

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**3-BOYUTLU UZAYDA KATI CİSİMLER ARASINDAKİ**  
**TEMAS KOORDİNATLARI**

**Ayşe KUMARGAL**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Anabilim Dalı: Matematik**

**Danışman :Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU**

**ŞUBAT-2018**

T.C  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**3-BOYUTLU UZAYDA KATI CİSİMLER ARASINDAKİ TEMAS KOORDİNATLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**AYŞE KUMARGAL**  
(141121105)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Ocak 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 9 Şubat 2018

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Selçuk BAŞ (MAÜ)

ŞUBAT-2018

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanmasında gerekli bütün imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın; Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU'na teşekkürler eder, saygılarımı sunarım.



## İÇİNDEKİLER

|                                                                            | <u>Sayfa No</u> |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| ÖNSÖZ.....                                                                 | II              |
| İÇİNDEKİLER .....                                                          | III             |
| ÖZET.....                                                                  | IV              |
| SUMMARY .....                                                              | V               |
| ŞEKİLLER LİSTESİ.....                                                      | VI              |
| SİMGELER LİSTESİ.....                                                      | VII             |
| 1. GİRİŞ.....                                                              | 1               |
| 2. TEMEL TANIMLAR.....                                                     | 2               |
| 3. 3- BOYUTLU UZAYDA KATI CİSİMLER ARASINDAKİ TEMAS<br>KOORDİNATLARI ..... | 7               |
| 3.1. Giriş .....                                                           | 7               |
| 3.2. $\Re^3$ 'teki Yüzeylerin Temel Özellikleri .....                      | 8               |
| 3.3. Örnekler .....                                                        | 10              |
| 3.3.1. Bir Kürenin Geometrik Özellikleri .....                             | 10              |
| 3.3.2. Düzlemsel bir yüzeyin geometrik özellikleri .....                   | 12              |
| 3.4. Değme Hareketinin Noktaları.....                                      | 12              |
| 4. BİR HAREKETİN KAPALI DÖNGÜ DENKLEMLERİ.....                             | 13              |
| 4.1. Hız Analizi.....                                                      | 15              |
| 4.2. İvme Analizi .....                                                    | 18              |
| 4.3. Örnekler .....                                                        | 21              |
| 4.3.1. İki Kürenin Birbirine göre Değme Hareketi .....                     | 21              |
| 4.4. Küre ile Düzlemin Birbirine göre Değme Hareketi.....                  | 23              |
| 4.4.1. Bir Eksen Etrafında Dönme Hareketinin Kinematığı .....              | 24              |
| 4.5. Örnek: İki Kürenin Değme Hareketi .....                               | 26              |
| KAYNAKLAR .....                                                            | 27              |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                             | 29              |

## ÖZET

Bu çalışma dört bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; Giriş kısmı verildi.

İkinci bölümde; Lie operatörü, Atlas, Gauss eğriliği gibi temel tanımlar verildi.

Üçüncü bölümde; çalışmanın giriş kısmı verildi ve bir küre ile düzlemsel yüzeyin geometrik özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde; Bir hareketin kapalı döngü denklemleri, hız ve ivme analizi ifade edildi. Örnekler verildi. İki kürenin birbirine göre değme hareketi, küre ile düzlemin birbirine göre değme hareketi incelendi. Bir eksen etrafında dönme hareketinin kinematiği incelendi.

**Anahtar Kelimeler:** Değme Hareketi, Kinematik, Kapalı Döngü Hareketi, Harita, Christoffel Sembolleri.

## SUMMARY

### Contact Coordinates between Three-Dimensional Rigid Bodies

This study has been arranged in four chapters.

In the first chapter; Introduction

In the second chapter; the fundamental definitions as lie operator, Atlas, Gaussian curvature are given.

In the third chapter; the entrance part of the work was given and the geometrical properties of a sphere and the planar surface were investigated.

In the fourth chapter; Closed-loop equations of a motion, velocity and acceleration analysis were expressed. Examples given. The movement of two relative to each other, the movement of the sphere to the plane relative to each other has been studied. The kinematics of the rotation about an axis have been studied.

