

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



AYRIK KESİRLİ ANALİZ VE LEGENDRE DENKLEMİ İÇİN
AÇIK ÇÖZÜMLERİN ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahar ACAY

(161121124)

Anabilim Dalı : Matematik

Program : Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Reşat YILMAZER

Haziran-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIK KESİRLİ ANALİZ VE LEGENDRE DENKLEMİ İÇİN
AÇIK ÇÖZÜMLERİN ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahar ACAY
(161121124)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Mayıs 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 01 Haziran 2018

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Reşat YILMAZER

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa İNÇ

: Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

Haziran-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve birikimlerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Reşat YILMAZER' e teşekkürlerimi bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Bahar ACAY
ELAZIĞ-2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
1.1. Gerçek Kesirli Analiz	1
1.2. Ayrık Kesirli Analiz	3
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
2.1. Tamsayı Mertebeli Diferansiyel Denklemler	6
2.2. Kesirli Analizin Özel Fonksiyonları	6
2.3. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri	10
3. AYRIK KESİRLİ ANALİZİN ÜSTEL FONKSİYONLARI	13
3.1. Casoratian ve Lineer Bağımsızlık	19
3.2. Kesirli Mertebeden Ardışık Lineer Fark Denklemlerini Çözme	23
4. AYRIK KESİRLİ ANALİZ VE LEGENDRE DENKLEMİ İÇİN AÇIK ÇÖZÜMLERİN ELDE EDİLMESİ	26
4.1. Legendre Denklemi	26
4.2. Legendre Denklemi İçin Açık Çözümlerin Elde Edilmesi	29
5. SONUÇ	39
6. KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	42

ÖZET

AYRIK KESİRLİ ANALİZ VE LEGENDRE DENKLEMİ İÇİN AÇIK ÇÖZÜMLERİN ELDE EDİLMESİ

Matematiksel analizin bir kolu olan kesirli ve ayrık kesirli analiz, türev ve integralin tam sayı olmayan mertebelere genişletilmiş halidir. Fen ve mühendislikte oldukça geniş uygulama alanına sahiptir.

Amacımız; ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler için ayrık kesirli analizin nabla (∇) operatörü yardımıyla özel çözümler elde etmektir.

Bu tezde ilk olarak; ayrık kesirli analizin üstel fonksiyonları yardımıyla sabit katsayılı kesirli mertebeden lineer fark denklemlerinin genel çözümlerinin elde edilışinden bahsedilmiştir. Daha sonra singüler noktalara sahip, homojen ve homojen olmayan Legendre diferansiyel denkleminin ve associated Legendre diferansiyel denkleminin ayrık kesirli hesap yardımıyla özel çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Analiz, Ayrık Kesirli Analiz, Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler, Legendre Diferansiyel Denklemi, Associated Legendre Denklemi

SUMMARY

DISCRETE FRACTIONAL CALCULUS AND OBTAINING EXPLICIT SOLUTIONS FOR LEGENDRE EQUATION

Fractional and discrete fractional calculus, a branch of mathematical analysis, is the generalization of derivative and integral to the non-integer order. It has quite wide application area in science and engineering.

Our aim is to obtain particular solutions for the second order linear differential equations with the help of nabla operator (∇) of the discrete fractional calculus.

In this thesis; firstly, obtaining the general solutions of linear difference equations of fractional order with constant coefficients is mentioned. Later, particular solutions of homogeneous and non-homogeneous Legendre differential equation and associated Legendre equation with singular points are obtained with the help of discrete fractional calculus.

Keywords: Fractional Calculus, Discrete Fractional Calculus, Differential Equations of Fractional Order, Legendre Differential Equation, Associated Legendre Equation

SİMGELER LİSTESİ

$\nabla(.)$	: Nabla-operatörü
$\nabla^{-\alpha}f$	: f fonksiyonunun α -inci mertebeden kesirli toplamı
$\nabla^{\alpha}f$	: f fonksiyonunun α -inci mertebeden kesirli farkı
$\Delta(.)$	: Fark operatörü
$\rho(.)$	: Geri sıçrama operatörü
$t^{\bar{\alpha}}$	: Faktöriyel fonksiyonu
$C[.]$	: Casoratian
E	: Shift operatörü
$\mathbb{N}_a$	: $\{a, a + 1, a + 2, \dots\}$ kümesi

1. GİRİŞ

Kesirli hesap alanı, keyfi mertebeden türev ve integrallerin uygulamalarını içeren bir matematiksel analiz alanıdır. Başlangıcı Leibniz ve Euler'in çalışmalarına dayanmakla birlikte günümüze kadar uzanır. Türev ve integral operatörlerine olan ihtiyaç konunun daha da derinden incelenerek tam sayı mertebeli hallerinin genelleştirilmiş hali olan kesirli türev ve kesirli integral operatörlerinin bulunmasını sağlamıştır. Kesirli türev ve integral konusunda ilk fikir L'Hospital tarafından 1695'de ortaya atılmıştır. Türevin ilk tanımı, $y = f(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

eşitliği ile Leibniz tarafından yapıldıktan sonra L'Hospital bir mektupta türevin mertebesinin kesirli olup olamayacağını Leibniz'e sorduğunda bunun bir paradoks gibi göründüğünü ancak ileride çok kullanılacağını söylemiştir. Günümüzde fen ve mühendislik alanlarında birçok problem kesirli türev ve integral operatörleri sayesinde daha iyi modellenabilmektedir. Örneğin; sönümleme yasası, difüzyon süreçleri ve fraktallar gibi konular kesirli analiz yardımı ile daha iyi tanımlanabilmektedir ve bu durum günümüzde kesirli analize ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere olan ilgiyi artırmıştır. Konunun; fizik, kimya, elektrik ve elektronik, termodinamik, kontrol teorisi gibi bir çok alana uygulanabilme potansiyeli ile önemi gün geçtikte artmıştır.

Son zamanlarda süreklilik analizi, ayrık analiz ve kuantum analizinde görülen kesirli analiz bütünlükten kesirli analiz teorisini inşa etme imkanlarını tartışan çalışmalar vardır. Bununla birlikte ayrık analizde fark operatörünün tam sayı olmayan mertebeden çalışmalarını içeren araştırmalar vardır. Benzer şekilde, kuantum analizinde tam sayı olmayan mertebeden çalışmalar bulunmaktadır. Bu teoriler benzer yaklaşımlar içermekte olup üçünü birleştiren kesirli analiz teorisinin var olup olmadığı sorusuna yol açmıştır.

1.1. Gerçek Kesirli Analiz

Tarihsel olarak, Leibniz konu üzerine yazmış olsa da, gerçek sayılar üzerinde kesirli analiz tautochrone probleminden kaynaklanır. Kesirli analizin teorik çalışmalarından önce 1823 de Abel, problemin genelleştirilmiş formunun,

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\Phi'(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (1.1)$$

şeklinde bir integral eşitliği ile modellendirilebileceğini gösterdi. Burada toplam zaman olarak alınan T bilinendir ve Φ bilinmeyendir. Bu sonucun kaynağı Keller [1] ya da Simmons'da [2] bulunabilir. Tautochrone problemi, T sürekli olmak üzere (1.1) denkleminin özel halidir. Abel daha genel olan,

$$\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\beta} dt = g(x) \quad (1.2)$$

integral denklemini çözdü. Abel integral denklemi olarak bilinen (1.2) denkleminde $0 < \beta < 1$ ve $x > a$ dır.

Abel integral denklemi ve kesirli analiz arasındaki ilişkiyi gözlemlemek için tekrarlı integrasyonu göz önüne almamız gerekir.

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

denklemini, I_a^n operatörü n -kathı integral olmak üzere;

$$\int_a^x \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n := I_a^n f(x) \quad (1.4)$$

integrasyonu ile hesaplanabilir. Cauchy integral formülü olarak adlandırılan bu sonuç, tam sayı olmayan n için iyi tanımlıdır. $v > 0$ için,

$$I_{a+}^v f(t) := \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^t (t-\tau)^{v-1} f(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

olan son ifade, Riemann-Liouville kesirli integrali olarak adlandırılır ve literatürde kesirli integralin en yaygın tanımlarından biridir.

Riemann-Liouville kesirli integrali ve Abel integral denkleminin birbirleriyle ilişkili olduğu görülür. Bununla birlikte, Riemann-Liouville tanımından farklı olan kesirli analiz teorileri vardır. Buna bir örnek verecek olursak;

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t + (n-k)h) \quad (1.6)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (1.7)$$

gözlemine dayanan Grünwald-Letnikov kesirli türevidir.

Kesirli analiz hakkındaki son zamanlardaki bir çok tez Riemann-Liouville kesirli analizin varyasyonlarıdır. İlk olarak bunlardan biri ve muhtemelen en önemlisi Caputo'nun çalışmasıdır [3]. $v > 0$ ve $n = \lceil v \rceil$ için Caputo kesirli türevi;

$${}^C D_{a+}^v f(x) := I_{a+}^v f^{(n)}(x)$$

olarak tanımlanır. Bu tanımın iki önemli avantajı vardır. İlki; bir sabitin türevinin sıfır olduğudur ki bu durum Riemann-Liouville kesirli türevinde geçerli değildir. İkinci; Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü düşünülme istendiğinde, başlangıç değerleri tam sayı mertebeden türevlere göredir [4].

Bununla birlikte Caputo kesirli türevi fonksiyonun diferansiyellenebilir olmasını gerektirir. West ve arkadaşları tarafından belirtildiği gibi kesirli türevin önemli kullanımlarından biri, sürekli fakat illaki diferansiyellenebilir olması gerekmeyen olguları modellemede bulunmasıdır. Bu yüzden Jumarie [5-7], sabitlerin kesirli türevinin sıfır olmasına sebep olan ve sadece $(n - 1)$. mertebeden diferansiyellenebilir olan kesirli analiz teorisini geliştirdi. Kesirli analizin uygulamadaki ana zorluklarından biri, istenen özellikleri elde etmek için tanım seçmektir.

1.2. Ayırık Kesirli Analiz

Kesirli analizin öncü çalışmasının diferansiyel denklemlere dayandığı gibi, kesirli farklar için öncülük eden çalışma; Anderson [8], Kuttner [9, 10], Cargo ve Shisha [11] ile fark dizileri çalışmasına dayanır. Bu çalışmalar kompleks sayı dizileri üzerinde tanımlanan belli bir operatör sınıfını dikkate alır. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ve bir s reel sayısı için a_n fark dizisi, serinin yakınsaması şartıyla;

$$\Delta^s a_n := \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s-1+m}{m} a_{n+m} \quad (1.8)$$

olarak tanımlanır.

