

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
SPEKTRAL TEORİSİ

776690

Hikmet KOYUNBAKAN

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2002

116690

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

Hikmet KOYUNBAKAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

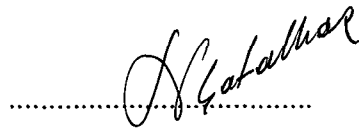
Bu Tez, 28.06.2002 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği İle
Başarılı Olarak Değerlendirilmiştir.



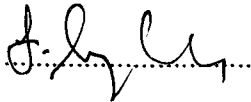
Prof.Dr. Etibar PENAHOV
(Danışman)



Prof.Dr. Rifat ÇOLAK



Prof.Dr. Necdet ÇATALBAŞ



Prof.Dr. Fahrettin GÖĞTAŞ



Doç.Dr. Necdet BİLDİK

ÖZET**Doktora Tezi****SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ****Hikmet KOYUNBAKAN**

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2002, Sayfa: 84

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; Legendre denklemi, Legendre polinomları ve eşlenik Legendre fonksiyonları tanımlanmış ve bunlara ilişkin ön bilgiler verilmiştir. Tanım aralığının uç noktalarında tekilliğe sahip Sturm-Liouville operatörünün özdeğerleri, özfonksiyonları, normlaştırıcı sayıları için asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca bu tür denklemler için osilasyon teoremi ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde farklı potansiyellere sahip singüler diferensiyel operatörler için dönüşüm operatörünün varlığı gösterilmiştir. Dolayısıyla $K(x,t)$ çekirdeği için elde edilen ikinci mertebeden singüler Hiperbolik denklem Euler-Poisson-Darboux denklemi cinsinden yazılarak, Riemann yöntemi ile çözülmüştür.

Dördüncü bölümde Marchenko teoreminin benzeri olmak üzere singüler Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonunun tekliği ispatlanmıştır. Daha sonra ters problemin esas integral denklemi olarak bilinen Gelfand-Levitan-Marchenko denklemi bulunmuştur.

Beşinci bölümde Kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem incelenmiştir. Hochstadt yönteminden faydalananarak singüler diferensiyel operatörler için $\tilde{q} - q$ farkının yapısı ile ilgili teoremin ispatı verilmiştir. Son olarak belirli koşullar sağlanacak biçimde $q(x)$ potansiyelinin bir tek spektruma göre tanımlanması için yeterlilik teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, Özfonksiyon, Spektrum, Riemann Metodu, Esas İntegral Denklem.

ABSTRACT**PhD Thesis****SPECTRAL THEORY OF THE SINGULAR STURM-LIOUVILLE OPERATOR**

Hikmet KOYUNBAKAN

Fırat University
 Graduate School of Science and Technology
 Department of Mathematics
 2002, Page: 84

This thesis is arranged in five chapters.

In the first chapter, basic definitions and theorems that are given.

In the second chapter, Legendre Equations, Legendre polynomials and conjugate Legendre functions and informations of the relevant is given. Asymptotic formulas for the eigenvalues, eigenfunctions, normalized number of the Sturm-Liouville operator that has singularity both ends interval are found. Furthermore, for these equations Oscillation theorem is proved.

In the third chapter, for the singular differential operator having different potentials, existence of the translation operator is given. Hence, second order singular Hyperbolic equation which obtained for nucleus $K(x, t)$ is transformed to Euler-Poisson-Darboux equation and it is solved by Riemann method.

In the fourth chapter, on the point similar to Marchenko theorem, uniqueness spectral function of the singular Sturm-Liouville operator is proved. Later, Levitan-Marchenko integral equation that known basic integral equation of the inverse problem is obtained.

In the fifth chapter, Inverse problem with peculiarity in two partially non coincided spectrum is examined. Using the proof of the Hochstadt method for singular differential operator, concerning the structure of the difference $\tilde{q}(x) - q(x)$ is given. Finally, When the determined conditions is supplied for defining potential $q(x)$ according to the a single spectrum sufficient theorem is proved.

Key words: Eigenvalue, Eigenfunction, Spectrum, Riemann Method, Basic Integral Equation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli imkanları hazırlayarak bana yardımcı olan hocam Sayın Prof.Dr. Etibar PENAHOV'a teşekkür eder, saygılar sunarım.

Hikmet KOYUNBAKAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
SİMGELER LİSTESİ.....	V
GİRİŞ.....	VI
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
2. SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZELLİKLERİ.....	10
2.1. Küresel Koordinatlarda Laplace Denkleminde Değişkenlerine Ayrılma Metodu. Legendre Polinomları ve Eşlenik Legendre Fonksiyonları.....	10
2.2. Singüler Sturm-Liouville Operatörü İçin Asimptotik Formülleri.....	17
2.2. Özfonksiyonların Sıfırları ve Osilasyon Teoremi.....	22
3. DÖNÜŞÜM OPERATÖRÜ.....	25
3.1. Dönüşüm Operatörünün Varlığı.....	25
3.2. Riemann Metodu.....	29
4. SPEKTRAL FONKSİYONUN İNCELENMESİ.....	38
4.1. Sonlu Düzlemde Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Spektral Fonksiyon.....	38
4.2. Spektral Fonksiyon Yardımıyla Esas İntegral Denklemin Elde Edilmesi.....	39
5. KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE SİNGÜLER STURM - LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM ÜZERİNE.....	43
5.1. Hochstadt Yöntemiyle Ters Problemin İncelenmesi.....	43
5.2. $x = 0$ Noktasında Tekillığe Sahip Diferensiyel Operatörler için Hochstadt Yöntemiyle Ters Problemin İncelenmesi.....	60
5.3. Bir Tek Spektruma Göre Ters Problem Üzerine	77
KAYNAKLAR.....	82

SİMGELER LİSTESİ

L^* : L operatörünün adjointi

H : Hilbert uzayı

$o(1)$: Sonsuz küçük değerler

$O(1)$: Sınırlı değerler

$L^2[a, b]$: Karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

$\rho(\lambda)$: Spektral fonksiyon

$\delta(x)$: Dirac-Delta fonksiyonu



GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir(telin titreşimi, membran titreşimi, vs.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce ℓ_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte ℓ_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX-XX asırlarda matematikçilerin sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar, vs. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca, spektral teorinin tamamında önemli bir yere sahip olan spektral açılım teoremi ispatlanmıştır. Belirli diferensiyel ve fark operatörleri için spektral açılımın uygun denklem çözümleri vasıtasıyla ifade edildiği araştırılmıştır.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatörlere regüler; tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları(bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan(veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferensiyel operatörlere ise singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. İkinci mertebeden diferensiyel operatörler için XIX. asrın sonlarında sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniği için çok ilginçtir. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rietsz, Neumann ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur.

Hatırlatalım ki simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı [Titchmarsh,1958] vermiştir. Titchmarsh tarafından doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri(son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir) için özdeğerlerin dağılımı formülü bulunmuştur. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için dağılım formülünün görüntüsü düzgün bir şekilde ifade edilmiştir.

Singüler diferensiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar [Levitan,1964,1978] tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotikliğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular Courant, Carleman, Birman, Salamyak, Maslov, Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferensiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferensiyel operatörlerin ters problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

- 1) Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak(veya yapısını kurmak) mümkündür?
- 2) Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır?
- 3) Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması(kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters probleme ilişkin ilk sonuç [Ambartsumyan,1929] tarafından elde edilmiştir. Bu sonuca ilk önce dikkati çeken İsveç matematikçisi Borg olmuştur. Borg, genel durumda Sturm-Liouville operatörünün bir spektrumla tanımlanmadığını göstermiştir. Ayrıca farklı sınır şartları sağlanacak şekilde iki spektruma göre Sturm-Liouville operatörünün birebir olarak tanımlandığını göstermiştir. Bu çalışmadan sonra 1949'da potansiyelin($q(\pi - x) = q(x)$) simetriklik şartını sağlaması durumunda bir spektrumun

Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını Levinson ispatlamıştır. Buna ilaveten, Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir. Daha sonra Gelfand ve Levitan spektral fonksiyona göre potansiyel fonksiyonun tanımlanması problemini çözmüşlerdir. Operatörlerin spektral teorisinin ters problemi alanında Marchenko, Krein, Delsart, Lax, Faddeev, Gasymov ve diğer matematikçiler tarafından önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Sturm-Liouville denkleminin incelenme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemlerin çözümlerinde önemli bir araç olan Dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde Delsart ve Levitan tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını kendi çalışmalarında ilk olarak Povzner göstermiştir.

Sturm-Liouville denklemini inceleme sürecinde(özellikle XX. Asrın ikinci yarısında) kullanılan yöntemler sürekli artmakta olmuştur. Buna kanıt olarak 1967’de bir grup Amerikan Matematik ve Fizikçileri Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlinear evalusyon denklemleriyle Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki ilginç bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu günümüzde halen yoğun bir şekilde Fizik ve Matematikçiler tarafından araştırılmaktadır.

Singüler Sturm-Liouville operatörler ailesinden olan ve sıfır noktasında $\frac{l(l+1)}{x^2}$ şeklinde tekilliğe sahip operatörler için spektral fonksiyona göre ters problem [Stashevskaya,1953] tarafından çözülmüştür. [Volk,1953] ise bu tür operatörler için Riemann yöntemiyle Dönüşüm operatörünün varlığını incelemiştir. Daha sonraları ise iki spektruma göre ters problem Gasymov ve kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problemin çeşitli sorunları Penahov tarafından incelenmiştir. Ayrıca, Jeofizikte birçok uygulamaları olan Bessel operatörleri için Kuantum saçılma teorisinin ters problemler Chadan, Sabatier, Korop, Sohin, Carlson vs. matematikçiler tarafından ele alınmış ve çözülmüştür.

Bu çalışmalardan kaynaklanarak doğal olarak Legendre polinomları için spektral teorisinin düz ve ters problemlerini incelemek bir ihtiyaç olmuştur. Sunulan bu tezde Legendre ve Bessel operatörleri için spektral analizin düz ve ters problemleri incelenmiştir.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. (Hilbert Uzayı) x, y, z elemanlarından oluşan herhangi bir cümle H olsun ve aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

1. H lineer kompleks bir uzay
2. H nin her x, y ikili elemanına karşılık gelen $\langle x, y \rangle$ kompleks sayısı için

a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \quad (x_1, x_2 \in H)$

c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ (Her λ kompleks sayısı için)

d) $\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0; (\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle})$

3. $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği anlamında H tamdır.

4. Her n doğal sayısı için H de n sayıda lineer bağımsız eleman vardır. Yani H sonsuz boyutludur.

Bu takdirde, 1-4 şartlarını sağlayan uzaya *Soyut Hilbert uzayı*, 1-3 şartlarını sağlayan uzaya ise *Üniter Hilbert uzayı* denir [Liusternik, Sobolev, 1961].

Tanım 1.2. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer

$$\|Lx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne *sınırlıdır* denir [Kreyszig, 1978].

Tanım 1.3. (Adjoint Operatör) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L: H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

Eğer $L^*: H_2 \rightarrow H_1$ operatörü $\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin *adjointi* denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne *self adjoint operatör* denir [Kreyszig, 1978].

Tanım 1.4. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L^2[a, b]$ uzayı,

$$L^2[a,b] = \{x(t): \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$) [Kreyszig, 1978].

Tanım 1.5. $L, D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün *özdeğeri*, y fonksiyonuna ise bir *özfonksiyon* denir [Kostyuchenko, Sargsyan 1979].

Tanım 1.6. (Parseval Eşitliği) H bir Hilbert uzayı $x \in H$ ve (e_k) ortonormal bir dizi olsun. Bu durumda Parseval eşitliği

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

olarak tanımlanır [Kreyszig, 1978].

Tanım 1.7. $p(x), q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

şeklinde tanımlı L operatörüne Sturm-Liouville operatörü,

$$L[y] + \lambda s(x)y = 0$$

şeklinde tanımlı denkleme ise *Sturm - Liouville diferensiyel denklemi* denir. Sturm-Liouville diferensiyel operatörünün spektral özellikleri araştırılırken genellikle aşağıdaki üç grup sınır şartları ele alınır.

a) Ayrılan Sınır Şartları

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0, y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

b) Periyodik

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

ve Antiperiyodik Sınır Şartları

$$y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b)$$

c) Uçları Bağlanmış Sınır Şartları

$$y(a) = y(b) = 0, \quad y'(a) = y'(b) = 0$$

Tanım 1.8. $x \rightarrow \infty$ iken Eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ ise $f(x) = o\{g(x)\}$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ ifadesi sınırlı ise $f(x) = O\{g(x)\}$ olarak yazılır.

Tanım 1.9. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin keyfi bir z_0 noktasının en az bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir.

Tanım 1.10. Bir $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye *tam fonksiyon* denir.

Teorem 1.11. $f(z)$ fonksiyonu G bölgesinde ve G nin sınırı olan γ eğrisi üzerinde bire bir ve analitik fonksiyon olduğunda

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

dir.

Teorem 1.12.(Liouville Teoremi) Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise sabittir.

Tanım 1.13. (Mittag-Leffler Açılımı)

Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki ayırık tekil noktaları $a_1, a_2, \dots$; $a_1, a_2, \dots$ noktalarındaki rezidüleri $b_1, b_2, \dots$ olsun.

Bu durumda

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

dir [Başkan, 2000].

Teorem 1.14. (Rezidue Teoremi) a_k lar bir C bölgesinde $f(z)$ fonksiyonunun kutup yerleri olmak üzere

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)$$

olur. Ayrıca

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} f(z) (z - a_i)^k \right]_{z=a_i}$$

dir [Başkan, 2000].

Teorem 1.15. B , xoy düzleminde bir bölge ve C de bu bölgeyi çevreleyen pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları B üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

dir.

Tanım 1.16. (Dirac-Delta Fonksiyonu) $f(x)$ keyfi bir fonksiyon ve x bir bağımsız değişken olmak üzere

a) $x \neq a$ için $\delta(x - a) = 0$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

şartlarını sağlayan

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

fonksiyonuna *Dirac Delta fonksiyonu* denir.

Tanım 1.17. (Hipergeometrik Fonksiyon) α, β, γ sabitler olmak üzere

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

şeklindeki diferensiyel denkleme *Hipergeometrik denklem*, bu denklemin çözümü olan

$$y(\alpha, \beta; \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$

şeklindeki ifadeye ise *Hipergeometrik fonksiyon* denir [Conddington and Levinson , [1955].

Teorem 1.18. $f(x)$ sürekli bir fonksiyon $v_n(x)$ ise Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad \left(a_n = \int_0^b f(x) v_n(x) dx \right)$$

serisi $[0, b]$ aralığında düzgün yakınsak ise $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

İspat.

$$h(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x) \quad (1.1)$$

olsun. Hipotezden $h(x)$, $[0, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Diğer taraftan (1.1) de iki taraf $v_k(x)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$c_n = \int_0^b f(x)v_k(x)dx - \int_0^b v_k(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x)dx = 0$$

olur. Şimdi $h(x)$ fonksiyonuna Parseval eşitliğini uygularsak

$$\int_0^b h^2(x)dx = 0$$

olur. $h(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $h(x) = 0$ olup istenilen elde edilir.

Tanım 1.19. (Euler-Poisson-Darboux Denklemi) α, β, γ sabitler ve $U(x,y)$ iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{x-y} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\gamma}{(x-y)^2} U = 0$$

şeklindeki denkleme *Euler-Poisson-Darboux denklemi* denir [Mackie , 1965].

Lemma 1.20. (Riemann-Lebesgue) $g(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli bir fonksiyon ve λ ise herhangi bir parametre olmak üzere

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x dx = 0$$

dir [Myint-U, 1973].

Tanım 1.21. (Volterra İntegral Denklemi) a bir sabit, $K(x,y)$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq x$ bölgesinde ve $f(x)$ ise $0 \leq x \leq a$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$u(x) = \int_0^x K(x, y)u(y)dy + f(x)$$

şeklindeki denkleme *Volterra integral denklemi* denir.

Teorem 1.22. (Marchenko Teoremi) $\rho(\lambda)$,

$$y'' + [\lambda - q(x)]y = 0$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

probleminin, $\sigma(\lambda)$ ise

$$y'' + [\lambda - r(x)]y = 0$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

probleminin spektral fonksiyonları olsun. c bir sabit olmak üzere eğer $\rho(\lambda) = c\sigma(\lambda)$ olacak şekilde bir c sayısı varsa bu durumda $q(x) = r(x)$ ve $h = h_1$ dir [Levitan, 1964].

Teorem 1.23. (Hochstadt Teoremi)

$$Lu = -u'' + q(x)u \quad (1.2)$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad (1.3)$$

$$u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0 \quad (1.4)$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$, (1.4) yerine

$$u(1)\cos\gamma + u'(1)\sin\gamma = 0 \quad (1.5)$$

alınmasıyla elde edilen yeni problemin spektrumu ise $\{\lambda'_i\}$ olsun. Diğer taraftan

$$\tilde{L}u = -u'' + \tilde{q}(x)u \quad (1.6)$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad (1.7)$$

$$u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0 \quad (1.8)$$

probleminin spektrumu $\{\tilde{\lambda}_i\}$, (1.6)-(1.7)-(1.5) probleminin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}'_i\}$ olsun.

Ayrıca Λ_0 , $\tilde{\lambda}_i \neq \lambda_i$ şartını sağlayan sonlu i lerin cümlesi Λ ise $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ şartını sağlayan sonsuz i lerin cümlesi olsun. Bu durumda

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{y}_n w_n)'$$

dir. Ayrıca Λ_0 boş ise $q = \tilde{q}$ dir [Hochstadt, 1973].

