

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



KESİKLİ SIRA İSTATİSTİKLERİN OLASILIK
FONKSİYONLARI

Kübra Özlem ERCAN

Yüksek Lisans Tezi
Anabilim Dalı: İstatistik
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN

ELAZIĞ-2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ SIRA İSTATİSTİKLERİN OLASILIK FONKSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Kübra Özlem ERCAN
142133102

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18.07.2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 11.08.2017

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN(F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Sinan ÇALIK(F.Ü)
Doç. Dr. Mahmut IŞIK(H.Ü)

AĞUSTOS-2017

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım kıymetli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT	V
KISALTMALAR	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. SIRA İSTATİSTİKLERİ VE DAĞILIMLARI.....	2
2.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları	2
2.2. Kesikli Dağılımlardaki Sıra İstatistikleri	5
2.3. Kesikli Dağılımlardaki Sıra İstatistiklerinin Dağılımları	7
2.4. Kesikli Dağılımlardaki Sıra İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları	8
2.5. Momentler ve Çarpım Momentleri	10
3. KESİKLİ SIRA İSTATİSTİKLERİN r İNCİ YOĞUNLUK FONKSİYONU	13
3.1. Kesikli Ana Kütlelerin Sıra İstatistiklerine Alternatif Yaklaşım.....	13
3.2. Kesikli Düzgün Dağılımlardaki Sıra İstatistiklerinin Momenti.....	14
3.3. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri.....	16
4. SONUÇ VE TARTIŞMA	22
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	25

ÖZET

KESİKLİ SIRA İSTATİSTİKLERİN OLASILIK FONKSİYONLARI

Bu çalışmanın birinci bölümünde, sıra istatistiklerin tarihçesinden ve günümüze kadar yapılan gelişmelerden bahsedilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde sıra istatistikleri ve sıra istatistiklerin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarının genel ifadesi verilmiştir. Ayrıca dağılımlar sayesinde elde edilebilen momentler için genel ifadeler belirtilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde ise kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin önceden elde edilen dağılımları ve momentlerinin ifadesine yer verilmiştir.

Son bölümde ise, daha genel bir durum oluşturularak, kesikli dağılımlardaki sıra istatistiklerin r inci olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiş ve bulunan bu fonksiyon kullanılarak, elde edilebilecek özel sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıra istatistikleri, momentleri, örnek ektremleri, kesikli düzgün dağılım.

ABSTRACT

PROBABILITY FUNCTION OF DISCRETE ORDER STATISTICS

In the first part of the study, the histories of order statistics and developments in this field up to now have been related.

In the second part of the study, order statistics and general expression of probability density function and distribution function of order statistics is given. Besides moments which are obtained through distributions are given.

In the third part of the study, distributions of order statistics from discrete uniform distributions and these moments are examined.

Finally, r th probability density function of order statistics from discrete distributions is obtained. By generalized. Also , special results are given by obtained function.

Keywords: Order statistics, moments, sample extremes, discrete uniform distribution.

KISALTMALAR

cdf : Kümülatif dağılım fonksiyonu

oyf : Olasılık yoğunluk fonksiyonu



1. GİRİŞ

Sıra istatistikleri, istatistik teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Aynı zamanda istatistik tahmin yöntemlerinde de kullanılır. Pek çok alanda sıra istatistiklerinden faydalanılır. Bu alanlara örnek verecek olursak; doğal afetlerin tahminlenmesi (deprem analizi ve ölçümleri gibi), mühendislikte sigortacılık gibi uygulama alanları vardır. Sıra istatistikleri teste tabi tutulan n tane ürünün yaşam zamanlarını gösterdiğinden dolayı yaşam analizinde de kullanılır.

İstatistiğin en önemli problemlerinden biri, değişkenlerin dağılımlarının bilinmemesidir. Biz bu dağılımları bulabilmek için deneysel değerler kullanırız. Ancak sıra istatistikleri örneklem hakkında tüm bilgiyi içerdiklerinden kullanılmaya daha uygundurlar.

Khatri (1962)' de kesikli dağılımlardaki sıra istatistiklerinin ilk iki momentini bulmuştur. Rastgele sürekli dağılımlardaki n boyutlu bir örnekteki sıra istatistiklerinin tekli ve çarpım momentleri için var olan indirgeme ilişki ve eşitsizliği kesikli durumlar için Balakrishnan (1986)' da elde etmiştir. Kesikli sıra istatistiklerindeki bütün gelişmeleri Nagaraja (1992)' deki makalesinde tartışmıştır. Khatri' nin elde ettiği ilk iki momenti Arnold vd. (1992) de farklı bir yöntem ile ispatlamıştır. Çalık ve Güngör (2005) ise; kesikli dağılımlardaki m inci momentini ispatlamışlardır. Aynı zamanda Çalık ve Güngör (2004)' de bir çalışma olarak kesikli düzgün dağılımlardaki sıra istatistiklerinin örnek max'ın beklenen değerini, örnek boyutu $n = 15$ ' e kadar cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Karakaş (2014) doktora tezinde kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin r inci olasılık fonksiyonunu elde etmiştir.

Bu çalışmada ise daha genel bir durum oluşturularak, kesikli dağılımlardaki sıra istatistiklerin r inci olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiş ve bulunan bu fonksiyon kullanılarak, elde edilebilecek özel sonuçlara yer verilmiştir.

2. SIRA İSTATİSTİKLERİ VE DAĞILIMLARI

2.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenler olsun. Bu tesadüfi değişkenlerin sıraya dizilmesi ile elde edilen $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ tesadüfi değişkenlerine sıra istatistikleri denir. Burada $X_{r:n}$ n boyutlu bağımlı ve aynı dağılımlı r inci sıra istatistiği olarak adlandırılır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenleri olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve kümülatif $F(x)$ olan mutlak sürekli bir ana kütleden seçilen tesadüfi bir örneklem olsun.