Kesirli fark analizini inceleyen ilk makale Grünwald-Letnikov kesirli türevinin ayrı bir versiyonunu kullanan Diaz ve Osler tarafından ele alınmıştır.

$$\Delta^N f(z) = \sum_{k=0}^N (-1)^{-k} \binom{N}{k} f(z + N - k), N = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

gözlemi ile, α . mertebeden kesirli farkı;

$$\Delta^\alpha f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(z + \alpha - k) \quad (1.10)$$

olarak tanımladılar. Burada serinin yakınsaması koşuluyla α ; rasyonel, reel ya da kompleks olabilir.

Çalışmalar (1.10)'un iki önemli özelliğini kanıtlar; birincisi, yol integrasyon gösterimi ve ikincisi, Leibniz kuralıdır. Birincisine göre Cauchy'nin;

$$D^N f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{N+1}} dt$$

integral formülünün $(t-z)^{N+1}$ in $(t-z)^{\alpha+1} = \frac{\Gamma(t-z+1)}{\Gamma(t-z-\alpha)}$ azalan faktöriyeli ile yer değiştirerek genelleştirilebilir. (1.10) eşitliğinin $t = z + a, z + a - 1, \dots$ de basit kutupları çevreleyen bir C yoluna sahip,

$$\Delta^\alpha f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_C f(t) \frac{\Gamma(t-z-\alpha)}{\Gamma(t-z+1)} dt$$

integraline eşit olduğunu göstermek için rezidü teoremi kullanılır. İkincisi; çalışmalar,

$$\Delta^\alpha f(z) g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \Delta^{\alpha-n} f(z) \Delta^n g(z + \alpha - n)$$

eşitliğini göstererek Leibniz kuralından kesirli farka bir genişleme sağlar. Bu iki formül kullanılarak, sonsuz dizi çalışmalarında kullanılan bir çok formül elde edilir.

(1.10) eşitliği ile ilgili bir problem vardır. Diaz ve Osler [12] kompleks değişkenli fonksiyonlarla ilgilendiklerinden dolayı tam sayı olmayan α için $f(z + \alpha - k)$ 'nin varlığı garantilenir. Fakat uygulamada genellikle f fonksiyonu, sadece değişken bir tam sayı olduğunda bilinir. Bu yüzden (1.10) eşitliği olduğu gibi kullanmak istersek $z + \alpha - k \in \mathbb{Z}$ olduğunu varsaymamız gerekir. Bu yüzden $\Delta^\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}-\alpha}$ olur ki bu işlem yapılan bölgeyi değiştirir.

Aksine, Hosking [13] ve Granger ve Joyeux'de [14] verilen geri farka dayanan kesirli fark, fonksiyonun bölgesini değiştirmez. Verilen tanım,

$$\nabla^\alpha f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-k) \quad (1.11)$$

dır. Burada $\alpha = 1$ alınırsa $f(t) - f(t-1)$ olur ve bu yüzden (1.11) geri farkın doğrudan bir genellemesidir. Önemli olarak, $t-k$ her t ve k için bir tam sayıdır ve bu yüzden tanım fark analizindeki uygulamalarda kullanılabilir. f 'nin her $t-k$ için bilinmesine ihtiyaç duyulması tanımın bir dezavantajıdır ki bu durum uygulamada problem olabilir.

Bu tanımların aksine Gray ve Zhang kesirli farkı toplam yoluyla tanımladı. n -katlı toplamın,

$$\sum_{k_1=a}^t \sum_{k_2=a}^{k_1} \dots \sum_{k_n=a}^{k_{n-1}} f(k_n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=a}^t (t-k+1)^{\overline{n-1}} f(k) \quad (1.12)$$

şeklinde bir çözüme sahip olduğunu gözlemlediler. Burada artan(rising) faktöriyel,

$$\alpha^{\bar{\beta}} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha, \alpha + \beta \neq 0, -1, -2, \dots \\ 1, & \alpha = \beta = 0 \\ 0, & \alpha = 0 \text{ ve } \beta \neq 0, -1, -2, \dots \\ \text{tanımsız,} & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.13)$$

olarak tanımlanır [15].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Tamsayı Mertebeli Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.1.1. Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini içinde bulunduran denklemlere diferansiyel denklem denir [16].

Tanım 2.1.2. $\sum_{i=1}^n c_i(x) y^{(i)} + c_0(x) y = f(x)$ şeklinde yazılabilen diferansiyel denklemlere lineer diferansiyel denklem denir.

Birinci mertebeden diferansiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve türevine göre lineerse bu diferansiyel denkleme birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. Lineer diferansiyel denklemlerin genel yazılışı;

$$P(x) y' + Q(x) y + R(x) = 0$$

şeklindedir. Burada P , Q ve R sürekli fonksiyonlardır. P 'nin belli bir aralığın bütün x değerleri için sıfır olmadığını düşünürsek,

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q(x) = -\frac{R(x)}{P(x)}$$

olmak üzere

$$y' + p(x) y = q(x)$$

şeklinde yazılabilir [16].

Tanım 2.1.3. $\sum_{i=1}^n c_i(x) y^{(i)} + c_0(x) y = 0$ şeklinde tanımlanan diferansiyel denkleme homojen diferansiyel denklem, aksi halde homojen olmayan diferansiyel denklem denir [16].

2.2. Kesirli Analizin Özel Fonksiyonları

Tanım 2.2.1. (Gamma Fonksiyonu) $n!$ 'i genelleştiren ve n 'in tam sayı olmayan ya da kompleks değerler almasına imkan sağlayan Gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$, ayrık kesirli analizin temel fonksiyonlarından biridir. Gamma fonksiyonu;

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

integrali ile tanımlanır.

Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.1)$$

fonksiyonel denklemini sağlar. Bu özellik kısmi integrasyon kullanarak

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-t} x]_0^b + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[x \int_0^b e^{-t} t^{x-1} dt \right] \\ &= x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

şeklinde ispatlanabilir.

Ayrıca Gamma fonksiyonu, bir n doğal sayısı için

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

özellğine sahiptir [17].

Tanım 2.2.2. (Mittag-Leffler Fonksiyonu) Tam sayı olmayan mertebeden diferansiyel denklemleri çözmede önemli bir rol oynayan Mittag-Leffler fonksiyonu ilk olarak Gösta Mittag-Leffler [18] tarafından ortaya atıldı. Bir ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, α ve β pozitif reel sayılar olmak üzere;

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

ve

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

seri açılımı ile tanımlanır. Burada $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ için,

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

üstel fonksiyonu elde edilir. Dolayısıyla Mittag-Leffler fonksiyonunun, e^x üstel fonksiyonunun genelleştirilmiş hali olduğu sonucuna varılır.

Literatürde bir ve iki parametrelili ayrıık Mittag-Leffler fonksiyonu, α ve β pozitif reel sayılar ve $|a| < 1$ olmak üzere

$$F_{\alpha}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\bar{k}}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

ve

$$F_{\alpha,\beta}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\bar{k}}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, herhangi bir reel μ sayısı için ayrıık Mittag-Leffler fonksiyonu

$$F_{\alpha,\beta}(a, t^{\bar{\mu}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\bar{k}\mu}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır [17].

Tanım 2.2.3. (Artan ve Azalan Faktöriyel) Artan ve azalan faktöriyel kuvvet, kesirli analiz teorisinde kullanılan temel notasyonlardandır. Azalan faktöriyel; delta (ileri) kesirli analizde kullanılırken, artan faktöriyel; nabla (geri) kesirli analizde kullanılır.

Azalan faktöriyel kuvvet t^x ,

$$t^x = t(t-1)(t-2)\dots(t-r+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-r)}, \quad r \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır.

Artan faktöriyel kuvvet $t^{\bar{r}}$,

$$t^{\bar{r}} = t(t+1)(t+2)\dots(t+r-1) = \prod_{k=0}^{n-1} (t+k), \quad r \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır. $t^{\bar{0}} = 1$ dir.

α herhangi bir reel sayı olsun. O halde $t^{\bar{\alpha}}$,

$$t^{\bar{\alpha}} = \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Burada $t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2, -1, 0\}$ ve $0^{\bar{\alpha}} = 0$ dir [18].

Tanım 2.2.4. (Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegrali) Her sonlu $[a, x]$ aralığında f sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon, $\sigma > 0$ bir reel sayı ve $m \in \mathbb{Z}$,

$m < \sigma < m + 1$ şartını sağlayan en küçük değer olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun σ . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi;

$$\begin{aligned} {}_a^{G.L}D_x^\sigma f(x) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{(k-\sigma)}}{\Gamma(k-\sigma+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\sigma+1)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\sigma} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun σ katlı Grünwald-Letnikov kesirli integrali ise;

$$\begin{aligned} {}_a^{G.L}D_x^{-\sigma} f(x) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{(k+\sigma)}}{\Gamma(k+\sigma+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m+\sigma+1)} \int_a^x (x-\tau)^{m+\sigma} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.2.5. (Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali) Her sonlu $[a, x]$ aralığında f sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon, $\sigma > 0$ bir reel sayı ve $m \in \mathbb{N}$, $m - 1 \leq \sigma < m$ şartını sağlayan en küçük değer olsun. f fonksiyonunun σ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi;

$${}_a^{R.L}D_x^\sigma f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\sigma)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-\tau)^{m-\sigma-1} f(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun σ katlı Riemann-Liouville kesirli integrali ise;

$${}_a^{R.L}D_x^{-\sigma} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_a^x (x-\tau)^{\sigma-1} f(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 2.2.6. (Caputo Kesirli Türevi) m , $m - 1 \leq \sigma < m$ olacak şekilde pozitif tam sayı ve f fonksiyonu ise m defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun σ . mertebeden Caputo kesirli türevi;

$${}_a^C D_x^\sigma f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\sigma)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\sigma-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 2.2.7. a bir reel sayı ve α pozitif bir reel sayı olsun. f 'nin α . mertebeden kesirli toplamı

$$\nabla_a^{-\alpha} f(t) = \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır. Burada $t = a + 1, a + 2, \dots$ ve $\rho(t) = t - 1$ zaman skalası analizinde geri sıçrama operatörüdür [18].

Tanım 2.2.8. a bir reel sayı ve α pozitif bir reel sayı olsun. n bir tam sayı olmak üzere, $0 < n - 1 < \alpha < n$ için f 'nin α . mertebeden kesirli farkı (Riemann-Liouville kesirli farkı)

$$\nabla_a^\alpha f(t) = \nabla^n \nabla_a^{-(n-\alpha)} f(t) = \nabla^n \sum_{s=a}^t \frac{(t - \rho(s))^{\overline{n-\alpha-1}}}{\Gamma(n-\alpha)} f(s) \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır. Burada $f, \mathbb{N}_a = \{a, a + 1, a + 2, \dots\}$ üzerinde tanımlıdır [18].