Tanım 1.24. (Dönüşüm Operatörü) E bir lineer topolojik uzay, A ve B ise E den E ye tanımlanan iki lineer operatör olsun. Ayrıca E_1 ve E_2 , E nin iki alt uzayı olsun. Eğer $X: E_1 \rightarrow E_2$ operatörü

a) X ve X^{-1} operatörleri E de sürekli,dir,

b) $AX = XB$

şartlarını sağlıyorsa bu operatöre A ve B için bir *dönüşüm operatörü* denir [Levitan, 1987].

Lemma 1.25. B operatörünün λ özdeğerine karşı gelen özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$ olsun. Eğer

$$B \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$$

ise bu taktirde A operatörünün λ özdeğerine karşı gelen özfonksiyonu

$$\psi_\lambda = X \varphi_\lambda$$

dir. Burada X dönüşüm operatörüdür.

İspat. $AX = XB$ olduğundan

,

$$A \psi_\lambda = AX \varphi_\lambda = XB \varphi_\lambda = \lambda X \varphi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 1.26. A, B, C lineer operatörleri E uzayında tanımlı ve E_1, E_2, E_3 ise E nin alt uzayları olsun. $X_{A,B}: E_2 \rightarrow E_3$, $X_{B,C}: E_1 \rightarrow E_2$ olsun. Bu durumda $X_{A,C}: E_1 \rightarrow E_3$ operatörü

$$X_{A,C} = X_{A,B} \cdot X_{B,C}$$

şeklindedir.

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı $AX_{A,B} = X_{A,B}B$, $BX_{B,C} = X_{B,C}C$ İkinci denklemden $B = X_{B,C} C X_{B,C}^{-1}$ elde edilir. Bu ifadeyi ilk denklemde yerine yazarsak,

$$AX_{A,B} = X_{A,B} X_{B,C} C X_{B,C}^{-1}$$

veya

$$AX_{A,B}X_{B,C} = X_{A,B} X_{B,C}C$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 1.27. (Gamma Fonksiyonu) $x > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır [Myint-U,1973].

2. SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZELLİKLERİ

2.1. Küresel Koordinatlarda Laplace Denkleminde Değişkenlerine Ayrılma Metodu. Legendre Polinomları ve Eşlenik Legendre Fonksiyonları

Küre için tanımlı sınır problemlerinin çözüm yöntemlerinden biri de değişkenlerine ayırma metodudur. Bilindiği gibi

$$\Delta u = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Laplace denkleminin küresel koordinatlarda görüntüsü

$$\frac{1}{r^2} (r^2 u'_r)' + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u'_\theta)' + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

şeklindedir. Bu denklemin tek değerli her $u = u(r, \theta, \varphi)$ çözümü φ 'ye göre 2π periyotludur. Bu çözümün Fourier serisine açılımı

$$u = \frac{1}{2} \alpha_0(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(r, \theta) \cos n\varphi + \beta_n(r, \theta) \sin n\varphi]$$

şeklindedir. Bu açılımı (2.1.1) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \alpha_0}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \alpha_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \alpha_n}{\partial \theta} \right) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \alpha_n \right] \cos n\varphi \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \beta_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \beta_n}{\partial \theta} \right) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \beta_n \right] \sin n\varphi = 0$$

bulunur. Buradan α_n ve β_n katsayılarının

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} v = 0 \quad (2.1.2)$$

denklemini sağladığı gösterilebilir. Not edelim ki $n=0$ için de α_0 , (2.1.2) denklemini sağlar. Bu denklemin çözümünü $v = \varphi(r)\psi(\theta)$ şeklinde arayacağız. Bu durumda (2.1.2) denkleminin görüntüsü

$$\psi \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \varphi \psi = 0.$$

veya

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{\psi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{n^2}{\sin^2 \theta}$$

olur. Son denklemleri değişkenlerine ayırırsak, λ sabit olacak şekilde

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) &= \lambda \\ \frac{1}{\psi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{n^2}{\sin^2 \theta} &= -\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

denklemlerini elde ederiz.

Şimdi $-1 \leq x \leq 1$ ($0 \leq \theta \leq \pi$ olduğu için) olacak şekilde yeni bağımsız bir $x = \cos \theta$ değişkenini tanımlayalım ve $y = \psi(\theta)$ ele alalım. Böylece y , x in herhangi fonksiyonu olur. (2.1.3) deki ikinci denklemden

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + \left(\lambda - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) \psi = 0 \quad (2.1.4)$$

denklemini buluruz. Ayrıca y bu denklemleri sağlar. Gerçekten,

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dy}{dx}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right) = -\cos \theta \frac{dy}{dx} - \sin \theta \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{d\theta} \\ &= -x \frac{dy}{dx} + \sin^2 \theta \frac{d^2y}{dx^2} = -x \frac{dy}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}$$

dir. Türevler için bu ifadeleri (2.1.4) de yerine yazarsak

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[\lambda - \frac{n^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (2.1.5)$$

olur. $n = 0$ için

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

şeklindeki bir Legendre denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü x in kuvvetlerine göre bir seri şeklindedir.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

olsun. Bu durumda

$$2x \frac{dy}{dx} = 2x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k = 2c_1 x + 2 \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^k$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} &= (1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k \\ &= 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2) c_{k+2} - k(k-1) c_k] x^k \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$2c_2 + 6c_3x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} - k(k-1)c_k]x^k - 2c_1x - \sum_{k=2}^{\infty} 2kc_kx^k$$

$$\lambda c_0 + \lambda c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda c_k x^k = 0$$

olur. Katsayıların eşitliğinden

$$2c_2 + \lambda c_0 = 0, \quad 6c_3 + (\lambda - 2)c_1 = 0 \quad (2.1.6)$$

ve $k \geq 2$ için

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} c_k \quad (2.1.7)$$

bağıntılarını elde ederiz. m negatif olmayan keyfi bir sabit tamsayı olmak üzere $\lambda = m(m+1)$ ise $c_{m+2} = 0$ olur. Ayrıca son eşitlikten $c_{m+4} = 0, c_{m+6} = 0$, vs. elde edilir. Böylece m bir çift sayı olacak şekilde c_{m+2} den başlayarak çift indisli katsayıların tümü sıfıra eşittir. m bir tek sayı olacak şekilde ise c_{m+2} den başlayarak tek indisli katsayıların tümü sıfıra eşittir. m bir çift sayı olacak şekilde $c_1 = 0$ ele alalım. Bu takdirde (2.1.6) deki ikinci eşitlikten ve (2.1.7) rekürans formülünden genelde tek indisli katsayıların sıfıra eşit olacaklarını buluruz. Bu da Legendre denkleminin çözümü olan kuvvet serisinde sadece sonlu sayıda katsayılarının özellikle, $c_0, c_1, \dots, c_m$ sıfırdan farklı olması demektir. Yani bu kuvvet serisi

$$c_0 + c_2x + \dots + c_mx^m$$

şeklinde bir polinom olur. Burada $c_2 = -\frac{m(m+1)}{2}c_0$ dir. Diğer katsayılar ise (2.1.7) rekürans formülünden bulunur. m tek sayı olacak şekilde $c_0 = 0$ olsun. Bu durumda (2.1.6) deki ilk eşitlikten $c_2 = 0$ ve (2.1.7) bağıntısına göre çift indisli katsayıların tümünün genellikle sıfıra eşitliğini elde ederiz. Bu durumda kuvvet serisi

$$c_1 + c_3x + \dots + c_mx^m$$

şeklinde bir polinom olur. (2.1.6) eşitliğinin birincisine göre $c_3 = -\frac{m(m+1)-2}{6}$, bir sonraki katsayılar ise (2.1.7) bağıntısından bulunur. Böylece $\lambda = m(m+1)$ için (2.1.5) Legendre denkleminin çözümü m sayısı çift(tek) olacak biçimde sadece çift(tek) mertebelerden oluşan m mertebeli bir polinomdur. Burada sadece $c_0(c_1)$ katsayıları keyfidir. Bu katsayılar $x=1$ noktasında polinomun değeri 1 olacak şekilde seçilir. Katsayıların bu şekilde seçiminin sonucu olarak elde edilen polinoma Legendre polinomu denir ve $P_m(x)$ ile gösterilir. Böylece $\lambda = m(m+1)$ olmak üzere ve $x=1$ için $P_m(1)=1$ olacak şekilde (2.1.5) Legendre denklemini sağlayan m mertebeli polinoma *Legendre polinomu* denir ve $P_m(x)$ şeklinde gösterilir.

Şimdi $m=0,1,2,\dots$ için Legendre polinomlarını bulalım. $m=0$ için $P_0(x)=1$ ($c_0=1$), $m=1$ için $P_1(x)=x$ ($c_1=1$), $m=2$ için $P_2(x)=c_0+c_2x^2=c_0-3c_0x^2$ olarak hesaplanır. Böylece $c_0=-\frac{1}{2}$ olup, dolayısıyla $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$. Benzer şekilde $m=3$ içinde $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ olduğu görülebilir. Bu fonksiyonların grafikleri ise Şekil 2.1 de verilmiştir.

Not edelim ki $\lambda \neq m(m+1)$ için $-1 \leq x \leq 1$ aralığında (2.1.5) denkleminin sınırlı çözümleri mevcut değildir. $\lambda = m(m+1)$ durumunda ise c bir sabit olmak üzere sadece $cP_m(x)$ polinomları mevcuttur. Dolayısıyla küre için sınır probleminin ve matematik fiziğin bir çok diğer problemlerinin çözümünde bu özellik önemli bir yere sahiptir. (2.1.6) ve (2.1.7) bağıntılarına göre Legendre polinomlarının hesaplanması hayli zor olduğu için daha basit yöntemler bulmak gerekmiştir. Bu yöntemlerden biri de

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m \quad (2.1.8)$$

şeklindeki Rodrigues formülüdür. Ayrıca $\lambda = m(m+1)$ için (2.1.5) denklemini sağlayan

$$P_m^{(n)}(x) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^m m!} \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \quad (2.1.9)$$

fonksiyonuna *eşlenik Legendre fonksiyonu* denir. Bunu göstermek için (2.1.5)

denkleminde $y = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} z$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu eşitliğin iki tarafının x' e göre türevleri alınıp (2.1.5) yerine yazılırsa z için

$$(1-x^2)z'' - 2(n+1)xz' + [m(m+1) - n(n+1)]z = 0 \quad (2.1.10)$$

denklemini elde edilir. $\lambda = m(m+1)$ için $P_m(x)$ Legendre polinomu (2.1.5) den $n=0$ için elde edilen denklemi sağladığına göre

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0 \quad (2.1.11)$$

olur. Bu denklemi n defa x e göre türevini alıp iki fonksiyonun çarpımının türevini bulmak için Leibnitz kuralından faydalanırsak

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)P_m''(x) &= (1-x^2)\frac{d^{n+2}P_m}{dx^{n+2}} - 2nx\frac{d^{n+1}P_m}{dx^{n+1}} - n(n-1)\frac{d^n P_m}{dx^n} \\ \frac{d^n}{dx^n}xP_m'(x) &= x\frac{d^{n+1}P_m}{dx^{n+1}} + n\frac{d^n P_m}{dx^n} \end{aligned}$$

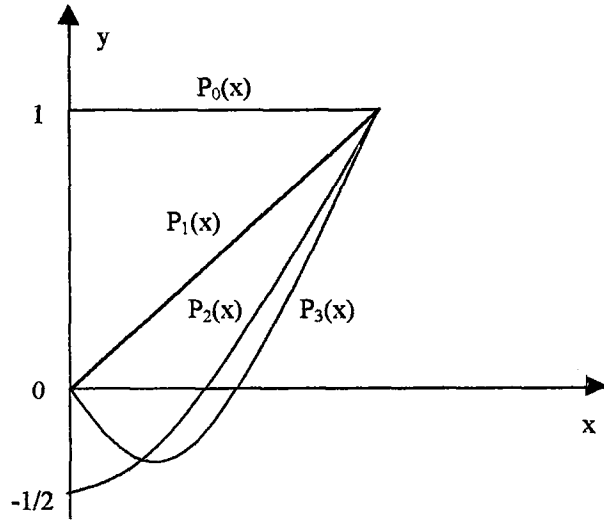
bulunur. (2.1.11) bağıntısını n defa türevledikten sonra son ifadelerini göz önüne alırsak yeni bir

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}P_m}{dx^{n+2}} - 2(n+1)x\frac{d^{n+1}P_m}{dx^{n+1}} + \{m(m+1) - n(n+1)\}\frac{d^n P_m}{dx^n} = 0$$

özdeşliğini elde ederiz. Bu ise $z = \frac{d^n P_m}{dx^n}$ fonksiyonunun (2.1.19) denklemini sağladığını gösterir. Yani

$$y = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} z = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) = P_m^{(n)}(x)$$

fonksiyonu gerçekten $\lambda = m(m+1)$ için (2.1.15) denklemini sağlıyor. $P_m(x)$ m mertebeli polinom olduğundan $n > m$ için $P_m^{(n)} \equiv 0$ olur. Ayrıca $P_m(x)$ Legendre polinomu $n=0$ halinde $P_m^{(n)}(x)$ eşlenik Legendre fonksiyonunun özel bir halidir [Levin, 1959].



Şekil 2.1

Legendre Polinomlarının Geometrik Şekli

2.2. Singüler Sturm - Liouville Operatörü için Asimptotik Formüller

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + \lambda y = 0 \quad -1 < t < 1 \quad (2.2.1)$$

şeklindeki Legendre diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde $z = y(t)$ ve $t = \cos x$ değişken değişirmesi yardımıyla

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} (-\sin x)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \sin^2 x - \frac{dy}{dt} \cos x$$

değerleri (2.2.1) denklemine yerine yazılırsa,

$$z'' + \cot x z' + \lambda z = 0 \quad (2.2.2)$$

olur. (2.2.1) denkleminin çözümleri $P_\lambda(t)$ olduğundan (2.2.2) nin çözümü ise $z = P_\lambda(\cos x)$ şeklindedir. Ayrıca (2.2.1) denklemi t nın $(-1,1)$ aralığındaki değerleri için incelendiğinden (2.2.2) nin çözümleri ise $t = \cos x$ dönüşümü yardımıyla x 'in $(0, \pi)$ aralığındaki değerleri için incelenecektir. Bilindiği gibi (2.2.1) denkleminin çözümünü oluşturan $P_\lambda(t)$ fonksiyonları sonsuz bir seriden oluşup $\lambda = n(n+1)$ olması halinde birer polinom olurlar.

Şimdi (2.2.2) de $u = z\sqrt{\sin x}$ değişken değişirmesi yapıp gerekli türevler alındıktan sonra (2.2.2) de yerine yazılırsa

$$u'' + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\sin^2 x} \right] u = 0 \quad 0 < x < \pi \quad (2.2.3)$$

denklemini elde edilir. Burada $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = \lambda + \frac{1}{4}$ dir. ε yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere $0 < \varepsilon < x < \pi - \varepsilon < \pi$ aralığındaki x değerleri ve büyük n ler için $\frac{1}{4\sin^2 x}$ terimi $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ terimine göre çok küçük olduğundan (2.2.3) denklemini

$$u'' + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right] u = 0 \quad (2.2.4)$$

olarak göz önüne alabiliriz. Bu şekildeki diferensiyel denklemin çözümü ise

$$u \cong A_n \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t + \phi_n\right]$$

şeklindedir [Hochstadt, 1971]. Burada A_n ve ϕ_n bulunması gereken sabitlerdir. Bunun için Legendre polinomlarının normunu kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{2}{2n+1} &= \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \int_0^\pi P_n^2(\cos x) \sin x dx \\ &\cong A_n^2 \int_0^\pi \cos^2\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \phi_n\right] dx \\ &\cong \frac{A_n^2}{2} \int_0^\pi \{1 + \cos 2\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \phi_n\right]\} dx \cong \frac{A_n^2 \pi}{2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$A_n \cong \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

olarak bulunur. Ayrıca Legendre polinomları $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$ şeklinde bir özelliğe sahip olduğundan

$$P_n\{\cos[(\pi - x)]\} = (-1)^n P_n(\cos x)$$

$$\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(\pi - x) + \phi_n\right] = (-1)^n \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \phi_n\right]$$

$$\cos\left(n\pi - nx + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \phi_n\right) = (-1)^n \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \phi_n\right]$$

olup $\phi_n = -\frac{\pi}{4}$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$P_n \cong \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{\pi}{4}\right] \quad (2.2.5)$$

şeklinde elde edilir. (2.2.5) ifadesi $\lambda = n(n+1)$ olması halinde elde edilir. Dolayısıyla bu çözüm (2.2.4) denkleminin $\lambda = n(n+1)$ şeklindeki özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır.

$q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun. (2.2.3) te tanımlanan denklem $[0, \pi]$ aralığında singüler olur. Dolayısıyla bu denklemi $u(0) = 0$ ve $u'(\pi - \varepsilon, \lambda) + Hu(\pi - \varepsilon, \lambda) = 0$ şeklindeki şartlarla göz önüne alacağız. Burada ε yeterince küçük, pozitif ve H ise sıfırdan farklı sonlu bir sayıdır.

$$-u'' - \left[\frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (2.2.6)$$

$$u(0) = 0 \quad (2.2.7)$$

$$u'(\pi - \varepsilon, \lambda) + Hu(\pi - \varepsilon, \lambda) = 0 \quad (2.2.8)$$

probleminin çözümü $u = P_\lambda(x)$ ve

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (2.2.9)$$

$$u(0) = 0 \quad (2.2.10)$$

$$u'(\pi - \varepsilon, \lambda) + Hu(\pi - \varepsilon, \lambda) = 0 \quad (2.2.11)$$

probleminin çözümü ise $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Burada $(n + \frac{1}{2})^2 = (\lambda + \frac{1}{4}) = \mu$ dir. Bu şekildeki problemin çözümü ise

$$\varphi(x, \lambda) = P_\mu(x) + \int_0^x K(x, t) P_\mu(t) dt \quad (2.2.12)$$

şeklinde aranacaktır.

