

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



n-BOYUTLU UZAYDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Sibel TARLA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN

TEMMUZ – 2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-BOYUTLU UZAYDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Sibel TARLA
(151121104)

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN

TEMMUZ – 2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-BOYUTLU UZAYDA REKTİFİYAN EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sibel TARLA

(151121104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Haziran 2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 14 Temmuz 2017

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN (F.Ü)

Diğer jüri üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR (M.Ş.Ü)

TEMMUZ – 2017

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkanlar sağlayan, çalışmanın her aşamasında yanımda olup her vesilede birikimini aktararak sürekli yardımda bulunan çok kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN' e teşekkürümü sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca yanımda olan ve bana her zaman destek olan başta babam Osman TARLA ve annem Nimet TARLA olmak üzere tez süreci boyunca bana her konuda yardımcı olan ve varlığı ile beni güçlendiren meslektaşım aynı zaman da kardeşim Sema TARLA' ya teşekkür ederim.

Sibel TARLA
ELAZIĞ-2017

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	V
1.GİRİŞ	1
2.BÖLÜM	3
2.1.Temel Kavramlar	3
3.BÖLÜM	10
3.1. n-Boyutlu Öklid Uzayında Rektifiyan Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları	10
4.BÖLÜM	18
4.1. n-Boyutlu Lorentz Uzayında Rektifiyan Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları	18
5.SONUÇ	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	35

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlendi.

Birinci bölümde; Literatürde, rektifiyan eğrilerle ilgili yapılan çalışmalara yer verildi.

İkinci bölümde; Çalışmamıza temel teşkil edecek tanımlar verildi.

Üçüncü bölümde; n -boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriler anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde; n -boyutlu Lorentz uzayında rektifiyan eğriler ve karakterizasyonları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lorentz Uzayı, Rektifiyan Eğri.

SUMMARY

Rectifying curves in the n-dimensional Space

This thesis has been edited in four charteps.

In the first chapter; The studies related with rectifying curves in literature were given.

In the second chapter; The definitions that will constitute the basis of this thesis were given.

In the third chapter; Rectifying curves were described in the n-dimensional Euclidean space.

In the fourth chapter; Rectifying curves and their charecterizations were given in the n-dimensional Lorentzian space.

Key Words: Lorentzian space, Rectifying curve.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\langle , \rangle$	: Lorentz uzayında iç çarpım
L^n	: n-boyutlu Lorentz uzayı
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\ \parallel$	: Lorentz uzayında norm
$\times_L$	: Lorentz Uzayında vektörel çarpım
V_1	: Teğet Vektör
V_2	: Normal Vektör
V_i	: i-yinci Binormal Vektör ($i \in \{3, 4, \dots, n\}$)
$S^{n-1}(1)$	: Birim Hiperküre
k_1	: 1. Eğrilik (kısaca Eğrilik)
k_2	: 2. Eğrilik (kısaca Torsiyon)
k_i	: i-yinci Eğrilik ($i \in \{3, 4, \dots, n-1\}$)

1. GİRİŞ

Öklid 3-uzayında yer vektörleri, $V_1(s)$ teğet ve $V_3(s)$ binormal vektör alanları tarafından gerilen düzlemde yatan eğriye rektifiyan eğri denildiği B.Y. Chen (Chen, 2003) tarafından tanımlanmıştır. Buna göre E^3 de bir α rektifiyan eğrisinin seçilmiş bir orijin noktasına göre yer vektörü, $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ s yay parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3(s)$$

denklemini sağlar.

Öklid uzayında rektifiyan eğrilere çalışılmıştır. Benzer yaklaşımla Cambie ve diğerleri (Cambie vd., 2016) E^n n-boyutlu Öklid uzayında, $\alpha: I \rightarrow E^n$ bir rektifiyan eğri ise $\forall s \in I$ için $V_2(s)$ ortogonal bileşeni bir sabit nokta içerir.

E^n de Öklid hareketi uyguladıktan sonra sabit noktanın orijin olduğunu kabul edelim. $V_2(s)$ in ortogonal bileşeni

$$V_2^\perp(s) = \left\{ v \in V_{1\alpha(s)}^{E^n} \mid \langle v, V_2(s) \rangle = 0 \right\}$$

uzayında yatıyorsa α eğrisinin rektifiyan eğri olduğu tanımlanmıştır. E^n in bir α rektifiyan eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3(s) + \dots + \lambda_{n-1}(s)V_n(s)$$

şeklinde yazılabilir.

E^4 Öklid uzayındaki rektifiyan eğrileri; α eğrisinin yer vektörünün $V_2(s)$ normal vektör alanının $V_2^\perp(s) = \left\{ w \in E^4 \mid \langle w, V_2(s) \rangle = 0 \right\}$ ortogonal tümleyeninde yatıyorsa α eğrisinin rektifiyan eğri olduğu İlarslan ve Nesovic (İlarslan ve Nesovic, 2008) tarafından tanımlanmıştır. Bu taktirde $V_2^\perp(s)$, teğet, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları, sırasıyla, $V_1(s)$, $V_3(s)$ ve $V_4(s)$ tarafından gerilen E^4 ün 3-boyutlu alt uzayıdır. Böylece E^4 de bir α rektifiyan eğrisinin, herhangi bir seçilmiş orijin noktasına göre yer vektörü $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ ve $\lambda_3(s)$, s yay parametresi için diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3(s) + \lambda_3(s)V_4(s)$$

denklemini sağlar.

Bu çalışmada, orijinal olarak, L^n n-boyutlu Lorentz uzayında rektifiyan eğri kavramını tanımladık. Bu eğriler için bazı karakterizasyonlar elde ederek rektifiyan eğrinin parametrik gösterimini verdik.



2. BÖLÜM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$A2) \forall P \in A \text{ için } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.3. n -boyutlu standart reel vektör uzayı R^n ile birleştirilmiş R^n afin uzayını ele alalım. Bu R^n vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle, \rangle : R^n \times R^n \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece R^n afin uzayı n -boyutlu Öklid uzayı olur ve E^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.4. $d : E^n \times E^n \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.5. $d : E^n \times E^n \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.6. $\forall x, y, z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü $\cos \theta = \frac{\langle xy, yz \rangle}{\|xy\| \|yz\|}$ den hesaplanan θ reel sayıdır (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.7. E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ -lisine R^n de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n -lisi R^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.8. E^n deki $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.9. E^n de bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{E_0E_i}$ dir. Buradaki $x_i: E^n \rightarrow R, 1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n -lisine de E^n Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.10: I, R nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \rightarrow R^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne R^n uzayı içinde bir eğri denir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.11: M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $s \in I$ için $\|\dot{\alpha}(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.12. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda

$\varphi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\varphi\}$ olmak üzere φ den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret- Frenet r -ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.13. $V_1(s), V_2(s), V_3(s), \dots, V_n(s)$ vektörlerine $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), \dots, V_n(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $V_1(s), V_2(s), V_3(s), \dots, V_n(s)$ vektör alanlarına α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.14. $M \subset E^n$ eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ seçilmiş bir nokta olmak üzere E^n in, $Sp\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}, p \leq r$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzayına, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin p - yinci oskülatör hiperdüzlemi denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.15. $n = 3$ özel halinde $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ Frenet 3- ayaklısını göz önüne alalım.