Tanım 2.2.9. $\alpha > 0$ için, nabla üstel fonksiyonu

$$\widehat{e}_{\alpha, \alpha}(a, t^{\overline{\alpha}}) = (1 - a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (t + 1)^{\overline{(n+1)\alpha-1}}}{\Gamma((n+1)\alpha)} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır. Burada $|a| < 1$ ve $t \geq 0$ dır [18].

Lemma 2.2.1. (Kuvvet Kuralı)

$$(i) \nabla(t^{\overline{\alpha}}) = \alpha t^{\overline{\alpha-1}}$$

$$(ii) \nabla_0^{-\alpha}(t + 1)^{\overline{\beta}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t + 1)^{\overline{\alpha+\beta}}$$

eşitlikleri sağlanır [17].

Teorem 2.2.1. $f(x)$ ve $g(x): \mathbb{N}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ ve h, k lar sabitler olmak üzere

$$\nabla^{-\alpha} \nabla^{-\beta} f(x) = \nabla^{-(\alpha+\beta)} f(x) = \nabla^{-\beta} \nabla^{-\alpha} f(x) \quad (2.12)$$

$$\nabla^\alpha [hf(x) + kg(x)] = h\nabla^\alpha f(x) + k\nabla^\alpha g(x) \quad (2.13)$$

$$\nabla \nabla^{-\alpha} f(x) = \nabla^{-(\alpha-1)} f(x) \quad (2.14)$$

$$\nabla^{-\alpha} \nabla f(x) = \nabla^{(1-\alpha)} f(x) - \binom{x + \alpha - 2}{x - 1} f(0) \quad (2.15)$$

dır [19].

Teorem 2.2.2. (Kesirli Toplam ve Farkın Değişme Özelliği) Herhangi bir $\alpha > 0$ için

$$\nabla_{a+1}^{-\alpha} \nabla f(t) = \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) - \frac{(t - a + 1)^{\overline{\alpha-1}}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \quad (2.16)$$

denklemini sağlanır. Burada $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlıdır [17].

2.3. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri

2.3.1. Lineerlik Özelliği

$f(x)$ ve $g(x)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_α ve g_α türevleri mevcut ise

$$(hf(x) + kg(x))_\alpha = hf_\alpha(x) + kg_\alpha(x) \quad (2.17)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ ve h, k sabitlerdir [4].

2.3.2. Homojenlik Özelliği

Herhangi bir c sabiti için

$$\frac{d^\alpha(cf)}{d(x-a)^\alpha} = c \frac{d^\alpha f}{d(x-a)^\alpha} \quad (2.18)$$

eşitliği sağlanır [20].

2.3.3. Birleşme Özelliği

α ve β pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha, \quad D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}, \quad D^\alpha f = g \rightarrow f = D^{-\alpha} g$$

eşitlikleri belli durumlarda geçerlidir. $\alpha - \beta < 0$ iken

$${}_a D_x^\alpha [{}_a D_x^{-\beta} f(x)] = {}_a D_x^{\alpha-\beta} f(x) \quad (2.19)$$

durumu geçerlidir. Fakat önce türevin sonra integralin alındığı durumlarda ise;

$${}_a D_x^{-\beta} [{}_a D_x^\alpha f(x)] = {}_a D_x^{\alpha-\beta} f(x) - \sum_{k=\beta-\alpha}^{\beta-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(\alpha+k-\beta)}(a) \quad (2.20)$$

eşitliği geçerlidir.

Ayrıca λ bir sabit olmak üzere,

$$(e^{\lambda x})_\alpha = \lambda^\alpha e^{\lambda x}, \quad (\lambda \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}) \quad (2.21)$$

$$(e^{-\lambda x})_\alpha = e^{-i\pi\alpha} \lambda^\alpha e^{-\lambda x}, \quad (\lambda \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}) \quad (2.22)$$

$$(e^\lambda)_\alpha = e^{-i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} x^{\lambda-\alpha}, \quad \left(\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}, \left| \frac{\Gamma(\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} \right| < \infty \right) \quad (2.23)$$

eşitlikleri sağlanır [20 – 22].

2.3.4. İndis Kuralı

$f(x)$ ve $g(x)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $(f_\alpha)_\beta$ ve $(f_\beta)_\alpha$ türevleri mevcutsa,

$$(f_\alpha(x))_\beta = f_{\alpha+\beta}(x) = (f_\beta(x))_\alpha \quad (2.24)$$

dır. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ ve $\left| \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \right| < \infty$ dur [4].

2.3.5. Genelleştirilmiş Leibniz Kuralı

$f(x)$ ve $g(x)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_α ve g_α türevleri mevcutsa;

$$(f(x)g(x))_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} f_{\alpha-n}(x) g_n(x) \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} \right| < \infty$ dur [4].

3. AYRIK KESİRLİ ANALİZİN ÜSTEL FONKSİYONLARI

Bu bölümde ayrik kesirli analizin üstel fonksiyonları ele alındı. Sabit katsayılı kesirli mertebeden ardışık lineer fark denklemleri çalışılıp, genel çözümlerinin bazı durumlarda üstel fonksiyonların lineer kombinasyonları olduğu ispatlandı. Geri fark yada nabla operatörü ve kesirli farkın Riemann-Liouville tanımı kullanıldı.

Atıcı ve Elloe, çalışmalarında $0 < \alpha < 1$ ve $|a| < 1$ olmak üzere;

$$\nabla_0^\alpha y(t) = ay(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

$$\nabla_0^{-(1-\alpha)} y(t) |_{t=0} = y(0) = 1 \quad (3.2)$$

formundaki başlangıç değer probleminin çözümünü Laplace dönüşümü kullanarak

$$y(t) = \widehat{e}_{\alpha, \alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) = (1-a)(t+1)^{\overline{\alpha-1}} F_{\alpha, \alpha} \left[a, (t+\alpha)^{\bar{\alpha}} \right]$$

şeklinde elde etmişlerdir [23].

Gamma fonksiyonu sıfır ve negatif tam sayılarda tanımlı olmadığından dolayı, $\{t \in \mathbb{R} : t \text{ ve } t + \alpha \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$ dan $\mathbb{R}$ reel sayı grubuna bir $t \rightarrow t^{\bar{\alpha}}$ eşlemesi düşünülür.

Lemma 3.1. (Kuvvet Kuralı) $v > 0$ ve μ iki reel sayı olmak üzere $\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}$ tanımlı olsun. O zaman her $t \in \mathbb{N}_a$ için,

$$\nabla_1^{-v} t^{\bar{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)} t^{\overline{\mu+v}} \quad (3.3)$$

eşitliği sağlanır [24].

İspat. (2.9) dan,

$$\begin{aligned} \nabla_1^{-v} t^{\bar{\mu}} &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=1}^t (t - \rho(s))^{\overline{v-1}} s^{\bar{\mu}}, \quad \rho(s) = s-1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-1} (t-s)^{\overline{v-1}} (s+1)^{\bar{\mu}} \end{aligned}$$

olup (2.3) den dolayı $(t-s)^{\overline{v-1}} = \frac{\Gamma(t-s+v-1)}{\Gamma(t-s)}$ ve $(s+1)^{\bar{\mu}} = \frac{\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(s+1)}$ olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} \nabla_1^{-v} t^{\bar{\mu}} &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{\Gamma(t-s+v-1)}{\Gamma(t-s)} \frac{\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(s+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{\Gamma(t) \Gamma(t-s+v-1) \Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(t) \Gamma(t-s) \Gamma(s+1)} \end{aligned}$$

olur. Burada $\binom{t-1}{s} = \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(s+1)\Gamma(t-s)}$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\nabla_1^{-v} t^{\bar{\mu}} &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-1}{s} \frac{\Gamma(t-s+v-1) \Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(t)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-1}{s} \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(t-s+v-1) \Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1) \Gamma(t)}\end{aligned}$$

yazılabilir. $(\mu+1)^{\bar{s}} = \frac{\Gamma(\mu+s+1)}{\Gamma(\mu+1)}$ ve $v^{\overline{t-s-1}} = \frac{\Gamma(v+t-s-1)}{\Gamma(v)}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\nabla_1^{-v} t^{\bar{\mu}} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t)} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-1}{s} (\mu+1)^{\bar{s}} v^{\overline{t-s-1}} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t)} (v+\mu+1)^{\overline{t-1}}\end{aligned}$$

olup, $(v+\mu+1)^{\overline{t-1}} = \frac{\Gamma(v+\mu+t)}{\Gamma(v+\mu+1)}$ ve $t^{\overline{\mu+v}} = \frac{\Gamma(t+\mu+v)}{\Gamma(t)}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\nabla_1^{-v} t^{\bar{\mu}} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t)} \frac{\Gamma(v+\mu+t)}{\Gamma(v+\mu+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+1)} t^{\overline{\mu+v}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada Andrews, Askey ve Roy'un çalışmalarında

$$(v+\mu+1)^{\overline{t-1}} = \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-1}{s} (\mu+1)^{\bar{s}} v^{\overline{t-s-1}}$$

dir [25].

Lemma 3.2. $\alpha > 0$ için f , $\mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı olmak üzere;

$$\nabla_{a+1}^{-\alpha} \nabla f(t) = \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) - \frac{(t-a+1)^{\overline{\alpha-1}}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \quad (3.4)$$

eşitliği sağlanır [24].

İspat. $t \in \{a+1, a+2, \dots\}$ için,

$$\nabla_{a+1}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+1}^t (t-\rho(s))^{\overline{\alpha-1}} f(s)$$

olur.

