

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ROBOTİK HAREKETLERDE LİE GRUPLARI VE LİE CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammed Talat SARIAYDIN

(091121114)

Anabilim Dalı: Matematik Bölümü

Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat ASİL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 04.07.2012

Temmuz-2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

ROBOTİK HAREKETLERDE LİE GRUPLARI VE LİE CEBİRLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Muhammed Talat SARIAYDIN

(091121114)

Bu tez, 04/07/2012.... tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile başarılı/ ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Vedat ASİL

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Yrd. Doç. Dr. Mustafa AYDOĞDU

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih vesayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Vedat ASİL'e, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren ve kıymetli zamanlarını esirgemeyen hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU'na ve tüm bu süre içerisinde zamanından çaldığım eşime teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed Talat SARIAYDIN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ŞEKİLLER LİSTESİ	III
SİMGELER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. BÖLÜM.....	1
Temel Tanım ve Teoremler	1
2. BÖLÜM.....	9
2.1. Katı Cisim Hareketi.....	9
2.2. $\mathbb{R}^3$ deki Dönme Hareketi.....	10
2.2.1. Dönme matrisinin Özellikleri.....	11
2.2.2. Dönme Hareketinin Üstel Koordinatları.....	15
2.3. Euler Açıları.....	18
2.4. $\mathbb{R}^3$ de Katı Hareket	20
2.4.1. Homojen Temsil.....	22
2.4.2. Cisim Hareketi ve Twistler için Üstel Koordinatlar	25
2.4.3. Vidalar: Twislerin Geometrik Anlamı	31
2.5. Katı Cismin Hızı	35
2.5.1. Dönme Hızı.....	35
2.5.2. Katı Cisim Hızı	37
2.5.3. Vida Hareketinin Hızı	41
2.6. Koordinat Dönüşümleri	42
3. BÖLÜM.....	45
3.1. Lie Grupları ve Lie Cebirleri	45
3.1.1. Bir Lie Grup İle İlişkili Lie Cebiri.....	46
3.1.2. Üstel Dönüşüm	49
3.1.3. Lie Gruplarında Hareketler	52
3.2. Katı Cisim Kinematikleri.....	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Bir Nokta Etrafında Bir Katı Cismin Dönmesi.....	11
Şekil 2.2.	w Eksen Etrafında Dönme İle oluşan Bir Noktanın İzi.....	15
Şekil 2.3.	Katı Hareketlerin Koordinat Ekseninde Gösterilmesi.....	20
Şekil 2.4.	Sabit Bir Eksen Etrafında Dönerek Oluşan Katı Cisim Hareketi.....	24
Şekil 2.5.a.	Bir Döner Kol	25
Şekil 2.5.b.	Bir Prizmatik Kol.....	25
Şekil 2.6.	Sabit Bir Eksen Etrafında Dönerek Oluşan Katı Cismin Yerdeğişimi..	29
Şekil 2.7.a.	Genel Vida Hareketi	31
Şekil 2.7.b.	Saf Öteleme Hareketi.....	31
Şekil.2.8.	Dönme Olmadan Oluşan Vida Hareketi.....	32
Şekil 2.9.	Sabit Bir Eksen Etrafında Dönerek Oluşan Katı Cisim Hareketi.....	34
Şekil 2.10.	Tek Eklemlili Manipulatörün Dönme Hareketi	36
Şekil 2.11.	Sabit Bir Eksen Etrafında Dönerek Oluşan Katı Cisim Hareketi.....	40
Şekil 2.12.	İki Eklemlili Manipulatör.....	43

SİMGELER LİSTESİ

$T_M(p)$	: Tanjant Vektörlerinin Cümlesi
$GL(n, \mathfrak{I})$	: $\mathfrak{I}$ cismi Üzerinde n boyutlu Genel Lineer Grup
$SL(n, \mathfrak{I})$	: $\mathfrak{I}$ cismi Üzerinde n boyutlu Özel Lineer Grup
$O(n)$	: n boyutlu Ortogonal Grup
$SO(n)$	: n boyutlu Özel Ortogonal Grup
$\bar{g}$	: Herhangi Bir g Noktasının Homojen Temsili
$SE(n)$	: n boyutlu Özel Öklid Grubu
$\hat{V}^s$	: Konum Hızı
$\hat{V}^b$	: Cisim Hızı

ÖZET

ROBOTİK HAREKETLERDE LİE GRUPLARI VE LİE CEBİRLERİ

Muhammed Talat SARIAYDIN

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2012, sayfa 57

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen Mekanik'in bir dalıdır. Yani Kinematik, sadece bir nokta veya nokta sisteminin (cisim) zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler.

Robotik biliminin analitik araçlarının en önemlilerinden biri olan kinematik modelleme, robot biliminin birçok alanında kullanılmaktadır. Bunların başlıcaları: Mekanizmaların, hareket ettiricilerin ve algılayıcıların modellenmesi, eş zamanlı robot kontrol uygulamaları, robot simülasyonu ve eş zamansız programlama işlemleridir. Robotların kinematik modelinin çıkarılması robot çalışmalarının en önemli aşamalarından birini oluşturmaktadır. Robotların kinematik modelini çıkarmak amacıyla birçok yöntem geliştirilmiştir. Kartezyen düzleminde, matris veya vektörler gibi dönüşüm operatörleri kullanılarak kinematik model çıkarıldığından bu yöntem nokta dönüşüm denmiştir. Ayrıca doğrusal vektörler ve dönüşüm operatörleri kullanıldığında ise, bu yöntem doğrusal dönüşüm yöntemi denir. Maxwell vektörlerin Kartezyen düzlemindeki dönüşümlerin kullanarak 4×4 homojen dönüşüm matrisini tanımladı. Denavit-Hartenberg bu homojen dönüşüm matrisini kullanarak bir koordinat sisteminin yönlendirmesini ve konumunu başka bir koordinat sistemine göre tanımladı. Bir koordinat sisteminin başka bir koordinat sistemine göre dönüşüm matrisi vida hareketiyle ifade edilebilir. Doğrusal dönüşüm olarak ifade edilen bu yöntemde, aynı eksen üzerinde hem bir öteleme hem de dönme gerçekleşmektedir.

Bu çalışmada ise biz daha önce yapılan bu çalışmaları göz önünde bulundurup farklı olarak robotik hareketleri Lie grupları ve Lie cebirleriyle ve sınırlı vida hareketiyle beraber inceleyeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Lie Grup, Lie Cebiri, Robotlar, Hareket, Dönme

ABSTRACT

LIE GROUPS AND LIE ALGEBRAS IN ROBOTIC MOTIONS

Muhammed Talat SARIAYDIN

FIRATUNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
2012, pages 57

Kinematics is a branch of mechanics that does not contain the concepts of force and mass. That is, Kinematics just examines the time dependent change in the location of appoint or appoint system (the body).

Kinematic modeling which science of robotics is one of the most important analytical tools are used in many fields of science of robotics. In particular: Mechanisms, modeling of sensors and actuators, concurrent robot control applications, robot simulation and programming asynchronous transactions. Robot kinematic modeling of robots is one of the most important stages of the work of robotics. Cartesian plane, using conversion-operators such as matrix or vectors, was called point conversion to this method is removed from the kinematic model. Further, If linear transformation vectors and the operators are used, then this method is called a linear transformation method. Using transformation Cartesian plane of vectors, Maxwell described the 4x4 homogeneous transformation matrixes. Denavit-Hartenberg, using the homogeneous transformation matrix, orientation and position of a coordinate system defined by the coordinate system to another. According to a coordinate system to another, transformation matrix can be expressed the movement of the screw. In this method expressed as a linear transformation takes both a displacement and rotation on the same axis.

In this study, we made mind earlier these studies, differently, Lie groups and Lie algebras in robotic motions and will explore with the limited movement of the screw.

Keywords: Lie Group, Lie Algebra, Robots, Motion, Rotational

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

TANIM 1.1 : G , boştan farklı bir cümle ve $\cdot : G \times G \rightarrow G$ de bir ikili işlem olsun, eğer bu ikili işlem

$$\forall a, b \in G \text{ için } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

özellikliğini sağlarsa G ye yarı grup denir, [1].

TANIM 1.2 : G , boştan farklı bir cümle olsun

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(G, \cdot)$ ikilisine bir grup denir.

i) $\forall x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

ii) $\forall x \in G$ için $e \cdot x = x \cdot e = x$ olacak şekilde G de bir tek e birim elemanı vardır,

iii) $\forall x \in G$ için $x \cdot x' = x' \cdot x = e$ olacak şekilde G de bir tek x' inversi vardır, [2].

TANIM 1.3 : $(G, \cdot)$ bir grup olsun G grubu “ $\cdot$ ” işlemine göre değişimli ise, yani $\forall x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ sağlanıyorsa, G ye değişimli grup denir, [3].

TANIM 1.4 : $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \neq \emptyset, H \subseteq G$ olsun. $(H, \cdot)$ bir grup ise bu gruba $(G, \cdot)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir, [2].

TANIM 1.5 : $(G, \cdot)$ bir grup, $H < G$ olsun. $\forall x \in G, \forall h \in H$ için

$$xHx^{-1}$$

önermesi doğru ise H altgrubuna G grubunun normal alt grubu denir ve $H \triangleleft G$ ile gösterilir, [3].

TANIM 1.6 : V boş olmayan bir cümle ve C de keyfi bir cisim olsun, V üzerinde tanımlanan

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : C \times V \rightarrow V$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$$

işlemleriyle birlikte $\forall x, y, z \in V$ ve $\lambda, \mu \in C$ için

i) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

ii) $x + y = y + x$,

iii) $x + \theta = x$ olacak şekilde V cümlesinin sıfır elemanı diye adlandırılan bir $\theta \in V$ elemanı vardır,

iv) Her bir $x \in V$ için x elemanının toplamaya göre tersi veya negatifi diye adlandırılan ve $x + (-x) = \theta$ eşitliğini sağlayan bir $-x \in V$ elemanı vardır,

$$v) \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$vi) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$vii) \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$$

$$viii) 1.x = x$$

özelliklerini sağlayan V cümlesine bir vektör uzayı denir, [20].

TANIM 1.7 : $A \neq \emptyset$ bir cümle ve bir vektör uzayı V olsun

$$\psi: A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow \psi(P, Q) = \vec{PQ}$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir, [17].

$$i) \forall P, Q, R \in A \text{ için } \vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$$

$$ii) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } \vec{PQ} = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

TANIM 1.8: X boş olmayan bir cümle ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet cümlesinin herhangi bir alt cümlesi olsun, eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir, [7].

$$i) X, \emptyset \in \tau$$

ii) τ da alınan her sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani, I herhangi bir indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \tau$ için, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

iii) τ da alınan her sonlu sayıda elemanlarının kesişimi τ ya aittir; yani, J sonlu indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in J} \in \tau$ için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$ dır.

TANIM 1.9: M bir topolojik manifold ve $A, B \in M$ olsun, $\alpha: I \rightarrow M$ sürekli dönüşümüne M de A dan B ye bir eğri denir. Burada $\alpha(0) = A$ ve $\alpha(1) = B$ dir, [6]



TANIM 1.10: M ve N , $\mathbb{R}^3$ uzayında yüzeyler olmak üzere $f: M \rightarrow N$ fonksiyonu birebir, örten ve düzgün bir fonksiyon olsun M içindeki her $\alpha: [c, d] \rightarrow M$

eğri parçası için $f \circ \alpha$ eğrisinin uzunluğu α nın uzunluğuna eşit ise $f: M \rightarrow N$ fonksiyonuna M den N ye bir izometri denir, [19].

TANIM 1.11 : E^n nin bir izometrisi f olmak üzere $f(O)=O$, $O \in E^n$ olacak şekilde bir O noktası mevcut ise f ye O etrafında bir dönme denir, [17].

TANIM 1.12 : f , E^n nin bir izometrisi ve eğer $X=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için

$$f(x) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n), t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$$

ise f ye E^n de bir öteleme denir, [17].

TANIM 1.13: $(G, \cdot)$ ve $(H, \circ)$ iki grup $f: G \rightarrow H$ fonksiyonu $\forall a, b \in G$ için $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ özelliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna G den H a bir homomorfizm denir, [2].

TANIM 1.14: $f: G \rightarrow H$ homomorfizmi 1:1 ve örten ise bu homomorfizme izomorfizm denir, [5].

TANIM 1.15: $f: G \rightarrow G$ izomorfizmine G nin otomorfizmi denir, [6].

TANIM 1.16: X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $p, q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları sırası ile U ve V olsun, eğer U ve V yi $U \cap V \neq \emptyset$ olabilecek şekilde seçmek mümkün ise X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir, [8].

TANIM 1.17: X ve Y birer topolojik uzay olsunlar, bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için,

- i) f sürekli,
- ii) f^{-1} mevcut,
- iii) f^{-1} sürekli,

ise f fonksiyonuna X den Y ye bir homeomorfizm denir, [9].

TANIM 1.18: M bir topolojik uzay olsun, eğer

- i) M bir Hausdorff uzay,
- ii) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin açık alt cümlesine homeomorftur,
- iii) M sayılabilir çoklukta alt cümlelerle örtülebilir,

önergeleri sağlanıyorsa M ye n – boyutlu topolojik manifold denir, [9].

TANIM 1.19: E^n in iki alt cümlesi U ve V olsun, bir $\Psi: U \rightarrow V$ fonksiyonu için:

- i) $\Psi \in C^k(U, V)$,
- ii) $\Psi^{-1}: V \rightarrow U, \Psi^{-1} \in C^k(V, U)$,

önergeleri sağlanıyorsa Ψ ye C^k sınıfından diffeomorfizm denir, [10].

TANIM 1.20: M bir topolojik manifold olsun, M üzerinde C^k sınıfından diferansiyellenebilir yapı tanımlanırsa M ye C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir, [10].

TANIM 1.21: $k \leq n$ olmak üzere, M bir k -manifold ve M' de bir n -manifold olsun, $\forall p \in M$ noktası için M' de bir U' ve M de bir U koordinat komşuluğu var ve

$$U = \{m \in U' / x'_{k+1}(m) = \dots = x'_n(m)\}$$

ise M ye M' nin bir alt manifoldu denir, [10].

TANIM 1.22: $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot)$ olmak üzere V cümlesi F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve $\otimes$ işlemi

$$\begin{aligned} \otimes: V \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

olmak üzere

- i) $\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall a \in F$ için $(a \odot \alpha) \otimes \beta = a \odot (\alpha \otimes \beta)$
- ii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)$
- iii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$

özellikleri sağlanıyorsa $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot, \otimes)$ yapısına cebir denir. Eğer $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için

- i) $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$ sağlanıyorsa V ye birleşimli cebir,
- ii) $\gamma \otimes \beta = \beta \otimes \gamma$ sağlanıyorsa V ye değişimli cebir,
- iii) $\gamma \otimes e = e \otimes \gamma = \gamma$ sağlanıyorsa V ye birimli cebir denir, [1].

TANIM 1.23: $T_M(p)$ tanjant vektörlerinin cümlesi olsun,

$$\begin{aligned} \oplus: T_M(p) \times T_M(p) &\rightarrow T_M(p) \\ \otimes: T_M(p) \times \mathbb{R} &\rightarrow T_M(p) \end{aligned}$$

olmak üzere $\{T_M(p), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir, [9].