(2.2.9)-(2.2.11) probleminin özdeğerleri (2.2.11) şartını sağlayan λ değerleri olduğundan (2.2.12) yardımıyla bu denklemi λ bilinmeyeni için çözmeye çalışacağız. (2.2.12) ifadesinin x 'e göre türevi alınıp (2.2.11) de yerine yazılırsa

$$-\sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin\left(\sqrt{\mu}(\pi - \varepsilon) - \frac{\pi}{4}\right) + H \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cos\left(\sqrt{\mu}(\pi - \varepsilon) - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sqrt{\mu} \sin\left(\sqrt{\mu}(\pi - \varepsilon) - \frac{\pi}{4}\right) \left[-1 + H \cot\left(\sqrt{\mu}(\pi - \varepsilon) - \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0$$

$$\sin\left(\sqrt{\mu}(\pi - \varepsilon) - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = n + \frac{1}{4}$$

olup böylece

$$\lambda_n = n^2 + \frac{n}{2} - \frac{3}{16} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.2.13)$$

olur. Şimdi (2.2.13) asimptotik ifadesi için bir terim daha bulmaya çalışalım. Bunun için

$\sqrt{\mu} = n + \frac{1}{4} + \delta_n$ olsun. (2.2.12) den

$$\varphi_x = P'(x, \mu) + K(x, x)P(x, \mu) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$$

değeri (2.2.11) de yazılıp

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4} + \delta_n\pi - \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^n \sin \delta_n\pi$$

$$\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4} + \delta_n\pi - \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^n \cos \delta_n\pi$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\sqrt{\mu} \tan \delta_n\pi = H + K(\pi, \pi)$$

olur. δ_n lerin küçük değerleri için $\tan \delta_n\pi = \delta_n\pi$ olduğundan

$$\delta_n = \frac{H + K(\pi, \pi)}{(n + \frac{1}{2})\pi}$$

olur. Böylece (2.2.9)-(2.2.11) probleminin özdeğerleri

$$\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = n + \frac{1}{4} + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.2.15)$$

şeklindedir. Burada $a = \frac{H+K(\pi,\pi)}{\pi}$ dir. Bundan sonra bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları bulmaya çalışacağız. Bunun için tekrar (2.2.12) nin integral altındaki terimine kısmi integrasyon uygulanıp λ nın (2.2.15) deki değeri yerine yazılırsa

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left\{ \cos \left[x \left(n + \frac{1}{4} + \frac{a}{n} \right) - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{K(x, x) \sin \left[x \left(n + \frac{1}{4} + \frac{a}{n} \right) - \frac{\pi}{4} \right]}{n + \frac{1}{4} + \frac{a}{n}} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right\}$$

olur. n 'nin büyük değerleri için $\cos(\frac{a}{n})x \rightarrow 1$ ve $\sin(\frac{a}{n})x \rightarrow 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left\{ \left[\cos \left(n + \frac{1}{4} \right) x \cos \frac{a}{n} x - \sin \left(n + \frac{1}{4} \right) x \sin \frac{a}{n} x \right] \cos \frac{\pi}{4} \right. \\ & + \left[\sin \left(n + \frac{1}{4} \right) x \cos \frac{a}{n} x + \cos \left(n + \frac{1}{4} \right) x \sin \frac{a}{n} x \right] \sin \frac{\pi}{4} \\ & \left. + \frac{K(x, x) \sin \left[x \left(n + \frac{1}{4} + \frac{a}{n} \right) - \frac{\pi}{4} \right]}{\left(n + \frac{1}{4} + \frac{a}{n} \right)} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece son ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa, (2.2.15) de tanımlanan özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left\{ \cos \left(n + \frac{1}{4} \right) x + \sin \left(n + \frac{1}{4} \right) x + \frac{K(x, x) \left[\cos \left(n + \frac{1}{4} \right) x - \sin \left(n + \frac{1}{4} \right) x \right]}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right\} \quad (2.2.16)$$

olur. Diğer taraftan ters problemin çözümünde kullanılan spektral parametrelerden biri de ortonormalleştirici sabitlerdir. Bu sabitler ise

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx \\ \alpha_n^2 &= \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \left[\cos \left(n + \frac{1}{4} \right) x + \sin \left(n + \frac{1}{4} \right) x \right]^2 dx + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ \alpha_n^2 &= \frac{2}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

olarak hesaplanır.

2.3. Özfonksiyonların Sıfırları ve Osilasyon Teoremi

Bilindiği gibi $q(x) = 0$ iken

$$-u'' - \frac{1}{4 \sin^2 x} u = \mu u \quad (2.3.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(\pi - \varepsilon, \mu) + H u(\pi - \varepsilon, \mu) = 0 \quad (2.3.2)$$

probleminin çözümü

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x - \frac{\pi}{4} \right]$$

şeklindedir. Burada $\lambda = n(n+1)$ ve bu çözüm özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlardır. Dolayısıyla aşağıdaki şartları sağlar.

a) n . özfonksiyon $(0, \pi)$ aralığında tam n tane köke sahiptir.

Örneğin; $n = 2$ için,

$$u_2(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left[\cos \frac{5}{2} x - \frac{\pi}{4} \right] = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$x_k = \frac{(2k+1)\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sırasıyla $k = 0$ ve $k = 1$ için

$$x_0 = \frac{3\pi}{10} \in (0, \pi), \quad x_1 = \frac{9\pi}{10} \in (0, \pi)$$

olur.

b) n . fonksiyonun ardışık iki sıfırı arasında $(n+1)$. özfonksiyonun bir sıfırı vardır.

Örneğin, $n = 2$ için $u_2(x)$ özfonksiyonun ardışık iki sıfırı yukarıda belirtildiği gibi $\frac{3\pi}{10}$ ve

$\frac{7\pi}{10}$ dir. Diğer taraftan $n = 3$ için $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$ formülünden $x_0 = \frac{3\pi}{14} \in (0, \pi)$,

$x_1 = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$, $x_2 = \frac{11\pi}{14} \in (0, \pi)$ olup bunlardan sadece $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{10}$ ile $\frac{7\pi}{10}$ aralığındadır.

Teorem 2.3.1.

$$u'' + g(x)u = 0 \quad (2.3.3)$$

$$u'' + h(x)u = 0 \quad (2.3.4)$$

denklemlerini göz önüne alalım. Eğer $[a, b]$ aralığının tamamı üzerinde $g(x) < h(x)$ ise (2.3.3) denkleminin aşikar olmayan çözümünün ardışık iki sıfırı arasında (2.3.4) denkleminin çözümünün en az bir sıfırı vardır [Levitan, 1975].

Teorem 2.3.2. $u(x)$, (2.3.3) denkleminin (2.3.2) şartlarını sağlayan çözümü, $v(x)$ ise (2.3.4) denkleminin aynı şartları sağlayan çözümü olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığında $g(x) < h(x)$ olsun. Eğer $u(x)$, $a < x < b$ aralığında m tane sıfıra sahip ise $v(x)$ nin de aynı aralıkta sıfırları m den az değildir. ve $v(x)$ in k . sıfırı $u(x)$ in k . sıfırından küçüktür [Levitan, 1975].

Teorem 2.3.3. $a < x_0 < b$ olmak üzere eğer x_0 , $u(x, \lambda_0)$ fonksiyonunun bir sıfırı ise yeterince küçük öyle $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ sayıları vardır ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ için $u(x, \lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_0| < \varepsilon$ aralığında sadece bir tane sıfırı vardır [Levitan, 1975].

Teorem 2.3.4.(Osilasyon Teoremi)

$$-u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] = \mu u \quad (2.3.5)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(\pi - \varepsilon, \mu) + H u(\pi - \varepsilon, \mu) = 0 \quad (2.3.6)$$

probleminin $\mu_0, \mu_1, \dots$ şeklindeki özdeğerlerin artan ve sınırsız bir dizisi vardır. Ayrıca μ_m özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $0 < x < \pi$ aralığında tam m tane sıfıra sahiptir.

İspat. $u(x, \lambda)$ (2.3.5) denkleminin $u(0) = 0$ şartını sağlayan çözümü olsun. Teorem 2.3.2 den λ arttıkça u 'nın sıfırlarının sayısı da artar. Şimdi $0 < x < \pi$ için $|q(x)| < c$ olmak üzere (2.3.5) denklemini

$$-y'' + \left[c - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] y = \mu y$$

denklemini ile karşılaştıracğız. Bu denklemin çözümü

$$y(x) \equiv \cos \left[\sqrt{\mu c} x - \frac{\pi}{4} \right] - \frac{\sin \left[\sqrt{\mu c} x - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\mu c}}$$

şeklindedir. μ nın negatif değerleri için bu fonksiyon $0 < x < \pi$ aralığının hiçbir yerinde sıfır olamaz. Böylece tekrar Teorem 2.3.2 den aynı λ değerleri için de $u(x, \mu)$ fonksiyonu $0 < x < \pi$ aralığının hiçbir yerinde sıfır olamaz. Karşılaştırma amacıyla

$$-y'' + \left[q + c - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] y = \mu y$$

denklemini göz önüne alırsak pozitif ve sınırsız olarak artan μ değerleri için $u(x, \mu)$ nın sıfırlarının sayısı $(0, \pi)$ aralığında bulunurlar. Şimdi $u(x, \mu) = 0$ denklemini göz önüne alalım. Teorem 2.3.3 den bu denklemin kökleri μ nın sürekli fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan Teorem 2.3.2 den μ arttıkça $u(x, \mu)$ nın her kökü sola hareket eder ve hiçbir kök sıfır noktasını geçmez. Ayrıca Teorem 2.3.3 den yeni sıfırlar π noktasını geçmez. η_0 ,

$$u'(\pi - \varepsilon, \mu) + Hu(\pi - \varepsilon, \mu) = 0$$

denklemini sağlayan μ nın ilk değeri olsun. Böyle bir değer her zaman mevcuttur. η_1 aynı denklemini sağlayan μ nın ikinci değeri olsun. Böylece $\eta_0, \eta_1 \dots$ sayı dizisi “ $u'(\pi - \varepsilon, \eta_m) + Hu(\pi - \varepsilon, \eta_m) = 0$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında tam m tane sıfıra sahiptir” şeklindeki özelliği sağlar. Böylece (2.3.6) şartı sağlanır ve sonuç olarak η_m ler birer özdeğer olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3. DÖNÜŞÜM OPERATÖRÜ

3.1. Dönüşüm Operatörünün Varlığı

Bu bölümde ters problemin çözümünde önemli bir yere sahip olan Dönüşüm operatörü kavramı tanımlanmıştır. Bu operatör yardımıyla pertürbe edilmiş bir problem ile pertürbe edilmemiş singüler Sturm-Liouville problemlerinin çözümleri arasında bir bağıntı yazılabilir. Elde edilen bu bağıntı ise ters problemin çözümünde önemli sık sık kullanılmaktadır. Buna göre

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4 \sin^2 x} + q(x)$$

$$B = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4 \sin^2 x}$$

operatörlerini göz önüne alalım.

Teorem 3.1.1. Kabul edelim ki (2.1.6)-(2.1.8) probleminin çözümü $P(x, \mu)$, (2.1.9)-(2.1.11) probleminin çözümü ise $\varphi(x, \mu)$ olsun. Bu durumda X Dönüşüm operatörü

$$X[P(x, \mu)] = \varphi(x, \mu) = P(x, \mu) + \int_0^x K(x, t)P(t, \mu)dt \quad (3.1.1)$$

şeklindedir. Burada $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{4 \sin^2 x} K(x, t) - q(x)K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{4 \sin^2 t} K(x, t) \quad (3.1.2)$$

$$2 \frac{dK(x, x)}{dx} = q(x) \quad (3.1.3)$$

$$K(x, 0) = 0 \quad (3.1.4)$$

probleminin çözümü olur.

İspat. Teoremi ispatlamak için Dönüşüm operatörünün ikinci özelliğinden yararlanacağız. Öncelikle (3.1.1) ifadesinin x ' e göre iki kez türevini alırsak

$$\begin{aligned}\varphi'(x, \mu) &= P'(x, \mu) + K(x, x)P(x, \mu) + \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} P(t, \mu) dt \\ \varphi''(x, \mu) &= P''(x, \mu) + \frac{dK(x, x)}{dx} P(x, \mu) + K(x, x)P'(x, \mu) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} P(t, \mu) \Big|_{t=x} \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} P(t, \mu) dt\end{aligned}$$

elde ederiz. Daha sonra A operatörü ve X dönüşüm operatörlerinin tanımından dolayı

$$\begin{aligned}AX[P(x, \mu)] &= A\varphi = -\varphi'' - \frac{1}{4\sin^2 x} \varphi + q(x)\varphi \\ &= -P''(x, \mu) - \frac{dK(x, x)}{dx} P(x, \mu) - P'(x, \mu)K(x, x) - \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} P(t, \mu) \Big|_{t=x} \\ &\quad - \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} P(t, \mu) dt - \frac{1}{4\sin^2 x} P(x, \mu) - \frac{1}{4\sin^2 x} \int_0^x K(x, t)P(t, \mu) dx \\ &\quad + q(x)P(x, \mu) + q(x) \int_0^x K(x, t)P(t, \mu) dt\end{aligned}\quad (3.1.5)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}XB[P(x, \lambda)] &= -P''(x, \mu) - \frac{1}{4\sin^2 x} P(x, \mu) - \int_0^x K(x, t) \frac{1}{4\sin^2 x} P(t, \mu) dt \\ &\quad - \int_0^x K(x, t)P''(t, \mu) dt\end{aligned}$$

elde edilir. Son terime kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_0^x K(x, t)P''(t, \mu) dt &= K(x, t)P'(t, \mu) \Big|_{t=x} - K(x, t)P'(t, \mu) \Big|_{t=0} - \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} P(t, \mu) \Big|_{t=x} \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} P(t, \lambda) dt\end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu ifade yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
XB[P(x, \mu)] &= -P''(x, \mu) - \frac{1}{4 \sin^2 x} P(x, \mu) - K(x, t)P'(t, \mu) \Big|_{t=x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} P'(t, \mu) \Big|_{t=0} \\
&\quad - \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} P(t, \mu) \Big|_{t=0} - \int_0^x K(x, t) \frac{1}{4 \sin^2 t} P(t, \mu) dt - \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} P(t, \mu) dt
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

olur. Böylece (3.1.5) ve (3.1.6) ifadelerini $AX = XB$ eşitliğinde yerine yazarsak, $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu için

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{4 \sin^2 x} K(x, t) - q(x)K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{4 \sin^2 t} K(x, t) \tag{3.1.7}$$

hiperbolik denklemi ve

$$2 \frac{dK(x, x)}{dx} = q(x) \tag{3.1.8}$$

$$K(x, 0) = 0 \tag{3.1.9}$$

sınır koşulları elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Reel $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında tanımlı ve toplanabilir olacak şekilde iki singüler

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4 \sin^2 x} + q(x)$$

$$B = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4 \sin^2 x} + r(x)$$

Sturm-Liouville operatörlerini göz önüne alalım.

$$Ay = \mu y$$

denkleminin $\varphi(0, \mu) = 0$ koşulunu sağlayan çözümü $\varphi(x, \mu)$,

$$By = \mu y$$

denkleminin $\psi(0, \mu) = 0$ koşulunu sağlayan çözümü ise $\psi(x, \mu)$ olsun. Bu takdirde Teorem 3.1.1'e benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. A ve B operatörler çifti için $X = X_{A,B}$ dönüşüm operatörü

$$X[\varphi(x, \mu)] = \psi(x, \mu) = \varphi(x, \mu) + \int_0^x \tilde{K}(x, t) \varphi(t, \mu) dt \quad (3.1.1)'$$

şeklinde gösterilebilir. Ayrıca bu operatörün $\tilde{K}(x, t)$ çekirdeği

$$\frac{\partial^2 \tilde{K}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{4 \sin^2 x} \tilde{K}(x, t) - q(x) \tilde{K}(x, t) = \frac{\partial^2 \tilde{K}(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{4 \sin^2 t} \tilde{K}(x, t) - p(t) \tilde{K}(x, t)$$

denklemini ve

$$2 \frac{d\tilde{K}(x, x)}{dx} = q(x) - r(x)$$

$$\tilde{K}(x, 0) = 0$$

şartlarını sağlar.

Tersine $\tilde{K}(x, t)$ yukarıdaki kısmi türevli denklemi ve sınır şartlarını sağladığında (3.1.1)' ile tanımlı X operatörü A ve B operatörleri için bir dönüşüm operatörüdür. Ayrıca,

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4 \sin^2 x} + q(x)$$

$$B = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4 \sin^2 x}$$

$$C = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4 \sin^2 x} + p(x)$$

olarak alınırsa bu operatörler arasındaki Dönüşüm operatörleri

$$X_{A,B} [P(x, \mu)] = P(x, \mu) + \int_0^x K(x, t) P(t, \mu) dt$$

$$X_{B,C} [P(x, \mu)] = P(x, \mu) + \int_0^x H(x, t) P(t, \mu) dt$$

şeklindedir. Diğer taraftan $X_{A,C} = X_{A,B} X_{B,C}$ eşitliği sağlandığından

$$\begin{aligned} X_{A,C} P &= X_{A,B} X_{B,C} P = X_{A,B} \left[P(x, \mu) + \int_0^x H(x, t) P(t, \mu) dt \right] \\ &= P(x, \mu) + \int_0^x H(x, \tau) P(\tau, \mu) d\tau + \int_0^x K(x, t) \left[P(t, \mu) + \int_0^t H(t, \tau) P(\tau, \mu) d\tau \right] dt \\ &= P(x, \mu) + \int_0^x \left[H(x, t) + K(x, t) + \int_t^x K_1(x, \tau) K_2(\tau, t) d\tau \right] P(t, \mu) dt \end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu ifade ise A ile C arasındaki dönüşüm operatörünün şeklini gösterir.