$t \in \{a, a+1, a+2, \dots\}$ için,

$$\nabla_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^t (t-\rho(s))^{\overline{\alpha-1}} f(s)$$

olduğundan,

$$\nabla_{a+1}^{-\alpha} f(t) = \nabla_a^{-\alpha} f(t)$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \nabla_a^{-\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^t (t - \rho(s))^{\overline{\alpha-1}} f(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a + 1)^{\overline{\alpha-1}} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+1}^t (t - \rho(s))^{\overline{\alpha-1}} f(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a + 1)^{\overline{\alpha-1}} f(a) + \nabla_a^{-\alpha} f(t) \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan Abdeljawad ve Atıcı'nın [26] çalışmalarından;

$$\begin{aligned} \nabla_a^{-\alpha} \nabla f(t) &= \nabla_{a+1}^{-\alpha} \nabla f(t) = \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) - \frac{(t - a + 1)^{\overline{\alpha-1}}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \\ &= \nabla \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a + 1)^{\overline{\alpha-1}} f(a) + \nabla_a^{-\alpha} f(t) \right\} - \frac{(t - a + 1)^{\overline{\alpha-1}}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \\ &= \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} (t - a + 1)^{\overline{\alpha-2}} f(a) + \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) - \frac{(t - a + 1)^{\overline{\alpha-1}}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \\ &= \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(t - a + \alpha - 1)}{\Gamma(t - a + 1)} f(a) \\ &\quad + \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(t - a + \alpha)}{\Gamma(t - a + 1)} f(a) \\ &= \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) + \frac{(\alpha - 1) \Gamma(t - a + \alpha - 1) - \Gamma(t - a + \alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(t - a + 1)} f(a) \end{aligned}$$

olur. (2.1) ve (2.3) den,

$$\begin{aligned} \nabla_{a+1}^{-\alpha} \nabla f(t) &= \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) \\ &\quad + \frac{(\alpha - 1) \Gamma(t - a + \alpha - 1) - (t - a + \alpha - 1) \Gamma(t - a + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(t - a + 1)} f(a) \\ &= \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) + \frac{\Gamma(t - a + \alpha - 1) (\alpha - 1 - t + a - \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(t - a + 1)} f(a) \\ &= \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) + \frac{\Gamma(t - a + \alpha - 1) (a - t)}{\Gamma(\alpha) (t - a) \Gamma(t - a)} f(a) \\ &= \nabla \nabla_a^{-\alpha} f(t) - \frac{(t - a)^{\overline{\alpha-1}}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.3. (Leibniz Kuralı) $\alpha > 0$ için, $f.g$ çarpımının α . mertebeden kesirli farkı;

$$\nabla_a^\alpha f(t) g(t) = \sum_{n=0}^{t-a} \binom{\alpha}{n} \left[\nabla_a^{\alpha-n} f(t-n) \right] [\nabla^n g(t)] \quad (3.5)$$

dir. Burada,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(\alpha - n + 1)}$$

dir. f ve g , $\mathbb{N}_0$ üzerinde tanımlı ve t pozitif bir tam sayıdır [24].

İspat. (2.9) dan,

$$\nabla_a^\alpha f(t) g(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=a}^t (t - k + 1)^{\overline{-\alpha-1}} f(k) g(k)$$

ve

$$g(t - k) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-1)^n \nabla^n g(t)$$

olduğundan,

$$\nabla_a^\alpha f(t) g(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=a}^t (t - k + 1)^{\overline{-\alpha-1}} f(k) \sum_{n=0}^{t-k} \binom{t-k}{n} (-1)^n \nabla^n g(t)$$

olarak yazılabilir.

Herhangi bir negatif olmayan n tam sayısı için,

$$(-1)^n = \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(n - \alpha)}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \nabla_a^\alpha f(t) g(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=a}^t (t - k + 1)^{\overline{-\alpha-1}} f(k) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{t-k} \binom{t-k}{n} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(n - \alpha)} \nabla^n g(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{n=0}^{t-a} \sum_{k=a}^{t-n} (t - k + 1)^{\overline{-\alpha-1}} f(k) \\ &\quad \times \binom{t-k}{n} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(n - \alpha)} \nabla^n g(t) \end{aligned}$$

olur ve (2.3) den,

$$\begin{aligned} \nabla_a^\alpha f(t) g(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{n=0}^{t-a} \sum_{k=a}^{t-n} \frac{\Gamma(t - k - \alpha)}{\Gamma(t - k + 1)} f(k) \\ &\quad \times \frac{\Gamma(t - k + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(t - k - n + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(n - \alpha)} \nabla^n g(t) \end{aligned}$$

yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ve

$$(t - n - k + 1)^{\overline{-\alpha-1}} = \frac{\Gamma(t - k - \alpha)}{\Gamma(t - n - k + 1)}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_a^\alpha f(t) g(t) &= \sum_{n=0}^{t-a} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha-n+1)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=a}^{t-n} (t-n-k+1)^{\overline{n-\alpha-1}} f(k) \right\} \nabla^n g(t) \end{aligned}$$

bulunur. (2.9) dan,

$$\begin{aligned} \nabla_a^{\alpha-n} f(t-n) &= \sum_{k=a}^{t-n} \frac{(t-n-\rho(k))^{\overline{n-\alpha-1}}}{\Gamma(n-\alpha)} f(k), \rho(k) = k-1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=a}^{t-n} (t-n-k+1)^{\overline{n-\alpha-1}} f(k) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden,

$$\nabla_a^\alpha f(t) g(t) = \sum_{n=0}^{t-a} \binom{\alpha}{n} \left[\nabla_a^{\alpha-n} f(t-n) \right] [\nabla^n g(t)]$$

elde edilir.

Teorem 3.1. $\widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\overline{\alpha}})$ üstel fonksiyonu (3.1) ve (3.2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür [23].

Lemma 3.4. Aşağıdaki

$$\nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\overline{\alpha}}) = (1-a) F_{\alpha,1} \left(a, (t+1)^{\overline{\alpha}} \right) \quad (3.6)$$

eşitlik sağlanır [24].

İspat. Nabla üstel fonksiyonu yakınsak olmak üzere, (2.11) den,

$$\begin{aligned} \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\overline{\alpha}}) &= \nabla_0^{-(1-\alpha)} (1-a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (t+1)^{\overline{(n+1)\alpha-1}}}{\Gamma((n+1)\alpha)} \\ &= (1-a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \nabla_0^{-(1-\alpha)} (t+1)^{\overline{(n+1)\alpha-1}}}{\Gamma((n+1)\alpha)} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Lemma 3.1. kuvvet kuralından;

$$\nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\overline{\alpha}}) = (1-a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (t+1)^{\overline{n\alpha}}}{\Gamma(n\alpha+1)}$$

olur ve (2.2) den,

$$\nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\overline{\alpha}}) = (1-a) F_{\alpha,1} \left(a, (t+1)^{\overline{\alpha}} \right)$$

elde edilir.

Lemma 3.5. Aşağıdaki

$$(i) \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) = a \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, (t-1)^{\bar{\alpha}}), t = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \nabla_0^{\alpha} \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) = a \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}})$$

eşitlikleri sağlanır [24].

İspat. (i) (3.1) denklemini bir birim sola kaydırırsak,

$$\nabla_0^{\alpha-1} y(t) = ay(t-1), t = 2, 3, \dots$$

denklemini elde edilir. Burada $y(t) = \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}})$ olduğu düşünülürse;

$$\nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) = a \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, (t-1)^{\bar{\alpha}})$$

bulunur.

(ii) Eşitliğin sol tarafına ayrık kesirli fark tanımını uygulanırsa;

$$\nabla_0^{\alpha} \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) = \nabla \nabla_0^{\alpha-1} \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}})$$

ve Lemma 3.2. de $f(t) = \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}})$ alınırsa ve $f(0) = 0$ olduğundan,

$$\nabla_1^{\alpha-1} \nabla f(t) = \nabla \nabla_0^{\alpha-1} f(t)$$

elde edilir. Bu yüzden;

$$\begin{aligned} \nabla_0^{\alpha} \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) &= \nabla \nabla_0^{\alpha-1} \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) \\ &= \nabla_1^{\alpha-1} \nabla \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) \\ &= \nabla_1^{\alpha-1} \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) \end{aligned}$$

olur. (i) ve (2.9) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_1^{\alpha-1} \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) &= \nabla_1^{\alpha-1} a \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, (t-1)^{\bar{\alpha}}) \\ &= a \sum_{s=1}^t \frac{(t-\rho(s))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, (s-1)^{\bar{\alpha}}) \\ &= a \sum_{u=0}^{t-1} \frac{(t-1-\rho(u))^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, u^{\bar{\alpha}}) \\ &= a \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(a, t^{\bar{\alpha}}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzden,

$$\nabla_0^t \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) = a \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}})$$

sonucuna ulaşılır.

Lemma 3.6. Aşağıdaki

$$\nabla_0^t (t \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}})) = a t \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) + \alpha \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) \quad (3.7)$$

eşitlik sağlanır [24].

İspat. Lemma 3.3. Leibniz kuralı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_0^t (t \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}})) &= \sum_{n=0}^t \binom{\alpha}{n} \left[\nabla_0^{\alpha-n} \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) \right] [\nabla^n t] \\ &= \binom{\alpha}{0} \left[\nabla_0^t \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) \right] t + \binom{\alpha}{1} \left[\nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) \right] \nabla t \\ &= \left[\nabla_0^t \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) \right] t + \alpha \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) \end{aligned}$$

olur. Burada Lemma 3.5. in (i) şıkkı kullanılırsa;

$$\nabla_0^t (t \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}})) = a \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}}) t + \alpha \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha} (a, t^{\bar{\alpha}})$$

elde edilir.

3.1. Casoratian ve Lineer Bağımsızlık

Bu bölümde ayrık fonksiyonlar için Casoratian kavramı tanımlandı. Casoratian, homojen lineer kesirli denklemlerin çözüm kümesinin lineer bağımsız ya da lineer bağımlı olup olmadığının belirlenmesine yardımcı olur. Bunun için nabla kesirli fark denkleminin genel çözümünüyle alakalı bazı temel teoremler ifade ve ispat edildi.

Tanım 3.1.1. $\nabla_0^{(n\alpha)} = \nabla_0^\alpha \nabla_0^{\alpha-1} \dots \nabla_0^\alpha$, $p_n \neq 0$ ve $0 \leq i \leq n$ için p_i ler sabit olmak üzere;

$$p_n \nabla_0^{(n\alpha)} y(t) + p_{n-1} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y(t) + \dots + p_1 \nabla_0^\alpha y(t) + p_0 y(t) = 0 \quad (3.8)$$

lineer kesirli fark denklemini ele alalım.

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ayrık I aralığında tanımlı fonksiyonlar olmak üzere, $C[y_1, y_2, \dots, y_n]$ ile gösterilen aşağıdaki determinant

$$\begin{vmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(t) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_2(t) & \dots & \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_n(t) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_1(t) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_2(t) & \dots & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_n(t) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{(2\alpha)} y_1(t) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{(2\alpha)} y_2(t) & \dots & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{(2\alpha)} y_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_1(t) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_2(t) & \dots & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_n(t) \end{vmatrix}$$

Casoratian olarak adlandırılır [24].

Teorem 3.1.1. (3.8) denkleminin $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ çözümlerinin $t \geq 0$ olmak üzere lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart Casoratian'ının sıfırdan farklı olmasıdır [24].

İspat. $n = 2$ için ispatlayalım. İspat herhangi bir n için kolaylıkla yapılabilir. $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ her $t \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $p \neq 0$ ve q, r ler sabit olmak üzere

$$p \nabla_0^\alpha \nabla_0^\alpha y(t) + q \nabla_0^\alpha y(t) + r y(t) = 0, \quad t = 1, 2, \dots$$

probleminin iki çözümü olsun. y_1 ve y_2 lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. O zaman $t \geq 0$ için,

$$y_2(t) = k y_1(t)$$

olacak şekilde bir k sabiti vardır. Bu durum, her $t \geq 0$ için;

$$C[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(t) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} k y_1(t) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_1(t) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha k y_1(t) \end{vmatrix} = 0$$

olduğunu gösterir.

