k-x}{k} \right) \right] = \sum_{i=1}^1 \frac{1!}{i!(1-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{1-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{1-i} \right]$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

$n = 2$ alınırsa,

$$\left[\left(\frac{k-x+1}{k} \right)^2 - \left(\frac{k-x}{k} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^2 \frac{2!}{i!(2-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{2-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{2-i} \right]$$

$$\left(\frac{2k-2x+1}{k^2} \right) = \left(\frac{2k-2x+1}{k^2} \right)$$

ve $n=3$ alınırsa,

$$\left[\left(\frac{k-x+1}{k} \right)^3 - \left(\frac{k-x}{k} \right)^3 \right] = \sum_{i=1}^3 \frac{3!}{i!(3-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{3-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{3-i} \right]$$

$$\left(\frac{3k^2 + 3x^2 - 6kx + 3k - 3x + 1}{k^3} \right) = \left(\frac{3k^2 + 3x^2 - 6kx + 3k - 3x + 1}{k^3} \right)$$

olur ki eşitlik sağlanır.

$r = m$ için,

$$f_{m;n}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=m}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right] \quad (4.13)$$

eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. $r = m+1$ için

$$f_{m+1;n}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=m+1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right]$$

ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

(4.13)' deki eşitliğin her iki tarafına

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^m \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-m} - \left(\frac{x}{k} \right)^m \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-m} \right] \text{ eklenirse,}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=m}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right] + \frac{n!}{m!(n-m)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^m \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-m} - \left(\frac{x}{k} \right)^m \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-m} \right]$$

Eşitliğin sağ tarafındaki toplamı $i = m$ için açarsak,

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=m+1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right] \\
&+ \frac{n!}{m!(n-m)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^m \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-m} - \left(\frac{x}{k} \right)^m \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-m} \right] - \frac{n!}{m!(n-m)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^m \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-m} - \left(\frac{x}{k} \right)^m \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-m} \right] \\
&= \sum_{i=m+1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right]
\end{aligned}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Özel olarak $r=1$ ve $r=n$ alınırsa, sırasıyla,

$$f_{1n}(x) = \left(\frac{k+1-x}{k} \right)^n - \left(\frac{k-x}{k} \right)^n, \quad x=1,2,\dots,k. \quad (4.14)$$

$$f_{nn}(x) = \left(\frac{x}{k} \right)^n - \left(\frac{x-1}{k} \right)^n, \quad x=1,2,\dots,k. \quad (4.15)$$

ifadeleri bulunur (4.14) ve (4.15) Ashanullah M. vd. 2001 elde etmişlerdir.

5.BÖLÜM

Sonuç ve Tartışma

Kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin ilk iki momentini Khatri (1962) ve Arnold ve vd. (1992) elde etmişlerdir. Ashanullah ve Nevzorov (2001) değişik bir yolla ilk iki momenti ifade etmiştir. Çalık ve vd. (2010) kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin m inci momentleri elde ettiler. Bir uygulama olarak Çalık ve Güngör (2004) kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin örnek maksimumunun beklenen değerini $n=20$ örnek hacmine göre cebirsel ifadeleri elde etmiştir. Turan (2011) kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin örnek ekstremlerinin m inci momentleri ifade eden teoremleri ispat etmiştir.

Bu çalışmada Teorem 4.1.1' deki formüller kullanılarak kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin olasılık fonksiyonları kolayca elde edilebilmektedir. Teorem 4.1.1 kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin olasılık fonksiyonlarını ifade eden genelleştirilmiş bir formüldür. Teorem 4.1.1' de özel olarak $r=1$ ve $r=n$ alınırsa Ashanullah ve Nevzorov (2001) elde ettiği 1 inci ve n inci olasılık fonksiyonlarını vermektedir.

