

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN KESİLMİŞ TESADÜFİ
DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN
DAĞILIMLARI**

**DOKTORA TEZİ
Gökhan GÖKDERE**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

TEMMUZ-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN KESİLMİŞ TESADÜFİ
DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN
DAĞILIMLARI**

DOKTORA TEZİ

**Gökhan GÖKDERE
(05121202)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 Haziran 2010

TEMMUZ-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN KESİLMİŞ TESADÜFİ
DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN
DAĞILIMLARI**

DOKTORA TEZİ

**Gökhan GÖKDERE
(05121202)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih: 15 Temmuz 2010

Tez Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Murat KARAGÖZ (Y.T.Ü)

Prof. Dr. Doğan KAYA (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında gerekli bütün imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, çalışmalarım süresince benden hiçbir zaman ilgi ve yardımlarını esirgemeyen bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım çok kıymetli hocam sayın Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR' e ve manevi olarak her zaman desteğini hissettiğim sevgili eşime de şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca, tezin hazırlanmasında yardımcı olan değerli arkadaşım Fahrettin ÖZBEY'e de teşekkür ederim.

Gökhan GÖKDERE
ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	2
2. KESİLMİŞ SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI.....	8
2.1. Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Kesilmiş Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları	8
2.2. Bağımsız fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Kesilmiş Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları.....	10
3. SONUÇLAR	23
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, bağımsız ve aynı dağılımlı kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları elde edilmiştir.

Son bölümde, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı İstatistikler, Bağımsız Tesadüfi Değişkenler, Sürekli Tesadüfi Değişkenler, Kesilmiş Tesadüfi Değişkenler, Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenler, Bağımsız fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenler, Dağılım Fonksiyonu, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Permanent.

SUMMARY

Distributions of Order Statistics of Nonidentically Distributed Truncated Random Variables

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems are given.

The second chapter consists of two sections. In the first section, the joint distributions of order statistics of independent and identically distributed truncated continuous random variables are examined. In the last section of this chapter, the distributions of order statistics of independent but not necessarily identically distributed truncated continuous random variables are obtained.

In the last chapter, the some results related to the distribution and probability density functions of order statistics of independent but not necessarily identically distributed truncated continuous random variables are given.

Key Words: Order statistics, Independent random variables, Continuous random variables, Truncated random variables, Independent and identically distributed random variables, Independent but not necessarily identically distributed random variables, Distribution function, Probability density function, Permanent.

SEMBOLLER LİSTESİ

F : Dağılım fonksiyonu

f : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} : \sum_{m_d=r_d}^n \dots \sum_{m_2=r_2}^{m_3} \sum_{m_1=r_1}^{m_2}$$

$$\sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} : \sum_{t_d=m_d}^n \dots \sum_{t_2=m_2}^{m_3} \sum_{t_1=m_1}^{m_2}$$

$$\sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, r_3-1, r_2-1} : \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1}$$

$$\sum \sum : \sum_{\kappa=1}^n (-1)^{n-\kappa} \frac{\kappa^n}{n!} \sum_{n_s=\kappa}$$

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ i_1 & i_2 & \end{bmatrix}$: $a_1, a_2, \dots$ kolon vektörleri olmak üzere, a_1 'in i_1 defa, a_2 'nin i_2 defa ...

alınması ile oluşturulan matris

$[A][s/\cdot)$: $s \subset N$ olmak üzere, indisleri s 'de olan satırların alınması ile A 'dan oluşturulan matris

n_s : s 'nin eleman sayısı

1. GİRİŞ

Sıralı istatistikler, istatistik teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Çünkü sıralı istatistiklerin dağılımları, örneklemin alındığı dağılımdan bağımsızdır.

Herhangi bir dağılıma sahip sürekli bir tesadüfi değişkenin tanım kümesi, her iki veya herhangi bir taraftan sınırlandırıldığında oluşan dağılıma esas dağılımın kesilmiş dağılımı denir. Kesilmiş örnekler, bilinen küçük ve/veya büyük gözlemlerin çıkarılmasından oluşan anakütleden tesadüfi olarak seçilmiş gözlemlerden oluşur [1].

Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar, Arnold vd. [2], David [3] ve Reiss [4] tarafından elde edilmiştir. Arnold vd. [2], bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Cao ve West [5], bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistiklerin dağılımları için bazı bağıntılar vermişlerdir. Corley [6], sürekli çok değişkenli tesadüfi değişkenlerin farklı anlamlarda sıralı istatistiklerini tanımlamıştır. Vaughan ve Venables [7], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını ifade etmişlerdir. Balakrishnan [8] ve Bapat ve Beg [9], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları, farklı şekillerde ifade edilmiştir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1 X , $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli bir tesadüfi değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f fonksiyonuna, X tesadüfi değişkeninin *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir.

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

X tesadüfi değişkeninin a ve b arasında bulunma olasılığı,

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx \quad a, b \in R \quad \text{ve} \quad a \leq b$$

olarak ifade edilir [10].

Tanım 1.2 X , olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan sürekli bir tesadüfi değişken olsun. Herhangi bir x reel değeri için X 'in *dağılım fonksiyonu*,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.1)$$

eşitliği ile ifade edilir [10].

Tanım 1.3 $X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenlerinin meydana gelme sırası değil, büyüklüklerinin sırası gözönüne alınırsa bu tesadüfi değişkenlerin *sıralı istatistikleri*,

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$, r . sıralı istatistik ve $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ tesadüfi vektörüne de sıralı istatistikler denilir. $X_{1:n}$, örneğin minimumu ve $X_{n:n}$, örneğin maksimumudur.

Bundan dolayı,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

yazılabilir [4].

Teorem 1.1 $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty$ olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ sıralı istatistiklerinin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*,

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

şeklinde verilir [11].

Teorem 1.2 Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin *olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $1 \leq r \leq n$ ve $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x)$$

şeklinde verilir [3].

Teorem 1.3 Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < x < y < \infty$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1-F(y)]^{n-s} f(x) f(y)$$

şeklinde verilir [3].

Teorem 1.4 $1 \leq d \leq n$ ve $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_d < r_{d+1} = n+1$ olsun. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = n! \prod_{i=1}^d f(x_i) \prod_{i=1}^{d+1} \frac{[F(x_i) - F(x_{i-1})]^{r_i - r_{i-1} - 1}}{(r_i - r_{i-1} - 1)!}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_d$$

şeklinde verilir. Burada, $F(x_0) = 0$ ve $F(x_{d+1}) = 1$ 'dir [4].

Teorem 1.5 Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin *dağılım fonksiyonu*, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$F_{r:n}(x) = P\{X_{r:n} \leq x\} = \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} F^m(x) [1 - F(x)]^{n-m}$$

şeklinde verilir. Özel olarak; $X_{1:n}$ ve $X_{n:n}$ dağılım fonksiyonları, sırasıyla

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

ve

$$F_{n:n}(x) = F^n(x)$$

olarak verilir [4].