$1 \leq r \leq n$ olmak üzere $X_{r:n}$ 'in (r inci sıra istatistiğinin) olasılık fonksiyonu ,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r} f(x) , \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

olarak çıkarılır.

$1 \leq r \leq s \leq n$ olmak üzere $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s} f(x) f(y) , \quad -\infty < x < y < \infty \quad (2.2)$$

şeklindedir.

$X_{r_1:n} \leq X_{r_2:n} \leq \dots \leq X_{r_k:n}$, $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$, ($1 \leq k \leq n$) ifadesi $k \leq n$ sayıda sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{(r_1-1)(r_2-r_1-1) \dots (n-r_k)!} F(x_1)^{r_1-1} [F(x_2) - F(x_1)]^{r_2-r_1-1} \dots [1 - F(x_k)]^{n-r_k} f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k), \\ -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k < \infty \quad (2.3)$$

bu ifade elde edilir. Şimdi

$$x_{k+1} = \infty , \quad x_0 = -\infty$$

$$r_{k+1} = n, \quad r_0 = 0$$

koşulları sağlandığı takdirde $f_{r_1, r_2, \dots, r_{k:n}}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_{k:n}}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k f(x_i) \prod_{i=0}^k \frac{[F(x_{i+1}) - F(x_i)]^{r_{i+1} - r_i - 1}}{(r_{i+1} - r_i - 1)!} \quad (2.4)$$

ifade edilebilir. Şimdi n tane $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) & , \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklindedir. (David, 1981).

İfade (2.5) de tüm n sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu dikkate alındığında $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{r-1:n})$ ve $(X_{r+1:n}, \dots, X_{n:n})$ değişkenlerinin integrali alınırsa $(1 \leq r \leq n)$ $X_{r:n}$ 'in marjinal yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = n! f(x) \left\{ \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1) \dots f(x_{r-1}) dx_1 \dots dx_{r-1} \right\} \\ \times \left\{ \int_x^{\infty} \dots \int_x^{x_{r+2}} f(x_{r+1}) \dots f(x_n) dx_{r+1} \dots dx_n \right\} \quad (2.6)$$

şeklinde oluşturulur. İntegral alırsak,

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} f(x_1) f(x_2) \dots f(x_{r-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{r-1} \quad (2.7)$$

$$= \frac{[f(x)]^{r-1}}{(r-1)!} \quad (2.8)$$

ve

$$\int_x^{\infty} \dots \int_x^{x_{i+2}} \int_x^{x_{i+3}} f(x_{r+1}) f(x_{r+2}) \dots f(x_n) dx_{r+1} dx_{r+2} \dots dx_n \\ = \frac{[1-F(x)]^{n-r}}{(n-r)!} \quad (2.9)$$

şeklindeki ifadeyi elde ederiz. (2.8) ve (2.9) denklemi (2.6) denkleminde yerine yazılırsa $X_{r:n}$ 'in $(1 \leq r \leq n)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu için (2.1) eşitliğini elde ederiz.

(2.1)'den ($r = 1$ ve $r = n$ aldığımızda) min ve max sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f_{1:n}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.10)$$

ve

$$f_{n:n}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.11)$$

şeklinde elde edilir.

Min ve max sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonlarını (2.10) ve (2.11)' deki olasılık yoğunluk fonksiyonu 'nin integralleri alınır,

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.12)$$

ve

$$F_{n:n}(x) = [F(x)]^n, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.13)$$

şeklinde elde ederiz.

(2.1)'de $X_{r:n}$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu'nun integralini alırsak $X_{r:n}$ 'in dağılım fonksiyonunu elde ederiz. Başka bir yöntemle $X_{r:n}$ 'in dağılım fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} \leq x) \\ &= \Pr(X_1, X_2, \dots, X_n \text{ lerin en az } r \text{ tanesi } x' \text{ e eşit ve ondan küçüktür}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=r}^n \Pr(X_1, X_2, \dots, X_n \text{ lerin tam olarak } i \text{ tanesi } x' \text{ e eşit ve ondan küçüktür})$$

$$= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \quad -\infty < x < \infty \quad (2.14)$$

şeklinde elde ederiz. Sonuç olarak $X'_{r:n}$ 'in ($1 \leq r \leq n$) kdf'nin kolayca n denemede başarılı olanların $F(x)$ 'li binom dağılımı olduğu bulunur.(2.14) ifadesinde $r = 1$ ve $r = n$ alırsak (2.12) ve (2.13) ifadeleri karşımıza çıkar. Bunun dışında,

$$\sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \int_0^p \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, \quad 0 < p < 1 \quad (2.15)$$

ifadesi kullanılarak (2.14)' deki gibi $X_{r:n}$ 'in kdf'nin,

$$F(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt,$$

$$= I_{F(x)}(r, n - r + 1), -\infty \leq x \leq \infty \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlikte I incomplete beta fonksiyonudur. (2.16)'daki $F_{r:n}(x)$ 'in eşitliğinin dağılımı önemli değildir. Yani sürekli ve süreksiz dağılım için sağlar. Ayrıca ana kitlenin mutlak sürekli olduğu kabul edildiğinde (2.16)'daki kdf ifadesinin diferansiyeli alınırsa $X_{r:n}$ 'in ($1 \leq r \leq n$) olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.1)'de şeklinde ifade edilir.

2.2. Kesikli Dağılımlardaki Sıra İstatistikleri

r inci sıra istatistiğinin elde edilmesinde 3 yaklaşım mevcuttur. İlk ikisi $F_{r:n}(x)$ 'e göre yapılmıştır. Üçüncüsü ise çok terimli argümente dayandırılmıştır.