**Key Words:** Contact Motion, Kinematic, Closed Loop Motion, Map, Christoffel Symbols.

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|                                                                                 | <b><u>Sayfa No</u></b> |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| Şekil 3.1. İki katı cismin değme noktası .....                                  | 7                      |
| Şekil 3.2. Bir kürenin koordinat eğrileri .....                                 | 10                     |
| Şekil 3.3. Bir düzlemin koordinat eğrileri .....                                | 11                     |
| Şekil 3.4. Koordinat eğrileri ve Değme çatıları ve $\psi$ açısının tanımı ..... | 12                     |
| Şekil 4.1. İki katı cismin dönme hareketi .....                                 | 24                     |



## SİMGELER LİSTESİ

|                    |                                                                                                |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\wedge$           | : Vektörel Çarpım                                                                              |
| $< , >$            | : İç çarpım fonksiyonu                                                                         |
| $\dot{U}$          | : U nun noktasal türevi                                                                        |
| $\Gamma$           | : Yer vektörü                                                                                  |
| $V$                | : Doğrusal hız                                                                                 |
| $W$                | : Açısal hız                                                                                   |
| $\Omega$           | : Anti-Simetrik matris                                                                         |
| $R$                | : Rotasyon matrisi                                                                             |
| $\Gamma_{c_1 o_1}$ | : $c_1$ noktasının $o_1$ çatısındaki yer vektörü                                               |
| $o_1 v_{c_1 o_1}$  | : $c_1$ noktasının $o_1$ çatısındaki hızı                                                      |
| $o_1 w_{c_1}$      | : $c_1$ noktasının $o_1$ çatısındaki açısal hızı                                               |
| $a_{R_b}$          | : $a$ çatısındaki bileşenleri $b$ çatısındaki vektör bileşenlerine dönüştüren rotasyon matrisi |
| $S_p$              | : Harita                                                                                       |
| $[ij, k]$          | : 1. tip Christoffel sembolü                                                                   |
| $\Gamma_{i,j}^k$   | : 2. tip Christoffel sembolü                                                                   |
| $G$                | : Metrik tensör                                                                                |

## 1. GİRİŞ

3-boyutlu katı cisimler arasındaki hız ve ivme analizi konusu detaylı bir şekilde [2,10,12,15] kaynaklarında incelenmiştir. 3-boyutlu kinematiğin değme hareketi üzerindeki çalışmalar [17] tarafından yapılmıştır.

Düzlemsel katı cisimler arasındaki değme hareketi üzerine yoğun çalışmalar [1,6,9,18,23] tarafından yapılmıştır.

Cai and Roth [3,4]; değme hareketi sırasındaki iki cismin değme noktasındaki bağıl hareket hakkında çalışmıştır. [4]' de her bir değme hareketindeki cismin yüzeyindeki değme noktasının hareketi, her bir yüzeyin bağıl hareketi ve local geometrik özellikleri açısından ifadesi bulunur ve çalışma konfigürasyon alanının alt uzayıyla sınırlıdır.

## 2. TEMEL TANIMLAR

**Tanım 2.1 (Ortogonal Matris):** Çarpma işlemine göre tersi bulunan ve tersi transpozuna eşit olan matrise *ortogonal matris* denir, yani  $A^T = A^{-1}$  ise  $AA^{-1} = A^T A = I$  dır,[24].

**Tanım 2.2 (Rotasyon Matrisi) :** 2 ya da 3- boyutlu uzayda noktalar kullanılarak yüzey ya da yüzeyler şeklinde tanımlanmış cisimlerin döndükleri zaman tanımlama noktalarının geleceği yeni koordinatların hesaplanmasında kullanılan matrislerdir,[24].

**Tanım 2.3 (Atlas) :**  $M^n$   $n$ - boyutlu topolojik manifoldu gösterebilir.  $M^n$  'nin açık alt kümelerinin numaralanmış bir kümesi  $V = \{V_\alpha\}$  olsun. Eğer  $M^n$  'nin her noktası için bu noktayı içtuta eden en azından bir  $V_\alpha$  var ve  $\bigcup_\alpha V_\alpha = M^n$  ise  $V$ 'ye  $M^n$  'nin bir açık örtüsü vardır. Bu şekilde  $V = \{V_\alpha\}$  açık örtüsü verildiğinde her bir  $V_\alpha$  açık alt örtüsü için  $V_\alpha$  'yı  $\mathbb{R}^n$  'nin bir  $U_\alpha$  açık alt örtüsüne irtibatlandıran bir de  $\phi_\alpha$  homeomorfizmi (hem kendisi hem de tersi türevlenebilen 1:1 fonksiyon ) vardır.  $V = \{V_\alpha\}$  dan hareketle bir,