$$Sp\{V_1(s), V_2(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya oskülatör düzlem,

$$Sp\{V_2(s), V_3(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya normal düzlem,

$$Sp\{V_1(s), V_3(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya rektifiyan düzlem denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Burada oskülatör kelimesi yapışan veya daha anlamlı olarak, öpen anlamındadır, normal dik anlamında ve rektifiyan kelimeside tamamlayan anlamındadır (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.16. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i: I \rightarrow R, 1 \leq i \leq r,$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.17. E^n n- boyutlu Öklid uzayında bir P noktası verildiğinde başlangıç noktasını P noktasına birleştiren yönlü doğru parçasının belirttiği vektöre yer vektörü denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.18. E^n n-boyutlu Öklid uzayında, $\alpha: I \rightarrow E^n$ bir rektifiyan eğri ise $\forall s \in I$ için $V_2(s)$ ortogonal bileşeni bir sabit nokta içerir. E^n de Öklid hareketi uyguladıktan sonra sabit noktanın orijin olduğunu kabul edelim. Eğer $V_2(s)$ in ortogonal bileşeni

$$V_2^\perp(s) = \left\{ v \in V_{1\alpha(s)}^{E^n} \mid \langle v, V_2(s) \rangle = 0 \right\}$$

uzayında yatıyorsa α eğrisine rektifiyan eğri denir (Cambie vd., 2016).

Tanım 2.1.19. R^n reel afin uzayı $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri verilsin. Bu uzay üzerinde Lorentz skaler çarpımı

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_L = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

şeklinde ifade edilir. $(R^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ ikilisine n-boyutlu Lorentz uzayı denir ve L^n ile gösterilir.

L^n n-boyutlu lorentz uzayında $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü

- (i) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L < 0$ olduğunda $\vec{X}$ vektörü timelike,
- (ii) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L > 0$ veya $\vec{X} = 0$ olduğunda $\vec{X}$ vektörü spacelike,
- (iii) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L = 0$ ve $\vec{X} \neq 0$ olduğunda $\vec{X}$ vektörü null (yada light-like) vektör denir.

$\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün normu $\|\vec{X}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L|}$ şeklinde tanımlanır. Bu nedenle $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L = \pm 1$ olduğunda $\vec{X}$ vektörü bir birim vektördür (İyigün ve Arslan, 2005).

Tanım 2.1.20. L^n n-boyutlu Lorentz uzayında

$$\vec{u}_1 = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}), \vec{u}_2 = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}), \dots, \vec{u}_n = (u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nn})$$

şeklinde üç vektörün vektörel çarpımı

$$\overrightarrow{u_1} \times_L \overrightarrow{u_2} \times_L \dots \times_L \overrightarrow{u_n} = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanır, burada $e_i, 1 \leq i \leq n$ standart baz vektörleridir (İyigün ve Arslan, 2003).

Tanım 2.1.21. L^n n-boyutlu Lorentz uzayında $\alpha: I \subset R \rightarrow L^n$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. $\alpha(I) \subset L^n$ noktalar kümesine L^n n-boyutlu Lorentz uzayında bir eğri denir (İlarslan vd., 2000).

Tanım 2.1.22. $M \subset L^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i: I \rightarrow R, 1 \leq i \leq r,$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir (İlarslan vd., 2000).

n-boyutlu L^n Lorentz uzayında s yay parametrelili bir eğri $\alpha: I \subset R \rightarrow L^n$, olsun. Frenet-Serret çatısının birinci vektörü,

$$V_1(s) = \alpha'(s)$$

şeklinde tanımlanır.

V_1 bir birim vektör olduğundan,

$$\langle V_1(s), V_1(s) \rangle_L = \varepsilon_1 = \pm 1 \quad (2.1.1)$$

dir. (2.1.1) eşitliğinin s ye göre türevi alınır,

$$\langle V'_1(s), V_1(s) \rangle_L = 0$$

elde edilir.

α eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1(s) = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle_L$$

reel değerli fonksiyon ile tanımlıdır. Her $s \in I$ için $k_1(s) \neq 0$ dir.

L^n n-boyutlu Lorentz uzayının normal vektörü

$$V_2(s) = \frac{V_1'(s)}{k_1(s)} \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.1.2) nin asli normal vektörünün türevi yardımıyla, ikinci eğrilik fonksiyonu

$$k_2(s) = \langle V_2'(s), V_3(s) \rangle_L \quad (2.1.3)$$

biçiminde tanımlanır. Bu reel değerli fonksiyona α eğrisinin torsiyonu denir. α eğrisinin i-yinci binormal vektör alanı,

$$V_i(s) = \frac{V_{i-1}'(s)}{k_{i-1}(s)} \quad (2.1.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu $V_i(s)$ vektörü $V_1(s)$ ve $V_2(s)$ vektörlerinin her ikisine de diktir.

L^n n-boyutlu Lorentz iç çarpımı tarafından α eğrisinin (n-1)-inci eğriliği

$$k_{n-1}(s) = \langle V_{n-1}'(s), V_n(s) \rangle_L \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlıdır. $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), \dots, V_n(s), k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)\}$ kümesi α eğrisinin Frenet-Serret elemanları denir. $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), \dots, V_n(s)\}$ vektörleri ortonormal vektörlerdir. Dolayısıyla,

$$\langle V_1, V_1 \rangle_L = \varepsilon_1, \langle V_2, V_2 \rangle_L = \varepsilon_2, \langle V_3, V_3 \rangle_L = \varepsilon_3, \langle V_i, V_i \rangle_L = \varepsilon_i,$$

$$\langle V_1, V_2 \rangle_L = \langle V_1, V_3 \rangle_L = \dots = \langle V_1, V_i \rangle_L = 0,$$

$$\langle V_2, V_1 \rangle_L = \langle V_2, V_3 \rangle_L = \dots = \langle V_2, V_i \rangle_L = 0, \quad (2.1.6)$$

$$\langle V_3, V_1 \rangle_L = \langle V_3, V_2 \rangle_L = \dots = \langle V_3, V_i \rangle_L = 0,$$

$\vdots$

$$\langle V_n, V_1 \rangle_L = \langle V_n, V_2 \rangle_L = \dots = \langle V_n, V_{n-1} \rangle_L = 0$$

dir. L^n n-boyutlu Lorentz uzayında α eğrisi için Frenet-Serret denklemleri

$$\begin{cases} V_1'(s) = \varepsilon_2 k_1(s) V_2(s), \\ V_2'(s) = -\varepsilon_1 k_1(s) V_1(s) + \varepsilon_3 k_2(s) V_3(s), \\ \quad \quad \quad \vdots \\ V_i'(s) = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + \varepsilon_{i+1} k_i(s) V_{i+1}(s), \\ V_{i+1}'(s) = -\varepsilon_i k_i(s) V_i(s) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

şeklinde elde edilir (İyigün ve Arslan, 2005).

3. BÖLÜM

3.1. n- Boyutlu Öklid Uzayında Rektifiyan Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları

Bu bölümde ilk olarak E^n n-boyutlu Öklid uzayındaki rektifiyan eğrileri, eğrinin eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize edeceğiz.