3.2. Riemann Metodu

Bu kısımda (3.1.7)-(3.1.9) problemini Riemann Metodu[Volk, 1953] ile çözmeye çalışacağız. Bu metodun uygulanabilmesi için bahsedilen denklemin lineer ve ikinci mertebeden olması gerekir. Diğer taraftan denklemin çözümü araştırılırken eşlenik denklemin çözümü olan Riemann fonksiyonundan yararlanılmıştır. Bahsedilen bu işlemler gerçekleştirildikten sonra $K(x, t)$ için aranan çözüm bulunmuş olur.

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + \lambda y = 0 \quad (3.2.1)$$

şeklindeki denklemi gözönüne alalım. Bu denkleme

$$x = \arcsin z + \frac{\pi}{2}, \quad u = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} y$$

dönüşümlerini uygularsak

$$u'' + \left[\frac{1}{4} \frac{x^2}{1 - x^2} + \frac{1}{2} \right] u = \lambda u, \quad x \in (-1, 1)$$

denklemini elde edilir. Şimdi

$$u'' + \left[\frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{2} \right] u = \lambda u \quad (3.2.2)$$

$$u(-1) = 0 \quad (3.2.3)$$

probleminin çözümü $P(x, \mu)$,

$$u'' + \left[\frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} + q(x) + \frac{1}{2} \right] u = \lambda u \quad (3.2.4)$$

$$u(-1) = 0 \quad (3.2.5)$$

probleminin çözümü ise $\varphi(x, \mu)$ olsun. Böylece X bir dönüşüm operatörü olmak üzere bu iki problemin çözümü arasında

$$X[P(x, \mu)] = \varphi(x, \mu) = P(x, \mu) + \int_{-1}^x K(x, t) P(t, \mu) dt \quad (3.2.6)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Öncelikle

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} + q(x)$$

şeklinde iki operatör tanımlayalım. Bu durumda $K(x, t)$ 'nin sağlayacağı şartlar araştırılacaktır. Bunun için (3.2.6) ifadesinin x 'e göre iki kez türevi alınırsa

$$\varphi''(x, \mu) = P''(x, \mu) + \frac{dK(x, x)}{dx} P(x, \mu) + K(x, x) P'(x, \mu) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} P(t, \mu) \Big|_{t=x}$$

$$+ \int_{-1}^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} P(t, \mu) dt$$

olur. X dönüşüm operatörü olduğundan

$$\begin{aligned}
 AX[P(x, \lambda)] &= A\varphi = \varphi'' + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} \varphi \\
 &= P''(x, \mu) + \frac{dK(x, x)}{dx} P(x, \mu) + P'(x, \lambda) K(x, x) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} P(t, \mu) \Big|_{t=x} \\
 &\quad + \int_{-1}^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} P(t, \mu) dt + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} P(x, \mu) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} \int_{-1}^x K(x, t) P(t, \mu) dt
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 XB[P(x, \mu)] &= P''(x, \mu) + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} P(x, \mu) + q(x) P(x, \mu) \\
 &\quad + \int_{-1}^x K(x, t) \left[\frac{1}{4} \frac{t^2}{1-t^2} + q(t) P(t, \mu) \right] dt + \int_{-1}^x K(x, t) P''(t, \mu) dt
 \end{aligned}$$

elde edilir. Son terime kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^x K(x, t) P''(t, \mu) dt &= K(x, t) P'(t, \mu) \Big|_{t=x} - K(x, t) P'(t, \mu) \Big|_{t=-1} - \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} P(t, \mu) \Big|_{t=x} \\
 &\quad + \int_{-1}^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} P(t, \mu) dt
 \end{aligned}$$

olur. Bu integralin değeri yukarıdaki denklemde yerine yazılıp dönüşüm operatörünün ikinci özelliği göz önüne alınırsa $K(x, t)$ için

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} + \left[\frac{1}{4} \frac{t^2}{1-t^2} + q(t) \right] K(x, t) \tag{3.2.8}$$

hiperbolik denklemi ve

$$2 \frac{dK(x, x)}{dx} = q(x) \quad (3.2.9)$$

$$K(x, -1) = 0 \quad (3.2.10)$$

sınır koşulları elde edilir. (3.2.8) denklemi $x = t = \mp 1$ noktalarında singülerliğe sahip olduğundan aşağıdaki dönüşümler yardımıyla bu denklemi Euler-Poisson-Darboux denklemine dönüştürmeye çalışacağız.

$$z = \frac{(x+t+1)^2}{4}, s = \frac{(x-t-1)^2}{4}, K(x, t) = (z-s)^{\frac{1}{4}} U(z, s) \quad (3.2.11)$$

olsun. Bu dönüşümler yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \frac{(x+t+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial s} \frac{[x^2 - (t+1)^2]}{4} + \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \frac{(x-t-1)^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \frac{(x+t+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial s} \frac{[x^2 - (t+1)^2]}{4} + \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \frac{(x-t-1)^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial s} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilen değerler (3.2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[x^2 - (t+1)^2 \right] \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial s} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} K - \frac{1}{4} \frac{t^2}{1-t^2} K - qK = 0 \quad (3.2.12)$$

olur. Diğer taraftan

$$K(x, t) = (z-s)^{\frac{1}{4}} U(z, s)$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z \partial s} = \frac{3}{16} (z-s)^{-\frac{7}{4}} U(z, s) + \frac{1}{4} (z-s)^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{4} (z-s)^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial U}{\partial z} + (z-s)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s}$$

$$x = \sqrt{z} + \sqrt{s}, t = \sqrt{z} - \sqrt{s} - 1, x^2 - (t+1)^2 = 4\sqrt{zs}$$

değerleri (3.2.12) de yazılırsa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{4\sqrt{zs}} qU + R(z,s)U = 0$$

denklemini elde edilir. Burada

$$R(z,s) = \frac{3}{8} \left[\frac{1}{(z-s)^2} + \frac{1}{\sqrt{zs}} \frac{(\sqrt{z} + \sqrt{s})^2}{1 - (\sqrt{z} + \sqrt{s})^2} - \frac{1}{\sqrt{zs}} \frac{(\sqrt{z} - \sqrt{s} - 1)^2}{1 - (\sqrt{z} - \sqrt{s} - 1)^2} \right]$$

dir. Ayrıca (3.2.11) yardımıyla $t = -1$ için $z = s$ olup bu doğru üzerinde denklem tekiliğe sahip olduğundan $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere $z = s + \varepsilon$ doğrusunu göz önüne alacağız. Böylece (3.2.10) şartı yerine

$$U(z, z - \varepsilon) = 0$$

elde edilir. (3.2.9) dan $t = x$ için

$$z = \frac{(2x+1)^2}{4}, s = \frac{1}{4}$$

olur. Böylece

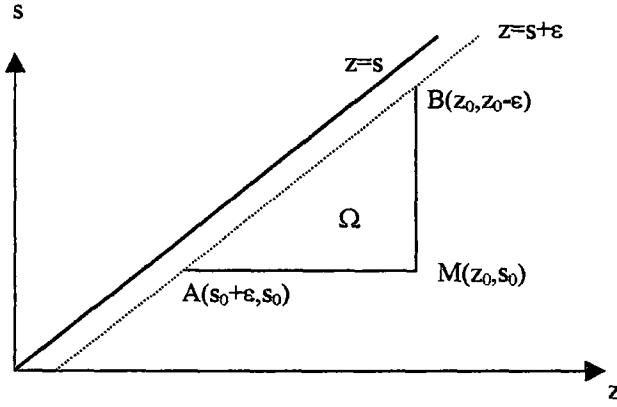
$$K(x, x) = \left(z - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} U\left(z, \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{dK(x, x)}{dx} = \frac{1}{4} \left(z - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{4}} \frac{dz}{dx} U\left(z, \frac{1}{4}\right) + \left(z - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} q$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.2.9) yerine

$$\frac{dU}{dz} + \frac{U}{4(z - \frac{1}{4})} = \frac{q}{\sqrt{z}(z - \frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}}$$

şartı elde edilir. Böylece U için



Şekil 3.1

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{4\sqrt{zs}} qU + R(z, s)U = 0 \quad (3.2.13)$$

$$U(z, z-\varepsilon) = 0 \quad (3.2.14)$$

$$\frac{dU}{dz} + \frac{U}{4(z-\frac{1}{4})} = \frac{q}{\sqrt{z}(z-\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}} \quad (3.2.15)$$

şeklinde Euler – Poisson – Darboux problemi elde edilir. Bundan sonra elde edilen bu problemi Riemann metoduyla çözmeye çalışacağız. Bunun için

$$L[U] = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial U}{\partial s} + R(z, s)U$$

$$L^*[V] = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial s} + \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{4(z-s)} \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{V}{2(z-s)^2} + R(z, s)V$$

şeklinde iki operatör tanımlansın. Burada L^* operatörü L nin adjoint operatörü olup $L^2[a, b]$ uzayındaki iç çarpım tanımını kullanılarak elde edilebilir. İlk olarak yukarıdaki ifadelerden birincisi V , ikincisini U ile çarpıp taraf tarafa çıkardıktan sonra Şekil 3.1 de belirtilen Ω bölgesini göz önüne alalım. Elde edilen ifadeye bu bölge üzerinden Green teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \{VL[U] - UL^*[V]\} dz ds &= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(V \frac{\partial U}{\partial s} - U \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{1}{2(z-s)} UV \right) \right] dz ds \\
&+ \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(V \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2(z-s)} UV \right) \right] dz ds \\
&= \int_{AMBA} -\frac{1}{2} \left(V \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2(z-s)} UV \right) dz \\
&+ \frac{1}{2} \left(V \frac{\partial U}{\partial s} - U \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{1}{2(z-s)} UV \right) ds
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan Şekil 3.1 de görüldüğü gibi AM ve MB doğruları üzerinde sırası ile s ve z sabit olduğundan

$$\int_{AM} \frac{1}{2} \left[V \frac{\partial U}{\partial s} - U \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{1}{2(z-s_0)} UV \right] ds = 0$$

ve

$$\int_{MB} -\frac{1}{2} \left[V \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2(z_0-s)} UV \right] dz = 0$$

olur. Ayrıca

$$\int_{AM} -\frac{1}{2} \left[V \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2(z-s_0)} UV \right] dz = -\frac{1}{2} UV(M) + \frac{1}{2} UV(A) + \int_{AM} U \left[\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{V}{4(z-s_0)} \right] dz$$

ve

$$\int_{MB} \frac{1}{2} \left[V \frac{\partial U}{\partial s} - U \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2(z_0-s)} UV \right] ds = \frac{1}{2} UV(B) - \frac{1}{2} UV(M) - \int_{MB} U \left[\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{V}{4(z_0-s)} \right] ds$$

olur. Elde edilen bu değerler son ifadede yerlerine yazılırsa,

$$U(M) = \int_{BA} \frac{1}{2} \left[V \frac{\partial U}{\partial s} - U \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{UV}{2(z-s)} \right] ds - \frac{1}{2} \left[V \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{2(z-s)} \right] dz$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{UV(A) + UV(B)}{2} + \int_{AM} U \left[\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{V}{4(z - s_0)} \right] dz \\
& - \int_{MB} U \left[\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{V}{4(z_0 - s)} \right] ds + \iint_{\Omega} \{VL[U] - UL^*[V]\} dz ds \quad (3.2.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki ifadede AM ve MB üzerindeki integrallerin değeri bilinmiyor. Ayrıca bu doğrular üzerinde $U \neq 0$ olduğundan

$$L^*[V] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{V}{4(z - s_0)} = 0, \text{ AM üzerinde}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{V}{4(z_0 - s)} = 0, \text{ MB üzerinde}$$

$$V = 1, \text{ M noktasında}$$

şartlarını sağlayan bir V fonksiyonunu bulmamız gerekir. Bu şartları sağlayan fonksiyon

$$V(z, s, z_0, s_0) = \frac{(s - z)^{\frac{1}{2}}}{[(s_0 - z)(s - z_0)]^{\frac{1}{4}}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, \sigma\right)$$

şeklindedir [Mackie, 1965]. Burada F fonksiyonu

$$\sigma = \frac{(s - s_0)(z - z_0)}{(s - z_0)(z - s_0)}$$

olmak üzere

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, \sigma\right) = 1 + \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{1! \cdot 1} \sigma + \dots$$

şeklinde bir Hipergeometrik seridir. Diğer taraftan (3.2.16) nın sağ tarafında BA üzerindeki integrale kısmi integrasyon uygulayıp (3.2.14) göz önüne alınırsa bu integral sıfır olur. Böylece

$$U(M) = \frac{UV(A) + UV(B)}{2} + \int_{s_0}^{z-\varepsilon} \int_{s_0+\varepsilon}^{z_0} V \frac{q(\sqrt{z} + \sqrt{s})}{4\sqrt{zs}} U dz ds \quad (3.2.17)$$

olur. Elde edilen bu integral denklem ise ardışık yaklaşımlar metodu ile kolayca çözülebilir[Volk, 1953].

4. SPEKTRAL FONKSİYONUN İNCELENMESİ

4.1. Sonlu Düzlemde Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Spektral Fonksiyon

$$-u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u, \quad 0 < x < \pi \quad (4.1.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin

$$u(0, \mu) = 0 \quad (4.1.2)$$

şartını sağlayan çözümü $\varphi(x, \mu)$ olsun. Diğer taraftan her $f(x) \in L^2[0, \pi]$ için en az bir $\rho(\mu)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$F(\mu) = \lim_{\substack{\rho(\mu) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int_0^n f(x) \varphi(x, \mu) dx$$

olmak üzere

$$\int_0^\pi f^2(x) dx = \int_0^\infty F^2(\mu) d\rho(\mu) \quad (4.1.3)$$

şeklindeki Parseval eşitliği sağlanır. Burada $\rho(\mu)$ ile gösterilen spektral fonksiyon

$$\rho(\mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \frac{1}{\alpha_n^2}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci bölümde hesaplanan α_n^2 değerlerinin yardımıyla

$$\rho(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu - \frac{1}{4}}{4} + \sigma(\mu), & \mu \geq 0 \\ 0, & \mu < 0 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

biçiminde olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $g(x) \in L^2[0, \pi]$ olmak üzere

$$G(\mu) = \lim_{\substack{\rho(\mu) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int_0^n g(x) \varphi(x, \mu) dx$$

olsun. (4.1.3) ifadesini $f(x) + g(x)$ ve $f(x) - g(x)$ için yazıp bu iki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \int_0^\infty F(\mu)G(\mu)d\rho(\mu) \quad (4.1.5)$$

elde edilir.

4.2. Spektral Fonksiyon Yardımıyla Esas İntegral Denkleminin Elde Edilmesi

$$\int_0^\infty \varphi(x, \mu) \varphi(y, \mu) d\rho(\mu) = \delta(x - y) \quad (4.2.1)$$

ve

$$\int_0^\infty \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) d\rho_0(\mu) = \delta(x - y) \quad (4.2.2)$$

olsun. Burada, $\rho_0(\mu) = \frac{\mu - \frac{1}{4}}{4}$ fonksiyonu

$$-u'' - \frac{1}{4 \sin^2 x} u = \mu u$$

$$u(0) = 0$$

probleminin spektral fonksiyonudur. (4.1.1) denkleminin (4.1.2) şartını sağlayan çözümü

$$\varphi(x, \mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) + \int_0^x K(x, t) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) dt \quad (4.2.3)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) = \varphi(x, \mu) + \int_0^x K_1(x, t) \varphi(t, \mu) dt \quad (4.2.4)$$

ifadesi (4.2.3) denkleminin ters Volterra integral denklemdir. Burada K ve K_1 sürekli türevlenebilen fonksiyonlardır. Böylece (4.2.1) ve (4.2.4) birlikte gözönüne alınırsa, $0 < y < x$ için

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \int_0^\infty \varphi(x, \mu) \left[\cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \right] d\rho(\mu) = 0$$

olur. (4.2.3) teki ifade son denklemde yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \left[\cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) + \int_0^x K(x, t) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) dt \right] d\rho(\mu) = 0$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) d\rho(\mu) + \int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^x K(x, t) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) dt \right] d\rho(\mu) = 0$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) d\rho_0(\mu) + \int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) d\sigma(\mu)$$

$$+ \int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^x K(x, t) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) dt \right] d\rho_0(\mu)$$

$$+ \int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^x K(x, t) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) dt \right] d\sigma(\mu) = 0$$

$$\delta(x - y) + F(x, y) + \int_0^\infty \int_0^x \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) K(x, t) dt d\rho_0(\mu)$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^x \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) K(x, t) dt d\sigma(\mu) = 0$$

$$\delta(x - y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) \left[\int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) d\rho_0(\mu) \right] dt$$

$$+ \int_0^x K(x, t) \left[\int_0^\infty \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu t - \frac{\pi}{4}\right) d\sigma(\mu) \right] dt = 0$$

ve sonuç olarak,

$$F(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0 \quad (4.2.5)$$

şeklinde genel integral denklemini elde edilir. Daha önce regüler Sturm-Liouville

problemi için de elde edilen bu denklem Gelfand-Levitan-Marchenko denklemi olarak bilinir. Burada,

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu y - \frac{\pi}{4}\right) d\sigma(\mu)$$

ve

$$\sigma(\mu) = \begin{cases} \rho(\mu) - \rho_0(\mu) & \mu \geq 0, \\ 0 & \mu < 0, \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.1. $f(x)$, $L^2[0, \pi]$ aralığında keyfi bir fonksiyon ve

$$E(\mu) = \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) dx \quad (4.2.6)$$

olsun. Bu durumda $\int_0^{\infty} E^2(\mu) d\rho(\mu) = 0$ ise $f(x) = 0$ dır.