1 inci yaklaşım

Şimdi bir teorem verelim:

Bir tesadüfî değişken olan X 'in aralığı $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ değerlerinden oluşuyor ise $f(x_1) = F(x_1)$ ve $i = 2, 3, \dots, n$ için ,

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

şeklindedir. (Freund vd., 2002).

Teorem gereğince $F_{r:n}(x)$ eşitliğini sağlayan denklem kesikli durumda $X_{r:n}$ 'in tek x değeri için ,

$$f_{r:n}(x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x - 1) \quad (2.17)$$

şeklindedir. Bundan dolayı,

$$f_{r:n} = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \{ [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} - [F(x-)]^i [1 - F(x-)]^{n-i} \} \quad (2.18)$$

şeklindedir. Aynı şekilde $F_{r:n}(x)$ için negatif binom toplamını da kullanabiliriz.

2 inci yaklaşım

(2.17)'de verilen $F_{r:n}(x)$ 'in formülü kullanılarak ;

$$f_{r:n}(x) = C(r; n) \int_{F(x-)}^{F(x)} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \quad (2.19)$$

şeklindedir.

$$C(r; n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \quad (2.20)$$

dir.

3 üncü yaklaşım

Kesikli rastgele değişkenlerde sıra istatistiklerinin dağılımı aslında daha kompleksir.

Bundan dolayı bir X gözlem değeri için 3 farklı durumu göz önüne alalım; $\{X < x\}$, $\{X = x\}$, $\{X > x\}$ olasılıkları $F(x-)$, $f(x)$ ve $1 - F(x)'$ dir. $\{X_{r:n} = x\}$ olayı $r(n-r+1)$ değişik şekilde olabilir, $i = 0, 1, \dots, r-1$ ve $s = 0, 1, \dots, n-r$ olmak üzere $(r-1-i)$ tane gözlem değeri x' den küçük, $(n-r-s)$ tanesi x 'den büyük ve kalanları ise x ' değerine eşittir. Şimdi

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{n! [F(x-)]^{r-1-i} [1 - F(x)]^{n-r-s} [f(x)]^{s+i+1}}{(r-1-i)! (n-r-s)! (s+i+1)!}$$

[Arnold et al., 1992 Khatri 1962]

şeklinde yazabiliriz. $x = 0$ ise $F(x-) = 0$ 'dır.

$$f_{r:n}(x) = r \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{r-1}{i} \binom{n-r}{s} [F(x-)]^{r-1-i} [1 - F(x)]^{n-r-s} f(x)$$

$= x \int_0^1 [yf(x)]^i [(1-y)f(x)]^s dy$ şeklindedir.

2.3. Kesikli Dağılımlardaki Sıra İstatistiklerinin Dağılımları

$X_{r:n}(1 \leq r \leq n)$ 'in kümülatif dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} \leq x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \\ &= \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (2.21)$$

kümülatif dağılımı bir binomial formda yazma yerine,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-1-i}{r-1} [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r-i}, \quad -\infty < x < \infty$$

şeklinde negatif formda da ifade edilir.

Verdiğimiz ifadelerin hepsi bütün durumlar için geçerlidir.

Kesikli ana kitleler için $X_{r:n}(1 \leq r \leq n)$ 'in olasılık kitle fonksiyonu (2.17)'den

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} = x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-) \\ &= \int_{F(x-)}^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Özel şekilde yazarsak

$$f_{1:n}(x) = [1 - F(x-)]^n - [1 - F(x)]^n$$

ve

$$f_{n:n}(x) = [F(x)]^n - [F(x-)]^n \text{ şeklinde yazılır.}$$

2.4. Kesikli Dağılımlardaki Sıra İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları

Sıra istatistiklerinin ortak dağılımları aynı şekilde çıkarılsa da aslında çok komplekstir. Örneğin: $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ ($1 \leq r \leq s \leq n$) 'lerin ortak kümülatif dağılım fonksiyonunun

$$F_{r,s:n}(x) = F_{s:n}(x_s), x_r \geq x_s \text{ için}$$

$$F_{r,s:n}(x) = \sum_{j=s}^n \sum_{i=r}^j \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} [F(x_r)]^i [F(x_s) - F(x_r)]^{j-i} \times [1 - F(x_s)]^{n-j}, x_r < x_s \text{ için} \quad (2.22)$$

şeklinde gösterilir. Eşitliğin sürekli ya da süreksiz olması fark etmez. Kesikli ana kitleler için $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ ($1 \leq r \leq s \leq n$) 'lerin ortak olasılık kitle fonksiyonu (2.22)'den,

$$\begin{aligned} f_{r,s:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} = x_r, X_{s:n} = x_s) \\ &= F_{r,s:n}(x_r, x_s) - F_{r,s:n}(x_r-, x_s) - F(x_r, x_s-) + F_{r,s:n}(x_r-, x_s-) \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklindedir. [Arnold et al., 1992]

$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ için $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık kitle fonksiyonunu inceleyelim. Öncelikle $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin ortak fonksiyonunu bulalım. $1 \leq m \leq n$ olmak üzere $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ değerleri için,

$$\begin{aligned} (x_1 = \dots = x_{i_1}) &< (x_{i_1+1} = \dots = x_{i_2}) < \dots < (x_{i_{m-2}+1} = \dots = x_{i_{m-1}}) \\ &< (x_{i_{m-1}+1} = \dots = x_{i_m}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m = n \end{aligned} \quad (2.24)$$

olsun. Şimdi $i_0 = 0$ kabul edersek,

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{j=1}^m \frac{[f(x_{i_j})]^{i_j - i_{j-1}}}{(i_j - i_{j-1})!} \quad (2.25)$$