Tanım 3.1.1. E^n n-boyutlu Öklid uzayında, $\alpha: I \rightarrow E^n$ bir rektifiyan eğri ise $\forall s \in I$ için $V_2(s)$ ortogonal bileşeni bir sabit nokta içerir. E^n de Öklid hareketi uyguladıktan sonra sabit noktanın orijin olduğunu kabul edelim. $V_2(s)$ in ortogonal bileşeni

$$V_2^\perp(s) = \left\{ v \in V_{1\alpha(s)}^{E^n} \mid \langle v, V_2(s) \rangle = 0 \right\}$$

uzayında yatıyorsa α eğrisinin rektifiyan eğri olduğu tanımlanmıştır. E^n in bir α rektifiyan eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3(s) + \dots + \lambda_{n-1}(s)V_n(s) \quad (3.1.1)$$

şeklinde yazılabilir (Cambie vd., 2016).

Teorem 3.1.1. $\alpha(s)$, E^n n-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve $k_1(s)$, $k_2(s)$, ..., $k_{n-1}(s)$ de α nın sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. Bu takdirde α nın bir rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$k_{n-1}(s) \sum_{k=0}^{n-4} \mu_{n-3,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \sum_{k=0}^{n-3} \left(\mu_{n-2,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right)' = 0 \quad (3.1.2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Cambie vd., 2016).

İspat: (3.1.1) eşitliğinin s ye göre türevini alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= 1 \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu_1(s)k_2(s) &= 0 \\ \mu_1'(s) - \mu_2(s)k_3(s) &= 0 \\ \mu_i'(s) - \mu_{i+1}(s)k_{i+2}(s) + \mu_{i-1}(s)k_{i+1}(s) &= 0 \\ \mu_{n-2}'(s) + \mu_{n-3}(s)k_{n-1}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemden,

$$\lambda(s) = s + c, c \in R \quad \mu_1(s) = \frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)}, \quad \mu_2(s) = \left[\frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)} \right]' \frac{1}{k_3(s)}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri

$$\mu_1(s) = \mu_{1,0}(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \text{ ve } \mu_2(s) = \mu_{2,0}(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \mu_{2,1}(s) \left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right]'$$

şeklinde yeniden ifade edersek bu denklemlerden,

$$\mu_i(s) = \sum_{k=0}^{i-1} \mu_{i,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right), \quad i \in \{3, 4, \dots, n-2\} \quad (3.1.4)$$

elde edilir. Buradan $\mu_{i,k}(s)$ fonksiyonları

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{1,0}(s) = s + c, \quad c \in R \\ \mu_{2,0}(s) = \frac{1}{k_3(s)}, \quad \mu_{2,1}(s) = \frac{s+c}{k_3(s)} \quad i \in \{3, 4, \dots, n-2\} \text{ için} \\ \mu_{i,0}(s) = \frac{\mu'_{i-1,0}(s) + k_i(s)\mu_{i-2,0}(s)}{k_{i+1}(s)}, \\ \mu_{i,k}(s) = \frac{\mu'_{i-1,k}(s) + k_i(s)\mu_{i-2,k}(s) + \mu_{i-1,k-1}(s)}{k_{i+1}(s)}, \quad k \in \{1, 2, \dots, i-3\} \text{ için} \\ \mu_{i,i-2}(s) = \frac{\mu'_{i-1,i-2}(s) + \mu_{i-1,i-3}(s)}{k_{i+1}(s)}, \\ \mu_{i,i-1}(s) = \frac{\mu_{i-1,i-2}(s)}{k_{i+1}(s)} \end{array} \right. \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tersine, E^n n-boyutlu Öklid uzayında herhangi bir birim hızlı α eğrisinin $k_1(s)$, $k_2(s)$, $\dots$, $k_{n-1}(s)$ eğriliklerinin (3.1.2) denklemini sağladığını kabul edelim. $\alpha \in L^n$ yer vektörünün (3.1.1) şeklinde yazılabileceğinden

$$\beta(s) = \alpha(s) - \lambda(s)V_1(s) - \mu_1(s)V_3(s) - \dots - \mu_{n-2}(s)V_n(s)$$

eğrisini tanımlayalım. Bu ifadenin s ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini ve (3.1.2) eşitliğini kullanarak α nın bir rektifiyan eğri olduğu açıktır.

Teorem 3.1.2. E^n n-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)$ sabit eğrilikli bir rektifiyan eğri mevcut değildir (Cambie vd., 2016).

İspat: E^n de $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)$ eğrilikleri sabit fakat sıfır olmayan bir rektifiyan eğrinin mevcut olduğunu varsayalım. (3.1.3) ün birinci, ikinci ve üçüncü eşitlikleri

$$\lambda(s) = s + c, \mu_1(s) = \frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)}, \mu_2(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)k_3(s)}, \quad c \in R$$

(3.1.3) ün dördüncü denkleminde $i \in \{2, 3, \dots, n - 3\}$

$$\mu_{i+1}(s) = \frac{\mu'_i(s) + \mu_{i-1}(s)k_{i+1}(s)}{k_{i+2}(s)}$$

olduğunu biliyoruz. Tümevarım yöntemiyle

$$\mu_{2m-1}(s) = \frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{2m-1}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{2m}(s)} (s + c) \quad (3.1.6)$$

ve

$$\mu_{2m}(s) = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^m k_{2i}(s) \right)^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{2m+1}(s)} \quad (3.1.7)$$

olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.1.3. E^n de sıfır olmayan eğrilikleri ile yay parametrelili bir eğri α olsun. $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-2}(s)$ sıfır olmayan α nın ilk $(n - 2)$. eğrilikleridir. α nın bir rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} k_{n-1}(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as(s+2c)+b}}, & n \text{ çift için} \\ k_{n-1}(s) = \pm \frac{s+c}{\sqrt{as(s+2c)+b}}, & n \text{ tek için} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

olmasıdır. Burada $a; k_1, k_2, \dots, k_{n-2}$ eğriliklerine bağlı olarak bir sabit ve $b, c \in R$ dir (Cambie vd., 2016).

İspat: Kabul edelim ki, α eğrisi $k_1, k_2, \dots, k_{n-2}$ eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler olan bir rektifiyan eğri olsun. (3.1.3) sistemlerinden

$$\mu_{n-3}(s)k_{n-1}(s) = -\mu'_{n-2}(s) = -\left(\frac{\mu'_{n-3}(s) + \mu_{n-4}(s)k_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)}\right)' \quad (3.1.9)$$

olduğunu biliyoruz. (3.1.6) ve (3.1.7) denklemleri göz önüne alınarak (3.1.8) denklemleri elde edilir.

Teorem 3.1.4. E^n n-boyutlu Öklid uzayında $\alpha(s)$, eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)$ sıfırdan farklı birim hızlı rektifiyan eğri olsun. Bu taktirde

(i) Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni,

$$\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = s + c, \quad c \in R,$$

dir.

(ii) $\rho(s) = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonu

$$\rho^2(s) = s^2 + c_1s + c_2, \quad c_1 \in R, c_2 \in R$$

eşitliğini sağlar.

(iii) Eğrinin yer vektörünün $\alpha^{V_2(s)}$ normal bileşeni sabit uzunluğa sahiptir ve $\rho(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

(iv) Eğrinin yer vektörünün binormal bileşenleri $i \in \{3, 4, \dots, n\}$ için

$$\langle \alpha(s), V_i(s) \rangle = \mu_i(s)$$

şeklinde verilir.

Tersine, E^n n-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı eğri $\alpha(s)$, sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)$ eğrilikleri (i), (ii), (iii) ve (iv) durumlarından birini sağlarsa, bu taktirde α bir rektifiyan eğridir (Cambie vd., 2016).

İspat (i): Kabul edelim ki, α bir birim hızlı rektifiyan eğri olsun. $\lambda(s) = s + c$ olduğu göz önüne alınırsa $\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = \lambda(s) = s + c, \quad c \in R$ elde edilir.