Tanım 1.4 $B_n, \mathbb{R}^n$ uzayında

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n\}$$

şeklinde tanımlanan n boyutlu aralıkları kapsayan en küçük σ -cebiri olsun. Bu σ -cebirinin her bir elamanına $\mathbb{R}^n$ uzayında bir *Borel kümesi* denir [12].

Tanım 1.5 Bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonsiyonu, her $c \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\} \in \mathcal{B}_n$ şartını sağlıyorsa f fonsiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında bir *Borel fonsiyonu* denir [12].

Teorem 1.6 $X_{1n} \leq X_{2n} \leq \dots \leq X_{nn}$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistikleri ve $F_{r:n}$, $X_{r:n}$ 'nin dağılım fonsiyonu olsun. O zaman, $n_s \geq 1$ olmak üzere, her B Borel kümesi için

$$P\{(X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}) \in B\} = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \frac{m^n}{n!} \sum_{n_s=m} P\{(X_{1n}^s, X_{2n}^s, \dots, X_{nn}^s) \in B\}$$

ifadesi verilir. Burada; $\sum_{n_s=m}$, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin m elemanlı tüm s alt kümeleri üzerinden toplamı ifade etmektedir. Bununla birlikte $X_{1:n}^s \leq X_{2:n}^s \leq \dots \leq X_{n:n}^s$,

$$F^s = \frac{1}{n_s} \sum_{i \in s} F_i$$

dağılım fonsiyonuna sahip bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerini göstermektedir [4].

Tanım 1.6 $A = (a_{ij})$, $n \times n$ tipinde karesel bir matris olsun. A matrisinin permanenti,

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

olarak ifade edilir. Burada; S_n , $(1, 2, \dots, n)$ 'nin permütasyonlarının kümesidir. Yani; permanent, açılımındaki bütün terimlerin işaretlerinin pozitif olması hariç determinant ile aynıdır [13].

Teorem 1.7 Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin olasılık yoğunluk fonsiyonu, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \text{per} \begin{bmatrix} F(x) & f(x) & 1-F(x) \\ r-1 & 1 & n-r \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

şeklinde verilir [7]. Burada; $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))'$, $1-F(x) = (1-F_1(x), \dots, 1-F_n(x))'$ ve $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))'$ kolon vektörleridir. Ayrıca, (1.2)'deki permanent açılırsa

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \prod_{a=1}^{r-1} F_{i_a}(x) f_{i_r}(x) \prod_{b=r+1}^n (1-F_{i_b}(x))$$

ifadesi elde edilir. Burada; $\sum_P$, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade etmektedir [14].

Teorem 1.8 Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < x < y < \infty$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{C_{r,s:n}}{n!} \text{per} \begin{bmatrix} F(x) & f(x) & F(y)-F(x) & f(y) & 1-F(y) \\ r-1 & 1 & s-r-1 & 1 & n-s \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

şeklinde verilir. Burada; $C_{r,s:n} = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$ ve $F(x)$, $f(x)$, $F(y)-F(x)$,

$f(y)$, $1-F(y)$, kolon vektörleridir [15]. Ayrıca (1.3)'teki permanent açılırsa,

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \sum_P \prod_{a=1}^{r-1} F_{i_a}(x) f_{i_r}(x) \cdot \prod_{b=r+1}^{s-1} [F_{i_b}(y) - F_{i_b}(x)] f_{i_s}(y) \prod_{c=s+1}^n [1-F_{i_c}(y)]$$

ifadesi elde edilir [14].

Teorem 1.9 Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin *dağılım fonksiyonu*, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$F_{r:n}(x) = \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \text{per} \begin{bmatrix} F(x) & 1-F(x) \\ m & n-m \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada, $F(x)$ ve $1-F(x)$ kolon vektörleridir [13].

2. KESİLMİŞ SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

2.1 Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Kesilmiş Sürekli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları

Bu kısımda, bağımsız ve aynı dağılımlı kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilgili teoremler verilecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$, dağılım fonksiyonu F ve olasılık yoğunluk fonksiyonu f 'ye sahip bağımsız sürekli tesadüfi değişkenler olsun. Ayrıca; $0 < p < 1$ olmak üzere

$$F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} = \sup\{x : F(x) < p\}, \quad x \in R \quad (2.1)$$

ifadesi genel anlamda, F 'nin ters fonksiyonu olarak ifade edilebilir [4, 11, 16, 17].

$\alpha(F)$ ve $w(F)$ sırasıyla, F 'nin soldaki ve sağdaki son noktalarını gösterebilir. O halde, (2.1)'den

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\} = F^{-1}(0)$$

ve

$$w(F) = \sup\{x : F(x) < 1\} = F^{-1}(1)$$

ifadeleri yazılabilir [18].

X 'in her iki taraftan kesilmiş dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\alpha({}_{uv}F) = u \quad \text{ve} \quad w({}_{uv}F) = v$$

olmak üzere

$${}_{uv}f(x) = \frac{f(x)}{F(v) - F(u)} \quad (2.2)$$

olarak ifade edilebilir. (1.1) ve (2.2)'den, X ' in her iki taraftan kesilmiş dağılımının dağılım fonksiyonu,

$${}_{uv}F(x) = \frac{F(x) - F(u)}{F(v) - F(u)}$$

olarak elde edilir.

$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_d \leq n$, $d = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, bağımsız ve aynı dağılımlı kesilmiş sürekli bir anakütleden gelen $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonu için aşağıdaki iki teorem ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.1

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} n! C \prod_{w=1}^{d+1} [{}_{uv}F(x_w) - {}_{uv}F(x_{w-1})]^{m_w - m_{w-1}}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_d.$$

Burada; $C = [\prod_{w=1}^{d+1} (m_w - m_{w-1})!]^{-1}$, $m_0 = 0$, $m_{d+1} = n$, ${}_{uv}F(x_0) = 0$, ${}_{uv}F(x_{d+1}) = 1$ ve $x_w \in R$ 'dir.

Teorem 2.2

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = n! D \prod_{w=1}^d f(x_w) \prod_{w=1}^{d+1} [{}_{uv}F(x_w) - {}_{uv}F(x_{w-1})]^{r_w - r_{w-1} - 1}.$$

Burada; $D = [\prod_{w=1}^{d+1} (r_w - r_{w-1} - 1)!]^{-1}$, $r_0 = 0$ ve $r_{d+1} = n + 1$ 'dir.

2.2 Bağımsız fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Kesilmiş Sürekli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları

Bu kısımda, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları ile ilgili teoremler verilecektir.