$$A = \{(V_\alpha, \phi_\alpha)/\phi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha\}$$

koleksiyonu elde edilir.  $A$  koleksiyonunun her bir  $(V_\alpha, \phi_\alpha)$  ikilisine  $M^n$  için koordinat dönüşümü ve ya harita denir.  $A$  koleksiyonu herhangi iki  $(V_\alpha, \phi_\alpha)$  ve  $(V_\beta, \phi_\beta)$  haritaları için  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$  iken  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$  bileşke dönüşümleri  $r$ - mertebeden diferansiyellenebilir ise  $A = \{(V_\alpha, V_\beta)\}$  koleksiyonuna  $M^n$  için diferansiyellenebilir Atlas adı verilir,[24].

**Tanım 2.4 (Gauss Eğriliği):**  $M \subset E^3$  bir yüzey ve  $\{X, Y\} \subset \chi(M)$  lineer bağımsız olmak üzere  $Z = X \wedge Y$  verilsin. O zaman,

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \frac{\det(z, D_x z, D_y z)}{\|z\|^4}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona  $M$  nin *Gauss eğrilik fonksiyonu* ve  $K(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasında *Gauss eğriliği* denir, [25].

**Tanım 2.5 (Ortalama Eğrilik) :**  $M \subset E^3$  bir yüzey ve  $\{X, Y\} \subset \chi(M)$  lineer bağımsız olmak üzere  $Z = X \wedge Y$  verilsin. O zaman,

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = - \frac{\det(z, x, D_y z) + \det(z, y, D_x z)}{\|z\|^3}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona  $M$  nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* ve  $H(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasındaki *ortalama eğriliği* denir, [25].

**Tanım 2.6 (Simetrik Matris):**  $A$ ,  $n \times n$  tipinde bir kare matris olsun;  
 $A^T = A$  ise  $A$  matrisine simetrik matris denir,[24].

**Tanım 2.7 (Lie Grubu):** Bir  $M$  diferensiyellenebilir manifoldu ve bir  $G$  grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki Aksiyomlar sağlanıyorsa  $(M, G)$  ikilisine bir *Lie grubu* denir,[25].

**L<sub>1</sub>)**  $M$  nin noktaları  $G$  nin elemanları ile çakışır.

**L<sub>2</sub>)**  $M \times M \rightarrow M$

$$(a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

**Tanım 2.8 (Lie Operatörü):**  $V$  bir  $K$  cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$[,]: V \times V \rightarrow V$$

$$(X, Y) \rightarrow [,](X, Y) = [X, Y]$$

dönüşümü için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa bu dönüşüme  $V$  üstünde bir Lie operatörü denir,[25].

- 1) Bilineer
- 2) Alterne ( $\forall X, Y \in V$  için  $[X, Y] = -[Y, X]$ )
- 3)  $\forall X, Y, Z \in V$  için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

**Tanım 2.9:** A reel bir afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayıda V olsun. Eğer V de bir  $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  iç çarpım işlemi tanımlanırsa, bu işlem yardımı ile A da açılı, diklik ve uzunluk gibi metrik özellikler tanımlanabilir.

n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına n-boyutlu Öklid Uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir[25].

**Tanım 2.10:**  $E^n$ , n- boyutlu Öklid uzayında bir nokta X olsun.  $E^n$  de bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun.  $x_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}$  bileşenlerine

$E^n$  nin i-yinci koordinat fonksiyonları denir[25].

**Tanım 2.11:**  $\mathbb{R}^n$  standart reel afin uzay olmak üzere  $\mathbb{R}^n$  de bir  $\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  iç çarpımını  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  için ,

$$\langle, \rangle (x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Şeklinde tanımlayarak,  $\mathbb{R}^n$  de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı elde edilir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $\mathbb{R}^n$  vektör uzayı ile birleşen ,  $\mathbb{R}^n$  afin uzayına n-boyutlu Standart Öklid Uzayı denir[25].

**Tanım 2.12:** Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayıda V olsun. V de

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

Şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına 3-boyutlu Öklid Uzayı denir ve

$E^3$  ile gösterilir[25].