TANIM 1.24: Bir M diferansiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun, eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa (M, G) ikilisine bir Lie grubu denir, [8]

i) M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.

ii) $\alpha_G : G \times G \rightarrow G$

$$(\alpha, b) \rightarrow ab^{-1}$$

dönüşümü diferansiyellenebilirdir, [6].

TANIM 1.25: Bir $\mathfrak{S}$ cismi üzerinde determinantı sıfırdan farklı olan bütün $n \times n$ matrislerin cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir gruptur, bu gruba genel lineer grup denir ve $GL(n, \mathfrak{S})$ ile gösterilir, [10].

TANIM 1.26: $GL(n, \mathfrak{S})$ içinde determinantı bir olan bütün $n \times n$ matrielerin cümlesi çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba özel lineer grup denir ve $SL(n, \mathfrak{S})$ ile gösterilir, [10].

TANIM 1.27: n – boyutlu bir reel vektör uzayı V olsun. Bütün $\alpha \in V$ vektörleri için

$$\langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

şeklinde tanımlanan bütün $A : V \rightarrow V$ dönüşümlerinin cümlesi çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba ortogonal grup denir ve $O(n)$ ile gösterilir, [10].

TANIM 1.28: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $[,] : V \times V \rightarrow V$ dönüşümü

i) Bilineer,

ii) $\forall x, y \in V$ için $[x, y] = -[y, x]$,

iii) $\forall x, y, z \in V$ için $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$,

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne V üstünde bir Lie (parantez) operatörü denir, [9].

TANIM 1.29: $\{[a_{ij}]_{n \times n} / a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ matris uzayının bir alt manifoldu matrislerin çarpma işlemine göre bir grup ise bu gruba matris Lie grubu denir, [18].

TANIM 1.30: Karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde Lie operatörü ile tanımlanan lineer bir uzaya Lie cebiri denir, [8].

TANIM 1.31 : M bir C^∞ manifold olsun, M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

i) Simetrik; $\forall p \in M$ ve $X_p, Y_p \in \chi(M)$ için

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \langle Y_p, X_p \rangle$$

ii) Bilineerlik; $\forall p \in M$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $X_p, Y_p, W_p, Z_p \in \chi(M)$ için

$$\langle aX_p + bY_p, Z_p \rangle = a\langle X_p, Z_p \rangle + b\langle Y_p, Z_p \rangle$$

ve

$$\langle X_p, aW_p + bZ_p \rangle = a\langle X_p, W_p \rangle + b\langle X_p, Z_p \rangle$$

iii) Pozitif tanımlılık;

$$a) X_p \neq 0 \text{ için } \langle X_p, X_p \rangle > 0$$

$$b) X_p = 0 \text{ ise } \langle X_p, X_p \rangle = 0$$

özellikleri sağlanıyorsa $\langle, \rangle$ ye M üzerinde Riemann iç çarpımı denir. M üzerinde bu Riemann iç çarpımının tanımlanmasıyla elde edilen $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine Riemann manifoldu denir, [9].

TANIM 1.32 : M bir manifold olsun, eğer M üzerinde bir $p \in M$ noktası için

$$g : M \rightarrow h(T_M(p) \times T_M(p), \mathbb{R})$$

$$p \rightarrow g_p$$

şeklinde simetrik, pozitif tanımlı bir lineer form tanımlanmış ise g ye M üzerinde Riemann metriği denir.

Eğer bir M manifoldunun $\forall p \in M$ noktasında bir U komşuluğu üzerinde g formu C^r sınıfından ise g Riemann metriği C^r sınıfındandır denir, [8].

TANIM 1.33 :

a) G bir Lie grup olmak üzere belli bir $g_0 \in G$ noktasında

$$L_{g_0} : G \rightarrow G$$

dönüşümü $\forall g \in G$ için $L_{g_0}(g) = g_0 g$ şeklinde tanımlanır ve sol öteleme adını alır, [8].

b) G bir Lie grup olsun, belli bir $g_0 \in G$ için

$$R_{g_0} : G \rightarrow G$$

dönüşümü $\forall g \in G$ için $R_{g_0}(g) = gg_0$ şeklinde tanımlanır ve G üzerinde sağ öteleme adını alır, [8].

TANIM 1.34 : g bir Lie cebiri, b de g nin bir alt vektör uzayı olsun, $X \in b$, $Y \in g$ olmak üzere $[X, Y] \in b$ sağlanıyorsa b ye g nin ideali denir, [16].

TANIM 1.35: $\mathfrak{I}$ cismi üzerindeki n -boyutlu bir vektör uzayı V olsun. Bir $A : V \rightarrow V$ lineer dönüşümünün matrisi $A = [a_{ij}] \in \mathfrak{I}$ ise A nın izi;

$$IzA = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

toplamına denir, [10].

TANIM 1.36: $U \in \mathbb{R}^n$ ve $V \in \mathbb{R}^m$ kümeleri verilsin, f nin tüm kısmi türevleri var ve sürekli ise $f : U \rightarrow V$ dönüşümüne düzgün dönüşüm denir, [21].

TANIM 1.37: M bir n -boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W alt cümlesine eşlenebilir. Bu durumda

$$\psi : U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

dönüşümünü sağlayan (ψ, W) ikilisine M de bir harita denir, [9].

TANIM 1.38: M bir n -boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir atlas denir, [9].

TANIM 1.39: $\mathbb{R}^n$ e homeomorfik olan bir M kümesi n boyutlu bir manifold olsun. Bir sabit koordinat eksenini olan ϕ , $U \subset M$ kümesinden $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt kümesine noktaları dönüştüren fonksiyon olmak üzere (ϕ, U) yi bir sabit koordinat eksenini olarak alalım. Eğer $\psi^{-1} \circ \phi$ bir difeomorfizm ve (ϕ, U) , (ϕ, V) koordinat eksenleri çakışiyorsa

C^∞ la ilişkilidirler denir. O halde U nun alt kümesi olan bir M kümesi toplama özelliği ile (ϕ, U) ve (ϕ, V) eksenlerinin bir koleksiyonuna bir düzgün atlas denir, [21].

TANIM 1.40: n – boyutlu bir düzgün manifold olarak M ve M de bir nokta olarak p yi alalım. M nin tanım kümesini p nin bazı açık komşuluklarını içermek üzere M deki reel değerli fonksiyonlar kümesini $C^\infty(p)$ olarak yazabiliriz. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C^\infty(p)$ için eğer X_p aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne türev dönüşümü denir, [21].

- i) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$
- ii) $X_p(fg) = (X_p f) + f(p)(X_p g)$

2. BÖLÜM

2.1. Katı Cisim Hareketi

Öklid uzayında hareket eden bir cismin konumu sabit kartezyen koordinat ekseninin elemanlarıyla tanımlanır. Cismin bu hareketini tanımlamak için üç ortonormal eksen seçilir ve cismin konumundaki her bir noktanın izdüşümünü ortonormal eksenlerde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ elemanı kullanılarak tanımlanır. Bu şekildeki bir cismin yönü

$$p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

ile parametrize edilmiş eğri tarafından temsil edilir.

Robotik hareketlerde birbirine bağlı hareketler dışındaki hareketlerde parçaların teker teker hareketiyle ilgilenmeyiz. Daha genel olarak bir katı cisim, cismin hareketine yada cisme uygulanan güce bakılmaksızın herhangi iki nokta arasındaki farkı koruyan cisimlerin bir birleşimidir. Bu tanım göz önüne alındığında katı cisim üzerinde herhangi p ve q noktaları için

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{sabit}$$

dir.

Bir katı cismin hareketi herhangi iki cisim arasındaki farkın her zaman sabit kaldığı sürekli hareketidir. Genel olarak katı cisim hareketi katı bir cismin bir yerden başka bir yere hareketine denir ve genelde bu hareket cismin hem öteleme hemde dönmesinden oluşabilir.

$\mathbb{R}^3$ ün bir O alt kümesi olarak tanımlanan bir cismin katı hareketi sabit kartezyen koordinat ekseninde zamana bağlı bir fonksiyon olan ve cismin parçaları arasındaki farkı koruyan $g(t): O \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümlerinin bir sürekli ailesidir. Yani bir yörünge parçası boyunca bir cismi hareket ettirsek $g(t)$ dönüşümü cisim üzerindeki bir noktanın başlangıç koordinatlarını aynı noktanın t süre sonraki koordinatlarına dönüştürür. Bu durumdaki katı cisim hareketi bir tek $g: O \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümüyle temsil edilir.

$p, q \in O$ noktalarını ele alalım p ve q nun birleşiminden oluşan $v \in \mathbb{R}^3$ vektörü p den q ya doğru yönlendirilmiş doğru parçası olarak tanımlanır. Koordinat ekseninde bu $v \in \mathbb{R}^3$ vektörü $p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere $v = q - p$ olarak yazılabilir. Noktalar ve vektörler sıralı üçlüler ile temsil edilmelerine rağmen her ikisi kavramsal olarak oldukça farklıdır. Çünkü bir vektör bir yön ve bir büyüklüğe sahiptir (Bir vektörün büyüklüğü onun Öklid normudur). Fakat bu vektör cisme eklenemez çünkü cisim üzerinde noktaların başka çiftlerine de eşit olabilir. Örneğin r ile s yi birleştiren aynı v vektörü alırsak bunu $q - p = s - r$ olarak yazabiliriz.

Noktalar üzerindeki bir katı cisim hareketini vektörler üzerinde bir hareketle gösterebiliriz. Bir katı cisim hareketini temsil eden $g: O \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünü ele alırsak bu vektörleri

$$g_*(v) = g(q) - g(p)$$

olarak yazabiliriz.

Bir katı cisim üzerinde ki noktaların arasındaki fark katı cismin hareketiyle değişmediği için bir katı cisim hareketi tanımlamak istersek $g: O \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü için gerekli koşul noktalar arasındaki farkların $g: O \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü tarafından korunmasıdır. Fakat bu koşul yeterli değildir çünkü fiziksel olarak gerçekleşmeyen iç yansımalar vardır. Yani bir dönüşümde noktalar arasındaki fark korunur fakat yön korunmaz. Örneğin $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ dönüşümü uzaklığı korur fakat xy eksenini etrafında cisimdeki noktaları yansıtır. Bu ihtimali yok etmek için cisimdeki vektörlerin vektörel çarpımı sağlaması gerekir.

TANIM 2.1: $g_*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu dönüşüme katı cisim hareketi denir.

- i) Uzaklık korunur: $\forall p, q \in \mathbb{R}^3$ için $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$
- ii) Vektörel çarpım korunur: $\forall v, w \in \mathbb{R}^3$ için $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$

Bu tanımdan şu sonucu çıkarabiliriz. İç çarpım katı cisim hareketini korur. Bunu göstermek için polarizasyon eşitliğini kullanırsak

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|g_*(v_1) + g_*(v_2)\|^2 \text{ ve } \|v_1 - v_2\|^2 = \|g_*(v_1) - g_*(v_2)\|^2$$

olacak şekilde

$$v_1^T v_2 = \frac{1}{4} (\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2)$$

yazılabilir. Bu ifadeyi tekrar düzenlersek

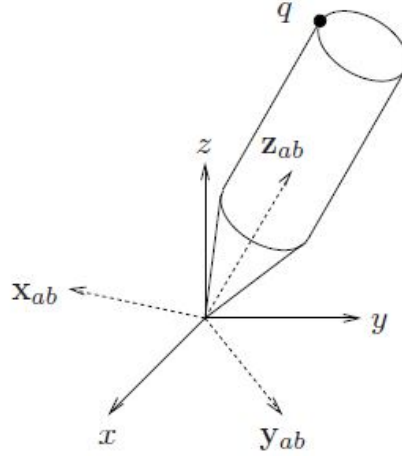
$$v_1^T v_2 = g_*(v_1)^T g_*(v_2)$$

elde edilir. Buradan ortogonal vektörlerin ortogonal vektörlere dönüştüğünü ve tanımın ikinci özelliğinden de katı cisim hareketlerinin vektörel çarpımı koruduğunu gösterir. Buradan katı cisim hareketlerinin ortonormal koordinat ekseninden ortonormal koordinat eksenine dönüştüğü de elde edilir.

2.2. $\mathbb{R}^3$ deki Dönme Hareketi

Bir cismin sadece dönme hareketini gerçekleştirildiğini düşünerek katı cisim hareketini araştırmaya başlayalım ve tüm koordinat eksenlerinde aksi belirtilmedikçe sağa dönen

eksenleri alalım. Cisme ekli bir çatı ile sabit bir çatı arasındaki yönü tanımlayarak cismin yönünü elde edebiliriz. Hareketsiz çatı olarak A yı, cisim çatısı olarakta B yi ele alalım ve Şekil (2.1) de görüldüğü gibi B çatısındaki cismin A çatısındaki başlangıç koordinatları olarak $x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} \in \mathbb{R}^3$ ü ele alalım.



Şekil 2.1

Bu koordinat vektörlerini yan yana yazarak 3×3 tipinde dönme matrisi

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} x_{ab} & y_{ab} & z_{ab} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

2.2.1. Dönme Matrisinin Özellikleri

Bir dönme matrisi iki ana özelliğe sahiptir. $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ olan dönme matrisini ve onun sütunları olan $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^3$ ü ele alalım. R nin sütunları karşılıklı olarak ortonormal olduğu için

$$r_i^T r_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ 1, & i = j \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir ve R matrisi için

$$RR^T = R^T R = I \quad (2.1)$$

koşulu sağlanır. Buradan

$$\det R = \pm 1$$

sonucuna varılır. R nin determinantının işaretini belirtmek için

$$\det R = r_1^T (r_2 \times r_3)$$

olduğunu kullanırsak ve koordinat sistemi sağa doğru döndüğü için $r_2 \times r_3 = r_1$ olduğundan $\det R = r_1^T r_1$ dir. Bu yüzden sağa doğru dönen çatılara karşılık gelen koordinat eksenlerinin determinanı bire eşit olan ortogonal matrislerle temsil edilir. Bu iki özelliği karşılayan tüm 3×3 tipindeki matrislerin kümesi $SO(3)$ ile gösterilir. Daha genel olarak

$$SO(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} : RR^T = I, \det R = 1\} \quad (2.2)$$

kümesiyle $\mathbb{R}^{n \times n}$ de dönme matrislerinin uzayını tanımlayabiliriz.

$SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matris çarpım işlemi altında bir gruptur. Eğer G aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa G nin elemanlarında tanımlı $\circ$ ikili işlemi ile birlikte G bir gruptur.

- i) Kapalılık: Eğer $g_1, g_2 \in G$ ise $g_1 \circ g_2 \in G$ dir,
- ii) Birim: $\forall g \in G$ için $g \circ e = e \circ g = g$ olacak şekilde bir tek e birim elemanı vardır,
- iii) İnvers: $\forall g \in G$ için $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ olacak şekilde bir tek $g^{-1} \in G$ inversi vardır,
- iv) Geçişme: Eğer $g_1, g_2, g_3 \in G$ ise $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ tür,

Bunları $SO(3)$ için incelersek

- i) Eğer $R_1, R_2 \in SO(3)$ ise

$$\begin{aligned} R_1 R_2 (R_1 R_2)^T &= R_1 R_2 R_2^T R_1^T = R_1 R_1^T = I \\ \det(R_1 R_2) &= \det(R_1) \det(R_2) = 1 \end{aligned}$$

olduğundan $R_1 R_2 \in SO(3)$ tür,

- ii) Birim matris birim elemandır,
- iii) (2.1) denkleminde $R \in SO(3)$ ün tersi $R^T \in SO(3)$ tür,
- iv) Grup işleminin geçişmeli olması matris çarpımı geçişmeli olduğundan sağlanır yani

$$(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$$

yazılabilir.