Şimdi, kullanacağımız iki kavramı tanıtalım. $\alpha(F_i)$ ve $w(F_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sırasıyla, F_i 'nin soldaki ve sağdaki son noktalarını gösterecek. O halde, (2.1)'den

$$\alpha(F_i) = \inf\{x : F_i(x) > 0\} = F_i^{-1}(0)$$

ve

$$w(F_i) = \sup\{x : F_i(x) < 1\} = F_i^{-1}(1)$$

ifadeleri yazılabilir.

X 'in her iki taraftan kesilmiş dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\alpha_{uv}(F_i) = u_i \text{ ve } w_{uv}(F_i) = v_i$$

olmak üzere

$$_{uv}f_i(x) = \frac{f_i(x)}{F_i(v_i) - F_i(u_i)} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilebilir. (1.1) ve (2.3)'den, X 'in her iki taraftan kesilmiş dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$_{uv}F_i(x) = \frac{F_i(x) - F_i(u_i)}{F_i(v_i) - F_i(u_i)}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca; bağımsız ve aynı dağılımlı kesilmiş sürekli bir anakütleden gelen $X_1^s, X_2^s, \dots, X_n^s$ 'nin dağılım fonksiyonu ${}_{uv}F^s$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ${}_{uv}f^s$ sırasıyla,

$${}_{uv}F^s = \frac{1}{n_s} \sum_{i \in S} {}_{uv}F_i \quad (2.4)$$

ve

$${}_{uv}f^s = \frac{1}{n_s} \sum_{i \in S} {}_{uv}f_i \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki teoremler verilecektir.

Teorem 2.3

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1} - t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1} - m_w}{t_w - m_w} \\ \cdot \sum_{n_s = n - t_d + m_d} (t_d - m_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d \text{per} [{}_{uv}F(x_w)] [s_w / \cdot] \cdot \quad (2.6)$$

Burada; ${}_{uv}F(x_w) = ({}_{uv}F_1(x_w), {}_{uv}F_2(x_w), \dots, {}_{uv}F_n(x_w))'$ ($w=1, 2, \dots, d+1$) kolon vektörlerini

ve $\sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}}$, $v \neq v$ için $s_v \cap s_v = \emptyset$ olmak üzere $\bigcup_{w=1}^{d-1} s_w$ üzerinden toplamı ifade

etmektedir. Ayrıca; $s = \bigcup_{w=1}^d s_w$, $n_{s_w} = m_{w+1} - m_{w-1} - t_w + t_{w-1}$ ve $t_0 = m_1$ 'dir.

İspat.

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d : n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = P\{X_{r_1 : n} \leq x_1, X_{r_2 : n} \leq x_2, \dots, X_{r_d : n} \leq x_d\} \quad (2.7)$$

eşitliği yazılabilir. (2.7),

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d : n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C_{per} A \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; $A = [{}_{uv}F(x_1) \quad {}_{uv}F(x_2) - {}_{uv}F(x_1) \quad \dots \quad 1 - {}_{uv}F(x_d)]$ karesel bir matris,

${}_{uv}F(x_w) - {}_{uv}F(x_{w-1}) = ({}_{uv}F_1(x_w) - {}_{uv}F_1(x_{w-1}), {}_{uv}F_2(x_w) - {}_{uv}F_2(x_{w-1}), \dots, {}_{uv}F_n(x_w) - {}_{uv}F_n(x_{w-1}))'$ kolon

vektörü, ${}_{uv}F_i(x_0) = 0$ ve ${}_{uv}F_i(x_{d+1}) = 1$ 'dir.

Permanentin özelliklerinden,

$$per A = per[{}_{uv}F(x_1) \quad {}_{uv}F(x_2) - {}_{uv}F(x_1) \quad {}_{uv}F(x_3) - {}_{uv}F(x_2) \quad \dots \quad {}_{uv}F(x_d) - {}_{uv}F(x_{d-1}) \quad 1 - {}_{uv}F(x_d)]$$

$$= \sum_{t_d=0}^{n-m_d} (-1)^{n-m_d-t_d} \binom{n-m_d}{t_d} \dots \sum_{t_2=0}^{m_3-m_2} (-1)^{m_3-m_2-t_2} \binom{m_3-m_2}{t_2} \sum_{t_1=0}^{m_2-m_1} (-1)^{m_2-m_1-t_1} \binom{m_2-m_1}{t_1}$$

$$\cdot per[{}_{uv}F(x_1) \quad {}_{uv}F(x_2) \quad \dots \quad 1 \quad {}_{uv}F(x_d)]$$

$$= \sum_{t_d=0}^{n-m_d} \dots \sum_{t_2=0}^{m_3-m_2} \sum_{t_1=0}^{m_2-m_1} (-1)^{n-m_1-\sum_{w=1}^d t_w} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w} \sum_{n_s=n-t_d} t_d!$$

$$\cdot per[{}_{uv}F(x_1) \quad {}_{uv}F(x_2) \quad \dots \quad {}_{uv}F(x_d)] [s/.]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t_d=m_d}^n \dots \sum_{t_2=m_2}^{m_3} \sum_{t_1=m_1}^{m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \\
&\quad \cdot \text{per} \begin{bmatrix} {}_{uv}F(x_1) & {}_{uv}F(x_2) & \dots & {}_{uv}F(x_d) \\ m_2-t_1+m_1 & m_3-m_1-t_2+t_1 & \dots & n-m_d-t_d+t_{d-1} \end{bmatrix} [s/.] \\
&= \sum_{t_d=m_d}^n \dots \sum_{t_2=m_2}^{m_3} \sum_{t_1=m_1}^{m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \\
&\quad \cdot \text{per} \begin{bmatrix} {}_{uv}F(x_1) \\ m_2-t_1+m_1 \end{bmatrix} [s_1/.] \text{per} \begin{bmatrix} {}_{uv}F(x_2) \\ m_3-m_1-t_2+t_1 \end{bmatrix} [s_2/.] \dots \text{per} \begin{bmatrix} {}_{uv}F(x_d) \\ n-m_{d-1}-t_d+t_{d-1} \end{bmatrix} [s_d/.] \\
&= \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \\
&\quad \cdot \prod_{w=1}^d \text{per} \begin{bmatrix} {}_{uv}F(x_w) \\ m_{w+1}-m_{w-1}-t_w+t_{w-1} \end{bmatrix} [s_w/.] \quad (2.9)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $1 = (1, 1, \dots, 1)'$ kolon vektörüdür. (2.9), (2.8)'de yerine yazılırsa (2.6) elde edilmiş olur. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremden; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerden elde edilmiş olan $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik dağılım fonksiyonu, permanent kullanılarak verilmiştir.