Tersine, her $t \geq 0$ için $y_1 \neq 0$ ve $y_2 \neq 0$ ve de her $t \geq 0$ için $C[y_1, y_2](t) = 0$ olduğunu varsayalım.

Aşağıdaki iki bilinmeyenli

$$\begin{cases} k_1 \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(0) + k_2 \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_2(0) = 0 \\ k_1 \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_1(0) + k_2 \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_2(0) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(0) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_2(0) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_1(0) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0$$

matris sistemi ile temsil edilebilir.

Katsayılar matrisinin determinantı sıfır olduğu için üstteki denklemin aşikar olmayan bir çözümü k_1, k_2 dir. $k_1 = 0$ ve $k_2 \neq 0$ durumunun mümkün olmadığını belirtelim çünkü,

$$k_1 \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(0) + k_2 \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_2(0) = 0$$

denklemini $k_2 y_2(0) = 0$ için sağlanır ki bu durum mümkün değildir.

Şimdi,

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

denklemini göz önüne alalım. Kolaylıkla gösterebiliriz ki $y(t)$;

$$\begin{cases} p \nabla_0^\alpha \nabla_0^\alpha y(t) + q \nabla_0^\alpha y(t) + r y(t) = 0, t = 1, 2, \dots \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} y(t) |_{t=0} = y(0) = 0 \text{ ve } \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Öncelikle, başlangıç değer probleminin değişken değiştirme yardımıyla lineer bir nabra kesirli fark denklem sistemine dönüştürülebileceğini belirtelim. Öyle ki;

$$y_1(t) = y(t) \Rightarrow \nabla_0^\alpha y_1(t) = \nabla_0^\alpha y(t) = y_2(t)$$

$$y_2(t) = \nabla_0^\alpha y(t) \Rightarrow \nabla_0^\alpha y_2(t) = \nabla_0^\alpha \nabla_0^\alpha y(t) = -\frac{q}{p} \nabla_0^\alpha y(t) - \frac{r}{p} y(t) = -\frac{q}{p} y_2(t) - \frac{r}{p} y_1(t)$$

dir. Bu yüzden $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\nabla_0^{-(1-\alpha)} Y(t) |_{t=0} = \begin{bmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(t) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_2(t) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} y(t) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y(t) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

başlangıç koşulu ile aşağıdaki,

$$\nabla_0^\alpha Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{r}{p} & -\frac{q}{p} \end{bmatrix} Y(t)$$

dinamik sistemi elde edilir.

Atıcı ve Elloe'nin [23] ispatladıkları varlık ve teklik teoremi ile her $t \geq 0$ için,

$$k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) = 0$$

sonucu çıkarılır. k_1 ve k_2 sıfırdan farklı olduğu için y_1 ve y_2 lineer bağımlıdır.

Teorem 3.1.2. $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ (3.8) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsunlar. O zaman (3.8) denkleminin her bir $y(t)$ çözümü $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

şeklinde yazılabilir [24].

İspat. $y(t)$, (3.8) denkleminin bir çözümü olsun. Kesirli nablo fark ve toplam denklemler sistemini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} c_1 \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(0) + c_2 \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_2(0) + \dots + c_n \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_n(0) &= \nabla_0^{-(1-\alpha)} y(0) \\ c_1 \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_1(0) + c_2 \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_2(0) + \dots + c_n \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_n(0) &= \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y(0) \\ &\vdots \\ c_1 \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_1(0) + \dots + c_n \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_n(0) &= \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y(0) \end{aligned}$$

sistemi matris formunda gösterilebilir öyle ki;

$$\begin{aligned} [Y] &= \begin{bmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} y(0) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y(0) \\ \vdots \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y(0) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_1(0) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_2(0) & \dots & \nabla_0^{-(1-\alpha)} y_n(0) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_1(0) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_2(0) & \dots & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y_n(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_1(0) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_2(0) & \dots & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y_n(0) \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{[C]} \end{aligned}$$

olur. Casoratian $C[y_1, y_2, \dots, y_n](0) \neq 0$ dir. Çünkü çözüm lineer bağımsızdır. Bu yüzden $\det A \neq 0$ dir ki bu A matrisinin terslenebilir olduğu anlamına gelir. Yukarıdaki sistemin her iki tarafı soldan $[A]^{-1}$ ile çarpılırsa $[C] = [A]^{-1} [Y]$ elde edilir.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ yukarıdaki sistemin tek çözümü olsun. Bu durumda,

$$v(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

olur. Öyle ki $v(t)$;

$$\begin{aligned}
\nabla_0^{-(1-\alpha)} v(0) &= \nabla_0^{-(1-\alpha)} y(0) \\
\nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha v(0) &= \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha y(0) \\
&\vdots \\
\nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} v(0) &= \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^{((n-1)\alpha)} y(0)
\end{aligned}$$

sisteminin bir çözümüdür.

Çözümün tekliğinden, $y(t) = v(t)$ elde edilir. Bu yüzden,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

olur.

3.2. Kesirli Mertebeden Ardışık Lineer Fark Denklemlerinin Çözümü

Ardışık ayrık kesirli denklem,

$$p \nabla_0^\alpha \nabla_0^\alpha y(t) + q \nabla_0^\alpha y(t) + r y(t) = 0, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

ile verilir. Burada $0 < \alpha < 1$, $p \neq 0$ ve q, r sabit katsayılarıdır. (3.9) denkleminin karakteristik denklemi;

$$p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

dır.

λ_1 ve λ_2 karakteristik denklemin pozitif reel kökleri olsun. Verilen herhangi bir denklemin, karakteristik kökleri ile temsil edilebileceği gerçeği kullanılırsa;

$$\nabla_0^\alpha \nabla_0^\alpha y(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) \nabla_0^\alpha y(t) + (\lambda_1 \lambda_2) y(t) = 0 \quad (3.10)$$

denklemi elde edilir [24].

Teorem 3.2.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise c_1 ve c_2 sabit parametreler olmak üzere (3.9) denkleminin genel çözümü;

$$y(t) = c_1 \widehat{e}_{\alpha, \alpha}(\lambda_1, t^{\overline{\alpha}}) + c_2 \widehat{e}_{\alpha, \alpha}(\lambda_2, t^{\overline{\alpha}})$$

dır [24].

İspat. Kolaylıkla ispatlanabilir ki $\widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}})$ ve $\widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}})$ (3.10) denkleminin çözümleridir. Bu iki çözümün lineer bağımsız olduklarını göstereyim. Bu iki fonksiyonun Casoratian'ı;

$$\begin{aligned} C[y_1, y_2] &= \begin{vmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}}) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \nabla_0^\alpha \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}) & \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}}) \\ \lambda_1 \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}) & \lambda_2 \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}}) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}) \nabla_0^{-(1-\alpha)} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}}) \end{aligned}$$

dır.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan dolayı, üstteki son ifade sıfıra eşit değildir. Bu yüzden $\{\widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}), \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}})\}$ çözüm kümesi linner bağımsızdır ve dolayısıyla Teorem 3.1.2. den dolayı (3.10) denkleminin genel çözümünün,

$$y(t) = c_1 \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}) + c_2 \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}})$$

olduğu sonucu çıkarılır.

Teorem 3.2.2. $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$ ise c_1 ve c_2 sabit parametreler olmak üzere (3.4) denkleminin genel çözümü;

$$y(t) = c_1 \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1, t^{\bar{\alpha}}) + c_2 t \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}})$$

dır [24].

İspat. Öncelikle $t \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda_2, t^{\bar{\alpha}})$ 'nin (3.10) denklemini sağladığını göstereyim. Lemma 3.6. ve Lemma 3.5. in (ii) şıkkı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_0^\alpha (t \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})) &= \lambda t \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + \alpha \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \\ \nabla_0^\alpha \left(\lambda t \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + \alpha \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \right) &= \nabla_0^\alpha (\lambda t \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})) \\ &\quad + \alpha \nabla_0^\alpha \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \\ &= \lambda^2 t \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + \alpha \lambda \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \\ &\quad + \alpha \lambda \nabla_0^{\alpha-1} \widehat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$\nabla_0^\alpha \nabla_0^\alpha (t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})) = \lambda^2 t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + 2\alpha\lambda \nabla_0^{\alpha-1} \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})$$

yazılabilir. Bulunan bu değerler (3.10) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \lambda^2 t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + 2\alpha\lambda \nabla_0^{\alpha-1} \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) - 2\lambda^2 t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \\ - 2\alpha\lambda \nabla_0^{\alpha-1} \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + \lambda^2 t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi $\{t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}), \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})\}$ kümesinin elemanlarının lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Bu kümenin Casoratian'ı hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)}(t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})) & \nabla_0^{-(1-\alpha)}\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)}\nabla_0^\alpha(t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})) & \nabla_0^{-(1-\alpha)}\nabla_0^\alpha\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} \nabla_0^{-(1-\alpha)}(t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})) & \nabla_0^{-(1-\alpha)}\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \\ \nabla_0^{-(1-\alpha)}\left(\lambda t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + \alpha \nabla_0^{\alpha-1} \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})\right) & \lambda \nabla_0^{-(1-\alpha)}\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \end{vmatrix} \\ = & - \left[\alpha \nabla_0^{\alpha-1} \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \right] \nabla_0^{-(1-\alpha)} \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi Casoratian sıfıra eşit değildir ve dolayısıyla Teorem 3.1.2 den dolayı (3.10) denkleminin genel çözümü;

$$y(t) = c_1 \hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}}) + c_2 t\hat{e}_{\alpha,\alpha}(\lambda, t^{\bar{\alpha}})$$

olarak bulunur.

4. AYRIK KESİRLİ ANALİZ VE LEGENDRE DENKLEMİ İÇİN AÇIK ÇÖZÜMLERİN ELDE EDİLMESİ

4.1. Legendre Denklemi

Fizik ve mühendislik alanında karşılaşılan diferansiyel denklemlerden pek çoğu

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) + k^2(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = F(\vec{r}) \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tür denklemlere aşağıdaki örnekler verilebilir:

1. $k(\vec{r})$ ve $F(\vec{r})$ 'nin sıfır olduğu durumlarda,

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (4.2)$$

Laplace denklemi elde edilir. Bu denklem elektrostatik, magnetostatik, düzgün akış problemleri, yüzey dalgaları, ısı transferi ve gravitasyon gibi pek çok değişik konuda karşımıza çıkar.

2. Laplace denkleminin sağ tarafı sıfırdan farklı olursa,

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) = F(\vec{r}) \quad (4.3)$$

Poisson denklemi elde edilir. Sağ taraftaki terim genelde yüklerin, kayıp veya kaynakların varlığını gösterir.