şeklindedir. İntegral alırsak bu eşitlik için

$$D = \left\{ (u_1, \dots, u_n): u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n, \quad F(x_{i_s} -) \leq u_t \leq F(x_{i_j}) \right. \\ \left. 1 \leq s \leq m, \quad i_{s-1} + 1 \leq t \leq i_s \right\} \quad (2.26)$$

ifade edilirse,

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \int_D du_1 du_2 \dots du_n \quad (2.27)$$

dir. $1 \leq s \leq m$ ve $i_0 = 0$

$$A_s = \left\{ (u_{i_{s-1}+1}, u_{i_{s-1}+2}, u_{i_s}): u_{i_{s-1}+1} \leq \dots \leq u_{i_s} \text{ ve } u_{i_{s-1}+1} \leq t \leq u_{i_s} \text{ için } F(x_{i_s}-) \leq u_t \leq F(x_{i_s}) \right\} \quad (2.28)$$

ise $D = \bigcup_{s=1}^m A_s$ yazılabilir. Her bir A_s kümesinde belli sayıda x değerleri eşittir;

$x_{i_{s-1}+1} = \dots = x_{i_s}$ Bu kümelerdeki integralleri aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\int_{A_s} du_{i_{s-1}+1} du_{i_{s-1}+2} \dots du_{i_s} = \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{F(x_{i_s})} \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{u_{i_s}} \dots \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{u_{i_{s-1}+3}} \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{u_{i_{s-1}+2}} du_{i_{s-1}+1} du_{i_{s-1}+2} \dots du_{i_s} \quad (2.29)$$

o zaman,

$$\int_{A_s} du_{i_{s-1}+1} du_{i_{s-1}+2} \dots du_{i_s} = \frac{[F(x_{i_s}) - F(x_{i_{s-1}})]^{i_s - i_{s-1}}}{(i_s - i_{s-1})!} = \frac{[f(x_{i_s})]^{i_s - i_{s-1}}}{(i_s - i_{s-1})!} \quad (2.30)$$

(2.27) denklemini kullanırsak $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ için $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık kitle fonksiyonunu aşağıdaki gibi elde ederiz.

$k < n$ ise $x_{r_1} \leq x_{r_2} \leq \dots \leq x_{r_k}$ için

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}) = \sum f_{1,2,\dots,k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.31)$$

Eşitlikteki toplam $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}$ dışında $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ şartını sağlayan x_i değerleri üzerinden alınmıştır. O zaman D_i kümeleri x_i değerlerinin farklı şekilde eşitlik durumlarını göstermek üzere,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}) = n! \sum_I du_1 du_2 \dots du_n \quad (2.32)$$

$$\bigcup_i D_i = \{(u_1, u_2, \dots, u_n): u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n, F(x_{r_i}-) \leq u_{r_i} \leq F(x_{r_i}), 1 \leq i \leq k\}$$

$$B_i = \{(u_{r_{i-1}+1}, u_{r_{i-1}+2}, \dots, u_{r_i}): u_{r_{i-1}+1} \leq u_{r_{i-1}+2} \leq \dots \leq u_{r_{i-1}} \leq u_{r_i}\} \quad (2.33)$$

için

$$\begin{aligned} \int_{B_i} du_{r_{i-1}+1} du_{r_{i-1}+2} \dots du_{r_i} &= \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_i}} \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_{i-1}}} \dots \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_{i-1}+2}} \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_{i-1}+1}} du_{r_{i-1}+1} du_{r_{i-1}+2} \dots du_{r_i} \\ &= \frac{(u_{r_i} - u_{r_{i-1}})^{r_i - r_{i-1} - 1}}{(r_i - r_{i-1} - 1)!} \end{aligned} \quad (2.34)$$

eşitlikte;

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k; n}(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}) = C(r_1, r_2, \dots, r_k; n) \int_B \left\{ \prod_{i=1}^k (u_{r_i} - u_{r_{i-1}})^{r_i - r_{i-1} - 1} \right\} (1 - u_{r_k})^{n - r_k} du_{r_1} \dots du_{r_k} \quad (2.35)$$

şeklinde hesaplayabiliriz.

$$r_0 = 0 \text{ ve } u_0 = 0$$

$$C(r_1, r_2, \dots, r_k; n) = \frac{n!}{(n - r_k)! \prod_{i=1}^k (r_i - r_{i-1} - 1)!} \quad (2.36)$$

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k; n}(x) = \frac{n!}{(r_1 - 1)! (r_2 - r_1 - 1)! \dots (n - r_k)!} \int_B u_{r_1}^{r_1 - 1} (u_{r_2} - u_{r_1})^{r_2 - r_1 - 1} x(u_{r_k} - u_{r_{k-1}})^{r_k - r_{k-1} - 1} (1 - u_{r_k})^{n - r_k} du_{r_1} \dots du_{r_k} \text{ şeklinde yazabiliriz.} \quad (2.37)$$

$$B = \{(u_{r_1}, u_{r_2}, \dots, u_{r_k}) : u_{r_1} \leq u_{r_2} \leq \dots \leq u_{r_k}, F(u_{r_i} -) \leq u_{r_i} \leq F(u_{r_i}), i = r_1, r_2, \dots, r_k\}$$

ile verilen k boyutlu bir uzaydır.

2.5. Momentler ve Çarpım Momentleri

$\mu_{i:n}^{(k)}$ ve $E(X_{i:n}^k)$ ($1 \leq i \leq n$) ile sıra istatistiklerinin tekli momentlerini ifade edelim.

Momentler sürekli dağılım durumunda,

$$\begin{aligned} \mu_{i:n}^{(k)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{i:n}(x) dx \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x) dx \end{aligned} \quad (2.38)$$

kesikli durumda,

$$\mu_{i:n}^{(k)} = \sum_x x^k f_{i:n}(x), 1 \leq i \leq n \quad (2.39)$$

ile hesaplayabiliriz.