Bu yüzden $SO(3)$ ün grup işlemi olarak matris çarpımını birim eleman olarak ta I kullanırsak $SO(3)$ bir gruptur. Bu durumda $\mathbb{R}^3$ ün dönme grubu olarak $SO(3)$ alınır.

Bir $R \in SO(3)$ dönme matrisi bir çatıdan diğerine bir noktanın koordinatları dönüştüren bir dönüşüm olarak kullanılır. Şekil (2.1) de görülen q noktasını düşünelim, B çatısında q nun koordinatlarını $q_b = (x_b, y_b, z_b)$ olarak alırsak $x_b, y_b, z_b \in \mathbb{R}$ B çatısında q nun izdüşümü olduğu için ve bunların A daki izdüşümleri $x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere A çatısında q noktasının koordinatları

$$q_a = x_{ab}x_b + y_{ab}y_b + z_{ab}z_b$$

olarak hesaplanır. Bu denklemin matris formu da

$$q_a = \begin{bmatrix} x_{ab} & y_{ab} & z_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = R_{ab} q_b$$

olarak yazılabilir. Diğer bir değişle $R_{ab} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ olarak düşünüldüğü zaman R_{ab} , B çatısındaki bir noktayı A çatısındaki bir noktaya dönüştürür.

Bir noktanın dönme matrisinin hareketi bir vektörün dönme matrisinin hareketini tanımlamak için kullanılabilir. $v_b = q_b - p_b$ olarak tanımlanan ve B çatısında bir vektör olan v_b yi ele alalım o halde

$$R_{ab}(v_b) = R_{ab}q_b - R_{ab}p_b = q_a - p_a = v_a$$

yazılır. Matris çarpımı lineer olduğundan ve $v_b = q_b - p_b = s_b - r_b$ ise

$$R_{ab}s_b - R_{ab}r_b = R_{ab}q_b - R_{ab}p_b = v_a$$

elde edilir.

Dönme matrisleri ve matris çarpımı kullanılarak yeni dönme matrisleri oluşturulabilir. Yani eğer bir C çatısından bir B çatısına dönme matrisi R_{bc} yönüne sahip ve B çatısından diğer bir A çatısına R_{ab} yönüne sahip ise C çatısından A çatısına doğru dönme matrisi

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanılır. Bu matrise dönme matrislerinin birleşim kuralı denir.

$R_{ac} : \mathbb{R}^3$ den $\mathbb{R}^3$ e bir dönüşüm olarak düşünüldüğü zaman R_{ac} ilk olarak C çatısından B ye sonra B çatısından A ya doğru dönderilerek C çatısından A çatısına bir noktanın koordinatlarının dönüşümünü tanımlar.

Bir dönme matrisi bir katı cisim dönüşümünü temsil eder. Bu demektir ki dönme matrisi uzaklığı ve yönü korur. Böylece iki vektör arasındaki vektörel çarpım işleminin

bazı cebir özellikleri kullanılarak kanıtlanabilir. $a, b \in \mathbb{R}^3$ vektörleri arasındaki vektörel çarpım

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

a nın vektörel çarpımı lineer bir operatör olduğu için $b \rightarrow a \times b$ dönüşümü bir matris formunda

$$\hat{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. $a \times b$ matris formu ve (2.4) denklemi birlikte düşünüldüğünde

$$a \times b = \hat{(a)} b \quad (2.5)$$

olarak yazabiliriz. $\hat{(a)}$ notasyonu $\hat{a}$ olarak da kullanılabilir.

ÖNERME 2.1:

$R \in SO(3)$ ve $v \times w \in \mathbb{R}^3$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler doğrudur.

$$R(v \times w) = R(v) \times R(w) \quad (2.6)$$

$$\hat{R(w)} R^T = \hat{(Rw)} \quad (2.7)$$

Önermenin ilk özelliği iki vektörün vektörel çarpımının dönmesi R dönme matrisi ile vektörlerin her birinin dönmesinin vektörel çarpımına eşittir. İkinci özellik hemen eski haline gelecek olan ani dönmedir.

ÖNERME 2.2: Dönmeler Katı Cisim Dönüşümleridir

Bir $R \in SO(3)$ dönme matrisi bir katı dönüşümdür yani;

$$i) R \text{ noktalar arasındaki farkları korur : } \forall p, q \in \mathbb{R}^3 \text{ için } \|R_q - R_p\| = \|q - p\|$$

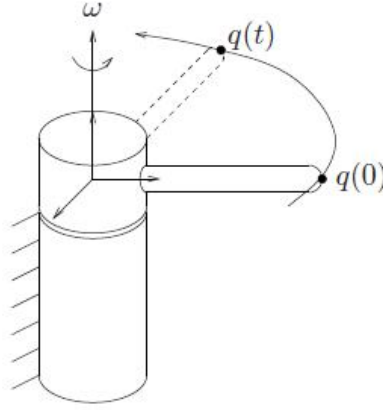
$$ii) R \text{ vektörlerin yönlerini korur: } \forall v, w \in \mathbb{R}^3 \text{ için } R(v \times w) = Rv \times Rw$$

İSPAT: $i)$

$$\begin{aligned}
\|Rq - Rp\|^2 &= (R(q-p))^T (R(q-p)) \\
&= (q-p)^T R^T R (q-p) \\
&= (q-p)^T (q-p) \\
&= \|q-p\|^2
\end{aligned}$$

olarak kanıtlanır.

ii) Denklem (2.6) den açıktır.



Şekil 2.2

2.2.2. Dönmeler için Üstel Koordinatlar

Robotlarda karşılaşılan en yaygın hareket belirli bir miktarda ve verilen bir eksen etrafında bir cismin dönmesidir. Örneğin Şekil (2.2) de gördüğü gibi sabit bir eksen etrafında bir robotun kolunun dönmesi tanımlanabilir. Dönme yönünü belirten birim vektör olarak $w \in \mathbb{R}^3$ ü ve dönme açısı olarak $\theta \in \mathbb{R}$ yi ele alalım. Cismin her dönmesine karşılık bir $R \in SO(3)$ matrisi geldiği için w ve θ ya bağlı bir fonksiyon olarak R yi yazmaya çalışalım.

Dönen cismin üzerinde bir q noktasının hızı olarak q nun türevini alırsak ve w eksen etrafında devamlı cismi dönderirsek , $\dot{q}$ noktasının hızı

$$\dot{q}(t) = w \times q(t) = \hat{w}q(t) \quad (2.8)$$

olarak yazılabilir. $t=0$ anında $q(0)$ başlangıç konumu ve

$$e^{\hat{w}\theta} = I + \hat{w}\theta + \frac{(\hat{w}\theta)^2}{2!} + \frac{(\hat{w}\theta)^3}{3!} + \dots$$

üstel matris olmak üzere (2.8) denkleminin integrali alınırsa

$$q(t) = e^{\hat{w}\theta} q(0)$$

elde edilir. Buradan şu sonuç çıkarılır; Eğer bir cismi θ süresince birim hızla w eksenini etrafında dönderirsek dönme matrisi

$$R(w, \theta) = e^{\hat{w}\theta} \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Bu tanımdan kolaylıkla görülür ki $\hat{w}$ matrisi ters simetrik matristir. Yani $\hat{w}^T = -\hat{w}$ dır.

Tüm 3×3 tipindeki ters simetrik matrislerin vektör uzayı $so(3)$ ile gösterilir. Daha genel olarak $n \times n$ tipindeki ters simetrik matrislerin uzayını

$$so(n) = \{S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S^T = -S\} \quad (2.10)$$

olarak yazabiliriz. $so(3) \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 3}$ kümesi reel sayılar üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu yüzden $so(3)$ ün iki elemanının toplamı yine $so(3)$ ün bir elemanıdır ve $so(3)$ ün herhangi iki elemanının çarpımında $so(3)$ ün bir elemanıdır. Ayrıca (2.4) denklemini ve $(v + w)^\wedge = \hat{v} + \hat{w}$ eşitliğini ele alırsak $\mathbb{R}^3$ de $so(3)$ ü tanımlayabiliriz.

Birim ters simetrik matris ve bir reel sayının çarpımı bir ters simetrik matrise karşılık gelir. $\|w\| = 1$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $\hat{w} \in so(3)$ matrisi verilsin o halde $\hat{w}\theta$ nın üsteli

$$\exp(\hat{w}\theta) = e^{\hat{w}\theta} = I + \theta\hat{w} + \frac{\theta^2 w^2}{2!} + \frac{\theta^3 w^3}{3!} + \dots \quad (2.11)$$

olarak yazılır.

(2.11) denklemi bir sınırsız seridir ve bu yüzden kullanışlı değildir. Bu yüzden $\exp(\hat{w}t)$ nin kapalı formunu elde etmek için aşağıdaki önermeyi yazabiliriz.

ÖNERME 2.3: Eğer $\hat{a} \in so(3)$ ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\hat{a}^2 = aa^T - \|a\|^2 I \quad (2.12)$$

$$\hat{a}^3 = -\|a\|^2 \hat{a} \quad (2.13)$$

ve $\hat{a}$ nın yüksek dereceleri benzer yolla hesaplanabilir.

$\|w\| = 1$ olmak üzere $a = w\theta$ ile önerme 2.3 ü kullanarak (2.11) denklemi ele alınırsa

$$e^{\hat{w}\theta} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \hat{w} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \hat{w}^2$$

bulunur. Bu yüzden

$$e^{\hat{w}\theta} = I + \hat{w} \sin \theta + \hat{w}^2 (1 - \cos \theta) \quad (2.14)$$

elde edilir. $\|w\| \neq 1$ olduğu zaman

$$e^{\hat{w}\theta} = I + \frac{\hat{w}}{\|w\|} \sin(\|w\|\theta) + \frac{\hat{w}^2}{\|w\|^2} (1 - \cos(\|w\|\theta))$$

olduğu bulunmuş olur. Şimdi $\exp(\hat{w}\theta)$ nın bir dönme matrisi olduğunu ispatlayalım;

ÖNERME 2.4: Ters Simetrik Matrislerin Üsteli Ortogonaldır.

Bir ters simetrik $w \in so(3)$ matrisi ve $\theta \in \mathbb{R}$ verilsin, o halde

$$e^{\hat{w}\theta} \in SO(3)$$

dir.

İSPAT: $R = \exp(\hat{w}\theta)$ olarak tanımlayalım. $\det R^T R = I$ ve $\det R = +1$ olduğunu göstermeliyiz. İlk özelliği kanıtlamak için (2.14) denklemini kullanarak

$$(e^{\hat{w}\theta})^{-1} = e^{-\hat{w}\theta} = e^{\hat{w}^T \theta} = (e^{\hat{w}\theta})^T$$

olduğu görülebilir. Bu yüzden $R^{-1} = R^T$ yani $\det R^T R = I$ dır. Bu son eşitlikten $\det R = \pm 1$ olduğu görülür. $\det \exp(0) = 1$ olduğu kullanılarak $\det R = +1$ bulunmuş olur.

ÖNERME 2.5: $SO(3)$ de Üstel Dönüşüm Örtendir.

$R \in SO(3)$ verilsin $\|w\| = 1$ iken

$$R = \exp(\hat{w}\theta)$$

olacak şekilde $w \in \mathbb{R}^3$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ vardır.

İSPAT: R ve $\exp(\hat{w}\theta)$ nin ifadeleri eşit ise

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

olarak R dönme matrisini ele alalım ve $v_\theta = 1 - \cos \theta$, $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$ yı göstermek üzere (2.14) denkleminde

$$\begin{aligned}
e^{\hat{w}\theta} &= I + \hat{w} \sin \theta + \hat{w}^2 (1 - \cos \theta) \\
&= \begin{pmatrix} 1 - v_\theta (w_2^2 + w_3^2) & w_1 w_2 v_\theta - w_3 s_\theta & w_1 w_3 v_\theta + w_2 s_\theta \\ w_1 w_2 v_\theta + w_3 s_\theta & 1 - v_\theta (w_1^2 + w_3^2) & w_2 w_3 v_\theta - w_1 s_\theta \\ w_1 w_3 v_\theta - w_2 s_\theta & w_2 w_3 v_\theta + w_1 s_\theta & 1 - v_\theta (w_1^2 + w_2^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1^2 v_\theta + c_\theta & w_1 w_2 v_\theta - w_3 s_\theta & w_1 w_3 v_\theta + w_2 s_\theta \\ w_1 w_2 v_\theta + w_3 s_\theta & w_2^2 v_\theta + c_\theta & w_2 w_3 v_\theta - w_1 s_\theta \\ w_1 w_3 v_\theta - w_2 s_\theta & w_2 w_3 v_\theta + w_1 s_\theta & w_3^2 v_\theta + c_\theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

bulunur. (2.15) ve (2.16) birbirine eşit olduğundan

$$iz(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2 \cos \theta$$

elde edilir. Bu denklemin bir çözüme sahip olduğunu doğrulamak için; R nin izi R nin özdeğerlerinin toplamına eşit olduğu, R dönme matrisinin uzunlukları koruduğu ve $\det(R) = 1$ sağladığı için R nin özdeğerlerinin büyüklüğü 1 dir ve bu özdeğerler kompleks eşlenik çiftler olurlar. $-1 \leq iz(R) \leq 3$ olduğundan

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{iz(R) - 1}{2} \right) \tag{2.17}$$

yazılabilir. Burada θ nın değerinde bir belirsizlik vardır. En geniş anlamıyla $\theta \pm 2\pi n$ yada $-\theta \pm 2\pi n$ seçilebilir.

Şimdi R ve $\exp(\hat{w}\theta)$ nın köşegen olmayan terimlerini kıyaslırsak

$$r_{32} - r_{23} = 2w_1 s_\theta$$

$$r_{13} - r_{31} = 2w_2 s_\theta$$

$$r_{21} - r_{12} = 2w_3 s_\theta$$

bulunur. Yani eğer $\theta \neq 0$ ise

$$w = \frac{1}{2s_\theta} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

yazılabilir. Eğer $2\pi - \theta$ ise (2.17) denklemi ele alınırsa dönme eksen $-w$ olur. Eğer $R = I$ ise $iz(R) = 3$ ve bu yüzden $\theta = 0$ ve w ise keyfî seçilebilir. Eğer $R \neq I$ ise (2.17) ve (2.18) denklemlerinden

$$R = \exp(\hat{w}\theta)$$

olacak şekilde iki farklı w ve $\theta \in [0, 2\pi)$ vardır.

TEOREM 2.1: Herhangi bir yöndeki $R \in SO(3)$ matrisi bir $\theta \in [0, 2\pi)$ açısı kadar sabit bir $w \in \mathbb{R}^3$ eksenini etrafında ki bir dönmeye karşılık gelir.