Teorem 2.3'de, permanentin özellikleri kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.4

$$\begin{aligned}
{}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) &= \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \\
&\quad \cdot \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d n_{s_w}! \prod_{l=1}^{n_{s_w}} {}_{uv}F_{s_w}^l(x_w). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Burada, $s_w = \{s_w^1, s_w^2, \dots, s_w^{n_{s_w}}\}$ 'dir.

Teorem 2.4'de, (2.4) kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.5

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1} \sum_{n, \dots, m_3, m_2} n! C$$

$$\cdot \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1} - t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1} - m_w}{t_w - m_w} [{}_{uv}F^s(x_w)]^{m_{w+1} - m_{w-1} - t_w + t_{w-1}}. \quad (2.11)$$

İspat. (2.7),

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum \sum P\{X_{r_1; n}^s \leq x_1, X_{r_2; n}^s \leq x_2, \dots, X_{r_d; n}^s \leq x_d\} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.11), (2.10) ve (2.12)'den elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3'de, permanent açılımı kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.6

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C \sum_P \prod_{l=1}^{m_l} {}_{uv}F_{j_l}(x_l) \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=m_{w-1}}^{m_w} (-1)^{m_w - t}$$

$$\cdot \sum_{\substack{n_\tau = t - m_{w-1} \\ n_{\tau'} = m_w - t}} \prod_{l=1}^{t - m_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{m_w - t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}). \quad (2.13)$$

Burada; $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{t-m_{w-1}}\}$, $\tau' = \{\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_{m_w-t}\}$, $\tau \cap \tau' = \emptyset$, $\tau \cup \tau' = \{j_{m_{w-1}+1}, j_{m_{w-1}+2}, \dots, j_{m_w}\}$

ve ${}_{uv}F_{j_l}(x_{d+1}) = 1$ 'dir.

İspat.

$${}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C \sum_P \prod_{l=1}^{m_1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1) \prod_{l=m_1+1}^{m_2} [{}_{uv}F_{j_l}(x_2) - {}_{uv}F_{j_l}(x_1)] \dots \prod_{l=m_d+1}^n [1 - {}_{uv}F_{j_l}(x_d)] \\ &= \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C \sum_P \prod_{l=1}^{m_1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1) \prod_{w=2}^{d+1} \prod_{l=m_{w-1}+1}^{m_w} [{}_{uv}F_{j_l}(x_w) - {}_{uv}F_{j_l}(x_{w-1})] \end{aligned} \quad (2.14)$$

ifadesi yazılabilir. Burada, ${}_{uv}F_{j_l}(x_0) = 0$ 'dir. Şimdi,

$$\prod_{l=m_{w-1}+1}^{m_w} [{}_{uv}F_{j_l}(x_w) - {}_{uv}F_{j_l}(x_{w-1})] = \sum_{t=m_{w-1}}^{m_w} (-1)^{m_w-t} \sum_{\substack{n_t=t-m_{w-1} \\ n_{t'}=m_w-t}} \prod_{l=1}^{t-m_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{m_w-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}) \quad (2.15)$$

eşitliğini gözönüne alalım. (2.15), (2.14)'de yerine yazılırsa (2.13) elde edilmiş olur. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Theorem 2.6, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Theorem 2.7

$$\begin{aligned} {}_{uv}F_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) &= \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C^{-1} \sum_{C \in P_{m_d, \dots, m_2, m_1}} \prod_{l=1}^{m_1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1) \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=m_{w-1}}^{m_w} (-1)^{m_w-t} \\ &\quad \cdot \sum_{\substack{n_t=t-m_{w-1} \\ n_{t'}=m_w-t}} \prod_{l=1}^{t-m_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{m_w-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Burada; $\sum_{C \in P_{m_d, \dots, m_2, m_1}}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{m_1}$, $j_{m_1+1} < j_{m_1+2} < \dots < j_{m_2}, \dots, j_{m_d+1} < j_{m_d+2} < \dots < j_n$ olmak üzere,

$(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade etmektedir.

Teorem 2.6, aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

Teorem 2.8

$$\begin{aligned}
 {}_{uv}F_{i_1, i_2, \dots, i_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) &= \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} (n - m_d)! \sum_{P_{m_d}} \prod_{l=1}^{m_1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1) \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=m_{w-1}}^{m_w} (-1)^{m_w-t} \\
 &\cdot \sum_{\substack{n_{\tau'}=t-m_{w-1} \\ n_{\tau'}=m_w-t}} \prod_{l=1}^{t-m_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{m_w-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}). \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Burada; $\sum_{P_{m_d}}$, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $(j_1, j_2, \dots, j_{m_d})$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade etmektedir.

Teorem 2.6'da, (2.4) kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.9

$$\begin{aligned}
 {}_{uv}F_{i_1, i_2, \dots, i_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) &= \sum \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} n! C [{}_{uv}F^s(x_1)]^{m_1} \\
 &\cdot \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=m_{w-1}}^{m_w} (-1)^{m_w-t} \binom{m_w - m_{w-1}}{t - m_{w-1}} [{}_{uv}F^s(x_w)]^{t-m_{w-1}} [{}_{uv}F^s(x_{w-1})]^{m_w-t}. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Burada, ${}_{uv}F^s(x_{d+1}) = 1$ ' dir.

İspat. (2.18), (2.13) ve (2.12)'den elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu için aşağıdaki teoremler verilecektir.

Teorem 2.10

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, r_3-1, r_2-1} (-1)^{-d + \sum_{w=1}^d (r_{w+1} - t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1} - r_w - 1}{t_w - r_w} \\ \cdot \sum_{n_s = n + r_d - t_d} (t_d - r_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d \sum_{n_{s_w}} per[{}_{uv}F(x_w) | \zeta_w / .] per[{}_{uv}f(x_w) | \zeta'_w / .]. \quad (2.19)$$

Burada; $s = \bigcup_{w=1}^d s_w$, $s \subset N$, $v \neq w$ için $s_v \cap s_w = \emptyset$, $s_w = \zeta_w \cup \zeta'_w$, $n_{s_w} = r_{w+1} - r_{w-1} - t_w + t_{w-1}$,

$t_0 = r_1 - 1$, $n_{s_w} = r_{w+1} - r_{w-1} - 1 - t_w + t_{w-1}$ ve $n_{s'_w} = 1$ 'dir. Ayrıca, ${}_{uv}f(x_w) = ({}_{uv}f_1(x_w), {}_{uv}f_2(x_w), \dots,$

${}_{uv}f_n(x_w))'$ kolon vektörünü göstermektedir.

İspat.

$$P\{x_1 < X_{r_1; n} \leq x_1 + \delta x_1, x_2 < X_{r_2; n} \leq x_2 + \delta x_2, \dots, x_d < X_{r_d; n} \leq x_d + \delta x_d\} \quad (2.20)$$

ifadesini gözönüne alalım.