3. Helmholtz veya dalga denklemi ise,

$$\vec{\nabla}^2 \Psi \pm k^2 \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (4.4)$$

şeklinde verilir, burada k bir sabittir.

4. Bu tür denklemlere bir başka önemli örnek de zamandan bağımsız

$$\frac{-h^2}{2\varepsilon} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlı Schrödinger denklemdir. (4.5) i (4.1) denklemi ile karşılaştırsak, $F(\vec{r})$ nin sıfır ve k parametresinin de

$$k^2(\vec{r}) = \frac{2\varepsilon}{h^2} [E - V(\vec{r})] \quad (4.6)$$

olduğu görülür.

Bütün bu denklemlerin ortak özellikleri; doğrusal, ikinci dereceden ve kısmi türevli diferansiyel denklem olmalarıdır. Analitik yaklaşımlar arasında seriler, değişkenlerin ayrılması, Green fonksiyonları ve integral dönüşümler en çok kullanılan yöntemlerdir. Analitik tekniklerin başarısız olduğu durumlarda ise sayısal yöntemlere başvurulur. Bilimin değişik alanlarında karşılaşılabileceğimiz bu denklemlerin herhangi bir alanda bulunmuş çözümünü, başka bir alana uyarlarken sınır şartlarının farklılık gösterebileceğine dikkat edilmelidir. Elektrostatik problemlerinde Laplace denklemini çözerken kullanacağımız sınır şartları, düzgün akış problemlerinde anlamlı olmayacaktır. Elektrostatikte elektrik alanları yüzeylere dik olurken, akış problemlerinde hız alanı yüzeyleri takip edecektir.

(4.1) denklemi küresel kutupsal koordinatlarda ve k parametresinin sadece radyal koordinat r 'ye bağlı olduğu durumlarda değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak çözülecektir. Potansiyel enerjinin

$$V(\vec{r}) = V(r) \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabildiği merkezci kuvvetler için, zamandan bağımsız Schrödinger denklemi bu tür denklemlere çok önemli bir örnek oluşturur. İlk etapta $\Psi(r, \theta, \phi)$ çözümünü r ve (θ, ϕ) değişkenlerine bağlı olarak

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) Z(\theta, \phi) \quad (4.8)$$

şeklinde değişkenlerine ayırılım. Bu çözüm sistemdeki r bağımlılığının (θ, ϕ) 'den yani, yönden bağımsız olduğunu göstermektedir. Bu (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} (R(r) Z(\theta, \phi)) \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (R(r) Z(\theta, \phi)) \right] \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (R(r) Z(\theta, \phi)) + k^2(r) R(r) Z(\theta, \phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

bulunur. Bu denklem

$$\frac{r^2}{R(r) Z(\theta, \phi)} \quad (4.10)$$

ile çarpılıp, r bağımlılığı sol ve (θ, ϕ) bağımlılığı da sağ tarafta toplanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right] + k^2(r) r^2 \\ & = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{Z(\theta, \phi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Z(\theta, \phi) \right] - \frac{1}{\sin^2 \theta Z(\theta, \phi)} \frac{\partial^2 Z(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. r ve (θ, ϕ) birbirlerinden bağımsız değerler olabildiklerinden, bu denklemin bütün r ve (θ, ϕ) değerleri için sağlanması ancak her iki tarafın da aynı sabite eşit olması ile mümkün olur. Bu sabite ayrılma sabiti denir ve $\nu(\nu + 1)$ ile gösterilirse (4.11) denklemi

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + r^2 k^2(r) R(r) - \nu(\nu + 1) R(r) = 0 \quad (4.12)$$

ve

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Z(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Z(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \nu(\nu + 1) Z(\theta, \phi) = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde iki denkleme indirgenir.

$R(r)$ 'nin sağladığı (4.12) denklemi sıradan bir diferansiyel denklemdir. İkinci denklemden ise,

$$Z(\theta, \phi) = \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (4.14)$$

şeklinde tekrar değişkenlerine ayrılabilir ve ayrılma sabitine ε^2 denilirse,

$$\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] + \nu(\nu + 1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = \varepsilon^2 \quad (4.15)$$

yazılabilir. Buradan, $\Theta(\theta)$ ve $\Phi(\phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + [\nu(\nu + 1) \sin^2 \theta - \varepsilon^2] \Theta(\theta) = 0 \quad (4.16)$$

ve

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \varepsilon^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (4.17)$$

olarak bulunurlar. Görüldüğü gibi, kısmi türevli bir diferansiyel denklem olan (4.1) denklemi, küresel simetrik problemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi ile, (4.12), (4.16) ve (4.17) de verilen üç sıradan diferansiyel denkleme dönmüştür. Bu arada, henüz üzerinde hiçbir sınırlama olmayan $\nu(\nu + 1)$ ve ε^2 gibi iki sabit parametre de denkleme dahil olmuştur.

Bu denklemlerden (4.17) derhal çözülebilir ve genel çözümü

$$\Phi(\phi) = A e^{i\varepsilon\phi} + B e^{-i\varepsilon\phi} \quad (4.18)$$

olarak kolayca bulunur. ε üzerinde henüz bir sınırlama yoktur ancak,

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad (4.19)$$

olarak verilen sınır şartı kullanılırsa, $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ gibi tam sayı değerler alması gerektiği görülür.

$\Theta(\theta)$ için çözülmesi gereken (4.16) denklemi ise

$$x = \cos \theta, (\theta \in [0, \pi], x \in [-1, 1]) \quad (4.20)$$

gibi yeni bir bağımsız değişken tanımlanarak

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx} + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\varepsilon^2}{(1 - x^2)} \right] y(x) = 0 \quad (4.21)$$

şeklinde yazılır. $\varepsilon = 0$ için bu denkleme Legendre denklemi ve $\varepsilon \neq 0$ için de associated Legendre denklemi denir [4].

4.2. Legendre Denklemi İçin Açık Çözümlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde ayrık kesirli nabla operatörü kullanılarak homojen ve homojen olmayan Legendre ve associated Legendre diferansiyel denklemlerinin ayrık kesirli çözümleri elde edildi.

Teorem 4.2.1. $y \in \{y : 0 \neq |y_\alpha| < \infty; \alpha \in \mathbb{R}\}$ ve $f \in \{f : 0 \neq |f_\alpha| < \infty; \alpha \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu durumda homojen olmayan

$$y_2(1 - x^2) - 2y_1x + y\nu(\nu + 1) = f \quad (1 - x^2 \neq 0) \quad (4.22)$$

Legendre denkleminin,

$$y = \left\{ \left[f_\alpha (1 - x^2)^{\alpha E} \right]_{-1} (1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \right\}_{-(1+\alpha)} \quad (4.23)$$

şeklinde özel çözümü vardır. Burada $y_n = d^n y / dx^n$ ($n = 0, 1, 2$), $y_0 = y(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ve $\nu > 0$ sabittir.

İspat. Ayrık kesirli analiz operatörü olan ∇^α (4.22) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa,

$$\nabla^\alpha [y_2(1 - x^2)] - \nabla^\alpha (y_1 2x) + \nabla^\alpha [y\nu(\nu + 1)] = \nabla^\alpha f \quad (4.24)$$

olur.

(3.5) ve (2.24) den

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha [y_2 (1 - x^2)] &= \binom{\alpha}{0} (\nabla^\alpha y_2) (1 - x^2) + \binom{\alpha}{1} (\nabla^{\alpha-1} y_2) (-2x) \\
&\quad + \binom{\alpha}{2} (\nabla^{\alpha-2} y_2) (-2) \\
&= y_{2+\alpha} (1 - x^2) - 2\alpha x E y_{1+\alpha} - \alpha (\alpha - 1) E^2 y_\alpha
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha (y_1 2x) &= \binom{\alpha}{0} (\nabla^\alpha y_1) (2x) + \binom{\alpha}{1} (\nabla^{\alpha-1} y_1) 2 \\
&= 2x y_{1+\alpha} + 2\alpha E y_\alpha
\end{aligned} \tag{4.26}$$

ve

$$\nabla^\alpha [y\nu (\nu + 1)] = y_\alpha \nu (\nu + 1) \tag{4.27}$$

bulunur. Burada E , shift operatörüdür [27, 28]. Bulunan (4.25)-(4.27) değerleri (4.24) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&y_{2+\alpha} (1 - x^2) - y_{1+\alpha} (2x\alpha E + 2x) \\
&- y_\alpha [\alpha (\alpha - 1) E^2 + 2\alpha E - \nu (\nu + 1)] = f_\alpha
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. Burada α ,

$$\alpha (\alpha - 1) E^2 + 2\alpha E - \nu (\nu + 1) = 0$$

olacak şekilde seçilirse,

$$\alpha = \frac{(E^2 - 2E) \pm \sqrt{(2E - E^2)^2 + 4E^2 \nu (\nu + 1)}}{2E^2}$$

olur ve (4.28) den

$$y_{2+\alpha} (1 - x^2) - y_{1+\alpha} (2x\alpha E + 2x) = f_\alpha \tag{4.29}$$

elde edilir.

$$y_{1+\alpha} = u = u(x) \quad (y = u_{-(1+\alpha)}) \tag{4.30}$$

olarak alınırsa, (4.29) ve (4.30) dan

$$\begin{aligned}
&u_1 (1 - x^2) - u (2x\alpha E + 2x) = f_\alpha, \\
&u_1 + u \left[(\alpha E + 1) \frac{-2x}{1 - x^2} \right] = f_\alpha (1 - x^2)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. Bu denklem,

$$u = \left[f_{\alpha} (1 - x^2)^{\alpha E} \right]_{-1} (1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \quad (4.32)$$

özel çözümüne sahip olan lineer diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla, (4.30) ve (4.32) den

$$y = \left\{ \left[f_{\alpha} (1 - x^2)^{\alpha E} \right]_{-1} (1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \right\}_{-(1+\alpha)}$$

çözümü elde edilir.

Teorem 4.2.2. $y \in \{y : 0 \neq |y_{\alpha}| < \infty; \alpha \in \mathbb{R}\}$ olsun. O halde

$$y_2 (1 - x^2) - 2y_1 x + y \nu (\nu + 1) = 0 \quad (1 - x^2 \neq 0) \quad (4.33)$$

homojen Legendre denklemi, k keyfi bir sabit olmak üzere,

$$y = k \left[(1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \right]_{-(1+\alpha)} \quad (4.34)$$

şeklinde özel çözüme sahiptir. Burada $y_n = d^n y / dx^n$ ($n = 0, 1, 2$), $y_0 = y(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ve $\nu > 0$ sabittir.