2.3. Euler Açıları Bir B çatısından diğer bir A çatısına doğru cismin yönünü araştıralım. A çatısı ile çakışık olan B çatısı ile başlarsak ilk olarak bir α açısı kadar B çatısını z eksenini etrafında dönmesinden sonra, β açısı kadar B çatısının y eksenini etrafında dönmesi ve sonra bir γ açısı kadar B çatısının z eksenini etrafında dönmesidir. Bu dönme $R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)$ yönündedir ve (α, β, γ) açı üçlüsü bu dönmeyi temsil etmek için kullanılır. Bu (α, β, γ) açılara ZYZ euler açıları denir. Tüm dönmeler hareketli çatının etrafında olduğu için x, y, z eksenleri etrafındaki temel dönmeler

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &= e^{\hat{x}\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ R_y(\beta) &= e^{\hat{y}\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \\ R_z(\alpha) &= e^{\hat{z}\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Sabit olarak B çatısı düşünüldüğünde A çatısı için dönmelerin uygun sırası

$$R_{ba} = R_z(-\eta)R_y(-\beta)R_z(-\alpha)$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin tersi B çatısından A çatısına dönme matrisi $c_\alpha = \cos \alpha, s_\alpha = \sin \alpha$ yı temsil etmek üzere

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\eta) \\ &= \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta c_\eta - s_\alpha s_\eta & -c_\alpha c_\beta s_\eta - s_\alpha c_\eta & c_\alpha c_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\eta + c_\alpha s_\eta & -s_\alpha c_\beta s_\eta + c_\alpha c_\eta & s_\alpha c_\beta \\ -s_\beta c_\eta & s_\beta s_\eta & c_\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

olarak yazılabilir. Buradan (2.19) denkleminin ortogonal matris olduğu açıktır. $R \in SO(3)$ dönme matrisi verilsin $\sin \beta \neq 0$ için $\text{atan} 2\left(\frac{y}{x}\right)$, $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ i göstermek üzere α, β, η euler açıları için (2.19) denkleminin çözümünden

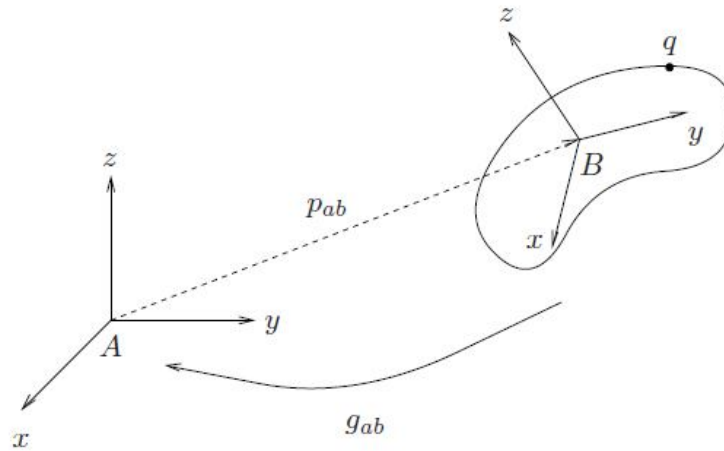
$$\begin{aligned}\beta &= \text{atan} 2\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right) \\ \alpha &= \text{atan} 2\left(\frac{r_{33}}{s_\beta}, \frac{r_{13}}{s_\beta}\right) \\ \eta &= \text{atan} 2\left(\frac{r_{32}}{s_\beta}, -\frac{r_{31}}{s_\beta}\right)\end{aligned}\tag{2.20}$$

elde edilir.

Çatıların çakışık olduğu durumlarda parametrelerdeki eşliklerde $R = I$ olur. Özellikle $(\alpha, 0, -\alpha)$ formundaki (α, β, η) üçlüsünden $R_{ab}(\alpha, 0, -\alpha) = I$ elde edilir. Euler açısının parametrenmesinde ki diğer durumlar, dönme eksenleri farklı sıralı kümelerini kullanarak yapılabilir. Bu duruma en çok kullanılan ZYX eksenlerini ve YZX eksenlerini içerir. ZYX euler açıları yaw, pitch ve roll açıları olarak ifade edilir. R_{ab} de roll ile x eksenini etrafındaki dönmeyi pitch ile y eksenini etrafındaki dönmeyi, yaw ile de z eksenini etrafındaki dönme tanımlanır. Hem ZYX hem de YZX euler açılarının parametreleri birim yönde bir tekilliğe sahip değillerdir. Örneğin ZYX euler açılarının oluşumundan

$$R_{ab} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) = e^{\tilde{z}\psi}e^{\tilde{y}\theta}e^{\tilde{x}\phi}$$

bulunur. Burada $\theta = -\pi/2$ olduğu zaman matris singülerdir.



Şekil 2.3

2.4 $\mathbb{R}^3$ de Katı Hareket

Bir katı cisim hareketi noktalar arasındaki uzaklığı ve vektörler arasındaki açıyı korur. Bir hareketsiz düzlemde bir cismin koordinat eksenindeki anlık konumunu ve yönünü tanımlamak için katı cisim hareketlerini kullanarak bu katı hareketleri tanımlayabiliriz.

Genelde katı hareketler dönme ve ötelemeden oluşurlar. Şimdiye kadar sadece dönme hareketlerinin temsilini araştırdık. Sadece öteleme hareketi için ise cisimde herhangi bir nokta seçilir ve bilinen bir eksene göre noktanın koordinatları takip edilir. Bu durumda katı cismin yönü $t \in [0, T]$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{R}^3$ eğrisine karşılık gelir.

Genel bir katı cismin hareketi hem öteleme hemde dönme içerir. Şekil (2.3) de gördüğümüz gibi cisme ekli bir B çatısından sabit A çatısına cismin yönünü ve konumunu tanımlayabiliriz. A çatısının orjiniinden B çatısının orjinine konum vektörü olan $p_{ab} \in \mathbb{R}^3$ ve B çatısından A çatısına doğru yönü gösteren $R_{ab} \in SO(3)$ matrisini ele alalım. Bu sistemin bir konumu (p_{ab}, R_{ab}) çiftinden oluşur. Bu durumda $\mathbb{R}^3$ ile $SO(3)$ ün çarpım uzayı

$$SE(3) = \{(p, R) / p \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3) \quad (2.21)$$

olarak yazılır.

$SE(3)$ bir grup olduğundan $SO(3)$ ün durumunda olduğu gibi

$$SE(n) = \mathbb{R}^n \times SO(n)$$

n – boyutlu genel durumunu yazabiliriz.

Dönme durumuna benzer olarak bir $(p, R) \in SE(3)$ elemanı hem bir katı cismin konumunu belirten hemde bir çatıdan diğerine bir noktanın koordinatlarını dönüştüren bir dönüşümdür. Daha genel olarak A ve B çatılarında bir q noktasının koordinatları $q_a, q_b \in \mathbb{R}^3$ olsun. B çatısındaki q noktasının koordinatı q_b ve B çatısından A çatısına yönü belirten $g_{ab} = (p_{ab}, R_{ab})$ için

$$q_a = p_{ab} + R_{ab}q_b \quad (2.22)$$

yazabiliriz. Bir noktanın bir katı hareketi için $q_a = g_{ab}(q_b)$ olacak şekilde

$$g(q) = p + Rq$$

olarak yazılabilir. Bir $v = s - r$ vektörü üzerinde bir $g \in (p, R)$ katı cisim hareketini

$$g_*(v) = g(s) - g(r) = R(s - r) = Rv$$

olarak elde ederiz. Bu dönüşüm bir vektörün dönme dönüşümüdür.

2.4.1 Homojen Temsil

Katı cisim hareketlerinde noktaların ve vektörlerin homojen temsilini yaparken herhangi bir $q = (q_1, q_2, q_3)$ noktasından $\mathbb{R}^4$ de bir vektör elde etmek için bu noktanın koordinatlarına 1 eklenerek

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir ve $\bar{q}$ ya q noktasının homojen koordinatları denir. O halde orjinin koordinatlarında

$$\bar{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliriz. Benzer şekilde herhangi bir $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektöründen $\mathbb{R}^4$ de bir vektör elde etmek için bu vektörün koordinatlarına 0 eklenir ve

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak yazılır. Homojen temsilde vektörlerin şekli noktalarinkinden farklıdır ve dördüncü bileşenleri verilen sırayla 0 ve 1 dir. Bu nokta ve vektörler aşağıdaki özellikleri sağlarlar;

- i) Vektörlerin farkları ve toplamaları vektörlerdir,
- ii) Bir vektör ve bir noktanın toplamı bir noktadır,
- iii) İki nokta arasındaki fark bir vektördür,
- iv) İki noktanın toplamı anlamsızdır.

(2.22) denkleminde verilen $q_a = g_{ab}(q_b)$ dönüşümünü tekrar ele alırsak

$$\bar{q}_a = \begin{pmatrix} q_a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_b \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{g}_{ab} \bar{q}_b$$

olarak lineer formda yazabiliriz.

4×4 tipindeki $\bar{g}_{ab}$ matrisine $g_{ab} \in SE(3)$ ün homojen temsili denir. Genelde $g = (p, R) \in SE(3)$ ise

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

dir.

Katı cisim hareketleri birleştirilerek yeni katı cisim hareketleri oluşturulabilir. Bir C çatısından B çatısına konumu gösteren $g_{bc} \in SE(3)$ ü ve B çatısından diğer bir A çatısına konumu gösteren g_{ab} yi ele alalım, (2.23) denklemini kullanarak C den A ya doğru cismin konumu

$$\bar{g}_{ac} = \bar{g}_{ab} \bar{g}_{bc} = \begin{pmatrix} R_{ab} R_{bc} & R_{ab} p_{bc} + p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde elde ettiğimiz (2.24) denklemini katı cisim hareketleri için birleşim kuralını verir. Buradan da homojen temsilleri kullanarak katı hareketlerin grup olduğu gösterilebilir. Yani

- i) Eğer $g_1, g_2 \in SE(3)$ ise $g_1 g_2 \in SE(3)$ dir,
- ii) 4×4 tipindeki birim eleman I , $SE(3)$ ün elemanıdır,
- iii) Eğer $g \in SE(3)$ ise $\bar{g}$ nin tersi ters matris tarafından belirtilir. $g^{-1} = (-R^T p, R^T)$ olmak üzere

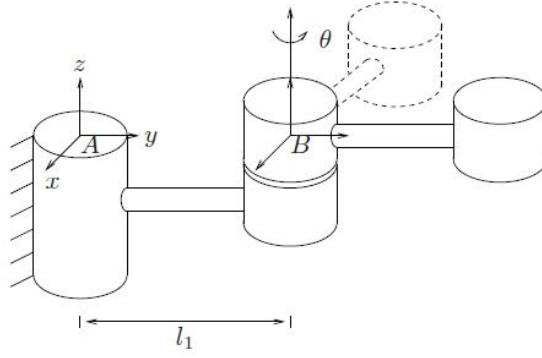
$$\bar{g}^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3)$$

dir,

- iv) Katı cisim dönüşümleri için birleşme kuralı geçişmelidir.

Bir $v = s - r$ vektörünü ele alalım homojen temsili kullanarak g nin homojen temsili ile v nin homojen temsilini çarparak v nin bir katı cisim hareketinin homojen temsilini elde ederiz.

$$\bar{g}_* \bar{v} = \bar{g}(\bar{s}) - \bar{g}(\bar{r}) = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Şekil 2.4

ÖNERME 2.6: $SE(3)$ ün Elemanları Katı Dönüşümlerdir.

Herhangi $g \in SE(3)$ bir katı cisim dönüşümü ise aşağıdaki şartlar sağlanır.

- i) g noktalar arasındaki uzaklığı korur: $\forall q, p \in \mathbb{R}^3$ için $\|gq - gp\| = \|q - p\|$ dir.
- ii) g vektörler arasındaki yönü korur: $\forall v, w \in \mathbb{R}^3$ için $g_*(v \times w) = g_*v \times g_*w$ dir.

İSPAT: İspatlar doğrudan dönme matrislerine karşılık gelir.

$$\begin{aligned} \|gq_1 - gq_2\| &= \|Rq_1 - Rq_2\| = \|q_1 - q_2\| \\ g_*v \times g_*w &= Rv \times Rw = R(v \times w) \end{aligned}$$

ÖRNEK 2.1: Bir Eksen Etrafında Dönme

Şekil (2.4) de gördüğümüz gibi bir $(0, l_1, 0) \in \mathbb{R}^3$ noktasından geçen z yönünde bir eksen etrafında dönen bir katı cismin hareketini düşünelim. Eğer dönme miktarı olarak θ yı alırsak B çatısından A çatısına doğru cismin yönü

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

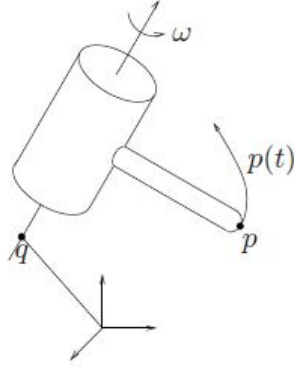
olarak yazılabilir. Burada B çatısının orjininin koordinatları

$$p_{ab} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

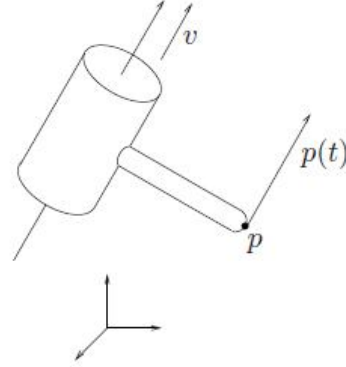
dır. Bu durumda bu katı cismin konumunun homojen temsili ise

$$g_{ab}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. $\theta=0$ olduğu zaman iki düzlem arasındaki ötelemeyi gösteren $g_{ab}(0)$, y eksenini boyunca bir ötelemedir.



Şekil 2.5.a



Şekil 2.5.b

2.4.2. Cisim Hareketi ve Twistler İçin Üstel Koordinatlar

Şekil (2.5.a) da görüldüğü gibi tek kollu robotların örneğini ele alalım. Dönme eksenini $\|w\|=1$ olacak şekilde $w \in \mathbb{R}^3$ ü ve eksen üzerinde bir nokta olan $q \in \mathbb{R}^3$ ele alalım ve kolun birim hızla döndüğünü varsayalım. O halde $p(t)$ noktasının hızını

$$\dot{p}(t) = w \times (p(t) - q) \quad (2.25)$$

olarak yazılabilir. $v = -w \times q$ ve

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

olacak şekilde 4×4 tipindeki $\hat{\xi}$ matrisini tanımlayarak bu denklem homojen koordinatlarda

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w} & -w \times q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{\xi} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \hat{\xi} \bar{p}$$

olarak yazılabilir.

$$e^{\hat{\xi}t} = I + \hat{\xi}t + \frac{(\hat{\xi}t)^2}{2!} + \dots$$

ile tanımlanan 4×4 tipindeki $\hat{\xi}t$ matrisinin üsteli ve t skaleri toplam dönme miktarı olmak üzere bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\bar{p}(t) = e^{\hat{\xi}t} \bar{p}(0)$$

olarak elde edilir. $\exp(\hat{\xi}t)$ dönüşümü t miktarınca dönmeden sonra bir noktayı ilk konumundan son konumuna dönüştürür.