(2.20), $\prod_{w=1}^d \delta x_w$ bölünür ve $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_d$ 'ler sıfıra götürülürse, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D per B \quad (2.21)$$

Burada, $B = [{}_{uv}F(x_1) \quad {}_{uv}f(x_1) \quad {}_{uv}F(x_2) \quad \dots \quad {}_{uv}f(x_d) \quad 1 - {}_{uv}F(x_d)]$ karesel bir matristir.

Permanentin özelliklerinden,

$$per B = per [{}_{uv}F(x_1) \quad {}_{uv}f(x_1) \quad {}_{uv}F(x_2) \quad \dots \quad {}_{uv}f(x_d) \quad 1 - {}_{uv}F(x_d)]$$

$$= \sum_{t_d=0}^{n-r_d} (-1)^{n-r_d-t_d} \binom{n-r_d}{t_d} \dots \sum_{t_2=0}^{r_3-r_2-1} (-1)^{r_3-r_2-1-t_2} \binom{r_3-r_2-1}{t_2} \sum_{t_1=0}^{r_2-r_1-1} (-1)^{r_2-r_1-1-t_1} \binom{r_2-r_1-1}{t_1}$$

$$\cdot \text{per} \left[\begin{array}{ccccccc} {}_{uv}F(x_1) & {}_{uv}f(x_1) & {}_{uv}F(x_2) & {}_{uv}f(x_2) & \dots & {}_{uv}f(x_d) & 1 \\ r_2-2-t_1 & 1 & r_3-r_2-1-t_2+t_1 & 1 & & 1 & t_d \\ & & & & & & {}_{uv}F(x_d) \\ & & & & & & n-r_d-t_d+t_{d-1} \end{array} \right]$$

$$= \sum_{t_d=0}^{n-r_d} \dots \sum_{t_2=0}^{r_3-r_2-1} \sum_{t_1=0}^{r_2-r_1-1} (-1)^{n+1-r_1-d-\sum_{w=1}^d t_w} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w} \sum_{n_s=n-t_d} t_d!$$

$$\cdot \text{per} \left[\begin{array}{ccccccc} {}_{uv}F(x_1) & {}_{uv}F(x_2) & \dots & {}_{uv}F(x_d) & {}_{uv}f(x_1) & {}_{uv}f(x_2) & \dots & {}_{uv}f(x_d) \\ r_2-2-t_1 & r_3-r_2-1-t_2+t_1 & & n-r_d-t_d+t_{d-1} & 1 & 1 & & 1 \end{array} \right] [\leq / .]$$

$$= \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1} (-1)^{-d+\sum_{w=1}^d (r_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w-r_w} \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)!$$

$$\cdot \text{per} \left[\begin{array}{ccccccc} {}_{uv}F(x_1) & {}_{uv}F(x_2) & \dots & {}_{uv}F(x_d) & {}_{uv}f(x_1) & {}_{uv}f(x_2) & \dots & {}_{uv}f(x_d) \\ r_2+r_1-2-t_1 & r_3-r_1-1-t_2+t_1 & & n-r_{d-1}-t_d+t_{d-1} & 1 & 1 & & 1 \end{array} \right] [\leq / .]$$

$$= \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1} (-1)^{-d+\sum_{w=1}^d (r_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w-r_w} \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}}$$

$$\cdot \text{per} \left[\begin{array}{cc} {}_{uv}F(x_1) & {}_{uv}f(x_1) \\ r_2+r_1-2-t_1 & 1 \end{array} \right] [\leq_1 / .] \text{per} \left[\begin{array}{cc} {}_{uv}F(x_2) & {}_{uv}f(x_2) \\ r_3-r_1-1-t_2+t_1 & 1 \end{array} \right] [\leq_2 / .] \dots \text{per} \left[\begin{array}{cc} {}_{uv}F(x_d) & {}_{uv}f(x_d) \\ n-r_{d-1}-t_d+t_{d-1} & 1 \end{array} \right] [\leq_d / .]$$

$$= \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1} (-1)^{-d+\sum_{w=1}^d (r_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w-r_w} \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}}$$

$$\cdot \prod_{w=1}^d \text{per} \left[\begin{array}{cc} {}_{uv}F(x_w) & {}_{uv}f(x_w) \\ r_{w+1}-r_{w-1}-1-t_w+t_{w-1} & 1 \end{array} \right] [\leq_w / .]$$

$$\cdot \prod_{w=1}^d \sum_{n_{\zeta_w}} per[\frac{uv}{r_{w+1}-r_{w-1}-1-t_w+t_{w-1}} F(x_w)] [\zeta_w/.] per[\frac{uv}{1} f(x_w)] [\zeta'_w /.] \quad (2.22)$$

Yukarıdaki teoremden; aynı dağılımlı olmayan kesikli sürekli tesadüfi değişkenlerden elde edilmiş olan $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, permanent kullanılarak verilmiştir.

Teorem 2.11

$$\cdot \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)! \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{s_d-1}} \prod_{w=1}^d \sum_{n_{\zeta_w}} n_{\zeta_w}! \prod_{l=1}^{n_{\zeta_w}} {}_{uv}F_{\zeta_w^l}(x_w) {}_{uv}f_{\zeta_w^r}(x_w). \quad (2.23)$$

Burada, $\varsigma_w = \{\varsigma_w^1, \varsigma_w^2, \dots, \varsigma_w^{n_{\varsigma_w}}\}$ ve $\varsigma'_w = \{\varsigma'_w{}^w\}$ 'dir.

Teorem 2.11’de, (2.4) ve (2.5) kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.12

$$\cdot [\,_{\mu\nu}F^S(x_w)]^{r_{w+1}-r_{w-1}-1-t_w+t_{w-1}}\,_{\mu\nu}f^S(x_w). \quad (2.24)$$

İspat. (2.20),

$$\sum \sum P\{x_1 < X_{r_1:n}^s \leq x_1 + \delta x_1, x_2 < X_{r_2:n}^s \leq x_2 + \delta x_2, \dots, x_d < X_{r_d:n}^s \leq x_d + \delta x_d\} \quad (2.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.25), $\prod_{w=1}^d \delta x_w$ bölünür ve $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_d$ 'ler sıfıra götürülürse,

(2.24) elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.10'da, permanent açılımı kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.13

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D \sum_P \prod_{l=1}^{r_1-1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1) \\ \cdot \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=r_{w-1}}^{r_w-1} (-1)^{r_w-1-t} \sum_{\substack{n_\tau=t-r_{w-1} \\ n_{\tau'}=r_w-1-t}} \prod_{l=1}^{t-r_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{r_w-1-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}) \prod_{w=1}^d {}_{uv}f_{j_{r_w}}(x_w). \quad (2.26)$$

Burada; $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{t-r_{w-1}}\}$, $\tau' = \{\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_{r_w-1-t}\}$, $\tau \cap \tau' = \emptyset$ ve $\tau \cup \tau' = \{j_{r_{w-1}+1}, j_{r_{w-1}+2}, \dots, j_{r_w-1}\}$ 'dir.