**Tanım 2.13:** 3-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı  $E^3$  olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm  $\|, \|$  olmak üzere  $d: E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\|$  olarak tanımlanan fonksiyona  $E^3$  de uzaklık fonksiyonu ve her  $X, Y \in E^3$  için  $d(X, Y)$  değerine de X ile Y arasındaki uzaklık adı verilir[25].

**Tanım 2.14:**  $E^3$  , 3- boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir[25].

**Tanım 2.15:**  $E^3$  , 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna  $E^3$  de Öklid metriği denir[25].

**Tanım2.16:** 3- boyutlu reel iç çarpım uzayı  $\mathbb{R}^3$  ile birleşen  $E^3$  öklid uzayında, sıralı bir

$\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  nokta dörtlüsü için eğer  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$  vektör sistemi  $V$  nin bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  çatısına bir dik çatı (veya Öklid çatısı ) denir[25].

**Tanım 2.17(Lineer Dönüşüm):**  $V$  ve  $W$  aynı  $\mathfrak{S}$  cismi üzerindeki iki vektör uzayı olsun. Bir  $L: V \rightarrow W$  dönüşümü için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa bu dönüşüme lineerdir denir, [24].

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta) \quad , \forall \alpha, \beta \in V \\ \text{ii)} \quad & L(a\alpha) = aL(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

**Tanım 2.18(Projektif Uzay):**  $\mathfrak{S}$  üzerinde bir vektör uzayı  $V$  ve  $V$  deki sıfırdan farklı vektörlerin cümlesi  $V' = V - \{0\}$  olsun.  $\alpha, \beta \in V$  için  $\beta = c\alpha$  olacak şekilde sıfırdan farklı bir  $c \in \mathfrak{S}$  skaları var ise  $\alpha \approx \beta$  yazılır. Bu  $\approx$  bağıntı  $V$  de bir denklik bağıntısıdır. Bu şekildeki tüm denklik sınıflarının cümlesine  $V$  ye karşılık gelen Projektif uzay adı verilir,[25].

**Tanım 2.19:**  $G$  boştan farklı bir cümle ve  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  de bir ikili işlem olsun, eğer bu ikili işlem

$$\forall a, b \in G \text{ için } a.(b.c) = (a.b).c$$

özellikliğini sağlarsa  $G$  ye yarı grup denir, [26].

**Tanım 2.20:**  $G$ , boştan farklı bir cümle olsun

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow x.y$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa  $(G, .)$  ikilisine bir grup denir.

$$i) \forall x, y, z \in G \text{ için } (x.y).z = x.(y.z),$$

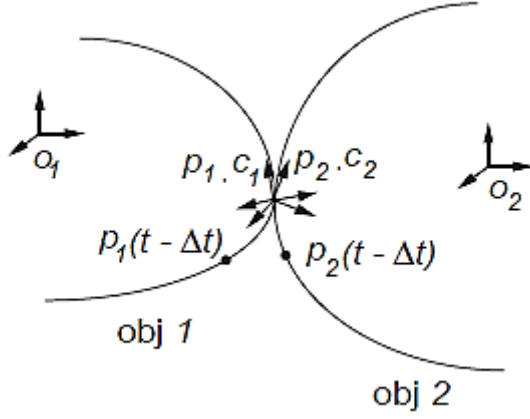
$$ii) \forall x \in G \text{ için } e.x = x.e = x \text{ olacak şekilde } G \text{ de bir tek } e \text{ birim elemanı vardır,}$$

iii)  $\forall x \in G$  için  $x \cdot x' = x' \cdot x = e$  olacak şekilde  $G$  de bir tek  $x'$  inversi vardır, [27].

**Tanım 2.21:**  $(G, \cdot)$  bir grup olsun  $G$  grubu “ $\cdot$ ” işlemine göre değişimli ise, yani  $\forall x, y \in G$  için  $x \cdot y = y \cdot x$  sağlanıyorsa,  $G$  ye değişimli grup denir,[28].



### 3. 3- BOYUTLU UZAYDA KATI CİSİMLER ARASINDAKİ TEMAS KOORDİNATLARI



Şekil 3.1. İki katı cismin değme noktası

#### 3.1. Giriş

Şekil 3.1 ‘de iki katı cismin değme hareketi gösterilmiştir. Herhangi bir  $t$  anında birinci cismin değme noktası  $p_1$  , ikinci cismin değme noktası  $p_2$  ‘dir.