Benzer bir düşünceyle 4×4 tipindeki bir matrisin üsteli olarak öteleme hareketiyle katı cisim hareketi temsil edilebilir. Birim hızla hareket eden bir prizmatik kola ekli bir noktanın hızı da

$$\dot{p}(t) = v \quad (2.27)$$

olarak yazılabilir. t toplam öteleme miktarı ve

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

olmak üzere (2.27) denkleminin çözümünden $\exp(\hat{\xi}t) \bar{p}(0)$ olarak yazılabilir. Böylece $so(3)$ ün tanımına benzer olarak

$$se(3) = \{(\hat{v}, \hat{w}) : \hat{v} \in \mathbb{R}^3, \hat{w} \in so(3)\} \quad (2.29)$$

kümesi yazılabilir. Homojen koordinatlarda

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & \hat{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

olarak $\hat{\xi} \in se(3)$ ün bir elemanını yazabiliriz. $se(3)$ ün bu elemanına bir twist denir. Bir twist parametrelenmesinde 6-boyutlu vektör etmek için $\vee(vee)$ operatörü

$$\begin{pmatrix} \hat{w} & \hat{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\vee} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

olarak tanımlanır ve $\hat{\xi}$ nın twist koordinatları $\hat{\xi} : (v \times w)$ olarak gösterilir. $\wedge$ invers operatöründe

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}^\wedge = \begin{pmatrix} \hat{w} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$\mathbb{R}^6$ da verilen $se(3)$ ün bir matris formudur. Bu yüzden $\xi \in \mathbb{R}^6$ olmak üzere $\hat{\xi} \in se(3)$ twist koordinatlarını temsil eder.

ÖNERME 2.7: $se(3)$ den $SE(3)$ e Üstel Dönüşüm

$\xi \in se(3)$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ verilsin $\hat{\xi}\theta$ nın üsteli $SE(3)$ ün bir elemanıdır. Yani

$$e^{\hat{\xi}\theta} \in SE(3) \quad (2.32)$$

dir.

İSPAT:

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olack şekilde yazılan ξ twisti için $\exp(\hat{\xi}\theta)$ yı hesaplayacağız.

1.DURUM ($w=0$): $w=0$ için $\exp(\hat{\xi}\theta) = I + \hat{\xi}\theta$ eşitliğinden faydalanarak ξ nin kuvvetleri

$$\hat{\xi}^2 = \hat{\xi}^3 = \dots = 0$$

olarak hesaplanabilir. $SE(3)$ de $\hat{\xi}\theta$ nın üstelide

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{pmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w=0 \quad (2.33)$$

olarak yazılabilir.

2.DURUM ($w \neq 0$): Varsayalımki $\|w\|=1$ olsun o halde $g = \begin{pmatrix} I & w \times v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir katı dönüşüm tanımlayalım. $\|w\|=1$ ile önerme 2.3 ü göz önüne alırsak $h = w^T v$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}' &= g^{-1} \hat{\xi} g \\
&= \begin{pmatrix} I & -w \times v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & w \times v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{w} & w w^T v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{w} & h w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

hesaplanabilir. Bu durumda

$$e^{\hat{\xi}\theta} = e^{g(\hat{\xi}'\theta)g^{-1}} = g e^{\hat{\xi}'\theta} g^{-1} \tag{2.35}$$

özdeşliği kullanılarak $\exp(\hat{\xi}'\theta)$ yı hesaplayabiliriz. Yani $\hat{w}w = w \times w = 0$ olduğundan

$$\left(\hat{\xi}'\right)^2 = \begin{pmatrix} \hat{w}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left(\hat{\xi}'\right)^3 = \begin{pmatrix} \hat{w}^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

yazılabilir. Buradan

$$e^{\hat{\xi}'\theta} = \begin{pmatrix} e^{\hat{w}\theta} & h w \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eşitliğini ve (2.35) denklemini kullanarak $SE(3)$ ün bir elemanı olan

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{pmatrix} e^{\hat{w}\theta} & (I - e^{\hat{w}\theta})(w \times v) + w w^T v \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, w \neq 0 \tag{2.36}$$

elde edilir.

ÖNERME 2.8: $SE(3)$ de Üstel Dönüşümün Örtlenliği

$g \in SE(3)$ verilsin $g = \exp(\hat{\xi}\theta)$ olacak şekilde $\hat{\xi} \in se(3)$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ elemanları vardır.

İSPAT: $p \in \mathbb{R}$ ve $R \in SO(3)$ olmak üzere $g = (R, p)$ olsun $\theta = 0$ ve keyfî $\hat{\xi}$ için $(R, p) = (I, 0)$ durumu aşikâr olduğundan diğer durumlarda önermenin sağlanıp sağlanamayacağını araştıralım.

1.Durum $R = I$: Eğer dönme hareketi yoksa

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{\|p\|} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \|p\| \quad (2.37)$$

yazılabilir. Denklem (2.32) yi göz önüne alırsak $\exp(\hat{\xi}\theta) = (I, p) = g$ olduğu bulunmuş olur.

2.Durum $R \neq I$: $\xi = (v, w)$ olduğunu bulmak için

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{pmatrix} e^{\hat{w}\theta} & (I - e^{\hat{w}\theta})(w \times v) + ww^T v\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

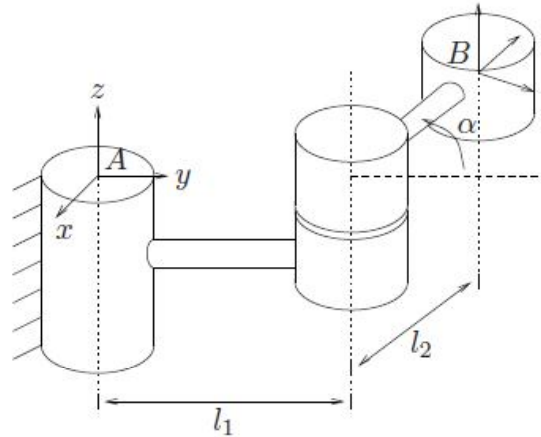
olan (2.36) denklemi ele alalım. Bu denklemdeki w ve θ elemanları $\exp(w, \theta) = R$ dönme denkleminin v için çözülmesiyle

$$(I - e^{\hat{w}\theta})(w \times v) + ww^T v\theta = p \quad (2.38)$$

denklemini bulunur. O halde ispatı tamamlamak için

$$A = (I - e^{\hat{w}\theta})\hat{w} + ww^T\theta$$

matrisinin $\forall \theta \in (0, 2\pi]$ için singüler olmadığını göstermek yeterlidir. Çünkü $\theta \neq 0$ (ve $R \neq I$) olduğu zaman A ortogonal uzaya sahiptir. Bu yüzden $Av = 0 \Leftrightarrow v = 0$ bulunmuş olur.



Şekil 2.6

ÖRNEK 2.2: Bir Doğru Etrafında Twist Koordinatlarının Dönmesi

Şekil (2.6) da görüldüğü gibi uzayda sabit bir eksen etrafında dönerek oluşan katı cisim hareketini düşünelim. O halde B çatısının konumu

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & -l_2 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & l_1 + l_2 \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

B çatısından A çatısına doğru cismin konumuna karşılık gelen twist koordinatlarını hesaplamalıyız. g_{ab} yi oluşturan twisti hesaplamak için; (2.8) önermesinin ispatını, $R \neq I$ olduğunu ve $\alpha \neq 0$ yı ele alalım. Cisim z ekseninde dönderildiği için $\exp(\hat{w}, \theta) = R_{ab}$ i sağlayan $w \in \mathbb{R}^3$ eksen ve $\theta \in \mathbb{R}$ açısı için

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta = \alpha$$

eşitlikleri yazılabilir. v yi bulmak için

$$\left[(I - e^{\hat{w}\theta}) \hat{w} + ww^T \theta \right] v = p_{ab}$$

denklemini ele alalım $\theta = \alpha$ dersek

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha - 1 & 0 \\ 1 - \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -l_2 \sin \alpha \\ l_1 + l_2 \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir ki buradan

$$v = \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \frac{\sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l_2 \sin \alpha \\ l_1 + l_2 \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_1 - l_2}{2} \\ \frac{(l_1 + l_2) \sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

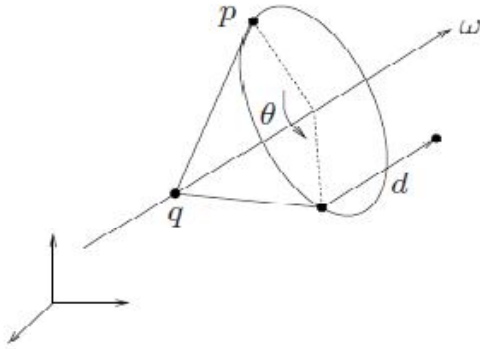
elde edilir. Bu yüzden g_{ab} nin twist koordinatları

$$\xi = \begin{pmatrix} \frac{l_1 + l_2}{2} \\ \frac{(l_1 + l_2) \sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta = \alpha \neq 0$$

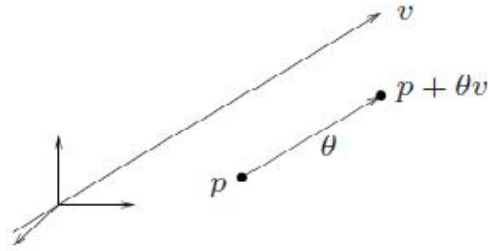
olarak bulunur.

2.4.3. Vidalar: Twistlerin Geometrik Anlamı

Vida hareketleri adı verilen katı cisim hareketlerinin özel bir sınıfını tanımlayarak başlayalım ve sonra bir twist ile bir vidanın ilişkili olduğunu gösterelim. Şekil 2.7.a da görüldüğü gibi bir d miktarınca aynı eksen etrafında ötelemenin ardından θ açısı kadar uzayda bir eksen etrafında dönmesinden oluşan bir katı cisim hareketini (twist hareketini) düşünelim. Bir vida döndüğü zaman aynı eksen boyunca ötelenir. Bu durumu ele aldığımızda $\theta \neq 0$ için



Şekil 2.7.a



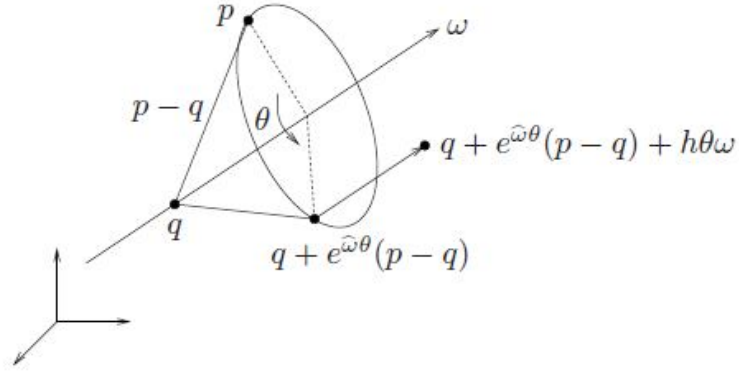
Şekil 2.7.b

$h = d/\theta$ vidanın öteleme miktarıdır ve buna vida adımı denir. Bu yüzden θ kadar dönderildikten sonra öteleme hareketi $h\theta$ dır. Bir noktadan geçen yönlendirilmiş doğru bu hareketin eksenini temsil eder. Eksen üzerinde $q \in \mathbb{R}^3$ noktasını ele alalım o hade bu eksen

$$l = \{q + \lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (2.39)$$

noktalarından oluşur.

Dönme olmadığı zaman vidanın eksenini farklı bir şekilde tanımlanmalıdır. $\|v\|=1$ olan bir vektör olmak üzere v yönünde orjinden geçen doğruyu eksen olarak alalım şekil 2.7.b de olduğu gibi vidanın adımı sonsuz ve büyüklüğü, v yönünde ki ötelemenin büyüklüğüdür.



Şekil 2.8

TANIM 2.2: Bir S vidası bir l eksenine bir h vida adımı ve M büyüklüğünden oluşur. Bir vida hareketi l eksenine paralel olan $h\theta$ miktarı kadar ötelemenin ardından l eksenine etrafında $\theta = m$ miktarı kadar dönmeyi temsil eder. Eğer $h = \infty$ ise karşılık gelen vida hareketi bir M büyüklüğü kadar vidanın eksenine etrafında saf ötelemeden oluşur, [21].

Bir vida ile ilgili katı cisim hareketini hesaplamak için şekil 2.8 de görüldüğü gibi bir $p \in \mathbb{R}^3$ noktasının hareketini incelersek

$$qp = q + e^{\hat{\omega}\theta}(p - q) + h\theta w$$

denklemini bu noktanın son konumunu ifade eder. Bu eşitliği homojen koordinatlarda

$$g \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})q + h\theta w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

olarak yazabiliriz.

(2.40) denkleminde verilen katı cisim hareketi (2.36) denkleminde verilen bir twistin üsteli ile aynı denkleme sahiptir. Yani

$$e^{\xi\theta} = \begin{pmatrix} e^{\hat{w}\theta} & (I - e^{\hat{w}\theta})(w \times v) + ww^T v\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır. Gerçekten $v = -w \times q + hw$ seçersek ve $\|w\| = 1, \theta \neq 0$ olmak üzere $\xi = (v, w)$ (2.40) denklemindeki vida hareketini verir. $h = 0$ ise bir vida hareketi ile ilgili twist basitçe $\xi = (-w \times q, w)$ eşitliğiyle yazılabilir. Ötelemenin miktarı olarak θ yı alırsak bu vidanın karşılık geldiği katı cisim hareketi

$$g = \begin{pmatrix} I & \theta v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

olarak yazılır. Bu yüzden bir vida hareketi vidanın büyüklüğüne eşit olan bir büyüklükte sürekli twistin hareketine karşılık gelir. O halde her twist ile ilgili bir vida adımı tanımlayabileceğimiz sonucuna varırız.

TANIM 2.3:

$$h = \frac{w^T v}{\|w\|^2} \quad (2.42)$$

Bir twistin vida adımı; dönme hareketine öteleme hareketinin oranıyla bulunur. $w=0$ olması ξ twistinin sınırsız vida adımına sahip olduğu anlamına gelir, [21].

TANIM 2.4: Bir noktadan geçen doğrunun yönü olan l eksen

$$l = \begin{cases} \left\{ \frac{w \times v}{\|w\|^2} + \lambda w : \lambda \in \mathbb{R} \right\} & w \neq 0 \text{ ise} \\ \{0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} & w = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.43)$$

olarak tanımlanır. $w \neq 0$ için eksen $\frac{w \times v}{\|w\|^2}$ noktasından geçen w yönünde bir doğrudur.

$w=0$ için eksen orjinden geçen v yönünde bir doğrudur, [21].

TANIM 2.5:

$$M = \begin{cases} \|w\| & w \neq 0 \text{ ise} \\ \|v\| & w = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.44)$$

Vidanın büyüklüğü net dönmeye eşittir. Eğer hareket dönme bileşeni içerirse $\|w\|=1$ olacak şekilde seçersek (yada $\|v\|=1, w=0$ olduğu zaman) bir $\xi\theta$ twisti $M=\theta$ büyüklüğüne sahiptir, [21].

ÖNERME 2.9: Twistlere Karşılık Gelen Vida Hareketleri

l ekseninin yönünde h vida adımı kadar ve M büyüklüğünde bir vida verilsin. Bu durumda vida ile oluşan bir katı hareket $M\xi$ twisti olmak üzere birim büyüklükte bir ξ twisti vardır.