İspat.

$$P\{x_1 < X_{r_1:n} \leq x_1 + \delta x_1, x_2 < X_{r_2:n} \leq x_2 + \delta x_2, \dots, x_d < X_{r_d:n} \leq x_d + \delta x_d\} \quad (2.27)$$

ifadesini gözönüne alalım. (2.27), $\prod_{w=1}^d \delta x_w$ bölünür ve $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_d$ 'ler sıfıra götürülürse, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D \sum_p \prod_{l=1}^{r_1-1} [{}_{uv}F_{j_l}(x_1)] {}_{uv}f_{j_{r_1}}(x_1) \\ \cdot \prod_{l=r_1+1}^{r_2-1} [{}_{uv}F_{j_l}(x_2) - {}_{uv}F_{j_l}(x_1)] {}_{uv}f_{j_{r_2}}(x_2) \dots {}_{uv}f_{j_{r_d}}(x_d) \prod_{l=r_d+1}^n [1 - {}_{uv}F_{j_l}(x_d)] \quad (2.28)$$

(2.28) ifadesi,

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D \sum_P \prod_{l=1}^{r_1-1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1) \prod_{w=2}^{d+1} \prod_{l=r_{w-1}+1}^{r_w-1} [{}_{uv}F_{j_l}(x_w) - {}_{uv}F_{j_l}(x_{w-1})] \prod_{w=1}^d {}_{uv}f_{j_{r_w}}(x_w) \quad (2.29)$$

şeklinde de yazılabilir. Şimdi,

$$\prod_{l=r_{w-1}+1}^{r_w-1} [{}_{uv}F_{j_l}(x_w) - {}_{uv}F_{j_l}(x_{w-1})] = \sum_{t=r_{w-1}}^{r_w-1} (-1)^{r_w-1-t} \sum_{\substack{n_\tau=t-r_{w-1} \\ n_{\tau'}=r_w-1-t}} \prod_{l=1}^{t-r_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{r_w-1-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}) \quad (2.30)$$

eşitliğini gözönüne alalım. (2.30), (2.29)'da yerine yazılırsa (2.26) elde edilmiş olur. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.13, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.14

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D^{-1} \sum_{D \atop P_{r_d, \dots, r_2, r_1}} \prod_{l=1}^{r_1-1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1) \cdot \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=r_{w-1}}^{r_w-1} (-1)^{r_w-1-t} \sum_{\substack{n_\tau=t-r_{w-1} \\ n_{\tau'}=r_w-1-t}} \prod_{l=1}^{t-r_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{r_w-1-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}) \prod_{w=1}^d {}_{uv}f_{j_{r_w}}(x_w). \quad (2.31)$$

Burada; $\sum_{D \atop P_{r_d, \dots, r_2, r_1}}, j_1 < j_2 < \dots < j_{r_1-1}, j_{r_1+1} < j_{r_1+2} < \dots < j_{r_2-1}, \dots, j_{r_d+1} < j_{r_d+2} < \dots < j_n$ olmak

üzere, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade etmektedir.

Teorem 2.13, aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

Teorem 2.15

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = (n - r_d)! \sum_{P_{r_d}} \prod_{l=1}^{r_1-1} {}_{uv}F_{j_l}(x_1)$$

$$\cdot \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=r_{w-1}}^{r_w-1} (-1)^{r_w-1-t} \sum_{\substack{n_t=t-r_{w-1} \\ n_{t'}=r_w-1-t}} \prod_{l=1}^{t-r_{w-1}} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_w) \prod_{l=1}^{r_w-1-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}) \prod_{w=1}^d {}_{uv}f_{j_{r_w}}(x_w). \quad (2.32)$$

Burada; $\sum_{P_{r_d}}$, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $(j_1, j_2, \dots, j_{r_d})$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade

etmektedir.

Teorem 2.13'de, (2.4) ve (2.5) kullanılırsa aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem 2.16

$${}_{uv}f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum \sum n! D[{}_{uv}F^s(x_1)]^{n-1}$$

$$\cdot \prod_{w=2}^{d+1} \sum_{t=r_{w-1}}^{r_w-1} (-1)^{r_w-1-t} \binom{r_w - r_{w-1} - 1}{t - r_{w-1}} [{}_{uv}F^s(x_w)]^{t-r_{w-1}} [{}_{uv}F^s(x_{w-1})]^{r_w-1-t} \prod_{w=1}^d {}_{uv}f^s(x_w). \quad (2.33)$$

İspat. Teorem 2.12'nin ispatıyla benzerdir.

3. SONUÇLAR

Bu bölümde, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.1

$$\begin{aligned}
 {}_{uv}F_{r:n}(x) &= \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \binom{n-m}{t-m} \sum_{n_s=n-t+m} (t-m)! \text{per}[{}_{uv}F(x)]_{n-t+m} [s/.) \\
 &= \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \binom{n-m}{t-m} \sum_{n_s=n-t+m} (t-m)! (n-t+m)! \prod_{l=1}^{n-t+m} {}_{uv}F_{s_l}(x) \\
 &= \sum \sum \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \binom{n-m}{t-m} [{}_{uv}F^s(x)]^{n-t+m} \\
 &= \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \sum_P \prod_{l=1}^m {}_{uv}F_{j_l}(x) \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{t'_l}(x) \\
 &= \sum_{m=r}^n m!(n-m)! \sum_{c P_m} \prod_{l=1}^m {}_{uv}F_{j_l}(x) \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{t'_l}(x) \\
 &= \sum_{m=r}^n (n-m)! \sum_{P_m} \prod_{l=1}^m {}_{uv}F_{j_l}(x) \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{t'_l}(x) \\
 &= \sum \sum \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} [{}_{uv}F^s(x)]^m \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \binom{n-m}{t-m} [{}_{uv}F^s(x)]^{n-t} .
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

İspat. (2.6), (2.10), (2.11), (2.13), (2.16), (2.17) ve (2.18)'de $d = 1$ alınırsa, (3.1) elde edilir.

Sonuç 3.2 ve Sonuç 3.3'de; aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sırasıyla, minimum ve maksimumunun dağılım fonksiyonları verilecektir.