İspat.

$$\cos\left(\mu x - \frac{\pi}{4}\right) = \varphi(x, \mu) + \int_0^x K_1(x, t) \varphi(t, \mu) dt$$

ifadesini (4.2.6) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} E(\mu) &= \int_0^{\pi} f(x) \left[\varphi(x, \mu) + \int_0^x K_1(x, t) \varphi(t, \mu) dt \right] dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \varphi(x, \mu) dx + \int_0^{\pi} f(x) \int_0^x K_1(x, t) \varphi(t, \mu) dt dx \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte ikinci terimde integrallerin sınırları $0 < x < \pi$ ve $0 < t < x$ olarak değişmektedir. İntegral'de sınır değiştirme göz önüne alınıp x ve t nin rolleri değiştirilirse

$$\begin{aligned} E(\mu) &= \int_0^{\pi} f(x) \varphi(x, \mu) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x, \mu) \int_x^{\pi} K_1(t, x) f(t) dt dx \\ &= \int_0^{\pi} \varphi(x, \mu) \left[f(x) + \int_x^{\pi} K_1(t, x) f(t) dt \right] dx \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $E(\mu)$, $f(x) + \int_x^\pi K_1(t, x)f(t)dt$ fonksiyonunun bir Fourier dönüşümüdür. Dolayısıyla, Parseval eşitliğinden,

$$\int_0^\pi \left[f(x) + \int_x^\pi K_1(t, x)f(t)dt \right]^2 dx = 0$$

$$f(x) + \int_x^\pi K_1(t, x)f(t)dt = 0 \quad (4.2.7)$$

olup, bu denklem Volterra integral denklemi olduğundan $f(x) = 0$ şeklinde aşikar bir çözüme sahiptir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.



5. KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE SİNGÜLER STURM - LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM ÜZERİNE

5.1. Hochstadt Yöntemiyle Ters Problemin İncelenmesi

Bu bölümde daha önce [Hochstadt,1973] tarafından regüler Sturm-Liouville problemi için verilen bir metodun Singüler Sturm-Liouville problemine uygulaması verilecektir. Bunun için

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u, \quad 0 < x < \pi - \varepsilon \quad (5.1.1)$$

$$u(0)=0 \quad (5.1.2)$$

$$u(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \beta + u'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \beta = 0 \quad (5.1.3)$$

şeklindeki problemi göz önüne alalım. Bilindiği gibi eğer $q(x)$ regülerlik şartlarını sağlarsa uygun diferensiyel operatör Self-Adjointtir. Aşağıda verilen teoremden, farklı potansiyellere sahip iki singüler Sturm-Liouville operatörünün potansiyeller farkının bulunacağına dair belirli bir formül bulunacaktır. Hatırlatalım ki benzer bir formül farklı bir yöntemle Bessel türü operatörler için ele alınmış ve ispatlanmıştır [Panakhov,1980].

Teorem 5.1.1.

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (5.1.4)$$

$$u(0)=0 \quad (5.1.5)$$

$$u(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \beta + u'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \beta = 0 \quad (5.1.6)$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$, (5.1.6) yerine

$$u(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \gamma + u'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \gamma = 0 \quad (5.1.7)$$

alınması ile elde edilen yeni (5.1.4), (5.1.5), (5.1.7) probleminin spektrumu ise $\{\lambda'_i\}$ olsun. Diğer taraftan $\tilde{q}(x)$, $q(x)$ fonksiyonu ile aynı şartları sağlamak üzere

$$\tilde{L}u = -u'' + \left[\tilde{q}(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (5.1.8)$$

$$u(0) = 0 \quad (5.1.9)$$

$$u(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \beta + u'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \beta = 0 \quad (5.1.10)$$

probleminin spektrumu $\{\tilde{\lambda}_i\}$, (5.1.10) yerine (5.1.7) alınması ile elde edilen yeni (5.1.8)-(5.1.10) probleminin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}'_i\}$ olsun. Ayrıca Λ_0 ; $\lambda_i \neq \tilde{\lambda}'_i$ ($i=1,2,\dots,N$) şartını sağlayan sonlu i lerin cümlesi, Λ ise $\lambda_i = \tilde{\lambda}'_i$ ($i > N$) şartını sağlayan sonsuz i lerin cümlesi olsun. Bu durumda

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{\phi}_n \varphi_n)' \quad (5.1.11)$$

olur. Burada $\tilde{\phi}_n$ ve φ_n sırasıyla

$$\tilde{\phi}_n'' + \left\{ \mu_n - \tilde{q}(x) + \frac{1}{4 \sin^2 x} \right\} \tilde{\phi}_n = 0$$

$$\varphi_n'' + \left\{ \mu_n - q(x) + \frac{1}{4 \sin^2 x} \right\} \varphi_n = 0$$

denklemlerinin çözümüdür. Ayrıca eğer Λ_0 boş ise $q = \tilde{q}$ dir.

İspat. (5.1.4) denklemini (5.1.5) ve (5.1.6) şartları ile gözönüne alalım. Bu problemin özfonksiyonlarının cümlesi $\{\varphi_n\}$ ($\varphi_n = \varphi(x, \mu_n)$) ve (5.1.8)-(5.1.10) probleminin özfonksiyonlarının cümlesi ise $\{\tilde{\varphi}_n\}$ ($\tilde{\varphi}_n = \tilde{\varphi}(x, \mu_n)$) olsun. Şimdi $L^2(0, \pi)$ uzayının

$$H = \left\{ f \in L_2(0, \pi) \mid \langle f, \varphi_i \rangle = 0, \quad i \in \Lambda_0 \right\} \quad (5.1.12)$$

$$\tilde{H} = \left\{ f \in L_2(0, \pi) \mid \langle f, \tilde{\varphi}_i \rangle = 0, \quad i \in \Lambda_0 \right\} \quad (5.1.13)$$

şeklinde iki alt uzayını ele alalım. Böylece hipotezden L nin spektrumu H uzayına, $\tilde{L}$ nin spektrumu ise $\tilde{H}$ uzayına sınırlanmış olur. H dan $\tilde{H}$ ya

$$T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n, \quad n \in \Lambda \quad (5.1.14)$$

şeklinde bir T operatörü tanımlayalım. $f \in H$ olmak üzere f nin $\{\varphi_n\}$ özfonksiyonları cinsinden açılımı

$$f = \sum_{\Lambda} f_n \varphi_n \quad (5.1.15)$$

olsun. Eğer μ kompleks düzlemde tüm özdeğerlerden farklı bir eleman ise μ bir regüler değer olup $(\mu - L)^{-1}$ operatörü mevcut ve sınırlıdır [Kreyszig,1978]. Böylece (5.1.15) ve $L\varphi_n = \mu_n \varphi_n$ bağıntısından

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\mu - \mu_n) f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\mu f_n \varphi_n - \mu_n f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\mu f_n \varphi_n - L f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{(\mu - L) f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ (\mu - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafına T operatörü uygulanırsa

$$T(\mu - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)} \quad (5.1.16)$$

elde edilir. Daha sonra (5.1.16) eşitliğinin her iki tarafına $(\mu - \tilde{L})$ uygulanırsa, (5.1.15) ve $L\tilde{\varphi}_n = \mu_n \tilde{\varphi}_n$ bağıntısından

$$\begin{aligned} (\mu - \tilde{L}) T(\mu - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\mu - \tilde{L}) f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\mu f_n \tilde{\varphi}_n - \tilde{L} f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)} \end{aligned}$$

$$= \sum_n \frac{\mu f_n \tilde{\varphi}_n - \mu_n f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)}$$

buluruz. Sonuç olarak

$$(\mu - \tilde{L})T(\mu - L)^{-1}f = Tf$$

olur. Her f için bu eşitlik gerçekleştiğinden

$$(\mu - \tilde{L})T(\mu - L)^{-1} = T \quad (5.1.17)$$

elde edilir.

İspatın bu aşamasına kadar sadece bir tek spektrum kullanıldı. Bundan sonra ikinci spektrum grubunu kullanarak T nin yapısını bulmaya çalışacağız. Çünkü T operatörünün yapısı bulunduğu anda teoremin ispatı daha kolay elde edilebilir.

$$\varphi'' - \left\{ q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right\} \varphi_n + \mu \varphi = 0 \quad (5.1.18)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad (5.1.19)$$

probleminin çözümü $\varphi(x, \mu)$ olsun. Bilindiği gibi bu çözüm

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left[\cos\left(n + \frac{1}{4}\right)x + \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)x \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.1.20)$$

şeklindedir. Sinüs ve Kosinüs fonksiyonları $0 < x < \pi$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. (5.1.6) ve (5.1.7) yardımıyla μ parametresine bağlı olarak

$$\varphi(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \beta + \varphi'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \beta = W(\mu) \quad (5.1.21)$$

$$\varphi(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \gamma + \varphi'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \gamma = \chi(\mu) \quad (5.1.22)$$

şeklinde iki fonksiyon tanımlayalım. (5.1.20) de verilen asimptotik form göz önüne alınırsa φ ve φ' çözümleri μ nın tam fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla $W(\mu)$ ve $\chi(\mu)$ birer tam fonksiyondur. Ayrıca $W(\mu)$ nın sıfırları (5.1.4)-(5.1.6) probleminin

özdeğerleridir. Dolayısıyla derecesi ≤ 1 olan bir tam fonksiyon

$$W(\lambda) = a \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) \quad (5.1.23)$$

$$\chi(\lambda) = b \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) \quad (5.1.24)$$

şeklinde yazılabilir [Levin, 1964]. Burada a ve b sayıları birer sabittir. Benzer şekilde

$$\tilde{\varphi}(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \beta + \tilde{\varphi}'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \beta = \tilde{W}(\mu)$$

$$\tilde{\varphi}(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \gamma + \tilde{\varphi}'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \gamma = \tilde{\chi}(\mu)$$

eşitlikleri ile tanımlı fonksiyonları için

$$\tilde{W}(\lambda) = \tilde{a} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i} \right) \quad (5.1.25)$$

$$\tilde{\chi}(\lambda) = \tilde{b} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i} \right) \quad (5.1.26)$$

formüllerini yazabiliriz. Teoremin hipotezinde belirtildiği gibi ilk spektrumların tamamı çakışık ikinci grup spektrumların ise ilk N tanesi farklı olup geriye kalanlar birbirinin aynıdır. Bu sebepten

$$\frac{\chi(\lambda)}{\tilde{\chi}(\lambda)} = \frac{b \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right)}{\tilde{b} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i} \right)} = sbt.$$

ve

$$\frac{W(\lambda)}{\tilde{W}(\lambda)} = \frac{a \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right)}{\tilde{a} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i} \right)}$$

oranı ise bir rasyonel fonksiyon olarak elde edilir. Şimdi

$$T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n \quad (5.1.27)$$

şeklinde tanımlı operatörün sınırlı ve tersinin mevcut olduğunu gösterelim. Bunun için (5.1.20) ifadesinin x 'e göre türevi alınıp (5.1.21) de değeri yerine yazıldıktan sonra elde edilen ifade λ için çözülürse

$$\lambda_n \cong n(n+1) \quad (5.1.28)$$

ve

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} [\cos(n + \frac{1}{4})x + \sin(n + \frac{1}{4})x] + O(\frac{1}{n}) \quad (5.1.29)$$

olur. Böylece normalleştirici sabitler için

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (5.1.30)$$

asimptotik formülünü buluruz. Ayrıca

$$\|\tilde{\varphi}_n\|^2 = \int_0^\pi \tilde{\varphi}_n^2(x) dx = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (5.1.30)'$$

dir. Böylece (5.1.30) ve (5.1.30)' den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_n\|}{\|\tilde{\varphi}_n\|} = 1$$

elde edilir. Ayrıca, $T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$, $n \in \Lambda$ olduğundan

$$\frac{\|T\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = 1 \quad (5.1.31)$$

olur ki bu da T operatörünün sınırlı olduğunu gösterir.

f , H uzayında keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$f = \sum_{\Lambda} f_n \varphi_n$$

olsun. İki tarafı φ_n ile çarparsak

$$f_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} \quad (5.1.32)$$

olur. Diğer taraftan sağ taraftaki toplam ifadesine $(\mu - \mu_n)$ uygulanırsa

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\mu - \mu_n) f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\mu f_n \varphi_n - \mu_n f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\mu f_n \varphi_n - L f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{(\mu - L) f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \\ (\mu - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{f_n \varphi_n}{(\mu - \mu_n)} \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

olur. İki tarafa T operatörü uygulanırsa

$$T(\mu - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)} \quad (5.1.34)$$

elde edilir. Son ifadenin iki tarafına $(\mu - \tilde{L})$ uygulanırsa

$$\begin{aligned} (\mu - \tilde{L}) T(\mu - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{\mu f_n \tilde{\varphi}_n - \tilde{L} f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)} = \sum_{\Lambda} \frac{(\mu - \mu_n) f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)} \\ (\mu - \tilde{L}) T(\mu - L)^{-1} f &= T f \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik her f için sağlandığından

$$(\mu - \tilde{L}) T(\mu - L)^{-1} = T \quad (5.1.35)$$

olur. İspatın bundan sonraki kısmında T operatörü için farklı bir gösterim bulmaya

çalışacağız. Bunun için de diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Green fonksiyonundan yararlanacağız.

$$\phi'' - \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] \phi + \mu \phi = 0 \quad (5.1.37)$$

$$\phi(\pi - \varepsilon, \mu) = -\sin \beta, \quad \phi'(\pi - \varepsilon, \mu) = \cos \beta$$

probleminin çözümü $\phi(x)$,

$$u'' - \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u + \mu u = f(x) \quad (5.1.38)$$

denkleminin çözümü ise

$$u(x, \lambda) = \int_0^{\pi} G(x, t) f(t) dt$$

olsun. Burada $G(x, t)$ Green fonksiyonu olarak tanımlanır.

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u$$

olarak alınırsa

$$(\mu - L) \int_0^{\pi} G(x, y) f(y) dy = f(x) \quad (5.1.39)$$

olur. Diğer taraftan (5.1.38) denklemi parametrelerin değişimi metodu ile çözülmüşse

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\phi(x)\phi(y)}{W(\mu)} & x < y, \\ \frac{\phi(y)\phi(x)}{W(\mu)} & x > y, \end{cases} \quad (5.1.40)$$

olarak elde edilir. Burada $\phi(x)$ (5.1.18)-(5.1.19), $\phi(x)$ (5.1.37) denkleminin çözümü, $W(\mu)$ ise (5.1.21) ile tanımlanan ifadedir. Kolaylık olması bakımından

$$\begin{aligned}x_{<} &= \min(x, y) \\x_{>} &= \max(x, y)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$G(x, y) = \frac{\varphi(x_{<})\phi(y_{>})}{W(\mu)} \quad (5.1.41)$$

olsun. $\varphi(x)$ ve $\phi(x)$ için verilen asimptotik formlar gözönüne alınırsa $G(x, y)$ nin pay ve paydası μ nın tam fonksiyonları olup bu fonksiyon sınırlıdır.

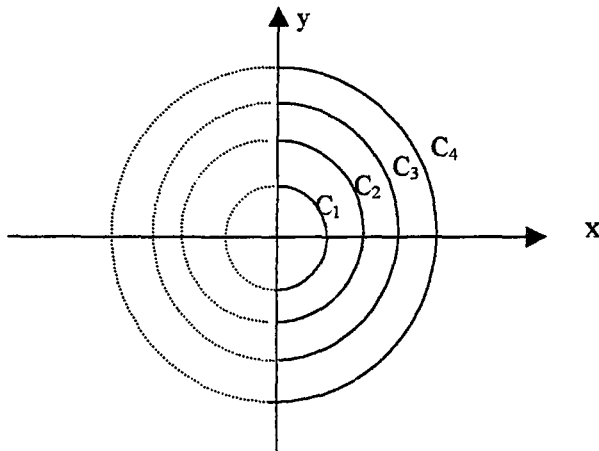
C_n , Şekil 5.1 de gösterildiği gibi pozitif x ekseninde λ_n ile λ_{n+1} arasında kesişen orjin merkezli çemberlerin bir dizisi olsun. $G(x, y)$ fonksiyonu sınırlı olduğundan $\frac{G(x, y)}{\lambda - \eta}$ fonksiyonu C_n çemberleri üzerinde analitik olup Cauchy integral teoreminden dolayı [Başkan, 2000]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{G(x, y)}{\lambda - \eta} d\eta = 0 \quad (5.1.42)$$

olur. μ nın bir fonksiyonu olarak $G(x, y)$ nin Mittag - Lefler açılımı ise

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x_{<})\psi_n(x_{>})}{W'(\mu)(\mu - \mu_n)} \quad (5.1.43)$$

olur.