İSPAT:

1.Durum: $h = \infty$: $l = \{q + \lambda v : \|v\| = 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ve $\theta = M$ alalım ve twisti

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

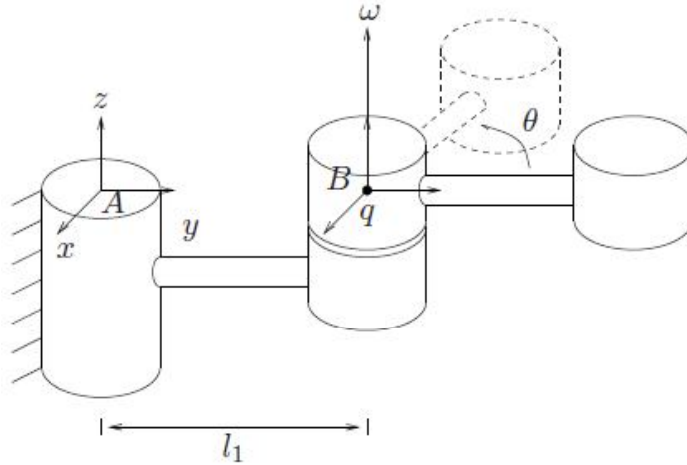
şeklinde tanımlayalım o halde $\exp(\hat{\xi}\theta)$ katı cisim hareketi θ miktarınca vida eksenini etrafında ki ötelemeye karşılık gelir.

2.Durum h sınırlıysa: $l = \{q + \lambda w : \|w\| = 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ve $\theta = M$ alalım ve

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & -w \times q + hw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanan twist ile $\exp(\hat{\xi}\theta)$ katı cisim hareketi vidanın hesabıyla bulunur.

ÖNERME 2.10: Her katı cisim hareketi bir eksen etrafındaki dönme ve bu eksene paralel bir ötelemenin birleşimiyle oluşur.



Şekil 2.9

ÖRNEK 2.3: Bir Eksen Etrafında Dönme

Şekil 2.9 da görüldüğü gibi uzayda bir eksen etrafında dönen bir katı cismin hareketini düşünelim. Bu hareket $q = (0, l_1, 0)$ noktasından geçen $w = (0, 0, 1)$ yönünde bir eksen etrafında sıfır adımlı bir vidaya karşılık gelir.

Bu vidaya karşılık gelen twist

$$\xi = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w \times q \\ w \end{pmatrix}$$

olarak yazılır. Bu twistin üsteli ise

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{pmatrix} e^{\hat{w}\theta} & (I - e^{\hat{w}\theta})(w \times v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & l_1 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & l_1 (1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

B çatısından A çatısına doğru noktaları dönüştüren katı dönüşümler

$$g_{ab}(0) = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$g_{ab}(\theta) = \exp(\hat{\xi}\theta) g_{ab}(0)$$

denklemleriyle yazılır. Bu denklemlerdeki üstelin alınması ve matris çarpımının yapılmasıyla

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

2.5. Katı Cismin Hızı

2.5.1. Dönme Hızı İlk olarak $\mathbb{R}^3$ de saf dönme hareketini düşünelim ve B bir cisim üzerindeki çatı ve A da bir sabit çatı olsun. Bir B çatısının hareket yönüne karşılık gelen bir eğri olarak $R_{ab}(t) \in SO(3)$ ü alalım ve q_b koordinatlarının sabit çatıya göre konumu

$$q_a(t) = R_{ab}(t) q_b \quad (2.45)$$

denklemiyle ifade edilir. $\dot{R}_{ab}$ bir noktanın cisim koordinatlarını bu noktanın konum hızına dönüştüren dönüşüm olmak üzere sabit çatıdaki bu noktanın hızı

$$v_{q_a}(t) = \frac{d}{dt} q_a(t) = \dot{R}_{ab}(t) q_b \quad (2.46)$$

olarak elde edilir. (2.46) denklemini tekrar düzenlersek cismin hızını

$$v_{q_a}(t) = \dot{R}_{ab}(t) R_{ab}^{-1}(t) R_{ab}(t) q_b \quad (2.47)$$

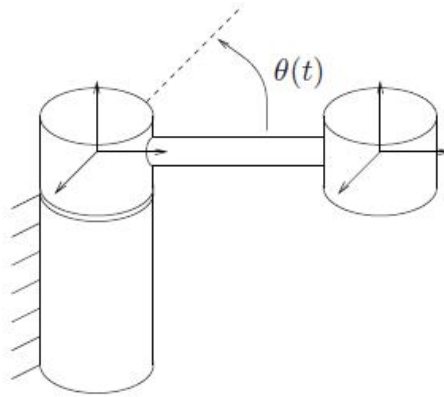
olarak yazabiliriz.

ÖNERME 2.11: $R(t) \in SO(3)$ verilsin $\dot{R}(t) R^{-1}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ve $R^{-1}(t) \dot{R}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ters simetrik matrislerdir.

İSPAT: $R(t) R(t)^T = I$ olduğunu biliyoruz Burada matrislerin t ye bağımlılığını kaldırırsak ve $\dot{R} R^T = -(\dot{R} R^T)^T$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\dot{R} R^T + R \dot{R}^T = 0$$

yazabiliriz. Bu yüzden $\dot{R} R^{-1} = \dot{R} R^T$ bir ters simetrik matristir.



Şekil 2.10

ÖRNEK 2.4: Şekil 2.10 da görüldüğü gibi bir eklemlı manipulatörün dönme hareketini düşünelim ve $\theta(t)$ yide dönme açısı olarak alalım o halde bu manipulatörün yönü

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

olarak yazılır. Bu durumda sabit çatıda bir noktanın hızını

$$\hat{w}^s = \dot{R}R^T = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

olarak yazabiliriz. O halde

$$w^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

olarak yazabiliriz. Cismin hızı ise

$$\hat{w}^b = R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ yada } w^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

dir.

2.5.2. Katı Cisim Hızı

$g_{ab}(t) \in se(3)$ şeklindeki bir katı cismin yönünü tanımlayan bir parametrelili eğrinin genel durumunu düşünelim.

$$g_{ab}(t) = \begin{pmatrix} R_{ab}(t) & p_{ab}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

eşitliğini göz önüne alırsak

$$\dot{g}_{ab} g_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} \dot{R}_{ab} & \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{ab}^T & -R_{ab}^T p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R}_{ab} R_{ab}^T & -\dot{R}_{ab} R_{ab}^T p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir twist denklemi elde edilir. Dönme hızına benzer olarak $\hat{V}_{ab}^s \in se(3)$ konum hızını

$$\hat{V}_{ab}^s = \dot{g}_{ab} g_{ab}^{-1}, \quad V_{ab}^s = \begin{pmatrix} v_{ab}^s \\ w_{ab}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{R}_{ab} R_{ab}^T p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ (\dot{R}_{ab} R_{ab}^T)^\vee \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

olarak tanımlarız. $\hat{V}_{ab}^s$ konum hızı sabit çatıdaki bir noktanın hızını bulmak için kullanılabilir. Sabit çatıdaki katı cisme ekli bir q noktasının koordinatları

$$q_a(t) = g_{ab}(t)q_b$$

denklemleri elde edilir. Bulduğumuz bu denklemleri beraber düşünersek

$$v_{q_a} = \dot{q}_a = \dot{g}_{ab}q_b = \dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1}q_a$$

denklemleri elde edilir ve buradan

$$v_{q_a} = \hat{V}_{ab}^s q_a = w_{ab}^s \times q_a + v_{ab}^s \quad (2.54)$$

yazılabilir. w_{ab}^s açısal hız bileşeni sabit çatıda olduğu gibi cismin anlık açısal hızıdır. v_{ab}^s bir t anında sabit çatının orijininden geçen katı cisim üzerinde ki bir noktanın hızıdır.

Cisim üzerindeki çatıya göre bir katı cismin hızını belirtmekte mümkündür. $g_{ab} \in SE(3)$ katı cismin hareketi olmak üzere katı cismin hızı

$$\hat{V}_{ab}^b = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab}^T \dot{P}_{ab} & R_{ab}^T \dot{P}_{ab} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_{ab}^b = \begin{pmatrix} v_{ab}^b \\ w_{ab}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ab}^T \dot{P}_{ab} \\ (R_{ab}^T \dot{R}_{ab})^\vee \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

olarak yazılabilir. Cismin üzerindeki çatıda bir noktanın hızı ise

$$v_{q_b} = g_{ab}^{-1} v_{q_a} = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} q_b = \hat{V}_{ab}^b(t) q_b$$

denklemleri ile elde edilir. Bu yüzden $\hat{V}_{ab}^b$ nin hareketi bir q_b noktasının cisim koordinatlarıdır ve tersine bu noktanın hızını v_{q_b} cismin üzerindeki çatıda

$$v_{q_b} = \hat{V}_{ab}^b q_b = w_{ab}^b \times q_b + v_{ab}^b \quad (2.56)$$

olarak yazılır.

Katı hareketlerin konum ve cisim hızı benzer dönüşümlerle yazılabilir. Bu benzerliği hesaplamak için

$$\hat{V}_{ab}^s = \dot{g}_{ab} g_{ab}^{-1} = g_{ab} (g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab}) g_{ab}^{-1} = g_{ab} \hat{V}_{ab}^b g_{ab}^{-1}$$

denklemini ele alalım. Bu denkleme benzer olarak

$$w_{ab}^s = R_{ab} w_{ab}^b$$

$$v_{ab}^s = -w_{ab}^s \times p_{ab} + \dot{p}_{ab} = p_{ab} \times (R_{ab} w_{ab}^b) + R_{ab} v_{ab}^b$$

denklemlerini yazabiliriz. Bu denklemleri göz önüne alırsak

$$V_{ab}^s = \begin{pmatrix} v_{ab}^s \\ w_{ab}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ab} & \hat{p}_{ab} R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ab}^b \\ w_{ab}^b \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

yazılabilir.

Bir çatıdan diğer bir çatıya twistlerin dönüşümleri olan 6×6 tipindeki matrise Ad_g şeklinde yazılan g nin adjoit dönüşümü denir. Bir koordinat sisteminden diğerine dönüşüm olan $g \in SE(3)$ verilsin $Ad_g : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ dönüşümü

$$Ad_g = \begin{pmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

olarak yazılır. Bu adjoit dönüşümün tersi ise

$$Ad_g^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -(R^T p)^\wedge R^T \\ 0 & R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \hat{p} \\ 0 & R^T \end{pmatrix} = Ad_{g^{-1}}$$

eşitliğiyle elde edilir.

ÖNERME 2.14: Eğer $\hat{\xi} \in se(3)$ $\xi \in \mathbb{R}^6$ da bir twist ise herhangi $g \in se(3)$ için $g\hat{\xi}g^{-1}$, $Ad_g\xi \in \mathbb{R}^6$ olan bir twisttir.

$g \in SE(3)$ konumu ile tanımlanan bir katı cismin konum hızı

$$\hat{V}^s = \dot{g}g^{-1}, \quad V^s = \begin{pmatrix} v^s \\ w^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{R}R^T p + \dot{p} \\ (\dot{R}R^T)^\vee \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

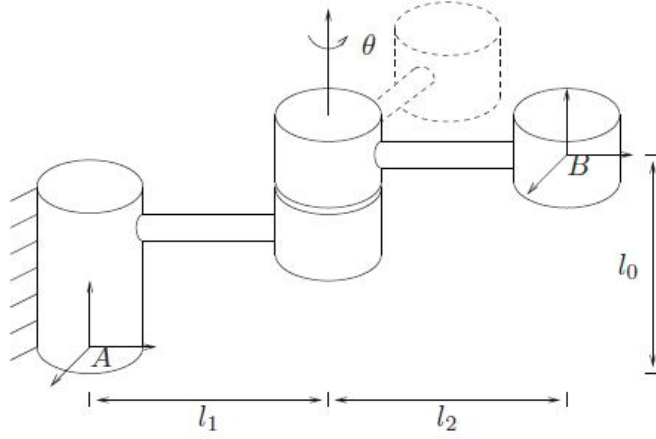
olarak yazılabilir. Bu katı hareketin cisim hızı da

$$\hat{V}^b = g^{-1}\dot{g}, \quad V^b = \begin{pmatrix} v^b \\ w^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T \dot{p} \\ (R^T \dot{R})^\vee \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (2.58), (2.59) ve (2.60) denklemleri göz önüne alınırsa

$$V^s = Ad_g V^b \quad (2.61)$$

elde edilir.



Şekil2.11

ÖRNEK 2.5: Şekil 2.11 de görüldüğü gibi bir B çatısından A sabit çatısına göre cismin konumu

$$g(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 & -l_2 \sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 & l_1 + l_2 \cos \theta(t) \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

denklemleri ile verilir. Bu durumda $v^s = -\dot{R}R^T + \dot{p}$ ve $w^s = (\dot{R}R^T)^\vee$ olmak üzere dönen cismin konum hızı

$$V^s = \begin{pmatrix} v^s \\ w^s \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Örnek 2.4 de w^s için yaptığımız hesaplamaları kullanarak

$$v^s = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } w^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada v^s A çatısının orijiniinden geçen hareket olduğu için v^s katı cisim üstündeki bir noktanın hızıdır. $v^b = R^T \dot{p}$ ve $w^b = (R^T \dot{R})^T$ eşitliklerinin hesaplanmasıyla

$$v^b = \begin{pmatrix} -l_2 \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde cismin hızı ise

$$V^b = \begin{pmatrix} v^b \\ w^b \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda cismin hızı B çatısında olduğu gibi, B çatısının orjininin hızı olarak yorumlanabilir. Bu yüzden lineer hız genellikle $-x$ yönünde ve açısal hızda genellikle z yönündedir.

2.5.3. Vida Hareketinin Hızı

Örnek (2.5) te hesapladığımız $\exp(\hat{\xi}\theta)$ ile gösterilen bir vida hareketi ile oluşan bir cisim hareketinin konum hızını ve Örnek 2.3 ü ele alalım. Bu durumda V^s konum hızı $\dot{\theta}=1$ olduğu zaman ξ le aynıdır. Öyle ise B çatısından A çatısına göre cismin konumunu gösteren

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0)$$

denklemini ele alalım

$$\frac{d}{dt}(e^{\hat{\xi}\theta}) = \hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta}$$

olacak şekilde bir sürekli ξ twistini kullanarak bu katı cisim hareketinin konum hızı

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ab}^s &= \dot{g}_{ab}(\theta) g_{ab}^{-1}(\theta) \\ &= (\hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0)) (g_{ab}^{-1}(0) e^{-\hat{\xi}\theta}) \\ &= \hat{\xi}\dot{\theta} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece bu harekete karşılık gelen konum hızı vida hareketiyle oluşan hızla eşittir.

Benzer düşünceyle vida hareketinin cisim hızı

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ab}^b &= g_{ab}^{-1}(\theta) \dot{g}_{ab}(\theta) \\ &= (g_{ab}^{-1}(0) e^{-\hat{\xi}\theta}) (\hat{\xi}\dot{\theta} e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0)) \\ &= (g_{ab}^{-1}(0) \hat{\xi} g_{ab}(0)) \dot{\theta} \\ &= (Ad_{g_{ab}^{-1}(0)} \hat{\xi})^\wedge \dot{\theta} \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. $\dot{\theta}=1$ için $\hat{V}_{ab}$ hareketli çatıda sürekli bir vektördür. Twistin cisim hızının yönü ise katı cismin başlangıç konumu olan $g_{ab}^{-1}(0)$ nın ortaya çıkan adjoint

dönüşümüdür. Özellikle $g_{ab}(0)=I$ ise yani $\theta=0$ da cisim üzerindeki çatı ve sabit çatı çakışık ise

$$V_{ab}^s = V_{ab}^b = \xi \dot{\theta}$$

elde edilir. Burada ξ vida hareketi ile oluşan sürekli twisttir.