Tersine, $\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = s + c$ olsun. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$k_1(s)\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$$

elde edilir. $k_1(s) \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ bulunur. Buda α nın bir rektifiyan eğri olduğunu gösterir.

(ii): α birim hızlı bir rektifiyan eğri ise (3.1.3) denklemler sisteminin üçüncü, dördüncü ve beşinci denklemleri kullanılarak $\mu_i(s)$ $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ ile çarpıp, taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=1}^{n-2} \mu_i(s) \mu'_i(s) = 0$$

elde edilir. Bu nedenle $a \in R_0$ için $\sum_{i=1}^{n-2} \mu_i^2(s) = a^2$ dir.

Rektifiyan eğri tanımından

$$\begin{aligned} \rho^2(s) &= \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \lambda^2(s) + \sum_{i=1}^{n-2} \mu_i^2(s) \\ &= (s+c)^2 + a^2 = s^2 + c_1 s + c_2, \quad c_1 \in R, c_2 \in R, \end{aligned}$$

olur.

Tersine, $\rho^2(s) = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = s^2 + c_1 s + c_2$ olsun. Bu eşitliğin s ye göre türevi iki defa alınır ve (3.1.3) denklemleri kullanılırsa

$$k_1(s) \langle V_2(s), \alpha(s) \rangle = 0$$

elde edilir. $k_1(s) \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ dır. Bu ise α nın rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir.

(iii): $\alpha(s) = m(s)V_1(s) + \alpha^{V_2}(s)$ olduğundan, bir rektifiyan eğri için $\alpha^{V_2}(s) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} \mu_i^2(s)} = a$ dir, Böylece normal bileşen sabit uzunluğa sahiptir. $\rho^2(s)$ uzaklık fonksiyonunun sabit olmadığını (ii) den ispatlamıştık.

Tersine,

$$\|\alpha^{V_2}(s)\| = \|\alpha(s) - \langle V_1(s), \alpha(s) \rangle V_1(s)\|,$$

$$\langle \alpha^{V_2}(s), \alpha^{V_2}(s) \rangle = a^2$$

olduğunu biliyoruz. Bu taktirde;

$$\langle \alpha^{V_2}(s), \alpha^{V_2}(s) \rangle = \langle \alpha(s) - \langle V_1(s), \alpha(s) \rangle V_1(s), \alpha(s) - \langle V_1(s), \alpha(s) \rangle V_1(s) \rangle$$

$$\langle \alpha^{V_2}(s), \alpha^{V_2}(s) \rangle = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle - \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle^2$$

dir. Bu son denklemin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$k_1(s) \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$$

olur. Buradan $k_1(s) \neq 0, \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ olup, α bir rektifiyan eğridir.

(iv): Bir rektifiyan eğrinin yer vektörünü

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu_1(s)V_3(s) + \dots + \mu_{n-2}(s)V_n(s)$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Dolayısıyla

$$\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = \mu_1(s) \text{ ve } \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = \mu_2(s)$$

dir. $\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = \mu_1(s)$ olduğunu kabul edelim. s ye göre türev alınır ve Frenet denklemleri kullanılarak,

$$k_2(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$$

$k_2(s) \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ dır. Buda α eğrisinin bir rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4 ün son durumunun tersini ispatlamak için ilk iki $V_3(s), V_4(s)$ binormal bileşenleri eşdeğerdir.

Teorem 3.1.5. E^n de bir α eğrisi $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ şeklinde verilsin. Burada $\rho(t)$ pozitif keyfi fonksiyon ve $y(t)$, $S^{n-1}(1)$ birim hiperkürede yatan yay parametrelili bir eğri olsun. Bu takdirde α nın bir rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\rho(t) = a \sec(t + t_0) \quad a \in R_0 \text{ ve } t_0 \in R$$

olmasıdır (Cambie vd., 2016).

İspat: $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ ifadesinin t ye göre türevini alırsak,

$$\alpha'(t) = \rho'(t)y(t) + \rho(t)y'(t)$$

$\|\alpha'(t)\| = v$ olsun. Buradan

$$vV_1(t) = \rho'(t)y(t) + \rho(t)y'(t)$$

$$\Rightarrow V_1(t) = \frac{\rho'(t)}{v}y(t) + \frac{\rho(t)}{v}y'(t)$$

en son ifadenin tekrar t ye göre türevi alınır,

$$vk_1(t)V_2(t) = \left(\frac{\rho'(t)}{v}\right)'y(t) + \left(\frac{\rho'(t)}{v} + \left(\frac{\rho(t)}{v}\right)'\right)y'(t) + \frac{\rho(t)}{v}y''(t)$$

elde edilir. $\langle y(t), y(t) \rangle = \langle y'(t), y'(t) \rangle = 1$, $T(t)$ nin ortonormal bazını $\{y(t), y'(t), Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_{n-2}(t)\}$ olarak alalım. Buradan

$$y''(t) = \langle y(t), y''(t) \rangle y(t) + \langle y'(t), y''(t) \rangle y'(t) + \langle Y_1(t), y''(t) \rangle Y_1(t) + \dots + \langle Y_{n-2}(t), y''(t) \rangle Y_{n-2}(t)$$

olur. Yay parametrelili eğriler için (3.1.1) denklemi kullanılarak

$$\langle y'(t), y'(t) \rangle = 1 \Rightarrow \langle y''(t), y'(t) \rangle + \langle y'(t), y''(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle y'(t), y''(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, y'(t) \rangle = \langle \rho(t)y(t), y'(t) \rangle = \rho(t)\langle y(t), y'(t) \rangle = 0,$$

$$\langle y(t), y'(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle y'(t), y'(t) \rangle + \langle y(t), y''(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle y(t), y''(t) \rangle = -1$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler göz önüne alınırsa,

$$vk_1(t)V_2(t) = \left(\left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' - \frac{\rho(t)}{v} \right) y(t) + \left(\frac{\rho'(t)}{v} + \left(\frac{\rho(t)}{v} \right)' \right) y'(t) \\ + \frac{\rho(t)}{v} \left(\sum_1^{n-2} \langle Y_i(t), y''(t) \rangle Y_i(t) \right)$$

olur. Bu denklemi $\alpha(t)$ ile iç çarpıma tabi tutar ve $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$vk_1(t)\langle V_2(t), \alpha(t) \rangle = \left(\left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' - \frac{\rho(t)}{v} \right) \rho(t)$$

bulunur. α rektifiyan eğri olduğundan

$$\left(\left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' - \frac{\rho(t)}{v} \right) \rho(t) = 0$$

olup diferensiyel denklemi çözülürse,

$$\rho(t) = a \sec(t + t_0) \quad a \in R_0 \text{ ve } t_0 \in R$$

elde edilir.

4. BÖLÜM

4. 1. n- Boyutlu Lorentz Uzayında Rektifiyan Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları

Bu bölümde ilk olarak L^n n-boyutlu Lorentz uzayındaki rektifiyan eğrileri, eğrinin eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize edeceğiz.