Şekil 5.1.1

C_n Çemberler Dizisinin Geometrik Şekli

Diğer taraftan $\varphi_n(x)$ ve $\phi_n(x)$ çözümleri basit özdeğerlere karşılık geldiğinden lineer bağımlıdır. Dolayısıyla

$$k_n \varphi_n(x) = \phi_n(x) \quad (5.1.44)$$

olarak yazabiliriz. İki taraftan $x = \pi - \varepsilon$ olarak alınırsa

$$k_n = \frac{\phi_n(\pi - \varepsilon)}{\varphi_n(\pi - \varepsilon)}$$

bulunur. $\beta \neq 0$ iken $\phi_n(\pi - \varepsilon) = -\sin \beta$ olduğundan

$$k_n = \frac{-\sin \beta}{\varphi_n(\pi - \varepsilon)}$$

elde edilir. (5.1.44) ün iki tarafının türevi alınırsa,

$$k_n = \frac{\phi'_n(x)}{\varphi'_n(x)}$$

olur. $\beta = 0$ için yine yukarıdaki işlemlere benzer şekilde $x = \pi - \varepsilon$ olarak alınırsa

$$\phi'_n(\pi - \varepsilon) = \cos \beta = 1$$

olduğundan

$$k_n = \begin{cases} \frac{-\sin \beta}{\varphi_n(\pi - \varepsilon)}, & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\varphi'_n(\pi - \varepsilon)}, & \beta = 0 \end{cases} \quad (5.1.45)$$

elde edilir. Böylece (5.1.43) yardımıyla,

$$(\mu - L)^{-1} f = \sum_n \frac{k_n \varphi_n(x) \int_0^\pi \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} \quad (5.1.46)$$

olur. Diğer taraftan (5.1.32) yardımıyla

$$f_n = \frac{\int_0^\pi f(y)\varphi_n(y)dy}{\|\varphi_n\|^2}$$

değeri (5.1.33) de yerine yazılırsa

$$(\mu - L)^{-1} f = \sum_n \frac{\varphi_n(x) \int_0^\pi \varphi_n(y) f(y) dy}{\|\varphi_n\|^2 (\mu - \mu_n)}$$

bulunur. Elde edilen bu ifadeyle (5.1.46) nın sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşittir. Dolayısıyla,

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{W'_n(\mu_n)}{k_n} \quad (5.1.47)$$

olur. Ayrıca (5.1.40) ifadesinden kolayca görülebilir ki,

$$\begin{aligned} (\mu - L)^{-1} f &= \int_0^\pi G(x, y) f(y) dy \\ &= \frac{\phi(x) \int_0^x \phi(y) f(y) dy + \phi(x) \int_x^\pi \phi(y) f(y) dy}{W(\mu)} \end{aligned} \quad (5.1.48)$$

dir. Bundan sonraki aşamada

$$T(\mu - L)^{-1} f = \sum_n \frac{\tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + \tilde{\phi}_n(x) \int_x^\pi \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} \quad (5.1.49)$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamaktır. Bunun için (5.1.34) ile (5.1.49) un sağ taraflarının eşit olduğunu göstermemiz gerekir. İlk olarak (5.1.44) e benzer olarak

$$k_n \tilde{\varphi}_n(x) = \tilde{\phi}_n(x) \quad (5.1.44)'$$

eşitliğini ele alalım. Burada $\tilde{\phi}_n$ ve $\tilde{\varphi}_n$ sırasıyla (5.1.18) ve (5.1.37) denklemlerinde

q yerine $\tilde{q}$ yazılmasıyla elde edilen problemlerin çözümleridir. (5.1.44)' eşitliğini göz önüne alırsak (5.1.49) un sağ tarafını

$$\sum_{\Lambda} \frac{\tilde{k}_n \tilde{\varphi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + k_n \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^{\pi} \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} \quad (5.1.50)$$

şeklinde yazabiliriz. $k_n = \tilde{k}_n$ olduğu için (ileride gösterilecektir) (5.1.50) ifadesi (5.1.47) yardımıyla

$$\sum_{\Lambda} \frac{k_n \tilde{\varphi}_n(x) \int_0^{\pi} \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} = \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{\varphi}_n(x) \int_0^{\pi} \varphi_n(y) f(y) dy}{\|\varphi_n\|^2 (\mu - \mu_n)} \quad (5.1.51)$$

şeklinde olur. (5.1.32) den

$$f_n = \frac{\int_0^{\pi} f(y) \varphi_n(y) dy}{\|\varphi_n\|^2}$$

olduğundan

$$T(\mu - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\mu - \mu_n)} = \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{\varphi}_n(x) \int_0^{\pi} \varphi_n(y) f(y) dy}{\|\varphi_n\|^2 (\mu - \mu_n)}$$

olur. Bu da (5.1.51) in sağ tarafı dolayısıyla (5.1.49) un sağ tarafıdır. Böylece $k_n = \tilde{k}_n$ olduğu gösterilirse, (5.1.49) ifadesinin sağlandığı gösterilmiş olur. Bunun için $\mu = \mu_n$ olsun. Bu durumda $W(\mu_n) = 0$ olduğundan

$$\varphi_n(\pi - \varepsilon) \cos \beta + \varphi'_n(\pi - \varepsilon) \sin \beta = 0 \quad (5.1.52)$$

$$\varphi_n(\pi - \varepsilon) \cos \gamma + \varphi'_n(\pi - \varepsilon) \sin \gamma = \mathcal{G}(\mu_n) \quad (5.1.53)$$

olur. Bu iki denklemden

$$\varphi_n(\pi - \varepsilon) = \frac{\sin \beta \mathcal{G}(\lambda_n)}{\sin(\beta - \gamma)} \quad (5.1.54)$$

elde edilir. (5.1.45) den $\beta \neq 0$ için

$$k_n = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\mathcal{G}(\mu_n)} \quad (5.1.55)$$

ve benzer şekilde

$$\tilde{k}_n = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\tilde{\mathcal{G}}(\mu_n)} \quad (5.1.56)$$

olarak buluruz. $\mathcal{G}(\mu_n)$ ve $\tilde{\mathcal{G}}(\mu_n)$ fonksiyonları aynı sıfırlara sahip tam fonksiyonlar olduğundan aynı asimptotik formları sağlarlar. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $k_n = \tilde{k}_n$ olur. Dolayısıyla (5.1.49) ifadesi gösterilmiş olur. Bu ifadeyi (5.1.35) de yerine yazarsak

$$(\mu - \tilde{L}) \sum_A \frac{\tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^\pi \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} = Tf \quad (5.1.57)$$

elde edilir.

$$g(x) = \frac{\tilde{\phi}(x) \int_0^x \varphi(y) f(y) dy + \tilde{\varphi}(x) \int_x^\pi \phi(y) f(y) dy}{W(\mu)} \quad (5.1.58)$$

olsun. Bu fonksiyonun Mittag - Leffler açılımı,

$$\begin{aligned} g(x) = & \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} \\ & + \sum_A \frac{\tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^\pi \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} \end{aligned} \quad (5.1.59)$$

şeklindedir. Sağ taraftaki ikinci toplam (5.1.49) ile aynıdır. İlk toplamdaki $\tilde{u}_n(x)$ ve

$\tilde{z}_n(x)$ sırasıyla $\tilde{\phi}(x)$ ve $\tilde{\varphi}(x)$ nin $\mu = \mu_n$ noktalarındaki değerlerine karşılık gelen fonksiyonlardır. Böylece (5.1.57) ve (5.1.59) dan

$$(\mu - \tilde{L})^{-1} Tf = g(x) - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} \quad (5.1.60)$$

buluruz. Sol taraftaki ifade $(\mu - \tilde{L})$ operatörünün tanım bölgesi, dolayısıyla sağ taraftaki ifadenin de tanım bölgesidir. Böylece sağ taraftaki ifadenin birinci ve ikinci türevleri mevcut ve süreklidir. (5.1.60) ifadesinin iki tarafına $(\mu - \tilde{L})$ operatörü uygulayıp gerekli işlemleri yaparsak,

$$Tf = \left[\frac{\tilde{\phi}'(x)\varphi(x) - \tilde{\varphi}'(x)\phi(x)}{W(\mu)} - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}'_n(x)\varphi_n(x) - \tilde{z}'_n(x)\phi_n(x)}{W'(\mu_n)(\mu - \mu_n)} \right] f(x) - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)} \quad (5.1.61)$$

elde edilir. φ ve ϕ fonksiyonlarının asimptotik formları gözönüne alınırsa parantez içindeki ifade birim olur. Ayrıca, toplam altındaki ifadeyi daha da basitleştirmek için

$$\phi_n = k_n \varphi_n$$

ve

$$\int_0^\pi \varphi_n(y) f(y) dy = 0, \quad n \in \Lambda_0$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$Tf = f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + k_n \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)}$$

$$\begin{aligned}
&= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy - k_n \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \varphi_n(y) f(y) dy + \int_0^\pi \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\mu_n)} \\
&= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{W'(\mu_n)} \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{W'(\mu_n)} = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_n(x)$$

olmak üzere

$$Tf = f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy \quad (5.1.62)$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$\tilde{L}Tf = TLf$$

eşitliğini yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
\tilde{L}Tf &= -(Tf)'' + \left\{ \tilde{q}(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right\} Tf \\
&= - \left[f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n''(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy \right]'' \\
&\quad + \left[\tilde{q}(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] \left[f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n''(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy \right]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
TLf &= T \left\{ -f'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] f \right\} \\
&= -f'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n''(x) \int_0^x \varphi_n(y) \left\{ -f'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 y} \right] f(y) \right\} dy
\end{aligned}$$

ifadeleri son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$(q - \tilde{q}) = \sum_{\Lambda_0} [\tilde{\phi}_n(x) \phi_n(x)]' \quad (5.1.63)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. Diğer taraftan Λ_0 cümlesinin boş olması yani her iki grup spektrumun çakışık olması halinde ise (5.1.62) den $q = \tilde{q}$ olduğu açıktır.

Teorem 5.1.2. $q(x) = q(\pi - x)$ olmak üzere

$$Lu = -u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (5.1.64)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(\pi - \varepsilon, \mu) \cos \beta + u'(\pi - \varepsilon, \mu) \sin \beta = 0$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$ olsun. Benzer şekilde

$$\tilde{L}u = -u'' + \left[\tilde{q}(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u$$

denkleminin aynı sınır şartları ile birlikte oluşturduğu problemin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}_i\}$ olsun. Ayrıca Λ_0 ve Λ Teorem 5.1.1 deki gibi tanımlansın. Bu durumda

$$(q - \tilde{q}) = \sum_{\Lambda_0} [\tilde{\phi}_n(x) \phi_n(x)]'$$

ve Λ_0 cümlesi boş ise $q = \tilde{q}$ dir.

İspat. $\varphi(x)$ ve $\phi(x)$ sırası ile (5.1.18) ve (5.1.37) nin çözümleri olsun. $\alpha = k\pi$ olmak üzere $\alpha = -\beta$ olarak alınırsa $\varphi(x)$ ve $\phi(x)$ çözümleri arasında

$$\phi(\pi - x) = \varphi(x)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Teorem 5.1.1 de bir tek spektrum sadece $k_n = \tilde{k}_n$ nın

ispatında kullanıldı. Dolayısıyla

$$\phi_n(x) = k_n \varphi_n(x) = \varphi_n(\pi - x) \quad (5.1.65)$$

olur. Ayrıca $k_n = \mp 1$ olduğu kolayca görülebilir.

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{W'_n(\mu_n)}{k_n}$$

olduğundan

$$k_n = \operatorname{sgn} \varphi'_n(\mu_n)$$

olur. Benzer şekilde $\tilde{k}_n = \operatorname{sgn} \tilde{\varphi}'_n(\mu_n)$ olup φ'_n ve $\tilde{\varphi}'_n$ çözümlerinin asimptotik formları gözönüne alınırsa $k_n = \tilde{k}_n$ sonucuna varılır. İspatın bundan sonraki kısmı Teorem 5.1.1 ile aynıdır.

Sonuç 5.1.3. Teorem 5.1.1 deki hipotezleri göz önüne alalım. Yalnızca Λ_0 cümlesi sadece $\{0\}$ elemanından oluşsun. Bu durumda $q = \tilde{q}$ dir.

Sonuç 5.1.4. Teorem 5.1.2 deki hipotezleri göz önüne alalım. Yalnızca Λ_0 cümlesi sadece $\{0\}$ elemanından oluşsun. Bu durumda $q = \tilde{q}$ olur.

5.2. $x = 0$ Noktasında Tekillığe Sahip Diferensiyel Operatörler için Hochstadt Yöntemiyle Ters Problemin İncelenmesi

Bu bölümde daha önce[Hochstadt, 1973] tarafından regüler Sturm-Liouville problemi için verilen bir metodun $x = 0$ noktasında tekillığe sahip bir Sturm-Liouville problemine uygulanması verilecektir. Bunun için

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u = \lambda u, \quad 0 < x \leq 1 \quad (5.2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, \lambda)}{x^l} = \frac{1}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l + \frac{3}{2})} \quad (5.2.2)$$

$$u(1, \lambda) \cos \beta + u'(1, \lambda) \sin \beta = 0 \quad (5.1.3)$$

şeklindeki problemi göz önüne alalım. Bilindiği gibi eğer $q(x)$ regülerlik şartlarını sağlarsa uygun diferensiyel operatör Self-Adjointtir. Aşağıda verilen teoremden, farklı potansiyellere sahip iki singüler Sturm-Liouville operatörünün potansiyeller farkının bulunacağına dair belirli bir formül bulunacaktır.

Teorem 5.2.1.

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u = \lambda u, \quad 0 < x \leq 1 \quad (5.2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, \lambda)}{x^l} = \frac{1}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l + \frac{3}{2})} \quad (5.2.5)$$

$$u(1, \lambda) \cos \beta + u'(1, \lambda) \sin \beta = 0 \quad (5.2.6)$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$, (5.2.6) yerine

$$u(1, \lambda) \cos \gamma + u'(1, \lambda) \sin \gamma = 0 \quad (5.2.7)$$

alınması ile elde edilen yeni (5.2.4), (5.2.5), (5.2.7) probleminin spektrumu ise $\{\lambda'_i\}$ olsun. Diğer taraftan $\tilde{q}(x)$, $q(x)$ fonksiyonu ile aynı şartları sağlamak üzere

$$\tilde{L}u = -u'' + \left[\tilde{q}(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u = \lambda u \quad (5.2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, \lambda)}{x^l} = \frac{1}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l+\frac{3}{2})} \quad (5.2.9)$$

$$u(1, \lambda) \cos \beta + u'(1, \lambda) \sin \beta = 0 \quad (5.2.10)$$

probleminin spektrumu $\{\tilde{\lambda}_i\}$, (5.2.10) yerine (5.2.7) alınması ile elde edilen yeni (5.2.8)-(5.2.10) probleminin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}'_i\}$ olsun. Ayrıca Λ_0 ; $\lambda_i \neq \tilde{\lambda}'_i$ ($i=1,2,\dots,N$) şartını sağlayan sonlu i lerin cümlesi, Λ ise $\lambda_i = \tilde{\lambda}'_i$ ($i > N$) şartını sağlayan sonsuz i lerin cümlesi olsun. Bu durumda

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{\phi}_n \phi_n)' \quad (5.2.11)$$

olur. Burada $\tilde{\phi}_n$ ve ϕ_n sırasıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n'' - \left[\tilde{q}(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \tilde{\phi}_n &= \lambda_n \tilde{\phi}_n \\ \phi_n'' - \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \phi_n &= \lambda_n \phi_n, \end{aligned}$$

denklemlerinin çözümüdür. Ayrıca eğer Λ_0 boş ise $q = \tilde{q}$ dir.

İspat. (5.2.4) denklemini (5.2.5) ve (5.2.6) şartları ile göz önüne alalım. Bu problemin özfonksiyonlarının cümlesi $\{\phi_n\}$ ($\phi_n = \phi(x, \mu_n)$) ve (5.2.8)-(5.2.10) probleminin özfonksiyonlarının cümlesi ise $\{\tilde{\phi}_n\}$ ($\tilde{\phi}_n = \tilde{\phi}(x, \mu_n)$) olsun. Şimdi $L^2[0,1]$ uzayının

$$H = \{f \in L_2[0,1] \mid \langle f, \phi_i \rangle = 0, \quad i \in \Lambda_0\} \quad (5.2.12)$$

$$\tilde{H} = \{f \in L_2[0,1] \mid \langle f, \tilde{\phi}_i \rangle = 0, \quad i \in \Lambda_0\} \quad (5.2.13)$$

şeklinde iki alt uzayını ele alalım. Böylece hipotezden L nin spektrumu H uzayına, $\tilde{L}$ nin spektrumu ise $\tilde{H}$ uzayına sınırlanmış olur. H dan $\tilde{H}$ ya

$$T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n, \quad n \in \Lambda \quad (5.2.14)$$

şeklinde bir T operatörü tanımlayalım. $f \in H$ olmak üzere f nin $\{\varphi_n\}$ özfonksiyonları cinsinden açılımı

$$f = \sum_{\Lambda} f_n \varphi_n \quad (5.2.15)$$

olsun. Eğer λ kompleks düzlemde tüm özdeğerlerden farklı bir eleman ise λ bir regüler değer olup $(\lambda - L)^{-1}$ operatörü mevcut ve sınırlıdır[Kreyszig, 1978]. Böylece (5.2.15) ve $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ bağıntısından

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \lambda_n) f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \varphi_n - \lambda_n f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \varphi_n - L f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - L) f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ (\lambda - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafına T operatörü uygulanırsa

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.16)$$

elde edilir. Daha sonra (5.2.16) eşitliğinin her iki tarafına $(\lambda - \tilde{L})$ uygulanırsa, (5.2.15) ve $L\tilde{\varphi}_n = \lambda_n \tilde{\varphi}_n$ bağıntısından

$$(\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \tilde{L}) f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda f_n \tilde{\varphi}_n - \tilde{L} f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda f_n \tilde{\varphi}_n - \lambda_n f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)}
\end{aligned}$$

buluruz. Sonuç olarak

$$(\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1}f = Tf$$

olur. Her f için bu eşitlik gerçekleştiğinden

$$(\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1} = T \quad (5.2.17)$$

elde edilir.