2.6. Koordinat Dönüşümleri

$g_{ab}, g_{bc} \in SE(3)$ ile verilen dönüşümleri kullanarak $g_{ac} \in SE(3)$ ü bulabiliriz. Katı cisim dönüşümlerinde olduğu gibi ilk çatı ile ikinci çatı sonra ikinci çatı ile üçüncü çatı arasındaki hızlar birleştirilerek ilk çatıdan son çatıya cismin hızını belirtmek mümkündür.

ÖNERME 2.13: Konum Hızlarının Dönüşümü

A, B, C çatılarını ele alalım. Bu çatıların birbirlerine göre konum hızları için

$$V_{ac}^s = V_{ab}^s + Ad_{g_{ab}} V_{bc}^s$$

eşitliği yazılabilir.

İSPAT: C çatısından A çatısına doğru cismin konumu

$$g_{ac} = g_{ab} g_{bc}$$

olarak yazılabilir. Zincir kuralı gereğince C çatısından A çatısına doğru cismin konum hızı

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ac}^s &= \dot{g}_{ac} g_{ac}^{-1} \\ &= (\dot{g}_{ab} g_{bc} + g_{ab} \dot{g}_{bc}) (g_{bc}^{-1} g_{ab}^{-1}) \\ &= \dot{g}_{ab} g_{ab}^{-1} + g_{ab} (\dot{g}_{bc} g_{bc}^{-1}) g_{ab}^{-1} \\ &= \hat{V}_{ab}^s + g_{ab} \hat{V}_{bc}^s g_{ab}^{-1} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda twist koordinatlarındaki konum hızları arasındaki ilişki

$$V_{ac}^s = V_{ab}^s + Ad_{g_{ab}} V_{bc}^s$$

olarak elde edilir.

ÖNERME 2.14: Cisim Hızının Dönüşümü

A, B, C çatılarının hareketini düşünelim. O halde bu çatıların cisim hızları için

$$V_{ac}^b = Ad_{g^{-1}_{ab}} V_{ab}^b + V_{bc}^b$$

eşitliği yazılabilir.

Farklı çatılar arasında bir katı cismin hızını dönüştürmek için kullanılan (2.13) ve (2.14) önermelerini ele alalım. A ve B her biri sabit olan iki hareketsiz çatı ise bir C çatısının konum hızı

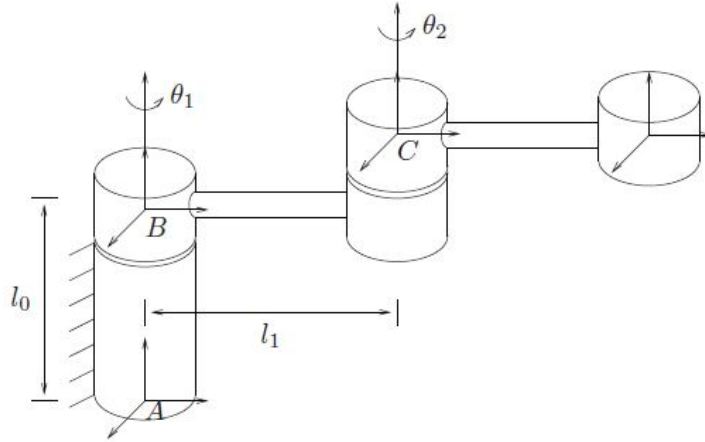
$$V_{ac}^s = Ad_{g_{ab}} V_{bc}^s \quad (2.62)$$

ile yazılabilir. O halde Bu cisim hızlarının birbirlerine göre durumu

$$V_{ac}^b = V_{bc}^b \quad (2.63)$$

dır. Çünkü cismin hızı, cisim hızının ölçülmesinde sabit çatıdan bağımsızdır.

(2.13) ve (2.14) önermeleriyle verilen dönüşüm kuralları sürekli twistlere uygulanabilir. Eğer vidanın hareketini temsil eden bir twist ξ ise ve $g \in SE(3)$ katı cisim hareketini uygulayarak vidayı hareket ettirsek (2.62) denklemini kullanarak yeni bir twist elde ederiz. Bu durumda bir konum hız vektörü olarak bir tek olan ξ twistini ve sabit katı hareket olarak da g Yİ düşünebiliriz. O halde $\dot{g} = 0$ olarak bulunmuş olur.



Şekil 2.12

ÖRNEK 2.6: İki Eklemlili Mekanizmanın Hızı

Şekil 2.12 de gördüğümüz gibi C çatısından A çatısına doğru cismin hızını bulmalıyız. Burada her hareket bir vida hareketi olduğu için $v_{ab} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $w_{ab} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$V_{ac}^s = \begin{pmatrix} v_{ab} \\ w_{ab} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1$$

olarak, $v_{bc} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_{bc} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$V_{bc}^s = \begin{pmatrix} v_{bc} \\ w_{bc} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda $Ad_{g_{ab}}$ de

$$Ad_{g_{ab}} = \begin{pmatrix} R_{ab} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{pmatrix}^\wedge R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Önerme 2.14 ü kullanarak bu hızlar ve $Ad_{g_{ab}}$ dönüşüm arasında

$$V_{ac}^s = V_{ab}^s + Ad_{g_{ab}} V_{bc}^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\theta}_2$$

eşitliği elde edilir.

ÖNERME 2.15: Katı Cisim Hızının Özdeşlikleri

Bir koordinat ekseninden diğerine hızlar için aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$\begin{aligned} V_{ab}^b &= -V_{ba}^s \\ V_{ab}^b &= -Ad_{g_{ba}} V_{ba}^b \end{aligned}$$

3. BÖLÜM

3.1. Lie Grupları ve Lie Cebirleri

Bir Lie grubu hem bir düzgün manifold olarak hemde $(g, h) \rightarrow gh$ ve $g \rightarrow g^{-1}$ grup işlemleri düzgün olan bir G grubu olarak tanımlanabilir. Eğer $\forall g, h \in G$ için $gh = hg$ ise bu Lie grubuna abel grup denir.

$\forall g \in G$ ve $\exists h \in G$ için $L_g(h) = gh$ ile verilen $L_g : G \rightarrow G$ dönüşümüne g nin sol ötelemesi denir. Benzer şekilde g nin sağ ötelemesi $R_g(h) = hg$ eşitliğini sağlayan $R_g : G \rightarrow G$ dönüşümü ile tanımlanır. $L_g \circ L_h = L_{gh}$ ve $R_g \circ R_h = R_{gh}$ olduğu için $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ ve $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ eşitlikleri yazılabilir. Bu yüzden her g için hem L_g hemde R_g ye G nin difeomorfizmi denir. Ayrıca sol ve sağ ötelemelerde yer değiştirme özelliği vardır.

$$L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$$

Eğer grup abel ise sağ öteleme sol ötelemeye eşittir yani $L_g = R_g$ dir.

ÖRNEK 3.1: Toplama İşlemiyle Öklid Uzayı

Grup işlemi $(x, y) \rightarrow x + y$ ile verilen $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı bir abel Lie gruptur. $x \in \mathbb{R}^n$ elemanının tersi $-x$ ile gösterilir ve birim eleman sıfır vektörüdür. $x + y = y + x$ olduğu için böyle bir Lie gruba abeldir denir.

ÖRNEK 3.2: $GL(n, \mathbb{R})$ Genel Lineer Grup

Tüm $n \times n$ tipindeki singüler olmayan reel matrislerin grubuna $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilen genel lineer grup denir. Bir manifold olarak $GL(n, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}^{n^2}$ nin bir açık alt kümesidir. $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ için grup işlemi

$$(A, B) \rightarrow AB$$

ile tanımlanan matris çarpımıdır ve bu grubun tersi ters matris ile ifade edilir. Birim eleman ise $n \times n$ tipindeki birim matristir. Sağ ve sol ötelemeler verilen sırayla sağ ve sol matris çarpımı ile tanımlanır.

ÖRNEK 3.3: $SO(n)$ Özel Ortogonal Grup

Özel ortogonal grup

$$SO(n) = \{R \in GL(n, \mathbb{R}) : RR^T = I, \det R = +1\}$$

ile tanımlanan genel lineer grubun bir alt grubudur. Bir manifold olarak $SO(n)$ in boyutu $\frac{n(n-1)}{2}$ dir. $n=3$ için $SO(3)$ grubu $\mathbb{R}^3$ te dönme grubu olarak tanımlanır.

ÖRNEK 3.4: $SE(3)$ Özel Öklid Grubu

$R \in SO(3)$ ve $p \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ deki katı dönüşümlerin grubu $g(x) = Rx + p$ eşitliğini sağlayan $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümlerinin kümesidir. $SE(3)$ ün bir elemanı $(p, R) \in SE(3)$ olarak yazılır. $R \in SO(3)$ ve $p \in \mathbb{R}^3$ ise $SE(3)$

$$g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak yazılan 4×4 tipindeki matrislerinin uzayı olarak tanımlanan 6 boyutlu bir Lie grubudur.

3.1.1. Bir Lie Grup ile İlişkili Lie Cebiri

G de bir vektör alanı olarak X i alalım, eğer $(L_g)_* X = X$ ise X 'e sol invarianttır denir. Yani $\forall h \in G$ için

$$T_h L_g X(h) = X(gh)$$

olarak yazılabilir. G de sol invariant vektör alanlarının kümesi olarak $\chi_L(G)$ yi alalım $X, Y \in \chi_L(G)$ için

$$L_{g*} [X, Y] = [L_{g*} X, L_{g*} Y] = [X, Y]$$

yazılabilir. Bu yüzden $\chi_L(G)$, G deki tüm vektör alanlarının kümesi olan $\chi(G)$ Lie cebirinin bir Lie alt cebiridir. Herbir $\xi \in T_e G$ için

$$X_\xi(g) = T_e L_g \xi$$

ile G deki bir X_ξ vektör alanını tanımlarız.

$$\begin{aligned}
X_{\xi}(gh) &= T_e L_{gh} \xi \\
&= T_e (L_g \circ L_h) \xi \\
&= T_h L_g (T_e L_h \xi) \\
&= T_h L_g (X_{\xi}(h))
\end{aligned}$$

olduğu için X_{ξ} sol invaryanttır. $p_1 \circ p_2 = id_{T_e G}$ ve $p_2 \circ p_1 = id_{\chi_L(G)}$ yi sağlayan $p_1 : \chi_L(G) \rightarrow T_e G$ lineer dönüşümleri

$$p_1(x) = X(e)$$

ile ve $p_2(x) : T_e G \rightarrow \chi_L(G)$ lineer dönüşümleride

$$p_2(\xi) = X_{\xi}$$

ile tanımlanır. Bu yüzden $\chi_L(G)$ ve $T_e G$ vektör uzayları izomorfiktir. $\xi_1, \xi_2 \in T_e G$ için

$$[\xi_1, \xi_2] = [X_{\xi_1}, X_{\xi_2}](e) \quad (3.1)$$

ile $T_e G$ de bir Lie braket tanımlayarak bir Lie cebiri oluşturulmuş olur. Bu Lie cebirsel yapı ile $T_e G$ vektör uzayına G nin Lie cebiri denir ve $\mathfrak{g}$ ile gösterilir. $\mathfrak{g}$ nin bir Lie alt cebiri $[\xi, \eta] \in \mathfrak{h}$ ve $\xi, \eta \in \mathfrak{h}$ olmak üzere bir $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ alt uzayıdır.

ÖRNEK 3.5: $(\mathbb{R}^n, +)$ nin Lie Cebiri

$\mathbb{R}^n$ grubu için $e=0$ yazılır ve $T_0 \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ dir. $T_0 \mathbb{R}^n$ ile tanımlanan sol invaryant vektör alanı bir sürekli vektör alanıdır. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$X_v(x) = v$$

dir. Bu yüzden $\mathbb{R}^n$ in Lie cebiri $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ için Lie braket $[v_1, v_2] = 0$ olan $\mathbb{R}^n$ dir.

ÖRNEK 3.6: $GL(n, \mathbb{R})$ nin Lie Cebiri

$GL(n, \mathbb{R})$ nin Lie cebiri $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ile gösterilen $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ için

$$[A, B] = AB - BA$$

braket yapısı ile tüm $n \times n$ tipindeki reel matrislerin kümesidir. Yani $GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ nin bir açık alt kümesidir ve bu yüzden $T_e GL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ dir. $GL(n, \mathbb{R})$ de bir vektör alanı $x_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere

$$X(x) = \sum_{i,j} X_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

olarak yazılabilir.

ÖRNEK 3.7: $SO(3)$ ün Lie Cebiri

$so(3)$ ile gösterilen $SO(3)$ ün Lie cebiri $w_1, w_2 \in so(3)$ için $[\hat{w}_1, \hat{w}_2] = \hat{w}_1 \hat{w}_2 - \hat{w}_2 \hat{w}_1$ braket yapısı ile

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

olan 3×3 tipindeki ters simetrik matrislerdir. Bir $w \in \mathbb{R}^3$ vektörünü bir $\hat{w} \in so(3)$ matrisine dönüştüren (3.2) denklemindeki dönüşümü kullanarak $\mathbb{R}^3$ de $so(3)$ ü tanımlayabiliriz. O halde $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ için

$$[\hat{w}_1, \hat{w}_2] = (w_1 \times w_2)^\wedge$$

yazılabilir. Bu yüzden $w \rightarrow \hat{w}$ dönüşümü $(\mathbb{R}^3, \times)$ Lie cebiri ile $(so, [,])$ Lie cebiri arasındaki bir izomorfizmdir.

ÖRNEK 3.8: $SE(3)$ ün Lie Cebiri

$se(3)$ ile gösterilen $SE(3)$ ün Lie cebiri

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1$$

braket yapısı ve $w, v \in \mathbb{R}^3$ için

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile tanımlanabilir. $\hat{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \hat{w}_1 & v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\hat{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \hat{w}_2 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olarak alırsak Lie braketini

$$\left[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \right] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 = \begin{pmatrix} (w_1 \times w_2)^\wedge & w_1 v_2 - w_2 \times v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliriz. $se(3)$ vektör uzayı $\hat{\xi} \rightarrow \xi = (v, w) \in \mathbb{R}^6$ dönüşümü ile izomorfiktir.

3.1.2. Üstel Dönüşüm

$\forall \xi \in T_e G$ için $t=0$ anında e den geçen X_ξ sol invaryant vektör alanının integral eğrisi olarak $\phi_\xi: \mathbb{R} \rightarrow G$ yi ele alalım yani

$$\phi_\xi(0) = e \text{ ve } \frac{d}{dt} \phi_\xi(t) = X_\xi(\phi_\xi(t))$$

dir. $\phi_\xi(t)$, G nin bir parametrelili alt grubu olmak üzere

$$\phi_\xi(s+t) = \phi_\xi(s) + \phi_\xi(t) \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Hem sol invaryantı hemde (3.3) denklemini ele alarak $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\phi_\xi(t)$ nin tanımlı olduğunu görürüz. $\exp(\xi) = \phi_\xi(1)$ eşitliğini sağlayan $\exp: T_e G \rightarrow G$ fonksiyonuna G nin $\mathfrak{g}$ Lie cebirindeki üstel dönüşümü denir. $s \in \mathbb{R}$ için üstel dönüşüm G nin bir parametrelili alt grubunun $\xi s \in \mathfrak{g}$ elemanıdır ve bu üstel dönüşüm

$$\exp(\xi s) = \phi_\xi(s) \quad (3.4)$$

olarak yazılır. (3.4) denklemi göz önüne alınırsa sabit bir s elemanı için e doğrusundan geçen $t=0$ anındaki $t \rightarrow \phi_\xi(ts)$ eğrisi için

$$\frac{d}{dt} \phi_\xi(ts) = s(X_\xi(ts)) = X_{s\xi}(\phi_{s\xi}(t))$$

denklemini yazılabilir. $\phi_{s\xi}(t)$ ve $\phi_\xi(ts)$ aynı diferansiyel denkleme karşılık geldiği ve bu denklemlerin her ikisi $t=0$ anında e den geçtiği için $\phi_{s\xi}(t) = \phi_\xi(ts)$ olur. Bu denklemlerde $t=1$ alırsak $\exp(\xi s) = \phi_\xi(s)$ yazılır.