$U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}$ $U \sim N(0,1)$ ' dan rastgele seçilmiş bir örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. Eğer $F(x)$ sürekli ise $U = F(x)$ dönüşümü ile X tesadüfi değişkeni U standart düzgün rastgele değişkenine dönüşür. Bu durumda $F(X_{i:n})$ ile $U_{i:n}$ rastgele değişkenlerinin dağılımları birbirine eşittir.

$$F(X_{i:n}) = {}^d U_{i:n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilecektir.

F dağılım fonksiyonunun ters fonksiyonu,

$$F^{-1}(y) = \sup\{x: F(x) \leq y\} \quad (2.41)$$

olmak üzere herhangi bir F dağılım fonksiyonu için

$$F^{-1}(U_i) = {}^d X_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.42)$$

$$F^{-1}(U_{i:n}) = {}^d X_{i:n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.43)$$

şeklinde olacaktır.

şimdi (2.43) kullanırsak,

$$\mu_{i:n}^{(k)} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 [F^{-1}(u)]^k u^{i-1} (1-u)^{n-i} du \quad 1 \leq i \leq n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

Yukarıdaki eşitlik beta fonksiyonunun bulunduğunu düşünürsek $g_{i:n}(u)$, beta

$(i, n+1-i)$ olasılık fonksiyonunu ifade edersek

$$\mu_{i:n}^{(k)} = \int_0^1 [F^{-1}(u)]^k g_{i:n}(u) du, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 1 \quad (2.45)$$

ifade edilir.

Aynı şekilde $\mu_{i,j:n}^{(k,l)}$ ve $E(X_{i:n}^k, X_{j:n}^l)$ ($1 \leq i \leq n$) ile sıra istatistiklerinin çarpım momentlerini ifade edelim. Bu momentler sürekli durumda,

$$\begin{aligned} \mu_{i,j:n}^{(k,l)} &= \iint_{x < y} x^k y^l f_{i,j:n}(x, y) dx dy \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \iint_{x < y} x^k y^l [F(x)]^{i-1} [F(y) - F(x)]^{j-i-1} \\ &\quad \times [1 - F(y)]^{n-j} f(x) f(y) dx dy \end{aligned} \quad (2.46)$$

kesikli durumda ise,

$$\mu_{i,j:n}^{(k,l)} = \sum_{x \leq y} \sum x^k y^l f_{i,j:n}(x, y), \quad 1 \leq i \leq j \leq n \quad (2.47)$$

şeklinde yazılır.

Sıra istatistiklerinin varyansı $\text{var}(X_{i:n})$, $\sigma_{i:n}$ ($1 \leq i \leq n$) ile ifade edilmiştir. Ayrıca

$$\sigma_{i:n}^2 = \text{var}(X_{i:n}) = \mu_{i:n}^{(2)} - \mu_{i:n}^2, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2.48)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Aynı şekilde sıra istatistiklerinin kovaryansı, $\sigma_{i,j:n}$ $1 \leq i \leq j \leq n$ ile tanımlayabiliriz.

$$\sigma_{i,j:n} = \text{Cov}(X_{i:n}, X_{j:n}) = \mu_{i,j:n} - \mu_{i:n}\mu_{j:n}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \quad (2.49)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca $\mu_{i,j:n} = E(X_{i:n} X_{j:n})$ olur.



3. KESİKLİ SIRA İSTATİSTİKLERİN r İNCİ YOĞUNLUK FONKSİYONU

3.1. Kesikli Ana Kütlelerin Sıra İstatistiklerine Alternatif Yaklaşım

X , $f(k) = \Pr(X = k)$ olasılık kitle fonksiyonu ve $F(k) = \Pr(X \leq k)$ birikimli olasılık kitle fonksiyonu 0,1,2, ... değerlerini alan bir kesikli rastgele değişken olsun. Kabul edelim ki $X_1, X_2, \dots, X_n, X'$ de olduğu gibi aynı olasılık kitle fonksiyonu n tane bağımsız ve aynı dağılmış rastgele değişken olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ uygun sıralı istatistikler olsun. $f_{r:n}(x)$, $X_{r:n}$ 'in olasılık kitle fonksiyonunu yaklaşım 1'den,

$$f_{r:n}(x) = \Pr(X_{r:n} = x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-)$$

$$\sum_{i=r}^n C(i:n) \{ [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} - [F(x-)]^i [1 - F(x-)]^{n-i} \}$$

olarak yazabiliriz. 2'nci yaklaşımdan,

$$\sum_{i=r}^n C(i:n) [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} = \int_0^{F(x)} r C(r:n) u^{r-1} (1 - u)^{n-r} du, \quad 0 < u < 1$$

ve

$$f_{r:n} = \int_{F(x-)}^{F(x)} r C(r:n) u^{r-1} (1 - u)^{n-r} du$$

şeklinde yazılır.

Özel olarak $r=1$ için $X_{1:n}$ 'in olasılık kitle fonksiyonu,

$$f_{1:n}(x) = n \int_{F(x-)}^{F(x)} (1 - u)^{n-1} du = [F^-(x-)]^n - [F^-(x)]^n, \quad F^-(x) = 1 - F(x)$$

ve $r = n$ için $X_{n:n}$ 'in olasılık kitle fonksiyonu,

$$f_{n:n}(x) = n \int_{F(x-)}^{F(x)} u^{n-1} du = [F(x)]^n - [F(x-)]^n$$

şeklinde elde edilir.