İspat. Ayrık kesirli analiz operatörü olan ∇^{α} (4.33) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$\nabla^{\alpha} [y_2 (1 - x^2)] - \nabla^{\alpha} (y_1 2x) + \nabla^{\alpha} [y \nu (\nu + 1)] = 0 \quad (4.35)$$

olur. (4.25)-(4.27) den

$$y_{2+\alpha} (1 - x^2) - y_{1+\alpha} (2x \alpha E + 2x) - y_{\alpha} [\alpha (\alpha - 1) E^2 + 2\alpha E - \nu (\nu + 1)] = 0 \quad (4.36)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde α ,

$$\alpha (\alpha - 1) E^2 + 2\alpha E - \nu (\nu + 1) = 0$$

olarak seçilirse,

$$\alpha = \frac{(E^2 - 2E) \pm \sqrt{(2E - E^2)^2 + 4E^2 \nu (\nu + 1)}}{2E^2}$$

olur ve (4.36) dan

$$y_{2+\alpha} (1 - x^2) - y_{1+\alpha} (2x \alpha E + 2x) = 0 \quad (4.37)$$

elde edilir.

$$y_{1+\alpha} = u = u(x) \quad (y = u_{-[1+\alpha]}) \quad (4.38)$$

olacak şekilde (4.37) düzenlenirse

$$u_1 + u \left[(\alpha E + 1) \frac{-2x}{1-x^2} \right] = 0 \quad (4.39)$$

bulunur. Bu denklem k keyfi bir sabit olmak üzere

$$u = k (1-x^2)^{-(\alpha E+1)} \quad (4.40)$$

özel çözümüne sahip olan bir adi diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla (4.38) ve (4.40) dan

$$y = k \left[(1-x^2)^{-(\alpha E+1)} \right]_{-(1+\alpha)}$$

çözümü elde edilir.

Teorem 4.2.3.

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \tau \phi(x, t) = P \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + Q \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1-x^2 \neq 0) \quad (4.41)$$

ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= k \left[(1-x^2)^{-(\alpha E+1)} \right]_{-(1+\alpha)} \\ &\times \exp \left[\frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 + 4P[\tau - \nu(\nu+1)]}}{2P} t \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\phi(x, t) = k \left[(1-x^2)^{-(\alpha E+1)} \right]_{-(1+\alpha)} \exp \left[\frac{\tau - \nu(\nu+1)}{Q} t \right] \quad (4.43)$$

ve

$$\phi(x, t) = k \left[(1-x^2)^{-(\alpha E+1)} \right]_{-(1+\alpha)} \exp \left[\pm \sqrt{\frac{\tau - \nu(\nu+1)}{P}} t \right] \quad (4.44)$$

özel çözümlerine sahiptir. Burada ν, τ verilen sabitler ve k keyfi bir sabittir.

İspat. $\phi(x, t) = y(x) e^{\lambda t}$ ($\lambda \neq 0$), (4.41) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= y_1 e^{\lambda t} \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = y_2 e^{\lambda t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \lambda y e^{\lambda t} \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \lambda^2 y e^{\lambda t} \end{aligned}$$

olacağından, bulunan bu eşitlikler (4.41) de yerlerine yazılırsa

$$y_2 e^{\lambda t} (1 - x^2) - y_1 e^{\lambda t} 2x + \tau y e^{\lambda t} = P \lambda^2 y e^{\lambda t} + Q \lambda y e^{\lambda t}$$

bulunur ve buradan

$$y_2 (1 - x^2) - y_1 2x + y (\tau - P \lambda^2 - Q \lambda) = 0 \quad (4.45)$$

elde edilir. Burada λ 'yı

$$\tau - P \lambda^2 - Q \lambda = \nu (\nu + 1)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçersek

$$\lambda = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 + 4P [\tau - \nu (\nu + 1)]}}{2P}, \quad PQ \neq 0$$

$$\lambda = \frac{\tau - \nu (\nu + 1)}{Q}, \quad P = 0, Q \neq 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\tau - \nu (\nu + 1)}{P}}, \quad P \neq 0, Q = 0$$

olur ve (4.45) denklemi

$$y_2 (1 - x^2) - y_1 2x + y \nu (\nu + 1) = 0, \quad (1 - x^2 \neq 0)$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.2.2 den dolayı bu denklemin çözümü

$$y = k \left[(1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \right]_{-(1 + \alpha)}$$

dir. Bu yüzden $PQ \neq 0$ için (4.41) kısmi diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= k \left[(1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \right]_{-(1 + \alpha)} \\ &\times \exp \left[\frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 + 4P [\tau - \nu (\nu + 1)]}}{2P} t \right] \end{aligned}$$

çözümüne sahiptir. Ayrıca $P = 0, Q \neq 0$ için

$$\phi(x, t) = k \left[(1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \right]_{-(1 + \alpha)} \exp \left[\frac{\tau - \nu (\nu + 1)}{Q} t \right]$$

çözümüne ve $P \neq 0, Q = 0$ için

$$\phi(x, t) = k \left[(1 - x^2)^{-(\alpha E + 1)} \right]_{-(1 + \alpha)} \exp \left[\pm \sqrt{\frac{\tau - \nu (\nu + 1)}{P}} t \right]$$

çözümüne sahiptir.

Teorem 4.2.4. $y \in \{y : 0 \neq |y_\alpha| < \infty; \alpha \in \mathbb{R}\}$ ve $g \in \{g : 0 \neq |g_\alpha| < \infty; \alpha \in \mathbb{R}\}$ olsun.

$$y_2 (1 - x^2) - y_1 2x + y \left[\nu (\nu + 1) - \frac{\varepsilon^2}{(1 - x^2)} \right] = g \quad (1 - x^2 \neq 0) \quad (4.46)$$

associated Legendre denkleminin

$$y = (1 - x^2)^{\varepsilon/2} \left\{ \left[\left(g (1 - x^2)^{-\varepsilon/2} \right)_\alpha (1 - x^2)^{\alpha E + \varepsilon} \right]_{-1} \times (1 - x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \right\}_{-(1 + \alpha)} \quad (4.47)$$

şeklinde özel çözümü vardır. Burada $y_n = d^n y / dx^n$ ($n = 0, 1, 2$), $y_0 = y(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ve $\nu > 0$ sabittir.

İspat.

$$y = (1 - x^2)^{\varepsilon/2} \psi, \quad \psi = \psi(x) \quad (4.48)$$

olsun.

$$y_1 = -\varepsilon x (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi + (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_1 \quad (4.49)$$

ve

$$\begin{aligned} y_2 = & -\varepsilon (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi + \varepsilon (\varepsilon - 2) x^2 (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-2} \psi \\ & - 2\varepsilon x (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi_1 + (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

olup, (4.48)-(4.50) eşitlikleri (4.46) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi + \varepsilon (\varepsilon - 2) x^2 (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi - 2\varepsilon x (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_1 \\ & + (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}+1} \psi_2 + 2\varepsilon x^2 (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi - 2x (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_1 \\ & + \nu (\nu + 1) (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi - \varepsilon^2 (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi = g \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \psi + \varepsilon (\varepsilon - 2) x^2 (1 - x^2)^{-1} \psi - 2\varepsilon x \psi_1 + (1 - x^2) \psi_2 \\ & + 2\varepsilon x^2 (1 - x^2)^{-1} \psi - 2x \psi_1 + \nu (\nu + 1) \psi - \varepsilon^2 (1 - x^2)^{-1} \psi \\ = & g (1 - x^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& (1-x^2) \psi_2 - [2(\varepsilon+1)x] \psi_1 \\
& + \left[(1-x^2)^{-1} (\varepsilon(\varepsilon-2)x^2 + 2\varepsilon x^2 - \varepsilon^2) - \varepsilon + \nu(\nu+1) \right] \psi \\
& = g(1-x^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \\
& (1-x^2) \psi_2 - [2(\varepsilon+1)x] \psi_1 - (\varepsilon-\nu)(\varepsilon+\nu+1) \psi = g(1-x^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \quad (4.51)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $\varepsilon, \nu \in \mathbb{R}$ dir.

Ayrık kesirli analiz operatörü olan ∇^α , (4.51) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
& \nabla^\alpha [\psi_2 (1-x^2)] - \nabla^\alpha [\psi_1 2(\varepsilon+1)x] - \nabla^\alpha [\psi (\varepsilon-\nu)(\varepsilon+\nu+1)] \\
& = \nabla^\alpha \left[g(1-x^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right] \quad (4.52)
\end{aligned}$$

olur. (2.14) ve (3.5) den

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha [\psi_2 (1-x^2)] &= \binom{\alpha}{0} (\nabla^\alpha \psi_2) (1-x^2) + \binom{\alpha}{1} (\nabla^{\alpha-1} \psi_2) (-2x) \\
&+ \binom{\alpha}{2} (\nabla^{\alpha-2} \psi_2) (-2) \\
&= \psi_{2+\alpha} (1-x^2) - 2\alpha x E \psi_{1+\alpha} - \alpha(\alpha-1) E^2 \psi_\alpha \quad (4.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha [\psi_1 2(\varepsilon+1)x] &= \binom{\alpha}{0} (\nabla^\alpha \psi_1) [2(\varepsilon+1)x] + \binom{\alpha}{1} (\nabla^{\alpha-1} \psi_1) 2(\varepsilon+1) \\
&= \psi_{1+\alpha} 2(\varepsilon+1)x + 2\alpha E(\varepsilon+1) \psi_\alpha \quad (4.54)
\end{aligned}$$

$$\nabla^\alpha [\psi (\varepsilon-\nu)(\varepsilon+\nu+1)] = \psi_\alpha (\varepsilon-\nu)(\varepsilon+\nu+1) \quad (4.55)$$

bulunur. Bulunan (4.53)-(4.55) eşitlikleri (4.52) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \psi_{2+\alpha} (1-x^2) - 2\alpha x E \psi_{1+\alpha} - \alpha(\alpha-1) E^2 \psi_\alpha - 2(\varepsilon+1)x \psi_{1+\alpha} \\
& - 2\alpha E(\varepsilon+1) \psi_\alpha - (\varepsilon-\nu)(\varepsilon+\nu+1) \psi_\alpha \\
& = \left[g(1-x^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right]_\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \psi_{2+\alpha} (1-x^2) - \psi_{1+\alpha} [2\alpha x E + 2(\varepsilon+1)x] \\
& - \psi_\alpha [\alpha(\alpha-1) E^2 + 2\alpha E(\varepsilon+1) + (\varepsilon-\nu)(\varepsilon+\nu+1)] \\
& = \left[g(1-x^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right]_\alpha \quad (4.56)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada α ,

$$\alpha(\alpha - 1)E^2 + 2\alpha E(\varepsilon + 1) + (\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1) = 0$$

olacak şekilde seçilirse

$$\alpha = \frac{[E^2 - 2E(\varepsilon + 1)] \pm \sqrt{[2E(\varepsilon + 1) - E^2]^2 - 4E^2(\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1)}}{2E^2}$$

olur ve

$$[2E(\varepsilon + 1) - E^2]^2 \geq 4E^2(\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1)$$

olmak üzere (4.56) düzenlenirse

$$\psi_{2+\alpha}(1 - x^2) - \psi_{1+\alpha}[2\alpha xE + 2(\varepsilon + 1)x] = \left[g(1 - x^2)^{-\varepsilon/2} \right]_{\alpha} \quad (4.57)$$

olur.