ÖRNEK 3.9: $(\mathbb{R}^n, +)$ da Üstel Dönüşüm

Grup işlemi olarak toplama ile birlikte $\mathbb{R}^n$ i düşünelim. $\mathbb{R}^n$ in Lie cebiri braket işlemi ile $\mathbb{R}^n$ dir ve bir $X_v(x) = v$ sol invaryant vektör alanının integral eğrisi $\phi_v(t) = vt$ dir. Bu nedenle

$$\phi_v(t) \circ x = x + vt \text{ ve } \exp: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümlerini yazabiliriz.

ÖRNEK 3.10: $GL(n, \mathbb{R})$ de Üstel Dönüşüm

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $[A, B] = AB - BA$ olmak üzere $G = GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ eşitliğini ele alalım. $\forall A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ için

$$\Phi_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

ile verilen $\Phi_A: \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ dönüşümü bir parametrelili alt gruptur. Çünkü Φ_A dönüşümü X_A nın sol invaryant vektör alanının bir integral eğrisini göstermek üzere

$$\Phi_A(0) = I \text{ ve } \frac{d}{dt} \Phi_A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = \Phi_A(t) A$$

olarak yazılır. Bu yüzden $\exp: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ üstel dönüşümü

$$\exp(A) = \Phi_A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK 3.11: $SO(3)$ de Üstel Dönüşüm

$G = SO(3)$ olsun bir $\|w\|$ açısı kadar $w \in \mathbb{R}^3$ vektörü etrafında ki bir dönmeye karşılık gelen $\exp \hat{w}$

$$e^{\hat{w}} = I + \frac{\hat{w}}{\|w\|} \sin \|w\| + \frac{\hat{w}^2}{\|w\|^2} (1 - \cos \|w\|)$$

dir.

ÖRNEK 3.12: $SE(3)$ de Üstel Dönüşüm

$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1$ Lie braketi ve $w, v \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $G = SE(3)$ için Lie cebiri

$$\xi = \begin{pmatrix} \hat{w} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki 4×4 tipindeki matrislerle tanımlanabilir. O halde

$$A = I + \frac{\hat{w}}{\|w\|^2} (1 - \cos \|w\|) + \frac{\hat{w}^2}{\|w\|^3} (\|w\| - \sin \|w\|)$$

olmak üzere G nin üstel dönüşümü

$$\exp \hat{\xi} = \begin{pmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, w = 0 \text{ ve } \exp \hat{\xi} = \begin{pmatrix} e^{\hat{w}} & A v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, w \neq 0$$

olarak yazılır.

ÖRNEK 3.13: $GL(n, \mathbb{R})$ Logaritma Fonksiyonu

$G = GL(n, \mathbb{R})$ ve $A \in G$ olmak üzere logaritma fonksiyonu her $\|A - I\| < 1$ için

$$\log A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A - I)^n}{n!}$$

matris polinomuyla tanımlanır.

ÖRNEK 3.14: $SO(3)$ de Logaritma Fonksiyonu

$G = SO(3)$ olsun $\theta \in \mathbb{R}$ ve $\hat{w} \in se(3)$ elemanları

$$2 \cos \theta + 1 = iz(R) \text{ ve } \hat{w} = \frac{1}{2 \sin \theta} (R - R^T), R \neq I$$

eşitliğini sağlıyorsa

$$\log R = \hat{a} = \theta \hat{w}$$

fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir. $R = I$ olduğu zaman herhangi k ve w tamsayıları için $\theta = 2k\pi$ değeri keyfi olarak seçilebilir. Sonuç olarak θ tek değerli olmadığından $SO(3)$ deki logaritma fonksiyonunda tek değere sahip değildir.

ÖRNEK 3.15: $SE(3)$ de Logaritma Fonksiyonu

$$\hat{w} = \log R \text{ ve } A^{-1} = I - \frac{1}{2} \hat{w} + \frac{2 \sin \|w\| - \|w\| (1 + \cos \|w\|)}{2 \|w\|^2 \sin \|w\|} \hat{w}^2, w \neq 0$$

olmak üzere $SE(3)$ de logaritma fonksiyonu

$$\hat{\xi} = \log \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w} & A^{-1}p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğiyle yazılır. Burada eğer $w=0$ ise $A=I$ dir. w tek değere sahip olmadığından $SE(3)$ deki logaritma fonksiyonunda tek değerli değildir.

3.1.3. Lie Gruplarında Hareketler

2. bölümde hem g nin hemde Ad_g nin bazı özelliklerini kullanarak matris çarpımı yardımıyla $SE(3)$ ün sol hareketi olarak adlandırılan noktaların, vektörlerin ve twistlerin dönüşümlerini inceledik. Bu bölümde ise robot kinematiklerinde bir manifold üzerinde tanımlanan Lie grubunun sol hareketinin tanımını ve bu hareketin bazı örneklerini inceleyeceğiz.

Bir düzgün manifold olarak M ve bir Lie grup olarak G yi ele alalım;

- i) $\forall x \in M$ için $\Phi(e, x) = x$,
- ii) $\forall g, h \in G$ ve $x \in M$ için $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$,

şartlarını sağlayan $\Phi: G \times M \rightarrow M$ düzgün dönüşümüne M de G nin bir sol hareketi denir. Bu sol hareket $\Phi_g(x)$ yada $\Phi(g, x)$ ile gösterilir. Φ dönüşümü M manifoldu üzerindeki G Lie grubunun bir hareketi ise bir x elemanının orbiti

$$Orb_x = \{\Phi_g(x) : g \in G\}$$

kümesiyle gösterilir.

ÖRNEK 3.16: $\mathbb{R}^n$ de $GL(n, \mathbb{R})$ nin Hareketi

$\mathbb{R}^n$ de $(A, x) \rightarrow Ax$ dönüşümüne $GL(n, \mathbb{R})$ nin hareketi denir. Sıfırdan farklı x in orbiti ise $\mathbb{R}^n - \{0\}$ açık kümesidir.

ÖRNEK 3.17: G Lie Grubunun Kendi Üzerine Birleşimli Hareketi

$I_g(h) = R_{g^{-1}}L_g(h) = ghg^{-1}$ eşitliğini sağlayan $I_g: G \rightarrow G$ dönüşümüne birleşimli dönüşüm yada g ile ilişkili iç otomorfizm denir. I_g dönüşümü G Lie grubunda sol hareket tanımlar. Çünkü $I_e = id$ ve

$$I_g \circ I_h(x) = ghxh^{-1}g^{-1} = I_{gh}(x)$$

dir.

ÖRNEK 3.18: G Lie Grubunun Lie Cebirindeki Adjoit Hareketi

$\mathfrak{g}$ Lie cebirinde G nin adjoit hareketi

$$Ad_g(\xi) = (T_e I_g) \xi = T_e (R_g^{-1} \circ I_g) \xi$$

eşitliğini sağlayan $Ad_g(\xi): G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümüne denir. G Lie grubu $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir alt grubu ise $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ için $\mathfrak{g} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $Ad_g \xi = g \xi g^{-1}$ dir.

ÖRNEK 3.19: G Lie Grubundaki Dual Lie Cebirinin Koadjoit Hareketi

Ad_g nin dual dönüşümü $Ad_g^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ olarak tanımlansın $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ ve $\xi \in \mathfrak{g}$ için $\mathfrak{g}^*$ dual Lie cebirinde G nin koadjoit hareket

$$\langle Ad_g^* \alpha, \xi \rangle = \langle \alpha, Ad_g \xi \rangle$$

dir. $\Phi^*(g, \alpha) = Ad_{g^{-1}}^* \alpha$ ile tanımlanan $\Phi^*: G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dönüşümüne $\mathfrak{g}^*$ Lie cebirinde G nin koadjoit hareketi denir.

ÖRNEK 3.20: M den TM ye G Lie grubunun Kaldırma Hareketi

$\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$ olmak üzere $\Phi_g: M \rightarrow M$ olması durumunda M de G nin hareketini ve $\Phi: M \rightarrow M$ dönüşümünü ele alalım. TM de G nin kaldırma hareketi

$$\Phi_*(g, (x, v_x)) = (\Phi_g(x), T_x \Phi_g v_x)$$

eşitliğini sağlayan $\Phi_*: G \times TM \rightarrow TM$ dönüşümüne denir.

3.2. Katı Cisim Kinematikleri

Herhangi bir anda bir katı cismin konumu $g = (p, r) \in SE(3)$ olarak tanımlanır. O halde A yı sabit bir çatı olarak ve B yi de katı cisme ekli bir çatı olarak alırsak B çatısından A çatısına göre cismin konumunu $g_{ab} = (p_{ab}, R_{ab})$ olarak elde ederiz. p_{ab} B çatısının orjininin konumunu ifade eder ve $R_{ab} \in SO(3)$ ise cismin yönüdür. Benzer olarak B bir ara çatı olmak üzere C çatısından A çatısına doğru cismin konumunu

$$g_{ac} = g_{ab} g_{bc} = (p_{ab} + R_{ab} p_{bc}, R_{ab} R_{bc})$$

olarak yazabiliriz. Eğer

$$g = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4×4 tipinde homojen matris olarak $g \in SE(3)$ yazılırsa $SE(3)$ ün grup işlemi matris çarpımıdır ve $GL(4, R)$ genel lineer grubunun bir alt grubudur.

$g_{ab} \in SE(3)$, B çatısından alınan bir noktanın koordinatlarını A çatısının koordinatlarına dönüştüren bir dönüşümdür. Bu dönüşüm $\Phi_g(q) = p + Rq$ ile verilen $\mathbb{R}^3$ de $SE(3)$ ün bir hareketidir. Homojen koordinatlarda bu hareket

$$\begin{pmatrix} q_a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_b \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. $SE(3)$ de vektörlerin hareketi, bir noktanın hızının bir koordinattan diğerine nasıl dönüştüğünü tanımlar. $T_x \mathbb{R}^3$ bir elemanı olan bir noktanın hızını ve tanjant vektörlerinde $SE(3)$ ün hareketi $M = \mathbb{R}^3$ de $SE(3)$ ün kaldırma hareketidir. $T \mathbb{R}^3$ de $SE(3)$ ün kaldırma hareketi herhangi q noktasında g nin hareketini g_q ile gösterirsek $\Phi_{g*}(v_q) = (g(q), Rv_q)$ dir. Homojen koordinatlarda hareketin hızı

$$\begin{pmatrix} V_a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_b \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak yazılır.

$SE(3)$ bir Lie grup olduğu için üstel dönüşüm Lie cebirinin elemanlarını dönüştürmek için kullanılabilir. Homojen koordinatlarda $SE(3)$ ün Lie cebiri $\hat{w} \in so(3)$, $v \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrislerden oluşan $\mathfrak{gl}(n, R)$ nin bir Lie alt cebiridir. Burada $se(3)$ vektör uzayı 6 boyutludur ve $\hat{\xi} \rightarrow \xi = (w, v)$ dönüşümü ile $\mathbb{R}^6$ ya izomorftur. Bir $q \in \mathbb{R}^3$ noktasından geçen $w \in \mathbb{R}^3$ yönünde bir eksen etrafında eşzamanlı olarak dönerek ve ötelenerek oluşan hareketi düşünelim. Dönme hareketinin öteleme hareketine oranı olarak h 'ı alalım. Eğer h sınırlıysa bu öteleme ve dönmeden oluşan katı hareket

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & -qxm + hw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile verilen $\hat{\xi} \in se(3)$ twistinin üstelidir. $\Phi_{\xi}(\theta) = \exp(\hat{\xi}\theta)$ bir parametrelili alt grubu aynı eksen etrafında dönmenin ardından aynı eksen etrafındaki bir ötelemeye karşılık gelen bir twist ile elde edilir. Bu twistin üsteli bir vida hareketidir.

KAYNAKLAR

1. Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H., H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A., 1988, “Soyut Matematik”, Ankara.
2. Warner, W., F., 1971, “Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups”, Universty of Pennsylvania, London.
3. Çallıalp, F., “Soyut Cebir-I”, 1981, H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi.
4. Hungerford, T., W., 1974, “Algebra”, Universty of Washington.
5. Takushiro, O., Tsunero, T., 1976, “The Group of Isometries a Left Invariant Rieman Metricon a Lie Group”, Osaka University, Toyonaka, Japan.
6. Sagle, A., A., Walde, R., E., 1973, “Introduction to Lie Groups and Lie Algebras”, Academic Pres.
7. Aslım, G., 1988, “Genel Topoloji”, Ege Üniversitesi, Bornova-İzmir.
8. Hacısalihoğlu, H., H., 1980, Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş”, İstanbul.
9. Hacısalihoğlu, H., H., 1983, “Diferansiyel Geometri”, Gazi Üniversitesi, Ankara.
10. Hacısalihoğlu, H., H., 2002, “Lineer Cebir” Cilt 1, 7. Baskı.
11. Milicic, D., “Lectures on Lie Groups”, Utah University, USA.
12. Sabuncuoğlu, A., 2004, “Diferansiyel Geometri”, Ankara.
13. Helgason, S., 1962, “Differantial Geometry and Symmetric Space”, Academic Pres.
14. Yüksel, S., 1975, “Genel Topoloji”, Selçuk Üniversitesi.
15. Avramidi, I., 200, “Notes on Lie Groups”, New Mexico Tech.
16. Chevalley, M., 1946, “Theory of Lie Groups”, Princeton Universty Pres, Princeton.
17. Shinnawy, S., E., 1976, “The Euclidean Plane Kinematics Aplications of Mathematics”.
18. Hacısalihoğlu, H., H., 1983, “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, Gazi Üniversitesi, Ankara.
19. Sabuncuoğlu, A., 2006, “ Diferansiyel Geometri”, Nobel Kitap Evi.
20. Başar, F., 2002, “Lineer Cebir”, Malatya.
21. Murray, R., M., Li, Z., Sastry, S., S., 1994, “A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation”, CRC Press.
22. Serre, J., P., Benjamin, W., A., 1965, “Lie Algebras and Lie groups”, New York.
23. Spivak, M., 1979, “ A Comprehensive Introduction to Differential Geometry-second edition”, Houston.
24. McCarthy, J., M., 1990, “An Introduction to Theoretical Kinematics”, MIT Press.
25. Hunt, K., H., 1978, “Kinematic Geometry of Mechanisms”, Oxford University

Press.

- 26. Craig, J., J., 1989, "Introduction to Robotics".
- 27. Bottema, O., Roth, B., 1979, "Theoretical Kinematics", North-Holland.
- 28. Ball, R., S., 1900, "A Treatise on the Theory of Screws" Cambridge University Press.
- 29. Angeles, J., 1988, "Rational Kinematics", Springer, Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk ve orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2003-2007 yıllarında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi 2008-2009 yıllarında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde tezsiz yüksek lisans öğrenimimi tamamladım ve aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım. 2010 yılından itibaren Muş Alparslan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.

Arş. Gör. Muhammed Talat SARIAYDIN