$1 \leq r \leq s \leq n$ olmak üzere $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'in ortak olasılık kitle fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{r,s:n}(x, y) &= \Pr(X_{r:n} = x, X_{s:n} = y) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{n-s} \sum_{u+w \leq s-r-1} C(r-i-1, r+w, s-1-u, s+j; n) \\ &\quad \{[F(x-)]^{r-1-i} [F(x)]^{w+1+i}\} [F(y-) - F(y)]^{s-u-r-w-1} \\ &\quad [F(y)]^{u+1+j} [1 - F(y)]^{n-s-j} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Verilen ifadeden kolayca,

$$\begin{aligned} f_{r,s:n}(x, y) &= \Pr(X_{r:n} = x, X_{s:n} = y) \\ &= r(s-r)C(r, s; n) \int_{F(x-)}^{F(x)} \int_{F(y-)}^{F(y)} \sigma^{r-1} (\beta - \alpha)^{s-r-1} (1 - \beta)^{n-s} d\alpha d\beta \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$ 'in ortak olasılık kitle fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_1, x_2, \dots, x_k) &= C(r_1, r_2, \dots, r_k; n) \\ &\int_D \prod_{i=1}^k (r_i - r_{i-1})(u_i - u_{i-1})^{r_i - r_{i-1} - 1} (1 - u_k)^{n - r_k} du_1 du_2 \dots du_k \end{aligned}$$

olur.

$$r_0 = 0, u_0 = 0 \text{ ve } \int_D = \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} \dots \int_{F(x_k-)}^{F(x_k)}$$

Olur.

3.2. Kesikli Düzgün Dağılımlardaki Sıra İstatistiklerinin Momenti

Kabul edelim ki $X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık kitle fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{k}$ birikimli dağılım fonksiyonu $F(x) = \frac{x}{k}, x = 1, 2, \dots, k$ olan n tane bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli ana kitledeki tesadüfi değişkenlerdir. Şimdi $X_{r:n}$ olasılık kitle fonksiyonu (2.19)'dan

$$\begin{aligned}
f_{r:n}(x) &= \int_{F(x-)}^{F(x)} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \\
&= \int_{(x-1)/k}^{x/k} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $C(r:n)$ (2.20)'de verilmiştir.

Ayrıca $r = 1$ ve $r = n$ için sırası ile ,

$$f_{1:n}(x) = \left(\frac{k+1-x}{k}\right)^n - \left(\frac{k-x}{k}\right)^n, \quad x = 1, 2, \dots, k \quad (3.1)$$

ve

$$f_{n:n}(x) = \left(\frac{x}{k}\right)^n - \left(\frac{x-1}{k}\right)^n, \quad x = 1, 2, \dots, k \quad (3.2)$$

ifadeleri bulunmuştur. [Ahsanullah ve Nevzorov, 2001]

$X_{1:n}$ 'in ilk iki momenti ,

$$E(X_{1:n}) = \sum_{x=1}^k x \left[\left(\frac{k+1-x}{k}\right)^n - \left(\frac{k-x}{k}\right)^n \right] = \sum_{i=1}^k \left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n \quad (3.3)$$

ve

$$E(X_{1:n}^2) = \sum_{x=1}^k x^2 \left[\left(\frac{k+1-x}{k}\right)^n - \left(\frac{k-x}{k}\right)^n \right] = \sum_{i=1}^k (2i-1) \left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n \quad (3.4)$$

şeklinde elde edebiliriz. [Absanullah ve Nevzorov, 2001 Turan 2008]

$X_{n:n}$ sırası ile ilk iki momenti,

$$E(X_{n:n}) = \sum_{x=1}^k x \left[\left(\frac{x}{k}\right)^n - \left(\frac{x-1}{k}\right)^n \right] = \sum_{i=1}^{k-1} (-1) \left(\frac{i}{k}\right)^n + k \quad (3.5)$$

ve

$$E(X_{n:n}^2) = \sum_{x=1}^k x^2 \left[\left(\frac{x}{k}\right)^n - \left(\frac{x-1}{k}\right)^n \right] = \sum_{i=1}^{k-1} (-2i-1) \left(\frac{i}{k}\right)^n + k^2 \quad (3.6)$$

şeklinde elde edebiliriz. [Turan 2008]

(3.3) ve (3.4)'dan örnek min.'nin varyansını,

$$\sigma_{1:n}^2 = E(X_{1:n}^2) - E(X_{1:n})^2$$

$$= \sum_{i=1}^k (2i-1) \left(\frac{k+1-i}{k} \right)^n - \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{k+1-i}{k} \right)^n \right]^2 \quad (3.7)$$

ve aynı şekilde (3.5) ve (3.6)'den örnek max. 'ın varyansını,

$$\sigma_{n:n}^2 = E(X_{n:n}^2) - E(X_{n:n})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} (-2i-1) \left(\frac{i}{k} \right)^n + k^2 - \left[\sum_{i=1}^{k-1} (-1) \left(\frac{i}{k} \right)^n + k \right]^2 \quad (3.8)$$

şeklinde elde ederiz.

3.3. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık kitle fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{k}$ ve birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x}{k}$$

$x = 1, 2, \dots, k$ olan n tane bağımsız ve aynı dağılımlı ana kitledeki rastgele değişkenler olsun. (2.14)'den $X_{r:n}$ 'nin birikimli dağılımlı fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x}{k} \right)^i \left(1 - \frac{x}{k} \right)^{n-i}, x = 1, 2, \dots, k \quad (3.9)$$

olur.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık kitle fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{k}$ ve birikimli dağılım fonksiyonu

$F(x) = \frac{x}{k}$ $x = 1, 2, \dots, k$ olan n tane bağımsız ve aynı dağılımlı ana kitledeki rastgele değişkenler olsun. O zaman $X_{r:n}$ 'nin olasılık kitle fonksiyonu (2.19) deki eşitlikten

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \int_{F(x-)}^{F(x)} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \\ &= \int_{(x-1)/k}^{x/k} C(i:n) u^{i-1} (1-u)^{n-i} du \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$C(r; n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \quad \text{dir.}$$

Teorem 3.1

$X_1, X_2, \dots, X_n$ kesikli düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler ve $X_{r:n}$ bu rastgele değişkenlere karşılık gelen r inci sıra istatistiği olsun. $X_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right]$$

veya

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right]$$

olur. (Karakaş, 2014).