Gelecekteki çalışmalarda Teorem 4.1.1' de ifade edilen kesikli düzgün dağılımdaki r inci olasılık fonksiyonlarını ve (3.28)' de kesikli durumdaki sıra istatistiklerinin m inci momentlerini ifade eden formüller kullanılarak; kesikli düzgün dağılımdaki r inci sıra istatistiklerinin m inci momentlerini elde edebilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B.**, 2001. Ordered Random Variables, Nova Science Publishers, Inc., New York.
- [2] **Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N.**, 1992. A First Course in Order Statistics, John Wiley and Sons, New York.
- [3] **Arnold B.C., Balakrishnan N., Sarabia J.M. and Minguz R.**, 2008. Advances in Mathematical and Statistical Modelling Birkhauser Boston Basel Berlin.
- [4] **Ash.B.R.**, 2008. Basic Probability Theory Department of Mathematics University of Illinois Dover Publications, INC Newyork.
- [5] **Balakrishnan, N.**, 1986. Order Statistics from Discrete Distributions. Commun Statis-theory meth., 15(3), 657- 675.
- [6] **Balakrishnan N., Castillo E. and Sarabia J.M.**, 2006. Advances in Distrubution Theory, Order Statistics and Inference Birkhauser Boston Basel Berlin.
- [7] **Collet F.,L.Fabrizio.,Spizzichio F., and Suter F.**, 2013. Exchangeable occupancy models and dicrete processes with the generalized uniform order statistics property, AMS arXiv:1112.0867v2 [math.PR].
- [8] **Çalik, S., and Güngör, M.**, 2004. On the expected values of the sample maximum of order statistics from a discrete uniform distribution, Applied Mathematics and Computation, 157, 695- 700.
- [9] **Çalik, S., Güngör, M. and Colak, C.**, 2010. On the Moments of Order Statistics From Discrete Distribution . Pak. J. Statist., 26(2), 417-426.
- [10] **Dasgupta A.**, 2008. Asymptotic Theory of Statistics and Probablity, Springer
- [11] **David, H.A.**, 1981. Order Statistics, John Wiley and Sons, Inc. Newyork.
- [12] **David, H.A., Nagaraja, H. N.**, 2003. Order Statistics, John Wiley and Sons, Inc. Newyork.
- [13] **Deminiska A.** Discrete Order Statistics, Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology, Pl. Politechniki 1, 00-661 Warsaw, Poland.
- [14] **Freund, J. E.**, 2002. Mathematical Statistics, Literatür yayıncılık, İstanbul.

- [15] **Giri, N.C.**, 1975. Introduction to Probability and Statistics, Marcel Dekker, Inc. Newyork.
- [16] **Gut A.**, 2009. An Intermediate Course in Probability Springer.
- [17] **Gut A.**, 2005. Probability A Graduate Course, Springer.
- [18] **Gupta S.**, 1967. Order Statistics Arising from Independent Binomial Populations., Division of Mathematical of Science Series No:120.
- [19] **Hogg, R.Y., and Craig, A.T.**, 1978. Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan Publishing Co., Inc. Newyork.
- [20] **Kabe, D. G.**, 1969. Some Distribution Problems of Order Statistics from Discrete Populations. Ann. Inst. Statist. Math., 21(1), 551- 556.
- [21] **Khatri, C. G.**, 1962. Distribution of order statistics for discrete case, Ann. Inst. Statist. Math., 14, 167-171.
- [22] **Kowalski J., Tu X.**, 2007. Modern Applied U- Statistics Willey.
- [23] **Nevzorov V.B.**, 2001. Translations of Mathematical Monographs American Mathematical Society.
- [24] **Rees, D. G.**, 1987. Foundations of Statistics, J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol.
- [25] **Shahbazov, A.**, 2005. Olasılık Teorisine Giriş. Birsen Yayınevi.
- [26] **Turan A.**, 2008. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Momentleri Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [27] **Turan A.**, 2011. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerinin Örnek Ekstremlerinin Genelleştirilmiş Momentleri Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [28] **Wilks, S.S.**, 1962. Mathematical Statistics, Toppan Company, Ltd., Tokyo.
- [29] **Zwillinger, D.**, 1996. Standard Mathematical Tables and Formulae. Chapman and Hall/CRC Press., Florid.

ÖZGEÇMİŞ

1986 Elazığ da doğdum. İlk, orta Elazığ' da tamamladım. Lise öğrenimimi Samsun da tamamladım. 2007 yılında Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü' nden mezun olup, 2009 yılında yine aynı üniversitenin İstatistik Bölümü' nde yüksek lisans öğrenimimi tamamladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nün açmış olduğu doktora programına devam ediyorum. 2009 Kasım döneminde Fırat Üniversitesi, İstatistik Bölümü' nde başlamış olduğum Araştırma Görevliliğini hala sürdürmekteyim.