Sonuç 3.2

$$\begin{aligned}
{}_{uv}F_{1n}(x) &= 1 - \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^n (-1)^{n-t} \binom{n}{t} \sum_{n_s=n-t} t! \text{per}[{}_{uv}F(x)]_{n-t} [s / .] \\
&= 1 - \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^n (-1)^{n-t} \binom{n}{t} \sum_{n_s=n-t} t! (n-t)! \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{s^l}(x) \\
&= \sum \sum \left\{ 1 - \sum_{t=0}^n (-1)^{n-t} \binom{n}{t} [{}_{uv}F^s(x)]^{n-t} \right\} \\
&= 1 - \frac{1}{n!} \sum_P \sum_{t=0}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{t'_l}(x) \\
&= 1 - n! \sum_{cP_0} \sum_{t=0}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{t'_l}(x) \\
&= 1 - n! \sum_{P_0} \sum_{t=0}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{t'_l}(x). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

İspat. (3.1) de $r = 1$ alınırsa, (3.2) elde edilir.

Sonuç 3.3

$${}_{uv}F_{nn}(x) = \frac{1}{n!} \text{per}[{}_{uv}F(x)]_n$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{l=1}^n {}_{uv}F_l(x) \\
&= \sum \sum [{}_{uv}F^s(x)]^n \\
&= \frac{1}{n!} \sum_P \prod_{l=1}^n {}_{uv}F_{j_l}(x) \\
&= n! \sum_{cP_n} \prod_{l=1}^n {}_{uv}F_{j_l}(x) \\
&= \sum_{P_n} \prod_{l=1}^n {}_{uv}F_{j_l}(x). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

İspat. (3.1) de $r = n$ alınırsa, (3.3) elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.4

$$\begin{aligned}
{}_{uv}f_{r:n}(x) &= \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \binom{n-r}{t-r} \sum_{n_\zeta=n+r-t} (t-r)! \\
&\quad \cdot \sum_{n_\zeta=n+r-1-t} {}_{per}[{}_{uv}F(x)][\zeta / .] {}_{per}[{}_{uv}f(x)][\zeta' / .] \\
&= \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \binom{n-r}{t-r} \sum_{n_\zeta=n+r-t} (t-r)! \sum_{n_\zeta=n+r-1-t} (n+r-1-t)! \prod_{l=1}^{n+r-1-t} {}_{uv}F_{\zeta'_l}(x) {}_{uv}f_{\zeta'}(x) \\
&= \sum \sum r \binom{n}{r} \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \binom{n-r}{t-r} [{}_{uv}F^s(x)]^{n+r-1-t} {}_{uv}f^s(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \prod_{l=1}^{r-1} {}_{uv}F_{j_l}(x) \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{\zeta'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x) {}_{uv}f_{j_r}(x) \\
&= (r-1)!(n-r)! \sum_{\substack{D \\ P_r}} \prod_{l=1}^{r-1} {}_{uv}F_{j_l}(x) \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{\zeta'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x) {}_{uv}f_{j_r}(x) \\
&= (n-r)! \sum_{\substack{P_r \\ l=1}}^{r-1} {}_{uv}F_{j_l}(x) \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{\zeta'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x) {}_{uv}f_{j_r}(x) \\
&= \sum \sum r \binom{n}{r} [{}_{uv}F^s(x)]^{r-1} \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \binom{n-r}{t-r} [{}_{uv}F^s(x)]^{n-t} {}_{uv}f^s(x). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

İspat. (2.19), (2.23), (2.24), (2.26), (2.31), (2.32) ve (2.33)'de $d=1$ alınırsa, (3.4) elde edilir.

Sonuç 3.5 ve Sonuç 3.6'da; aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sırasıyla, minimum ve maksimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonları verilecektir.

Sonuç 3.5

$$\begin{aligned}
{}_{uv}f_{1n}(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} \sum_{n_{\zeta}=n+1-t} (t-1)! \sum_{n_{\zeta'}=n-t} {}_{per}[{}_{uv}F(x)][\zeta / \cdot] {}_{per}[{}_{uv}f(x)][\zeta' / \cdot] \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} \sum_{n_{\zeta}=n+1-t} (t-1)! \sum_{n_{\zeta'}=n-t} (n-t)! \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x) {}_{uv}f_{\zeta'}(x) \\
&= \sum \sum n \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} [{}_{uv}F^s(x)]^{n-t} {}_{uv}f^s(x) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_P \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{\zeta'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x) {}_{uv}f_{j_1}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1)! \sum_{D P_1} \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_{l'}}(x) {}_{uv}f_{j_1}(x) \\
&= (n-1)! \sum_{P_1} \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{t'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_{l'}}(x) {}_{uv}f_{j_1}(x) . \tag{3.5}
\end{aligned}$$

İspat. (3.4) de $r = 1$ alınır, (3.5) elde edilir.

Sonuç 3.6

$$\begin{aligned}
{}_{uv}f_{n:n}(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n_{\zeta}=n-1} \text{per}[{}_{uv}F(x)]_{n-1}[\zeta / .] \text{per}[{}_{uv}f(x)]_1[\zeta' / .] \\
&= \sum_{n_{\zeta}=n-1} \prod_{l=1}^{n-1} {}_{uv}F_{\zeta^l}(x) {}_{uv}f_{\zeta'}(x) \\
&= \sum \sum n [{}_{uv}F^s(x)]^{n-1} {}_{uv}f^s(x) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_P \prod_{l=1}^{n-1} {}_{uv}F_{j_l}(x) {}_{uv}f_{j_n}(x) \\
&= (n-1)! \sum_{D P_n} \prod_{l=1}^{n-1} {}_{uv}F_{j_l}(x) {}_{uv}f_{j_n}(x) \\
&= \sum_{P_n} \prod_{l=1}^{n-1} {}_{uv}F_{j_l}(x) {}_{uv}f_{j_n}(x) . \tag{3.6}
\end{aligned}$$

İspat. (3.4) de $r = n$ alınır, (3.6) elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerden elde edilmiş olan $X_{1:n}$ ve $X_{n:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir.