İspat.

(3.10)'de $r = 1$ için integral alırsak,

$$f_{1:n}(x) = \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^n - \left(\frac{k-x}{k} \right)^n \quad (3.11)$$

elde ederiz.

$r = 2$ için integral alırsak,

$$= \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-2)!} u(1-u)^{n-2} du$$

son eşitlikte $\alpha = u$ ve $db = (1-u)^{n-2} du$ kısmi integrasyonu uygulanırsa ya da

$$f_{2:n}(x) = n \left[\left(\frac{x-1}{k} \right) \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-1} - \left(\frac{x}{k} \right) \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-1} \right] + f_{1:n}(x) \quad (3.12)$$

şeklinde elde ederiz.

$$r = 3$$

$$f_{3:n} = \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{2! (n-3)!} u^2 (1-u)^{n-3} du$$

Bu eşitlikte $u^2 = \alpha$ ve $db = (1-u)^{n-3} du$ kısmi integrasyonu uygularsak,

$$f_{3:n}(x) = \frac{n(n-1)}{2!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^2 \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-2} - \left(\frac{x}{k} \right)^2 \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-1} \right] + f_{2:n}(x) \quad (3.13)$$

şeklinde elde ederiz.

Genel bir ifade yazacak olursak,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{r-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-r+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{r-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-r+1} \right] \quad (3.14)$$

(3.11),(3.12)(3.13),..., (3.14)'daki ifadeleri toplarsak

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} \right] \quad (3.15)$$

Aynı şekilde, (3.10)' de $i=n$ için integral alırsak,

$$f_{n:n}(x) = \left(\frac{x}{k} \right)^n - \left(\frac{x-1}{k} \right)^n \quad (3.16)$$

$r = n - 1$ için integral alırsak,

$$f_{n-1:n}(x) = \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-2)! 1!} u^{n-2} (1-u) du$$

eşitlikte $(1 - u) = \alpha$ ve $u^{n-2} du = db$ kısmi integrasyonu uygularsak

$$f_{n-1:n}(x) = n \left[\left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(\frac{x}{k}\right)^{n-1} - \left(\frac{x-1}{k}\right) \left(1 - \frac{x-1}{k}\right)^{n-1} \right] + f_{n:n}(x)$$

şeklinde elde edebiliriz. O zaman

$$f_{n-1:n}(x) = n \left[\left(\frac{x}{k}\right)^{n-1} \left(\frac{k-x}{k}\right) - \left(\frac{x-1}{k}\right)^{n-1} \left(\frac{k-x+1}{k}\right) \right] + f_{n:n}(x) \quad (3.17)$$

eşitliği bulunur.

$r = n - 2$ için integral alırsak;

$$f_{n-2:n}(x) = \int_{\frac{x-1}{k}}^{\frac{x}{k}} \frac{n!}{(n-3)! 2!} u^{n-3} (1-u)^2 du$$

eşitliğinde $(1 - u)^2 = \alpha$ ve $u^{n-3} du = db$ kısmi integrasyonunu uygularsak,

$$f_{n-2:n}(x) = \frac{n(n-1)}{2!} \left[\left(\frac{x}{k}\right)^{n-2} \left(\frac{k-x}{k}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{k}\right)^{n-2} \left(\frac{k-x+1}{k}\right)^2 \right] + f_{n-1:n}(x) \quad (3.18)$$

genel bir ifade yazacak olursak,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{i! (n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k}\right)^i \left(\frac{k-x}{k}\right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k}\right)^i \left(\frac{k-x}{k}\right)^{n-i} \right] + f_{n-1:n}(x) \quad (3.19)$$

(3.16),(3.17),(3.18),...(3.19) ifadelerini toplarsak,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i! (n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k}\right)^i \left(\frac{k-x}{k}\right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k}\right)^i \left(\frac{k-x+1}{k}\right)^{n-i} \right] \quad (3.20)$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.15) ve (3.20)'deki ifadelerin birbirine eşit olduğu tümevarım metodu ile ispatlanabilir.

$$\sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right]$$

n=1 alırsak,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

n=2 alırsak,

$$\left(\frac{2k-2x+1}{k^2} \right) = \left(\frac{2k-x+1}{k^2} \right)$$

ve n=3 alırsak,

$$\left(\frac{3k^2+3x^2-6kx+3k-3x+1}{k^3} \right) = \left(\frac{3k^2+3x^2-6kx+3k-3x+1}{k^3} \right)$$

eşitlikleri sağlanır.

$r = m$ için,

$$\sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right] \quad (3.21)$$

eşitliğinin sağlandığını kabul edersek, $r = m + 1$ için,

$$\sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\left(\frac{x}{k} \right)^i \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i} - \left(\frac{x-1}{k} \right)^i \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i} \right]$$

olur.

Bu sonuçlardan yola çıkarak aşağıdaki ifade kolaylıkla elde edilebilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ herhangi bir kesikli dağılıma sahip rastgele değişkenler ve $X_{r:n}$ bu rastgele değişkenlere karşılık gelen r inci sıra istatistiği olsun. Buna göre $X_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^r C(r, n) \left[(F(x-1))^{i-1} (1-F(x-1))^{n-i+1} - (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i+1} \right] \quad (3.22)$$

Sonuç 1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ herhangi bir kesikli dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left[\left(\frac{x-1}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^{n-i+1} - \left(\frac{x}{k} \right)^{i-1} \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n-i+1} \right]$$

elde edilir.

İspat. Kesikli düzgün dağılımın dağılım fonksiyonu 3.22 de yerine yazılırsa yukarıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2. Sonuç 1 ifadesinde $r=1$ ve $r=n$ yazılırsa, sırasıyla

$$f_{1:n}(x) = \left(\frac{k-x+1}{k} \right)^n - \left(\frac{k-x}{k} \right)^n$$

ve

$$f_{n:n}(x) = \left(\frac{x}{k} \right)^n - \left(\frac{x-1}{k} \right)^n$$

elde edilir.