İspatın bu aşamasına kadar sadece bir tek spektrum kullanıldı. Bundan sonra ikinci spektrum grubunu kullanarak T nin yapısını bulmaya çalışacağız. Çünkü T operatörünün yapısı bulunduğu teoremin ispatı daha kolay elde edilebilir.

$$\varphi'' - \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \varphi = \lambda \varphi \quad (5.2.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, \lambda)}{x^l} = \frac{1}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l + \frac{3}{2})} \quad (5.2.19)$$

probleminin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Bilindiği gibi $J_\nu(x)$ Bessel fonksiyonları

$$J_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right) \right] \quad (5.2.20)$$

şeklinde olup $\nu = l + \frac{1}{2}$ dir. Sinüs ve Kosinüs fonksiyonları $0 < x < 1$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. (5.2.6) ve (5.2.7) yardımıyla λ parametresine bağlı olarak

$$\varphi(1, \lambda) \cos \beta + \varphi'(1, \lambda) \sin \beta = W(\lambda) \quad (5.2.21)$$

$$\varphi(1, \lambda) \cos \gamma + \varphi'(1, \lambda) \sin \gamma = \chi(\lambda) \quad (5.2.22)$$

şeklinde iki fonksiyon tanımlayalım. (5.2.20) de verilen asimptotik form göz önüne alınırsa φ ve φ' çözümleri λ nın tam fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla $W(\lambda)$ ve $\chi(\lambda)$ birer tam fonksiyondur. Ayrıca $W(\lambda)$ nın sıfırları (5.2.4)-(5.2.6) probleminin özdeğerleridir. Dolayısıyla derecesi ≤ 1 olan bir tam fonksiyon

$$W(\lambda) = a \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) \quad (5.2.23)$$

$$\chi(\lambda) = b \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_i} \right) \quad (5.2.24)$$

şeklinde yazılabilir [Uluçay, 1978]. Burada a ve b sayıları birer sabittir. Benzer şekilde

$$\tilde{\varphi}(1, \lambda) \cos \beta + \tilde{\varphi}'(1, \lambda) \sin \beta = \tilde{W}(\lambda)$$

$$\tilde{\varphi}(1, \lambda) \cos \gamma + \tilde{\varphi}'(1, \lambda) \sin \gamma = \tilde{\chi}(\lambda)$$

eşitlikleri ile tanımlı fonksiyonları için

$$\tilde{W}(\lambda) = \tilde{a} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i} \right) \quad (5.2.25)$$

$$\tilde{\chi}(\lambda) = \tilde{b} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}'_i} \right) \quad (5.2.26)$$

formüllerini yazabiliriz. Teoremin hipotezinde belirtildiği gibi ilk spektrumların tamamı çakışık ikinci grup spektrumların ise ilk N tanesi farklı olup geriye kalanlar birbirinin aynıdır. Bu sebepten

$$\frac{\chi(\lambda)}{\tilde{\chi}(\lambda)} = \frac{b \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_i} \right)}{\tilde{b} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}'_i} \right)} = s b t.$$

ve

$$\frac{W(\lambda)}{\tilde{W}(\lambda)} = \frac{a \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right)}{\tilde{a} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i} \right)}$$

oranı ise bir rasyonel fonksiyon olarak elde edilir. Şimdi

$$T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n \quad (5.2.27)$$

şeklinde tanımlı operatörün sınırlı ve tersinin mevcut olduğunu gösterelim. Bunun için (5.2.20) ifadesinin x 'e göre türevi alınıp (5.2.21) de değeri yerine yazıldıktan sonra elde edilen ifade λ için çözümlerse

$$\lambda_n = \left(n + \frac{l}{2}\right)^2 + a + \frac{a_1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (5.2.28)$$

ve

$$\varphi_n(x) = \cos\left(n\pi x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.2.29)$$

olur. Böylece normalleştirici sabitler için

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^1 \varphi_n^2(x) dx = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.2.30)$$

asimptotik formülünü buluruz. Benzer şekilde

$$\|\tilde{\varphi}_n\|^2 = \int_0^1 \tilde{\varphi}_n^2(x) dx = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.2.30)'$$

dir. Böylece (5.2.30) ve (5.2.30)' den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_n\|}{\|\tilde{\varphi}_n\|} = 1$$

elde edilir. Ayrıca, $T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$, $n \in \Lambda$ olduğundan

$$\frac{\|T\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = 1 \quad (5.2.31)$$

olur ki buda T operatörünün sınırlı olduğunu gösterir.

f , H uzayında keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$f = \sum_{\Lambda} f_n \varphi_n$$

olsun. İki tarafı φ_n ile çarparsak

$$f_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} \quad (5.2.32)$$

olur. Diğer taraftan sağ taraftaki toplam ifadesine $(\lambda - \lambda_n)$ uygulanıp $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \lambda_n) f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \varphi_n - \lambda_n f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \varphi_n - L f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - L) f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ (\lambda - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

olur. İki tarafa T operatörü uygulanırsa

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.34)$$

elde edilir. Son ifadenin iki tarafına $(\lambda - \tilde{L})$ uygulanıp $\tilde{L}\tilde{\varphi}_n = \tilde{\lambda}_n \tilde{\varphi}_n$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \tilde{\varphi}_n - \tilde{L} f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} = \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \lambda_n) f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\ (\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1} f &= Tf \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik her f için sağlandığından

$$(\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1} = T \quad (5.2.35)$$

olur. İspatın bundan sonraki kısmında T operatörü için farklı bir gösterim bulmaya çalışacağız. Bunun için de diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Green fonksiyonundan yararlanacağız.

$$\phi'' - \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \phi = \lambda \phi \quad (5.2.37)$$

$$\phi(1, \lambda) = -\sin \beta, \quad \phi'(1, \lambda) = \cos \beta$$

probleminin çözümü $\phi(x)$,

$$u'' - \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u + \lambda u = f(x) \quad (5.2.38)$$

denkleminin çözümü ise $u(x)$ olsun. (5.2.38) probleminin çözümünü parametrelerin değişimi metodu ile

$$u(x) = a(x)\phi(x) + b(x)\phi'(x) \quad (5.2.39)$$

şeklinde arayacağız. Son eşitlikte iki tarafın x e göre türevi alınır

$$u'(x) = a'(x)\phi(x) + a(x)\phi'(x) + b'(x)\phi(x) + b(x)\phi'(x)$$

olur. Diğer taraftan

$$a'(x)\phi(x) + b'(x)\phi(x) = 0 \quad (5.2.39)'$$

olsun.

$$u''(x) = a'(x)\phi(x) + a(x)\phi''(x) + b'(x)\phi'(x) + b(x)\phi''(x)$$

olup bu ifade (5.2.38)' de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a'(x)\phi'(x) + b'(x)\phi'(x) = f(x) \quad (5.2.39)''$$

olur. (5.1.39)' ve (5.1.39)'' denklemleri bilinmeyen $a'(x)$ ve $b'(x)$ ifadeleri için çözümlerse

$$a = -\int_0^x \frac{f(y)\phi(y)}{W(\lambda)} dy \text{ ve } b = \int_0^x \frac{f(y)\phi(y)}{W(\lambda)} dy$$

olarak bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy$$

olup, $G(x, y)$ Green fonksiyonu

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\phi(x)\phi(y)}{W(\lambda)} & x < y, \\ \frac{\phi(y)\phi(x)}{W(\lambda)} & x > y, \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $\phi(x)$ (5.2.18)-(5.2.19), $\phi(x)$ (5.2.37) denkleminin çözümü, $W(\lambda)$ ise (5.2.21) ile tanımlanan ifadedir. Böylece

$$(\lambda - L) \int_0^1 G(x, y) f(y) dy = f(x) \quad (5.2.40)$$

şartı sağlanır. Kolaylık olması bakımından

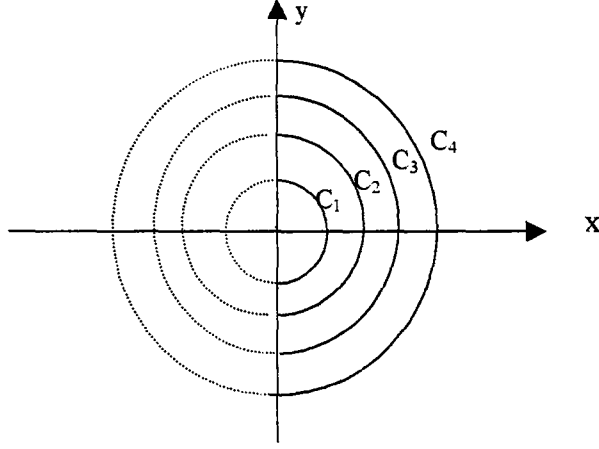
$$\begin{aligned} x_{<} &= \min(x, y) \\ x_{>} &= \max(x, y) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$G(x, y) = \frac{\phi(x_{<})\phi(y_{>})}{W(\lambda)} \quad (5.2.41)$$

olsun. $\phi(x)$ ve $\phi(x)$ için asimptotik formlar göz önüne alınırsa $G(x, y)$ nin pay ve paydası λ nın tam fonksiyonları olup bu fonksiyon sınırlıdır.

C_n , Şekil 5.2 de gösterildiği gibi pozitif x ekseninde λ_n ile λ_{n+1} arasında kesişen orjin merkezli çemberlerin bir dizisi olsun. $G(x, y)$ fonksiyonu sınırlı olduğundan $\frac{G(x, y)}{\lambda - \eta}$ fonksiyonu C_n çemberleri üzerinde analitik olup Cauchy integral teoreminden dolayı[Başkan, 2000]



Şekil 5.2.1

 C_n Çemberler Dizisinin Geometrik Şekli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{G(x, y)}{\lambda - \eta} d\eta = 0 \quad (5.2.42)$$

olur. λ nın bir fonksiyonu olarak $G(x, y)$ nin Mittag - Leffler açılımı ise

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x_-) \phi_n(x_+)}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.43)$$

şeklinde dir. Diğer taraftan $\varphi_n(x)$ ve $\phi_n(x)$ çözümleri basit özdeğerlere karşılık geldiğinden lineer bağımlıdır lar. Dolayısıyla

$$k_n \varphi_n(x) = \phi_n(x) \quad (5.2.44)$$

olarak yazabiliriz. İki taraftan $x = 1$ olarak alınırsa

$$k_n = \frac{\phi_n(1)}{\varphi_n(1)}$$

bulunur. $\beta \neq 0$ iken $\phi_n(1) = -\sin \beta$ olduğundan

$$k_n = \frac{-\sin \beta}{\varphi_n(1)}$$

elde edilir. (5.2.44) ün iki tarafının türevi alınırsa,

$$k_n = \frac{\phi'_n(x)}{\varphi'_n(x)}$$

olur. $\beta = 0$ için yine yukarıdaki işlemlere benzer şekilde $x = 1$ olarak alınırsa

$$\phi'_n(1) = \cos \beta = 1$$

olduğundan

$$k_n = \begin{cases} \frac{-\sin \beta}{\varphi_n(1)}, & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\varphi'_n(1)}, & \beta = 0 \end{cases} \quad (5.2.45)$$

elde edilir. Böylece (5.2.43) yardımıyla,

$$(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\lambda} \frac{k_n \varphi_n(x) \int_0^1 \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.46)$$

olur. Diğer taraftan (5.1.32) yardımıyla

$$f_n = \frac{\int_0^1 f(y) \varphi_n(y) dy}{\|\varphi_n\|^2}$$

değeri (5.2.33) de yerine yazılırsa

$$(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\lambda} \frac{\varphi_n(x) \int_0^1 \varphi_n(y) f(y) dy}{\|\varphi_n\|^2 (\lambda - \lambda_n)}$$

bulunur. Elde edilen bu ifadeyle (5.2.46) nın sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşittir. Dolayısıyla,

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{W'_n(\lambda_n)}{k_n} \quad (5.2.47)$$

olur. Ayrıca (5.2.40) ifadesinden kolayca görülebilir ki,

$$\begin{aligned}
 (\lambda - L)^{-1} f &= \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \\
 &= \frac{\phi(x) \int_0^x \phi(y) f(y) dy + \phi(x) \int_x^1 \phi(y) f(y) dy}{W(\lambda)}
 \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

dir. Bundan sonraki aşamada

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_n \frac{\tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy + \tilde{\phi}_n(x) \int_x^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.49)$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamaktır. Bunun için (5.2.34) ile (5.2.49) un sağ taraflarının eşit olduğunu göstermemiz gerekir. İlk olarak (5.2.44) e benzer şekilde

$$k_n \tilde{\phi}_n(x) = \tilde{\phi}_n(x) \quad (5.1.44)'$$

eşitliğini ele alalım. Burada $\tilde{\phi}_n$ ve $\tilde{\phi}_n$ sırasıyla (5.2.18) ve (5.2.37) denklemlerinde q yerine $\tilde{q}$ yazılmasıyla elde edilen problemlerin çözümleridir. (5.1.44)' eşitliğini göz önüne alırsak (5.2.49) un sağ tarafını

$$\sum_n \frac{\tilde{k}_n \tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy + r_n \tilde{\phi}_n(x) \int_x^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.50)$$

şeklinde yazabiliriz. $k_n = \tilde{k}_n$ olduğu için (ileride gösterilecektir) (5.2.50) ifadesi (5.2.47) yardımıyla

$$\sum_n \frac{k_n \tilde{\phi}_n(x) \int_0^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} = \sum_n \frac{\tilde{\phi}_n(x) \int_0^1 \phi_n(y) f(y) dy}{\|\phi_n\|^2 (\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.51)$$

şeklinde olur.

$$f_n = \frac{\int_0^1 f(y) \varphi_n(y) dy}{\|\varphi_n\|^2}$$

olduğundan

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_A \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} = \sum_A \frac{\tilde{\varphi}_n(x) \int_0^1 \varphi_n(y) f(y) dy}{\|\varphi_n\|^2 (\lambda - \lambda_n)}$$

olur. Bu da (5.2.51) in sağ tarafı dolayısıyla (5.2.49) un sağ tarafıdır. Böylece $k_n = \tilde{k}_n$ olduğu gösterilirse, (5.2.49) ifadesinin sağlandığı gösterilmiş olur. Bunun için $\lambda = \lambda_n$ olsun. Bu durumda $W(\lambda_n) = 0$ olduğundan

$$\varphi_n(1, \lambda) \cos \beta + \varphi'_n(1, \lambda) \sin \beta = 0 \quad (5.2.52)$$

$$\varphi_n(1, \lambda) \cos \gamma + \varphi'_n(1, \lambda) \sin \gamma = \mathcal{G}(\lambda_n) \quad (5.2.53)$$

olur. Bu iki denklemden

$$\varphi_n(1) = \frac{\sin \beta \mathcal{G}(\lambda_n)}{\sin(\beta - \gamma)} \quad (5.2.54)$$

elde edilir. (5.2.45) den $\beta \neq 0$ için

$$k_n = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\mathcal{G}(\lambda_n)} \quad (5.2.55)$$

ve benzer şekilde

$$\tilde{k}_n = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\tilde{\mathcal{G}}(\lambda_n)} \quad (5.2.56)$$

olarak buluruz. $\mathcal{G}(\lambda_n)$ ve $\tilde{\mathcal{G}}(\lambda_n)$ fonksiyonları aynı sıfırlara sahip tam fonksiyonlar olduğundan aynı asimptotik formları sağlarlar. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $k_n = \tilde{k}_n$ olur. Dolayısıyla (5.2.49) ifadesi gösterilmiş olur. Bu ifadeyi (5.2.35) de yerine yazarsak

$$(\lambda - \tilde{L}) \sum_n \frac{\tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy + \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} = Tf \quad (5.2.57)$$

elde edilir.

$$g(x) = \frac{\tilde{\phi}(x) \int_0^x \phi(y) f(y) dy + \tilde{\varphi}(x) \int_x^1 \phi(y) f(y) dy}{W(\lambda)} \quad (5.2.58)$$

olsun. Bu fonksiyonun Mittag - Leffler açılımı,

$$g(x) = \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} + \sum_n \frac{\tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy + \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.59)$$

şeklinde dir. Sağ taraftaki ikinci toplam (5.2.49) ile aynıdır. İlk toplamdaki $\tilde{u}_n(x)$ ve $\tilde{z}_n(x)$ sırasıyla $\tilde{\phi}(x)$ ve $\tilde{\varphi}(x)$ nin $\lambda = \lambda_n$ noktalarındaki değerlerine karşılık gelen fonksiyonlardır. Böylece (5.2.57) ve (5.2.59) dan

$$(\lambda - \tilde{L})^{-1} Tf = g(x) - \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (5.2.60)$$

buluruz. Sol taraftaki ifade $(\lambda - \tilde{L})$ operatörünün tanım bölgesi, dolayısıyla sağ taraftaki ifadenin de tanım bölgesidir. Böylece sağ taraftaki ifadenin birinci ve ikinci türevleri mevcut ve süreklidir. (5.2.60) ifadesinin iki tarafına $(\lambda - \tilde{L})$ operatörü uygulayıp gerekli işlemleri yaparsak,

$$Tf = \left[\frac{\tilde{\phi}'(x)\phi(x) - \tilde{\varphi}'(x)\phi(x)}{W(\lambda)} - \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n'(x)\phi_n(x) - \tilde{z}_n'(x)\phi_n(x)}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right] f(x)$$

$$-\sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^1 \phi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)} \quad (5.2.61)$$

elde edilir. φ ve ϕ fonksiyonlarının asimptotik formları göz önüne alınır parantez içindeki ifade birim olur. Ayrıca, toplam altındaki ifadeyi daha da basitleştirmek için

$$\phi_n = k_n \varphi_n$$

ve

$$\int_0^1 \varphi_n(y) f(y) dy = 0, \quad n \in \Lambda_0$$

bağıntılarını olduğu göz önüne alınır

$$\begin{aligned} Tf &= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy + k_n \tilde{z}_n(x) \int_x^1 \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)} \\ &= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy - k_n \tilde{z}_n(x) \int_x^1 \varphi_n(y) f(y) dy + \int_0^1 \varphi_n(y) f(y) dy}{W'(\lambda_n)} \\ &= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{W'(\lambda_n)} \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{W'(\lambda_n)} = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_n(x)$$

olmak üzere

$$Tf = f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(y) f(y) dy \quad (5.2.62)$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$\tilde{L}Tf = TLf$$

eşitliğini yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}\tilde{L}Tf &= -(Tf)'' + \left\{ \tilde{q}(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right\} Tf \\ &= - \left[f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy \right]'' \\ &\quad + \left[\tilde{q}(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \left[f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) f(y) dy \right]\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}TLf &= T \left\{ -f'' + \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] f \right\} \\ &= -f'' + \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\phi}_n(x) \int_0^x \phi_n(y) \left\{ -f'' + \left[q(y) + \frac{l(l+1)}{y^2} \right] f(y) \right\} dy\end{aligned}$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$(q - \tilde{q}) = \sum_{\Lambda_0} [\tilde{\phi}_n(x) \phi_n(x)]' \quad (5.2.63)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. Diğer taraftan Λ_0 cümlesinin boş olması yani her iki grup spektrumun çakışık olması halinde ise (5.2.62) den $q = \tilde{q}$ olduğu açıktır.