Tanım 4.1.1. L^n n-boyutlu Lorentz uzayında bir eğri α olsun. α nın yer vektörü, $V_2(s)$ asli vektör alanının $V_2^\perp(s)$ ortogonal uzayında yatarsa, α eğrisine rektifiyan eğri denir. Bundan dolayı L^n n-boyutlu Lorentz uzayında bir α rektifiyan eğrisinin seçilmiş bir orijin noktasına göre yer vektörü

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3(s) + \cdots + \lambda_{n-1}(s)V_n(s), \quad (4.1.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.1. $\alpha(s)$, L^n n-boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı bir eğri ve $k_1(s)$, $k_2(s)$, ..., $k_{n-1}(s)$ de α nın sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. Bu taktirde α nın bir rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\varepsilon_n k_{n-1} \sum_{k=0}^{n-4} \lambda_{n-3,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \sum_{k=0}^{n-3} \left(\lambda_{n-2,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right)' = 0 \quad (4.1.2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Tanım 4.1.1 den (4.1.1) eşitliğinin s ye göre türevi alınır ve (2.1.7) Frenet denklemlerini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & \lambda_1(s)V_1'(s) + \lambda_1'(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3'(s) + \lambda_2'(s)V_3(s) + \cdots + \lambda_{n-1}(s)V_n'(s) \\ & + \lambda_{n-1}'(s)V_n(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(s) = & \lambda_1'(s)V_1(s) + (\lambda_1(s)\varepsilon_2 k_1(s) - \varepsilon_2 \lambda_2(s)k_2(s))V_2(s) \\ & + \sum_{i=3}^{n-2} \lambda_i'(s)V_{i+1}(s) + \lambda_i(s)(-\varepsilon_i k_i(s)V_i(s) + \varepsilon_{i+2} k_{i+1}(s)V_{i+2}(s)) \\ & + (-\varepsilon_{n-1} \lambda_{n-1}(s)k_{n-1}(s))V_{n-1}(s) + \lambda_{n-1}'(s)V_n(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1(s) &= \lambda'_1(s)V_1(s) + (\lambda_1(s)\varepsilon_2k_1(s) - \varepsilon_2\lambda_2(s)k_2(s))V_2(s) \\
&+ \sum_{i=2}^{n-3} (\lambda'_i(s) - \lambda_{i+1}(s)\varepsilon_{i+1}k_{i+1}(s) + \lambda_{i-1}(s)\varepsilon_{i+1}k_i(s))V_{i+1}(s) \\
&+ (\lambda'_{n-1}(s) + \varepsilon_n\lambda_{n-2}(s)k_{n-1}(s))V_n(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $V_1(s), V_2(s), V_3(s), \dots, V_n(s)$ ile sırasıyla yukarıdaki denklemi iç çarpıma tabi tutarsak,

$$\begin{aligned}
\lambda'_1(s) &= 1 \\
\lambda_1(s)\varepsilon_2k_1(s) - \lambda_2(s)\varepsilon_2k_2(s) &= 0 \\
\lambda'_2(s) - \varepsilon_3\lambda_3(s)k_3(s) &= 0 \\
\lambda'_i(s) - \lambda_{i+1}(s)\varepsilon_{i+1}k_{i+1}(s) + \lambda_{i-1}(s)\varepsilon_{i+1}k_i(s) &= 0 \\
\lambda'_{n-1}(s) + \varepsilon_n\lambda_{n-2}(s)k_{n-1}(s) &= 0
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemlerden,

$$\lambda'_1(s) = 1 \Rightarrow \lambda_1(s) = s + c,$$

olur. Burada $c \in \mathbb{R}$ dir. Bu ifadeyi $\lambda_1(s)\varepsilon_2k_1(s) - \lambda_2(s)\varepsilon_2k_2(s) = 0$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$k_1(s)(s + c) = \lambda_2(s)k_2(s) \Rightarrow \lambda_2(s) = \frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)}$$

elde ederiz. Bu ifade (4.1.3) ün üçüncü eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\lambda'_2(s) = \varepsilon_3\lambda_3(s)k_3(s)$$

olduğundan,

$$\lambda_3(s) = \frac{\lambda'_2(s)}{\varepsilon_3k_3(s)}$$

$$\Rightarrow \lambda_3(s) = \left[\frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)} \right]' \frac{1}{\varepsilon_3 k_3(s)}$$

olur. Ayrıca $i \in \{3, 4, \dots, n-3\}$ için

$$\lambda_{i+1}(s) = \frac{\lambda_i'(s) + \lambda_{i-1}(s)\varepsilon_{i+1}k_i(s)}{\varepsilon_{i+1}k_{i+1}(s)}$$

olur.

Yukarıda tanımlanan fonksiyonları, $\lambda_{i,0}(s)$ olarak yeniden ifade edersek,

$$\begin{cases} \lambda_1(s) = s + c = \lambda_{1,0}(s), \\ \lambda_2(s) = (s+c) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \lambda_{1,0}(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)}, \\ \lambda_3(s) = \frac{1}{\varepsilon_3 k_3(s)} \frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{(s+c)}{\varepsilon_3 k_3(s)} \left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right]' = \lambda_{2,0}(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \lambda_{2,1}(s) \left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right]' \end{cases} \quad (4.1.4)$$

şeklinde yeniden ifade edersek bu denklemlerden,

$$\lambda_i(s) = \sum_{k=0}^{i-2} \lambda_{i-1,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right), \quad i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Buradan $\lambda_{i,k}(s)$ fonksiyonları

$$\begin{cases} \lambda_{1,0}(s) = s + c, \quad c \in R \\ \lambda_{2,0}(s) = \frac{1}{\varepsilon_3 k_3(s)}, \quad \lambda_{2,1}(s) = \frac{s+c}{\varepsilon_3 k_3(s)} \quad i \in \{3, 4, \dots, n-2\} \text{ için} \\ \lambda_{i,0}(s) = \frac{\lambda_{i-1,0}'(s) + \varepsilon_i k_{i-1}(s) \lambda_{i-2,0}(s)}{\varepsilon_i k_i(s)}, \\ \lambda_{i,k}(s) = \frac{\lambda_{i-1,k}'(s) + \varepsilon_i k_{i-1}(s) \lambda_{i-2,k}(s) + \lambda_{i-1,k-1}(s)}{\varepsilon_i k_i(s)}, \\ \lambda_{i,i-2}(s) = \frac{\lambda_{i-1,i-2}'(s) + \varepsilon_i k_{i-1}(s) \lambda_{i-1,i-3}(s)}{\varepsilon_i k_i(s)}, \\ \lambda_{i,i-1}(s) = \frac{\lambda_{i-1,i-2}(s)}{\varepsilon_i k_i(s)} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

şeklinde tanımlanır. (4.1.3) denklemler sisteminden (4.1.6) denklem sistemini yazarız. (4.1.3) ün beşinci eşitliğinden

$$\lambda'_{n-1}(s) + \varepsilon_n k_{n-1}(s) \lambda_{n-2}(s) = 0$$

$$\varepsilon_n k_{n-1} \sum_{k=0}^{n-4} \lambda_{n-3,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \sum_{k=0}^{n-3} \left(\lambda_{n-2,k}(s) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right)' = 0 \quad (4.1.2)$$

Tersine, L^n n-boyutlu Lorentz uzayında herhangi bir birim hızlı α eğrisinin $k_1(s)$, $k_2(s)$, ..., $k_{n-1}(s)$ eğriliklerinin (4.1.2) denklemini sağladığını kabul edelim. $\alpha \in L^n$ yer vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3(s) + \dots + \lambda_{n-1}(s)V_n(s)$$

(4.1.1) şeklinde yazılabileceğinden

$$\beta(s) = \alpha(s) - \lambda_1(s)V_1(s) - \lambda_2(s)V_3(s) - \dots - \lambda_{n-1}(s)V_n(s)$$

eğrisini tanımlayalım. Bu ifadenin s ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini ve (4.1.2) eşitliğini kullanarak α nın bir rektifiyan eğri olduğu açıktır.