Sonuç 3. $X_1, X_2, \dots, X_n$ herhangi geometrik dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^r C(r, n) [(pq^{x-2})^{i-1} (1 - pq^{x-2})^{n-i+1} - (pq^{x-1})^{i-1} (1 - pq^{x-1})^{n-i+1}]$$

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Kesikli dağılımlardaki sıra istatistiklerinin ilk iki momentinin Khatri (1962) ve Arnold vd. (1992) elde etmişlerdir. Ahsanullah ve Nevzorov (2001) farklı bir yolla ilk iki momenti ifade etmiştir. Çalık ve vd. (2010) kesikli dağılımlardaki sıra istatistiğinin m inci momentlerini elde ettiler. Bir çalışma olarak Çalık ve Güngör (2004) kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin örnek max'nin beklenen değeri $n = 20$ örnek hacmine göre cebirsel ifadeleri elde etmiştir. Turan (2011) kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin örnek ekstremlerinin m inci momentleri ifade eden teoremleri ispat etmiştir.

Bu çalışmada teoremdaki formüller kullanılarak kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin olasılık fonksiyonları kolayca elde edilebilmektedir. Teorem kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerinin olasılık fonksiyonlarını gösteren genelleştirilmiş bir formüldür. Teorem de özel olarak $r = 1$ ve $r = n$ alınır Ahsanullah ve Nevzorov (2001) elde ettiği 1 inci ve n inci olasılık fonksiyonlarını vermektedir. Ayrıca kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin dağılımı için genel bir formül elde edilmiştir.

Bu çalışmada ise yapılan çalışmaların daha genel bir hali olan kesikli dağılımlardaki sıra istatistiklerin dağılımı için genel bir ifade elde edilmiştir. Bu ifade kullanılarak kolayca kesikli dağılımların r inci sıra istatistiği için özel sonuçlar elde edilebilir. Daha sonraki çalışmalarda da ifadeler kullanılarak momentlerin elde edilmesine ilişkin çalışmalar yapılacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B., 2001. Ordered Random Variables, Nova Science Publishers, Inc., New York.
- [2] Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B., 2005. Order Statistics: Examples and Exercises. Nova Science Publishers, Inc., New York.
- [3] Arnold, B. C. and Balakrishnan, N., 1989. Relations, Bounds and Approximations for Order Statistics. Lecture Notes in Statistics. 53, Springer-Verlag.
- [4] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N., 1992. A First Course in Order Statistics, John Wiley and Sons, New York.
- [5] Balakrishnan, N. and Malik, H. J., 1985. Some General Identities Involving Order Statistics. Commun. Statist. - Theory Meth., 14(2), 333- 339.
- [6] Balakrishnan, N., 1986. Order Statistics from Discrete Distributions. Commun. Statist. - Theory Meth., 15(3), 657- 675.
- [7] Çalik, S. and Güngör, M., 2004. On the Excepted Values of the Sample Maximum of Order Statistics from a Discrete Uniform Distribution. Appl. Math. Computation, 157, 695-700.
- [8] Çalik, S., Güngör, M. and Colak, C., 2010. On the Moments of Order Statistics From Discrete Distribution . Pak. J. Statist., 26(2), 417-426.
- [9] Dasgupta, A., 2010. Fundamentals of Probability: A First Course, Springer.
- [10] David, H.A., 1981. Order Statistics, John Wiley and Sons, Newyork.
- [11] David, H. A. and Nagaraja, H. N., 2003. Order Statistics. John Wiley and Sons, New York.
- [12] Gibbons, J. D., 1971. Nonparametric Statistical Inference. Tosho Printing Co., Tokyo.
- [13] Hasting, C., Jr., Mosteller, P., Tukey, J. W. And Winsor, C. P., 1947. Low Moments for Small Samples: A Comparative Study of Order Statistics. Annals of Mathematical Statistics, 18, 413- 426.
- [14] Joshi, P. C. and Balakrishnan, N., 1982. Recurrence Relations and Identities for the Product Moments of Order Statistics. Sankhya B, 44, 39- 49.
- [15] Khatri, C. G., 1962. Distribution of Order Statistics for Discrete Case, Ann. Inst. Statist. Math., 14, 167-171.

- [16] Karakaş, M. A., 2014. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerinin Olasılık Fonksiyonları. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [17] Malik, H. J., Balakrishnan, N. and Ahmed, S. E., 1988. Recurrence Relations and Identities for Moments of Order Statistics, I: Arbitrary Continuous Distribution, Commun. Statist. - Theory Meth., 17(8), 2623- 2655.
- [18] Mark, J. T., Marion, B. B., and Hoffman, D. D., 2010. Natural Selection and Veridical Perceptions. Journal of Theoretical Biology, 266, 504- 515.
- [19] Nagaraja, H. N., 1992. Order Statistics from Discrete Distribution (with discussion). Statistics, 23, 189-216.
- [20] Salvadori, G., Michele, C., Kottegoda, N. T. and Rosso, R., 2007. Extremes in Nature: An Approach Using Copulas. Water Science and Technology, Springer.
- [21] Shahbazov, A., 2005. Olasılık Teorisine Giriş. Birsen Yayınevi.
- [22] Turan, A., 2008. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Örnek Ekstremlerinin Momenti. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

1989 Elazığ doğumluyum. 1996 yılında ilkokul 2001 yılında ortaokul ve 2004 yılında liseye başladım. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik bölümüne başladım.2012 yılında mezun oldum. 2015 yılında Fırat üniversitesi İstatistik Bölümü' nde başladığım yüksek lisansa halen devam etmekteyim.