Teorem 5.2.2. $q(x) = q(1-x)$ olmak üzere

$$Lu = -u'' + \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u = \lambda u \quad (5.2.64)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1, \lambda) \cos \beta + u'(1, \lambda) \sin \beta = 0$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$ olsun. Benzer şekilde

$$\tilde{L}u = -u'' + \left[\tilde{q}(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u = \lambda u$$

denkleminin aynı sınır şartları ile birlikte oluşturduğu problemin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}_l\}$ olsun. Ayrıca Λ_0 ve Λ Teorem 5.2.1 deki gibi tanımlansın. Bu durumda

$$(q - \tilde{q}) = \sum_{\Lambda_0} [\tilde{\phi}_n(x) \phi_n(x)]'$$

ve Λ_0 cümlesi boş ise $q = \tilde{q}$ dir.

İspat. $\varphi(x)$ ve $\phi(x)$ sırası ile (5.2.18) ve (5.2.37) nin çözümleri olsun. $\alpha = k\pi$ olmak üzere $\alpha = -\beta$ olarak alınırsa $\varphi(x)$ ve $\phi(x)$ çözümleri arasında

$$\phi(1-x) = \varphi(x)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Teorem 5.2.1 de bir tek spektrum sadece $k_n = \tilde{k}_n$ nın ispatında kullanıldı. Dolayısıyla

$$\phi_n(x) = k_n \varphi_n(x) = \varphi_n(1-x) \quad (5.2.65)$$

olur. Ayrıca $k_n = \mp 1$ olduğu kolayca görülebilir.

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{W'_n(\lambda_n)}{k_n}$$

olduğundan

$$k_n = \operatorname{sgn} \varphi'(\lambda_n)$$

olur. Benzer şekilde $\tilde{k}_n = \operatorname{sgn} \tilde{\varphi}'(\lambda_n)$ olup φ' ve $\tilde{\varphi}'$ çözümlerinin asimptotik formları göz önüne alınırsa $k_n = \tilde{k}_n$ sonucuna varılır. İspatın bundan sonraki kısmı Teorem 5.2.1 ile aynıdır.

Sonuç 5.2.3. Teorem 5.2.1 deki hipotezleri göz önüne alalım. Yalnızca Λ_0 cümlesi sadece $\{0\}$ elemanından oluşsun. Bu durumda $q = \tilde{q}$ dir.

Sonuç 5.2.4. Teorem 5.2.2 deki hipotezleri göz önüne alalım. Yalnızca Λ_0 cümlesi sadece $\{0\}$ elemanından oluşsun. Bu durumda $q = \tilde{q}$ olur.

5.3. Bir Tek Spektruma Göre Ters Problem Üzerine

Bilindiği gibi regüler Sturm - Liouville problemi için iki spektrum grubunun verilmesi halinde $q(x)$ fonksiyonu tek olarak hesaplanabilir. Bu bölümde ters singüler Sturm - Liouville problemi için farklı bir yaklaşım verilmiştir. Öyle ki $q(x)$ fonksiyonunu hesaplamak için ikinci bir spektrum grubuna gerek olmayacaktır. Fakat aralığın belli bir kısmında $q(x)$ ile $\tilde{q}(x)$ fonksiyonu tanımlı olacaktır.

Teorem 5.3.1.

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (5.3.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi, \mu) = 0 \quad (5.3.2)$$

ve

$$\tilde{L}[u] = -u'' + \left[\tilde{q}(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (5.3.3)$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi, \mu) = 0 \quad (5.3.4)$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_n\}$ olsun. $0 < \alpha < \pi$ olmak üzere her (α, π) aralığında $q(x) = \tilde{q}(x)$ ise $(0, \pi)$ aralığının tamamı üzerinde $q(x) = \tilde{q}(x)$ dir.

İspat. Teoremin ispatına geçmeden önce gerekli olan bazı ifadeleri verelim. Bunun için

$$L[u] = -u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (5.3.5)$$

$$u(0) = 0 \quad (5.3.6)$$

ve

$$\tilde{L}[u] = -u'' + \left[\tilde{q}(x) - \frac{1}{4 \sin^2 x} \right] u = \mu u \quad (5.3.7)$$

$$\tilde{u}(0) = 0 \quad (5.3.8)$$

problemlerini göz önüne alalım. Bölüm 2.1 den biliyoruz ki (5.3.5)-(5.3.6) probleminin asimptotik çözümü

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \quad (5.3.9)$$

şeklindedir. Ayrıca (5.3.7)-(5.3.8) problemi içinde benzer çözümü yazabiliriz. Yine Bölüm 3.1. den biliyoruz ki $K(x, t)$, $(0, \pi) \times (0, \pi)$ bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x, \mu) = P(x, \mu) + \int_0^x K(x, t) P(t, \mu) dt \quad (5.3.10)$$

$$\tilde{\varphi}(x, \mu) = P(x, \mu) + \int_0^x \tilde{K}(x, t) P(t, \mu) dt \quad (5.3.11)$$

dir. Burada $K(x, t)$ ve $\tilde{K}(x, t)$ sırası ile

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{4 \sin^2 x} K(x, t) - q(x) K(x, t) &= \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{4 \sin^2 t} K(x, t) \\ \frac{\partial^2 \tilde{K}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{4 \sin^2 x} \tilde{K}(x, t) - \tilde{q}(x) K(x, t) &= \frac{\partial^2 \tilde{K}(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{4 \sin^2 t} \tilde{K}(x, t) \end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Şimdi (5.3.10) ve (5.3.11) ifadelerini taraf tarafa çarpıp gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\varphi \tilde{\varphi} = \frac{1}{\pi n} \left\{ \left[1 + \cos 2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{\pi}{4}\right) \right] + \int_0^x \tilde{K}(x, \tau) \cos 2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{\pi}{4}\right) d\tau \right\} \quad (5.3.12)$$

olup burada

$$\tilde{K}(x, \tau) = 2 \left[K(x, x-2\tau) + \tilde{K}(x, x-2\tau) + \int_{-x+2\tau}^x K(x, s) \tilde{K}(x, s-2\tau) ds + \int_{-x}^{x-2\tau} K(x, s) \tilde{K}(x, s+2\tau) ds \right]$$

şeklindedir. Diğer taraftan (5.3.2) yardımıyla

$$W(\lambda) = \varphi(\pi, \lambda) \quad (5.3.13)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $W(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları (5.3.1)-(5.3.2) probleminin özdeğerleri olup bu özdeğerler

$$\lambda_n = n^2 + \frac{n}{2} - \frac{3}{16} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

şeklinde asimptotik forma sahiptir. Ayrıca bu fonksiyon μ parametresinin bir tam fonksiyonudur.

(5.3.5) ifadesini $\tilde{\varphi}$, (5.3.7) ifadesini ise φ ile çarpıp taraf tarafa çıkardıktan sonra $(0, \pi)$ aralığında integral alınırsa

$$(\tilde{\varphi}\varphi' - \tilde{\varphi}'\varphi)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (\tilde{q} - q)\varphi\tilde{\varphi}dx = 0$$

(a, π) aralığında $q = \tilde{q}$ olduğundan

$$\tilde{\varphi}(\pi, \mu)\varphi'(\pi, \mu) - \tilde{\varphi}'(\pi, \mu)\varphi(\pi, \mu) + \int_0^a (\tilde{q} - q)\varphi\tilde{\varphi}dx = 0 \quad (5.3.14)$$

elde edilir.

$$Q = \tilde{q} - q \quad (5.3.15)$$

ve

$$H(\mu) = \int_0^a Q(x)\varphi\tilde{\varphi}dx \quad (5.3.16)$$

ile gösterelim. φ ile $\tilde{\varphi}$ çözümlerinin asimptotik formları göz önüne alınırsa $H(\mu)$ bir tam fonksiyon olur. Yine $\mu = \mu_n$ olarak alınırsa (5.3.14) ün ilk terimi sıfır olur. Böylece

$$H(\mu_n) = 0 \quad (5.3.17)$$

olur. Ayrıca (5.3.10), (5.3.11) ve (5.3.16) dan

$$|H(\mu)| \leq M \quad (5.3.18)$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır.

$$\Psi(\mu) = \frac{H(\mu)}{W(\mu)} \quad (5.3.19)$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyon tanımlayalım. (5.3.13) ve (5.3.18) den μ nın büyük değerleri için

$$|\Psi(\mu)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Liouville teoreminden sınırlı ve bir tam fonksiyon sabit olduğundan

$$\Psi(\mu) = 0$$

olup

$$H(\mu) = 0 \quad (5.3.20)$$

bulunur. Böylece (5.3.12) değerini (5.3.16) da yerine yazarsak

$$\frac{1}{2} \int_0^a Q(x) \left\{ \left[1 + \cos 2 \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \frac{\pi}{4} \right] + \int_0^x \tilde{K}(x, \tau) \left[\cos 2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau - \frac{\pi}{4} \right] d\tau \right\} dx = 0$$

elde edilir. İntegraller için sınır değişimi göz önüne alınırsa,

$$\int_0^a Q(x) dx + \int_0^a \cos 2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x - \frac{\pi}{4} \right] \left[Q(\tau) + \int_\tau^a Q(x) \tilde{K}(x, \tau) dx \right] d\tau = 0$$

bulunur. $\mu \rightarrow \infty$ için son ifadede Riemann-Lebesque lemmasını göz önüne alınırsa,

$$\int_0^a Q(x) dx = 0$$

ve

$$\int_0^a \cos 2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x - \frac{\pi}{4} \right] \left[Q(\tau) + \int_\tau^a Q(x) \tilde{K}(x, \tau) dx \right] d\tau = 0 \quad (5.3.21)$$

olur. İntegral altındaki cosinüs terimleri tam fonksiyonlar sistemi olduğundan

$$Q(\tau) + \int_{\tau}^a Q(x) \tilde{K}(x, \tau) dx = 0 \quad (5.3.22)$$

şeklinde homojen Volterra integral denklemi elde edilir. Bu şekildeki integral denklem sadece aşikar çözüme sahip olduğundan,

$$q(x) = \tilde{q}(x)$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.



KAYNAKLAR

- Alekceev, A.A. and Lorenzi, A., 1990, Sturm-Liouville Inverse Problems with Functionally Symmetric Coefficients, **Universita Degli Studi Di Milano**, 52, 1-10.
- Ambartsumyan, V.A., 1929, Über Eine Frage Der Eigenwerttheorie. **Z. Phys.** 53, 690-695.
- Başkan, T., 2000, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, **Uludağ Üniv.**, Bursa.
- Borg, G., 1946, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe. **Acta Math.** 78 (1), 1-96.
- Churchill, R. V., 1963, Fourier Series and Boundary Value Problems. 2. ed. Ed. **McGraw-Hill**, New York.
- Coddington, E.H. and Levinson, N., 1955, Theory of Ordinary Differential Equations. **McGraw-Hill**, New York.
- Courant, R. and Hilbert, D., 1953, Methods of Mathematical Physics. **New York**.
- Delsarte, J. and Lions, J., 1957, Transmutations d'opérateurs différentielles dans le domaine complexe. **Comm. Math. Helv.** 32 (2), 113-128.
- Delsarte, J., (1938b), Sur Une Extension De La Formule de Taylor. **J. Math. Pure Appl.** 17, 213-231.
- Gasymov, M.G., 1965, The Definition of Sturm-Liouville Operator from Two Spectra, **DAN SSSR**, Vol.161, No:2, 274-276.
- Gelfand, M., Levitan, B.M., 1955, On the Determination of a Differential Equation From Its Spectral Function. **Amer. Math. Soc. Transl.** (2) 1, 253-304.
- Hochstadt, H. and Lieberman, B., 1978, An Inverse Sturm-Liouville Problem with Mixed Given Data. **Siam J. Appl. Math.**, Vol.34, No: 4, 676-680.
- Hochstadt, H., 1971, The Functions of Mathematical Physics, New York.
- Hochstadt, H., 1973, The Inverse Sturm-Liouville Problem. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Vol .26, 715 - 729.
- İç, Ü., 1999, Dirac Operatörü İçin Spektral Analizin Bazı Problemleri, **Yüksek Lisans Tezi**.
- Kostyuchenko, A.G. and Sargsyan, I.S., 1979, Distribution of eigenvalues, **Nauka**, Moscow(Russian).
- Koyunbakan, H., 1998, Bessel Diferensiyel Denkleminin Spektral Analizi. **Yüksek Lisans Tezi**.

- Krein, M.G., 1951a, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem. **DAN SSSR** 76 (1), 21-24.
- Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications. **New-York**.
- Levin, B.Y., 1959, Interpolation by Entire Functions of Exponential Type. **Trudy Fiz.-Tekhnich. Inst.**
- Levin, Ja., 1964, Distribution of Zeros of Entire Function. **Amer. Math. Soc.**
- Levinson, N., 1951, A Simplified Proof The Expansion Theorem For Singular Second Order Linear Differential Equations. **Duke Math. J.** 18, 57-71.
- Levitan, B.M., 1964, Generalized Translation Operators and Some of Its Applications. **Jerusalem**.
- Levitan, B.M., Gasymov, M.G., 1964, Determination of a Differential Equation by two Its Spectra. **Russian Math. Surveys** 19, 1-63.
- Levitan, B.M., On the Determination of the Sturm - Liouville Operator from One and Two Spectra, **Math., USSR Izvestija** Vol. 12 1978, pp. 179-193.
- Levitan, B.M., 1978, On the Determination of the Sturm - Liouville Operator from One and Two Spectra, **Math. USSR Izvestija** Vol. 12, 179-193.
- Levitan, B.M., Sargsyan, I.S., 1970, Introduction to Spectral Theory, **Moskov, Nauka**.
- Liusternik, L.A. and Sobolev, V.J., 1961, Elements of Functional Analysis. **Frederick Ungar Publishing Company, , New York**.
- Mackie, A.G., 1965, Boundary Value Problems. **Edinburgh and London**.
- Marchenko, V.A., 1973, Some questions of the theory of one dimensional linear differential operators II. **Amer. Math. Soc. Transl.** (2) 101, 107-191
- Marchenko, V.A., 1977, Sturm-Liouville Operators and Theirs Application, **Kiev**.
- Naimark, M.A., 1968, Linear Differential Operators Part I,II, **Frederik Ungar Publishing Co. Inc. London**.
- Panakhov, E.S., 1980, About Inverse Problem on Two Spectrum for the Differential Operator with Peculiarity in Zero. **DAN. Az. SSR**, XXXVI, N.10,6-10.
- Panakhov, E.S., 1980, The Definition of Differential Operator with Peculiarity in Zero on Two Spectrum. **VINITI**, N 4407 - 80, Baku, , pp. 1-16.
- Panakhov, E.S., 1985, Cauchy and Goursat Problem For the Second Order Hyperbolic Equations with Discontinuous Coefficients. **Izv. Azerb.** Vol.3, No:6.

- Povzner, A.J., 1962, On Differential Equation Of Sturm-Liouville Type On A Half axis. **Amer. Math. Soc. Transl.** (1) 4, 24-101.
- Stashevskaya, V.V., 1953, On Inverse Problems of Spectral Analysis for a Class of Differential Equations, **Dokl. Akad. Nauk. SSSR** 93, 409-411.
- Titchmarsh, E.S., 1958, Eigenfunction Expansion with Associated with Second Order Differential Equations Part I, II. **Oxford University Press.**
- Volk, V.Y., 1953, On Inverse Formulas for a Differential Equation with a Singularity at $x = 0$. **Usp. Mat. Nauk** (N.S.) 8 (56), , 141-151.
- Weyl, H., 1909-1910a, Gewöhl. Lineare Diff. Gleichgn m. Singularen Stellen&ihre Eigenfunkt. Göttingen, **Ges. D. Wiss. Nachr.** 37-64.
- Weyl, H., 1910b, Gewöhl. Lineare Diff. Gleichgn m. Singularitäten d. zugehör. Entwick. Willkür. **Funktn. Math. Ann.** 68, 220-269.
- Whittaker, E. and Watson, G., 1927, A Course of Modern Analysis. **Cambridge University Press**, Cambridge.