Teorem 4.1.2. L^n n-boyutlu Lorentz uzayında sıfırdan farklı $k_1(s)$, $k_2(s)$, ..., $k_{n-1}(s)$ sabit eğrilikli bir rektifiyan eğri mevcut değildir.

İspat: L^n de $k_1(s)$, $k_2(s)$, ..., $k_{n-1}(s)$ eğrilikleri sabit fakat sıfır olmayan bir rektifiyan eğrinin mevcut olduğunu varsayalım. (4.1.3) ün birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü eşitlikleri

$$\lambda_1(s) = s + c, \lambda_2(s) = \frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)}, \lambda_3(s) = \left[\frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)} \right]' \frac{1}{\varepsilon_3 k_3(s)}, \quad c \in R$$

$$\lambda_{i+1}(s) = \frac{\lambda'_i(s) + \lambda_{i-1}(s)\varepsilon_{i+1}k_i(s)}{\varepsilon_{i+1}k_{i+1}(s)}$$

olduğunu biliyoruz. Tümevarım yöntemiyle,

$$\lambda_{2m}(s) = \frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{2m-1}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{2m}(s)}(s + c), \quad (4.1.7)$$

$$\lambda_{2m+1}(s) = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}} \right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^m k_{2i}(s) \right)^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{2m+1}(s)} \quad (4.1.8)$$

olduğu gösterilebilir. Burada indeks 1 ile n-1 aralığındadır. (4.1.7) ve (4.1.8) denklemlerinin m=1 için geçerli olduğu açıktır. $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ için (4.1.7) denklemi sağlanıyor ise;

$$\begin{aligned} \lambda_{2M+2}(s) &= \frac{\lambda'_{2M+1}(s) + \lambda_{2M}(s)\varepsilon_{2M+2}k_{2M+1}(s)}{\varepsilon_{2M+2}k_{2M+2}(s)} \\ &= \frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{2M-1}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{2M}(s)}(s + c) \frac{k_{2M+1}(s)}{k_{2M+2}(s)} \\ &= \frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{2M-1}(s)k_{2M+1}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{2M}(s)k_{2M+2}(s)}(s + c) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade m=M+1 için (4.1.7) denklemi ispatlanmıştır. Ayrıca $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ için (4.1.8) denklemi sağlanıyor ise;

$$\begin{aligned} \lambda_{2M+3}(s) &= \frac{\lambda'_{2M+2}(s) + \lambda_{2M+1}(s)\varepsilon_{2M+3}k_{2M+2}(s)}{\varepsilon_{2M+3}k_{2M+3}(s)} \\ &= \frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{2M+1}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{2M+2}(s)} \frac{1}{\varepsilon_{2M+3}k_{2M+3}(s)} \\ &\quad + \frac{\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}} \right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^M k_{2i}(s) \right)^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{2m+1}(s)} \frac{\varepsilon_{2M+3}k_{2M+2}(s)}{\varepsilon_{2M+3}k_{2M+3}(s)} \\ &= \frac{(k_1(s)k_3(s) \dots k_{2M+1}(s))^2}{\varepsilon_{2M+3}k_1(s)k_2(s) \dots k_{2m+3}(s)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}} \right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^M k_{2i}(s) \right)^2 (k_{2M+2}(s))^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{2m+3}(s)}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{M+1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}} \right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^M k_{2i}(s) \right)^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{2m+3}(s)}$$

m=M+1 için (4.1.8) denklemini ispatlanmıştır.

Tek n için (4.1.3) ün beşinci eşitliğinden $\lambda'_{n-1}(s) + \varepsilon_n \lambda_{n-2}(s) k_{n-1}(s) = 0$, (4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri kullanılarak (4.1.2) denklemine eşdeğer

$$\frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{n-2}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{n-1}(s)} + \varepsilon_n k_{n-1}(s) \frac{\sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}} \right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^{\frac{n-3}{2}} k_{2i}(s) \right)^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{n-2}(s)} = 0$$

denkleme indirgenebilir. Ancak tüm eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler kabul edildiğinden bu bir çelişkidir.

Çift n için (4.1.3) ün beşinci eşitliğinden $\lambda'_{n-1}(s) - \varepsilon_n \lambda_{n-2}(s) k_{n-1}(s) = 0$ (4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{n-3}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{n-2}(s)} (s + c) \varepsilon_n k_{n-1}(s) = 0$$

denkleme eşdeğerdir. Buradan bu bir çelişkidir, yani, teorem 4.1.1. kullanılarak tüm eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler için rektifiyan eğrinin var olmadığı ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.3. L^n de sıfır olmayan eğrilikleri ile yay parametrelili bir eğri α olsun. $k_1(s)$, $k_2(s)$, ..., $k_{n-2}(s)$ sıfır olmayan α nın ilk $(n - 2)$. eğrilikleridir. α nın bir rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} k_{n-1}(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{|-s^2-2cs|\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}+b}}, & n \text{ çift için} \\ k_{n-1}(s) = \pm \frac{(s+c)}{\sqrt{|-s^2-2cs|\varepsilon_n A+D}}, & n \text{ tek için} \end{cases}$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, α eğrisi $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-2}(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler olan bir rektifiyan eğri olsun. (4.1.3) ün dördüncü ve beşinci eşitliğinden sırasıyla

$$\lambda_{i+1}(s) = \frac{\lambda'_i(s) + \lambda_{i-1}(s)\varepsilon_{i+1}k_i(s)}{\varepsilon_{i+1}k_{i+1}(s)},$$

$$\lambda'_{n-1}(s) + \varepsilon_n\lambda_{n-2}(s)k_{n-1}(s) = 0$$

ve

$$\varepsilon_n\lambda_{n-2}(s)k_{n-1}(s) = -\lambda'_{n-1}(s) = -\left(\frac{\lambda'_{n-2}(s) + \lambda_{n-3}(s)\varepsilon_{n-1}k_{n-2}(s)}{\varepsilon_{n-1}k_{n-1}(s)}\right)' \quad (4.1.9)$$

olduğunu biliyoruz.

(4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri $(n-2)$ indeksi kadar geçerli olmaya devam eder. Bu nedenle (4.1.9) denkleminde n çift durumu için;

$$\frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{n-3}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{n-2}(s)}(s+c)\varepsilon_n k_{n-1}(s)$$

$$= -\left(\frac{\frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{n-3}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{n-2}(s)} + \frac{\sum_{j=1}^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}}\right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^{\frac{n-4}{2}} k_{2i}(s)\right)^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{n-3}(s)} \varepsilon_{n-1} k_{n-2}(s)}{\varepsilon_{n-1} k_{n-1}(s)}\right)'$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$\frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{n-3}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{n-2}(s)} = m \text{ ve}$$

$$\frac{k_1(s)k_3(s) \dots k_{n-3}(s)}{k_2(s)k_4(s) \dots k_{n-2}(s)} + \frac{\sum_{j=1}^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}}\right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^{\frac{n-4}{2}} k_{2i}(s)\right)^2}{k_1(s)k_2(s) \dots k_{n-3}(s)} \varepsilon_{n-1} k_{n-2}(s) = n$$