$$\psi_{1+\alpha} = w = w(x) \quad (\psi = w_{-(1+\alpha)}) \quad (4.58)$$

olsun. (4.57) ve (4.58) den

$$w_1(1 - x^2) - w[2\alpha xE + 2(\varepsilon + 1)x] = \left[g(1 - x^2)^{-\varepsilon/2} \right]_{\alpha}$$

$$w_1 + w \left[(\alpha E + \varepsilon + 1) \frac{(-2x)}{1 - x^2} \right] = \left[g(1 - x^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right]_{\alpha} (1 - x^2)^{-1} \quad (4.59)$$

elde edilir. Bu denklem birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem olup, çözümü;

$$w = \left[\left(g(1 - x^2)^{-\varepsilon/2} \right)_{\alpha} (1 - x^2)^{\alpha E + \varepsilon} \right]_{-1} (1 - x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \quad (4.60)$$

dir. (4.58) ve (4.60) dan

$$\psi = \left\{ \left[\left(g(1 - x^2)^{-\varepsilon/2} \right)_{\alpha} (1 - x^2)^{\alpha E + \varepsilon} \right]_{-1} \times (1 - x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \right\}_{-(1+\alpha)}$$

ve (4.48) den

$$y = (1 - x^2)^{\varepsilon/2} \left\{ \left[\left(g(1 - x^2)^{-\varepsilon/2} \right)_{\alpha} (1 - x^2)^{\alpha E + \varepsilon} \right]_{-1} \times (1 - x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \right\}_{-(1+\alpha)}$$

çözümü elde edilir.

Teorem 4.2.5. $y \in \{y : 0 \neq |y_\alpha| < \infty; \alpha \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu durumda

$$y_2 (1 - x^2) - 2y_1 x + y \left[\nu (\nu + 1) - \frac{\varepsilon^2}{(1 - x^2)} \right] = 0 \quad (4.61)$$

homojen associated Legendre denkleminin, k keyfi bir sabit olmak üzere

$$y = k (1 - x^2)^{\varepsilon/2} \left[(1 - x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \right]_{-(1+\alpha)} \quad (4.62)$$

şeklinde özel çözümü vardır. Burada $y_n = d^n y / dx^n$ ($n = 0, 1, 2$), $y_0 = y(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ve $\nu > 0$ sabittir.

İspat. $\psi = \psi(x)$, $y = (1 - x^2)^{\varepsilon/2} \psi$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$) olsun.

$$y_1 = -\varepsilon x (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi + (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_1 \quad (4.63)$$

ve

$$\begin{aligned} y_2 = & -\varepsilon (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi + \varepsilon (\varepsilon - 2) x^2 (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-2} \psi \\ & - 2\varepsilon x (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \psi_1 + (1 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

olup, (4.63) ve (4.64) eşitlikleri (4.61) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$(1 - x^2) \psi_2 - [2(\varepsilon + 1)x] \psi_1 - (\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1) \psi = 0 \quad (4.65)$$

denklemini elde edilir. Burada $\varepsilon, \nu \in \mathbb{R}$ dir.

Ayrık kesirli analiz operatörü olan ∇^α , (4.65) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \psi_{2+\alpha} (1 - x^2) - \psi_{1+\alpha} [2\alpha x E + 2(\varepsilon + 1)x] \\ & - \psi_\alpha [\alpha(\alpha - 1) E^2 + 2\alpha E(\varepsilon + 1) + (\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1)] = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde α ,

$$\alpha(\alpha - 1) E^2 + 2\alpha E(\varepsilon + 1) + (\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1) = 0$$

olacak şekilde seçilirse

$$\alpha = \frac{[E^2 - 2E(\varepsilon + 1)] \pm \sqrt{[2E(\varepsilon + 1) - E^2]^2 - 4E^2(\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1)}}{2E^2}$$

olur ve

$$\left[2E(\varepsilon + 1) - E^2\right]^2 \geq 4E^2(\varepsilon - \nu)(\varepsilon + \nu + 1)$$

olmak üzere (4.66) dan

$$\psi_{2+\alpha}(1-x^2) - \psi_{1+\alpha}[2\alpha xE + 2(\varepsilon + 1)x] = 0 \quad (4.67)$$

bulunur.

$$\psi_{1+\alpha} = w = w(x) \quad (\psi = w_{-(1+\alpha)}) \quad (4.68)$$

olsun. (4.67) ve (4.68) den

$$w_1 + w \left[(\alpha E + \varepsilon + 1) \frac{-2x}{1-x^2} \right] = 0 \quad (4.69)$$

elde edilir. Bu denklem birinci mertebeden adi diferansiyel denklem olup, çözümü;

$$w = k(1-x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \quad (4.70)$$

dir. (4.68) ve (4.70) den

$$\psi = k \left[(1-x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \right]_{-(1+\alpha)}$$

olacağından, (4.48) yardımıyla

$$y = k(1-x^2)^{\varepsilon/2} \left[(1-x^2)^{-(\alpha E + \varepsilon + 1)} \right]_{-(1+\alpha)}$$

çözümü elde edilir.

5. SONUÇ

Ayrık kesirli analiz, ayrık analizin genelleştirilmiş bir halidir. Ayrık analizde tam sayı mertebeler düşünülürken, kesirli analiz tüm pozitif reel sayı mertebelere olanak tanımaktadır. Uygulamalı bilimlerde, birçok problemin matematiksel olarak modellenmesinde kesirli hesap çok önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada ilk olarak ayrık kesirli analizin üstel fonksiyonları tanım ve teoremlerle verilip, lineer kesirli fark denkleminin genel çözümünün üstel fonksiyonlarla ifadesi ele alınmıştır. Daha sonra ayrık kesirli analizin nabla operatörü yardımı ile homojen ve homojen olmayan Legendre ve associated Legendre denklemlerinin özel çözümleri elde edilmiştir.



6. KAYNAKLAR

- [1] **Keller, J.**, 1976, Invers Problems, Amer. Math. Monthly, 83(2), 107-118.
- [2] **Simmons, G.**, 1972, Differential Equations with Application and Historical Notes, McGraw-Hill Book Co., New York.
- [3] **Caputo, M.**, 1967, Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent-II, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13(5), 529-539.
- [4] **Podlubny, I.**, 1999, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, New York, London, Tokyo and Toronto.
- [5] **Jumarie, G.**, 2006, Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functions Further Results, Comput. Math. Appl., 51(9-10), 1367-1376.
- [6] **Jumarie, G.**, 2009, Table of Some Basic Fractional Calculus Formulae Derived From a Modified Riemann-Liouville Derivative For Non-Differentiable Functions, Appl. Math. Lett., 22(3), 378-385.
- [7] **Jumarie, G.**, 2010, Cauchy's Integral Formula via the Modified Riemann-Liouville Derivative for Analytic Functions of Fractional Order. Appl. Math. Lett., 23(12), 1444-1450.
- [8] **Anderson, D.**, 2002, Taylor Polynomials for Nabla Dynamic Equations on Time Scales, Panamer. Math. J., 12(4), 17-27.
- [9] **Kuttner, B.**, 1957, On Differences of Fractional Order, Proc. London Math. Soc. 7(3), 453-466.
- [10] **Kuttner, B.**, 1968, A Limitation Theorem for Differences of Fractional Order, J. London Math. Soc., 43, 758-762.
- [11] **Cargo, G., Shisha, O.**, 1963, Zeros of Polynomials and Fractional Order Differences of Their Coefficients, J. Math. Anal. Appl., 7, 176-182.
- [12] **Diaz, J., Osler, T.**, 1974, Differences of Fractional Order, Math. Comp., 28, 185-202.
- [13] **Hosking, J.**, 1981, Fractional Differencing, Biometrika, 68(1), 165-176.
- [14] **Granger, C., Joyeux, R.**, 1980, An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing, J. Time Ser. Anal., 1(1), 15-29.
- [15] **Williams, P. A.**, 2012, Unifying Fractional Calculus with Time Scales, PhD

- thesis, Department of Mathematics and Statistics, The University of Melbourne.
- [16] **Yaşar, İ.B.**, 2005, *Diferensiyel Denklemler ve Uygulamalar*, Ankara.
 - [17] **Acar, N.**, 2012, Development of Nabla Fractional Calculus and a New Approach to Data Fitting in Time Dependent Cancer Therapeutic Study, Master Theses and Specialist Projects, 5-21.
 - [18] **Mittag-Leffler, G. M.**, 1903, Sur la Nouvelle Fonction $E_\alpha(x)$, C. R. Acad. Sci. Paris, 137, 554-558.
 - [19] **Mohan, J. J.**, 2013, Solutions of Perturbed Nonlinear Nabla Fractional Difference Equations, Novi Sad. J. Math., 43(2), 125-138.
 - [20] **Bayın, S.**, 2006, *Mathematical Methods in Science and Engineering*, Wiley Interscience New Jersey.
 - [21] **Miller, K.S., Ross, B.**, 1993, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation*, Wiley Interscience, New York.
 - [22] **Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.**, 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematical Studies, Vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York.
 - [23] **Atıcı, F. M., Eloe, P. W.**, 2011, Linear Systems of Fractional Nabla Difference Equations, The Rocky Mountain J. Math., Special issue honoring Prof. Lloyd Jackson, 41(2), 353–370.
 - [24] **Acar, N., Atıcı, F. M.**, 2013, Exponential Functions of Discrete Fractional Calculus, Appl. Anal. Discrete Math., 7, 343-353.
 - [25] **Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R.**, 1999, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge.
 - [26] **Abdeljawad, T., Atıcı, F. M.**, 2012, On The Definations Of Nabla Fractional Operators, 2012, Article ID 406757, 13.
 - [27] **Granger, C. W. J., Joyeux, R.**, 1980, An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing, J. Time Ser. Anal. 1, 15-29.
 - [28] **Hosking, J. R. M.**, 1981, Fractional Differencing, Biometrika, 68(1), 165-176.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılı Diyarbakır'da doğmuşum. İlköğretime Ankara'da başlayıp, liseyi Diyarbakır'da tamamladım. 2008 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandım. 2011 yılında Dicle Üniversitesi Matematik Bölümünü kazanarak 2014 yılında mezun oldum. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans'a başladım ve halen devam etmekteyim.