Sonuç 3.7

$$\begin{aligned}
& {}_{uv}f_{1,n;n}(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{t=1}^{n-1} (-1)^{n-1-t} \binom{n-2}{t-1} \sum_{n_{\mathfrak{A}}=n-t} \prod_{w=1}^2 \sum_{n_{\zeta_w}} \text{per} [{}_{uv}F(x_w)] [\zeta_w / .) \text{per} [{}_{uv}f(x_w)] [\zeta'_w / .) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{t=1}^{n-1} (-1)^{n-1-t} \binom{n-2}{t-1} \sum_{n_{\mathfrak{A}}=n-t} \prod_{w=1}^2 \sum_{n_{\zeta_w}} n_{\zeta_w}! \prod_{l=1}^{n_{\zeta_w}} {}_{uv}F_{\zeta_w^l}(x_w) {}_{uv}f_{\zeta_w^w}(x_w) \\
&= \sum \sum n(n-1) \sum_{t=1}^{n-1} (-1)^{n-1-t} \binom{n-2}{t-1} [{}_{uv}F^s(x_1)]^{n-1-t} [{}_{uv}F^s(x_2)]^{t-1} {}_{uv}f^s(x_1) {}_{uv}f^s(x_2) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \sum_P \sum_{t=1}^{n-1} (-1)^{n-1-t} \sum_{\substack{n_{\tau}=t-1 \\ n_{\tau'}=n-1-t}} \prod_{l=1}^{t-1} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_2) \prod_{l=1}^{n-1-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_1) {}_{uv}f_{j_1}(x_1) {}_{uv}f_{j_n}(x_2) \\
&= (n-2)! \sum_{D P_{n,1}} \sum_{t=1}^{n-1} (-1)^{n-1-t} \sum_{\substack{n_{\tau}=t-1 \\ n_{\tau'}=n-1-t}} \prod_{l=1}^{t-1} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_2) \prod_{l=1}^{n-1-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_1) {}_{uv}f_{j_1}(x_1) {}_{uv}f_{j_n}(x_2) \\
&= \sum_{P_n} \sum_{t=1}^{n-1} (-1)^{n-1-t} \sum_{\substack{n_{\tau}=t-1 \\ n_{\tau'}=n-1-t}} \prod_{l=1}^{t-1} {}_{uv}F_{\tau_l}(x_2) \prod_{l=1}^{n-1-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x_1) {}_{uv}f_{j_1}(x_1) {}_{uv}f_{j_n}(x_2). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

İspat. (2.19), (2.23), (2.24), (2.26), (2.31), (2.32) ve (2.33)'de $d=2$, $r_1=1$ ve $r_2=n$ alınırsa, (3.7) elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerden elde edilmiş olan $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{k:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir.

Sonuç 3.8

$${}_{uv}f_{1,2,\dots,k;n}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-k)!} \sum_{t=k}^n (-1)^{n-t} \binom{n-k}{t-k} \sum_{n_s=n+k-t} (t-k)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{k-1}}} \\
&\quad \cdot \prod_{w=1}^k \sum_{n_{\zeta_w}} per[{}_{uv}F(x_w)] [\zeta_w / \cdot] per[{}_{uv}f(x_w)] [\zeta'_w / \cdot] \\
&= \frac{1}{(n-k)!} \sum_{t=k}^n (-1)^{n-t} \binom{n-k}{t-k} \sum_{n_s=n+k-t} (t-k)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{k-1}}} \prod_{w=1}^k \sum_{n_{\zeta_w}} n_{\zeta_w}! \prod_{l=1}^{n_{\zeta_w}} {}_{uv}F_{\zeta_w^l}(x_w) {}_{uv}f_{\zeta_w'^l}(x_w) \\
&= \sum \sum \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{t=k}^n (-1)^{n-t} \binom{n-k}{t-k} [{}_{uv}F^s(x_k)]^{n-t} \prod_{w=1}^k {}_{uv}f^s(x_w) \\
&= \frac{1}{(n-k)!} \sum_P \sum_{t=k}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{r'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x_k) \prod_{w=1}^k {}_{uv}f_{j_w}(x_w) \\
&= (n-k)! \sum_{D \in P_{k,\dots,2,1}} \sum_{t=k}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{r'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x_k) \prod_{w=1}^k {}_{uv}f_{j_w}(x_w) \\
&= (n-k)! \sum_{P_k} \sum_{t=k}^n (-1)^{n-t} \sum_{n_{r'}=n-t} \prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau_l'}(x_k) \prod_{w=1}^k {}_{uv}f_{j_w}(x_w) . \tag{3.8}
\end{aligned}$$

İspat. (2.19), (2.23), (2.24), (2.26), (2.31), (2.32) ve (2.33)'de $d=k$, $r_1=1$, $r_2=2, \dots, r_k=k$ alınırsa, (3.8) elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Bayazıt, M. and Oğuz, B.,** 1998. Probability and statistics for engineers, Birsen Yayınevi Ltd. Şti., İstanbul.
- [2] **Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N.,** 1992. A first course in order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [3] **David, H. A.,** 1981. Order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [4] **Reiss, R. D.,** 1989. Approximate distributions of order statistics, Springer, Verlag, New York Inc., USA.
- [5] **Cao, G. and West, M.,** 1997. Computing distributions of order statistics, *Communications in Statistics Theory and Methods* **26**, 755-764.
- [6] **Corley, H. W.,** 1984. Multivariate order statistics, *Commun. Statist.- Theor. Meth.*, **13**, 1299-1304.
- [7] **Vaughan, R. J. and Venables, W. N.,** 1972. Permanent expressions for order statistics densities, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **34**, 308-310.
- [8] **Balakrishnan, N.,** 2007. Permanents, order statistics, outliers and robustness, *Rev. Mat. Complut.*, **20**, 7-107.
- [9] **Bapat, R. B. and Beg, M. I.,** 1989. Order statistics for nonidentically distributed variables and permanents, *Sankhyā, Ser. A*, **51**, 79-93.
- [10] **Akdeniz, F.,** 2002. Olasılık ve istatistik, Baki Kitabevi, Adana.
- [11] **Balakrishnan, N. and Cohen, A. C.,** 1991. Order statistics and inference, Academic Press, Inc., San Diego.
- [12] **Shahbazov, A.,** 2005. Olasılık teorisine giriş, Birsen Yayınevi Ltd. Şti., İstanbul.
- [13] **Barakat, H. M. and Abdelkader, Y. H.,** 2004. Computing the moments of order statistics from nonidentical random variables, *Statistical Methods and Applications*, **13**, 13-24.
- [14] **Balakrishnan, N.,** 1994. On order statistics from non-identical right truncated exponential random variables and some applications, *Commun. Statist.- Theory Meth.*, **23**, 3373-3393.

- [15] **Beg, M. I.**, 1991. Recurrence relations and identities from product moments of order statistics corresponding to nonidentically distributed variables, *Sankhyâ*, Ser.A, **53**, 365-374.
- [16] **Kamps, U.** 1995. A concept of generalized order statistics, Springer, Verlag, New York Inc., USA.
- [17] **Serfling, R. J.**, 1980. Approximation theorems of mathematical statistics, John Wiley and Sons, Inc., Canada.
- [18] **Galambos, J.** 1987. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, Florida.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Bursa’da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Malatya’da tamamladım. 1997 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2001 yılında bu bölümden mezun oldum. 2001 yılında MEB’de Matematik Öğretmeni olarak göreve başladım. Halen aynı görevi sürdürmekteyim. 2002 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik Programında tezli yüksek lisansa başladım ve 2005 yılı bahar döneminde mezun oldum. 2005 yılı güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik Programında doktora başladım. 2007 yılının Ağustos ayında evlendim.

Gökhan GÖKDERE