olsun. $\frac{m}{n} = c_1$ alınırsa,

$$c_1(s+c)\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} = \frac{k'_{n-1}(s)}{k_{n-1}^3(s)}$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse,

$$k_{n-1}(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{|-c_1s^2 - 2c_3s|\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} + b}}$$

elde edilir. n tek durumu için (4.1.9) denkleminde

$$\frac{\sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}} \right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^{\frac{n-3}{2}} k_{2i}(s) \right)^2}{k_1(s)k_2(s)\dots k_{n-2}(s)} \varepsilon_n k_{n-1}(s) = - \left(\frac{k_1(s)k_3(s)\dots k_{n-2}(s)(s+c)}{k_{n-1}(s)} \right)'$$

olup burada, $\frac{\sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{2j+1}} \right) \left(\prod_{i=1}^j k_{2i-1}(s) \prod_{i=j+1}^{\frac{n-3}{2}} k_{2i}(s) \right)^2}{k_1(s)k_2(s)\dots k_{n-2}(s)} = h$ ve $\frac{k_1(s)k_3(s)\dots k_{n-2}(s)}{k_2(s)k_4(s)\dots k_{n-3}(s)} = l$ ve $\frac{h}{l} = A$ alınırsa,

$$\varepsilon_n A k_{n-1}(s) = \left(\frac{s+c}{k_{n-1}(s)} \right)'$$

Bernoulli diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse,

$$k_{n-1}(s) = \pm \frac{(s+c)}{\sqrt{|-s^2 - 2cs|\varepsilon_n A + D}}$$

elde edilir.

L^n n-boyutlu lorentz uzayında bir rektifiyan eğrinin teğet, normal veya binormal bileşenleri aşağıdaki teoremden karakterize edilmiştir.

Teorem 4.1.4. Sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)$ eğrilikli $\alpha(s)$, L^n n-boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı rektifiyan eğri olsun. Bu taktirde

- (i) Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni

$$\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = s + c, \quad c \in R$$

dir.

- (ii) $\rho(s) = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonu

$$\rho^2(s) = s^2 + c_1 s + c_2, \quad c_1 \in R, c_2 \in R$$

eşitliğini sağlar.

- (iii) Eğrinin yer vektörünün $\alpha^{V_2(s)}$ normal bileşeni sabit uzunluğa sahiptir ve $\rho(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

- (iv) Eğrinin yer vektörünün binormal bileşenleri $i \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ için

$$\langle \alpha(s), V_i(s) \rangle = \lambda_i(s)$$

şeklinde verilir. $(\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} = 1)$

Tersine, L^n n-boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı $\alpha(s)$ $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)$ sıfırdan farklı eğrilikli eğri ve (i), (ii), (iii) ve (iv) durumlarından birini sağlarsa, bu taktirde α bir rektifiyan eğridir.

İspat (i): Kabul edelim ki, α bir birim hızlı rektifiyan eğri olsun. $\lambda_1(s) = s + c$ olduğu göz önüne alınırsa $\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = \lambda_1(s) = s + c, \quad c \in R$ elde edilir.

Tersine, $\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = s + c$ olsun. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\langle \alpha'(s), V_1(s) \rangle + \langle \alpha(s), V_1'(s) \rangle = 1$$

$$\langle \alpha(s), V_1'(s) \rangle = 0$$

$$\langle \alpha(s), \varepsilon_2 k_1(s) V_2(s) \rangle = 0$$

$$\varepsilon_2 k_1(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$$

elde edilir. $\varepsilon_2 \neq 0, k_1(s) \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ bulunur. Bu da α nın bir rektifiyan eğri olduğunu gösterir.

(ii): α birim hızlı bir rektifiyan eğri ise (4.1.3) ün üçüncü, dördüncü ve beşinci denklemleri kullanılarak $\lambda_i(s)$ $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ ile çarparsak sırasıyla

$$\begin{aligned}\lambda_2(s)(\lambda'_2(s) - \varepsilon_3 \lambda_3(s) k_3(s)) &= 0 \\ \lambda_i(s)(\lambda'_i(s) - \lambda_{i+1}(s) \varepsilon_{i+1} k_{i+1}(s) + \lambda_{i-1}(s) \varepsilon_{i+1} k_i(s)) &= 0 \\ \lambda_{n-2}(s)(\lambda'_{n-1}(s) + \varepsilon_n \lambda_{n-2}(s) k_{n-1}(s)) &= 0\end{aligned}$$

Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i(s) \lambda'_i(s) = 0$$

elde edilir. Bu nedenle $a \in R_0$ için $\sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i^2(s) = a^2$ dir. Rektifiyan eğri tanımından

$$\begin{aligned}\rho^2(s) &= \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \lambda_1^2(s) + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i^2(s) \\ &= (s+c)^2 + a^2 = s^2 + c_1 s + c_2, \quad c_1 \in R, c_2 \in R,\end{aligned}$$

olur.

Tersine,

$$\rho^2(s) = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = s^2 + c_1 s + c_2$$

olsun. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ve (4.1.3) denklemleri kullanılırsa,

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle' = (s^2 + c_1 s + c_2)'$$

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 2s + c_1$$

$$2\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = 2s + c_1$$

elde edilir. Bu ifadeyi tekrar s ye göre türev alırsak

$$2(\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle)' = (2s + c_1)'$$

$$2\langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle + 2\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 2$$

$$\langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle + 1 = 1$$

$$\langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle V_1'(s), \alpha(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \varepsilon_2 k_1(s) V_2(s), \alpha(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 k_1(s) \langle V_2(s), \alpha(s) \rangle = 0$$

elde edilir. $\varepsilon_2 \neq 0, k_1(s) \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ dır. Bu ise α nın rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir.

(iii): $\alpha(s) = m(s)V_1(s) + \alpha^{V_2}(s)$ olduğundan, bir rektifiyan eğri için $\alpha^{V_2}(s) = \sqrt{\sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i^2(s)} = a^2$ dir, Böylece normal bileşen sabit uzunluğa sahiptir. $\rho^2(s)$ uzaklık fonksiyonunun sabit olmadığını (ii) den ispatlamıştık.

Tersine,

$$\begin{aligned} \|\alpha^{V_2}(s)\| &= \|\alpha(s) - \langle V_1(s), \alpha(s) \rangle V_1(s)\|, \\ \langle \alpha^{V_2}(s), \alpha^{V_2}(s) \rangle &= a^2 \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu taktirde;

$$\langle \alpha^{V_2}(s), \alpha^{V_2}(s) \rangle = \langle \alpha(s) - \langle V_1(s), \alpha(s) \rangle V_1(s), \alpha(s) - \langle V_1(s), \alpha(s) \rangle V_1(s) \rangle$$

$$\langle \alpha^{V_2}(s), \alpha^{V_2}(s) \rangle = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle - \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle^2$$

dir. Bu son denklemin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$(\langle \alpha^{V_2}(s), \alpha^{V_2}(s) \rangle)' = (\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle - \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle^2)'$$

$$0 = 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle - 2\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle [\langle \alpha(s), V_1'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), V_1(s) \rangle]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle - 2\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle [\langle \alpha(s), \varepsilon_2 k_1(s) V_2(s) \rangle + 1] \\
&= 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle - 2\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \\
&\quad - 2\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \langle \alpha(s), \varepsilon_2 k_1(s) V_2(s) \rangle \\
&= -2\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \langle \alpha(s), \varepsilon_2 k_1(s) V_2(s) \rangle
\end{aligned}$$

Buradan

$$\varepsilon_2 k_1(s) \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$$

olur. $\varepsilon_2 \neq 0, k_1(s) \neq 0, \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ olup α bir rektifiyan eğridir.

(iv): Bir rektifiyan eğrinin yer vektörünü,

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_3(s) + \dots + \lambda_{n-1}(s)V_n(s)$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Dolayısıyla

$$\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = \lambda_2(s) \text{ ve } \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = \lambda_3(s)$$

dir. $\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = \lambda_2(s)$ olduğunu kabul edelim.

$$\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = \frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)}$$

denkleminin s ye göre türevi alınırsa, (4.1.3) ün ikinci eşitliği ve Frenet denklemleri kullanılırsa yani;

$$\langle \alpha'(s), V_3(s) \rangle + \langle \alpha(s), V_3'(s) \rangle = \left(\frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)} \right)'$$

$$\langle V_1(s), V_3(s) \rangle + \langle \alpha(s), -\varepsilon_2 k_2(s) V_2(s) + \varepsilon_4 k_3(s) V_4(s) \rangle = \left(\frac{k_1(s)(s + c)}{k_2(s)} \right)'$$

$$-\varepsilon_2 k_2(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle + \varepsilon_4 k_3(s) \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = \left[\frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)} \right]'$$

$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} = 1$ olup son denklemden

$$-\varepsilon_2 k_2(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$$

ve $\varepsilon_2 \neq 0, k_2(s) \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ dır. Buda α eğrisinin bir rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4 ün son durumunun tersini ispatlamak için ilk iki $V_3(s), V_4(s)$ binormal bileşenleri eşdeğerdir.

Teorem 4.1.5. L^n de bir α eğrisi $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ şeklinde verilsin. Burada $\rho(t)$ pozitif keyfi fonksiyon ve $y(t)$, $S^{n-1}(1)$ birim hiperkürede yatan yay parametrelili bir eğri olsun. Bu taktirde α nın bir rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\rho(t) = a \sec(t + t_0) \quad a \in R_0 \text{ ve } t_0 \in R.$$

olmasıdır.

İspat: $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ ifadesinin t ye göre türevini alırsak,

$$\alpha'(t) = \rho'(t)y(t) + \rho(t)y'(t)$$

$\|\alpha'(t)\| = v$ olsun. Buradan

$$vV_1(t) = \rho'(t)y(t) + \rho(t)y'(t)$$

$$\Rightarrow V_1(t) = \frac{\rho'(t)}{v}y(t) + \frac{\rho(t)}{v}y'(t)$$

en son ifadenin tekrar t ye göre türevi alınır,

$$V_1'(t) = \left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' y(t) + \frac{\rho'(t)}{v} (y(t))' + \left(\frac{\rho(t)}{v} \right)' y'(t) + \frac{\rho(t)}{v} y''(t)$$

$$vk_1(t)V_2(t) = \left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' y(t) + \left(\frac{\rho'(t)}{v} + \left(\frac{\rho(t)}{v} \right)' \right) y'(t) + \frac{\rho(t)}{v} y''(t)$$

elde edilir. $\langle y(t), y(t) \rangle = \langle y'(t), y'(t) \rangle = 1$, $V_1(t)$ nin ortonormal bazını $\{y(t), y'(t), Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_{n-2}(t)\}$ olarak alalım. Buradan

$$y''(t) = \langle y(t), y''(t) \rangle y(t) + \langle y'(t), y''(t) \rangle y'(t) + \langle Y_1(t), y''(t) \rangle Y_1(t) + \dots + \langle Y_{n-2}(t), y''(t) \rangle Y_{n-2}(t)$$

olur. Yay parametrelili eğriler için (4.1.1) denklemi kullanılarak

$$\langle y'(t), y'(t) \rangle = 1 \Rightarrow \langle y''(t), y'(t) \rangle + \langle y'(t), y''(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle y'(t), y''(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha, y'(t) \rangle = \langle \rho(t)y(t), y'(t) \rangle = \rho(t)\langle y(t), y'(t) \rangle = 0,$$

$$\langle y(t), y'(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle y'(t), y'(t) \rangle + \langle y(t), y''(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle y(t), y''(t) \rangle = -1$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler göz önüne alınırsa,

$$vk_1(t)V_2(t) = \left(\left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' - \frac{\rho(t)}{v} \right) y(t) + \left(\frac{\rho'(t)}{v} + \left(\frac{\rho(t)}{v} \right)' \right) y'(t) + \frac{\rho(t)}{v} \left(\sum_1^{n-2} \langle Y_i(t), y''(t) \rangle Y_i(t) \right)$$

olur. Bu denklemi $\alpha(t)$ ile iç çarpıma tabi tutar ve $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$vk_1(t)\langle V_2(t), \alpha(t) \rangle = \left(\left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' - \frac{\rho(t)}{v} \right) \rho(t)$$

bulunur. α rektifiyan eğri olduğundan

$$\left(\left(\frac{\rho'(t)}{v} \right)' - \frac{\rho(t)}{v} \right) \rho(t) = 0$$

olup diferensiyel denklemi çözülrse,

$$\rho(t) = a \sec(t + t_0) \quad a \in R_0 \text{ ve } t_0 \in R$$

elde edilir.



5. SONUÇ

Bu çalışmada diferensiyel geometrinin önemli konularından biri olan rektifiyan eğriler incelenmiştir. 3-boyutlu ve 4-boyutlu uzaylarda bu konuyla ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır. Son olarak n -boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriler çalışılmıştır.

Bu tezde, orijinal olarak, L^n n -boyutlu Lorentz uzayında rektifiyan eğrilere çalışılmıştır. Eğrinin yer vektörüne bağlı olarak eğrilikleri ile doğrudan bir ilişki bulunmuştur. Rektifiyan eğrinin eğriliklerine bağlı olarak sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak da rektifiyan eğrinin birim hiperküreye bağlı olarak da parametrik gösterimi sonucu elde edilmiştir.



KAYNAKLAR

Chen, B.Y., 2003, When does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in its Rectifying Plane? Amer. Math. Monthly, 110, 147-152.

Cambie, S., Goemans, W., Bussche, I. V. D., 2016, Rectifying Curves in the n-dimensional Euclidian space, Turkish Journal of Mathematics, 40, 210-223.

Hacısalıhoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, 1.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1993.

Hacısalıhoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, 2.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1994.

İlarslan, K. and Nesovic, E., 2008, Some Charecterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space E_4 , Turk. J. Math. , 32, 21-30.

İlarslan, K., Nesovic, E., 2007, On Rectifying Curves as Centroides and Extremal Curves in the Minkowski 3-Space, Novi. Sad J, Math. 37, 53-64.

İlarslan, K., Nesovic, E., . Petrovic-Torgasev, M., 2003, Some Characterizations of Rectifying Curves in the Minkowski 3-space, Novi Sad J. Math. 33, 23-32.

İyigün, E., Arslan, K., 2005, On Harmonic Curvatures of Curves in Lorentzian n-Space, Ankara University, 54(1), 29-34.

İlarslan, K., Hacısalıhoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2000, Harmonic Curvatures in Lorentzian Space, Bull. Malaysian Math Soc.(second series) 23, 173-179.

Lopez, R., 2014, Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, arXiv: 0810. 3351.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2011 yılında Elazığ Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne girdim ve 2015 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. 2015 yılında başladığım Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa halen devam etmekteyim.