$c_1$  ve  $c_2$  iki nokta çifti sırasıyla birinci ve ikinci cismin yüzeyleri boyunca hareket eden değme noktalarıdır. Birinci ve ikinci cismin iki çatısı sırasıyla  $o_1$  ve  $o_2$  noktalarıdır. Seçilen bu çatılar cisimlere bağlıdır. Değme noktalarını  $c_1$  ve  $c_2$  hareket noktaları ile koordinat sistemine dönüştüreceğiz. Son olarak;  $t$  anında  $c_1$  ve  $c_2$  çatılarını sırasıyla sabit cismin  $p_1$  ve  $p_2$  noktalarının çatı koordinatları ile tanımlayacağız. Bir nokta ya da bu noktaya bağlı olarak seçilen çatı için aynı şekil kullanılmaktadır. Şimdiye kadar yapılan işlemler [15] ile aynıdır.  $\Gamma$  bir yer vektörü,  $V$  doğrusal hız ve  $w$  açısal hız olarak kullanılacaktır.  $a$  ve  $\alpha$  sırasıyla doğrusal açısal ivmeleri gösterir.  $w$  ‘nun anti simetrik matris formu için  $\Omega$  ifadesini kullanacağız. Rotasyon matrisleri  $R$  ile tanımlanır. Referans çatıları olarak görülen noktalar bir üst indis olarak da kullanılmaktadır.  $q$  bir vektör  $a$  ve  $b$  ‘de iki alt indis olmak üzere  $b$  noktası  $q$  noktası ile  $a$  ve  $q$  arasındaki farkı ifade eder. Örnek olarak;  $\Gamma_{c_1 o_1}$ ;  $c_1$  ‘in  $o_1$  ‘deki yer vektörüdür.  $o_1 v_{c_1 o_1}$  hızı ile  $o_1$  çatısının  $o_1$  noktası ile  $c_1$  noktası arasındaki farkı ifade eder. Diğer taraftan tek bir eğik alt indis olduğu zaman

bu noktaya bağılı bir referans çatısı seçilmektedir. Böylece;  $o_{1w_{c_1}}$  ya da  $o_{1\Omega_{c_1}}$  açısal hızının referans çatısı  $c_1$  olduğu zaman  $o_1$  'de referans çatısı olarak tanımlanır. Aksi belirtilmediği sürece vektörlerin koordinat sistemleri bileşenlerinin kendisinin olup olmadığına bakınız. Alt indisin koordinat sistemlerinin  $x, y$  ve  $z$  bileşenlerinin açık olarak ifade edildiğine bakınız. Bileşenler göz önüne alındığında  $a_{R_b}$  ;  $a$  çatısındaki bileşenleri  $b$  çatısındaki vektör bileşenlerine dönüştüren rotasyon matrisidir. Yer vektörleri üst indis olarak kullanılmaz. Çünkü yer vektörleri bir çatı üzerine bağılı olarak kurulmaz. Ancak herhangi bir türev, herhangi bir hız ya da ivmeye bağılı olarak kullanılan referans çatısı üzerinde türev alma işlemi gerçekleştirilemez. [8] 'deki Kane ve Levinson kullanımına benzer bir gösterim kullanılacaktır. Örneğin;  $\Gamma_{c_1 o_1}$  türevini göz önüne alalım.  $o_1$  referans çatısı sabit olduğundan  $o_1$  noktasından dolayı  $o_1$  çatısındaki  $c_1$  noktasının hızı ;

$$o_{1v_{c_1 o_1}} = \frac{o_{1d}}{dt} r_{c_1 o_1}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde  $o_1$  çatısında  $c_1$  noktasının ivmesi;

$$\frac{o_{1d}}{dt} (o_{1v_{c_1 o_1}}) = o_{1a_{c_1 o_1}}$$

şeklindedir. Böylece  $p_2$  çatısında  $\Gamma_{c_1 p_1}$  türevi  $p_{1v_{c_1 p_1}}$  değildir. Bunun yerine

$$\begin{aligned} \frac{p_{2d}}{dt} r_{c_1 p_1} &= \frac{p_{1d}}{dt} r_{c_1 p_1} + p_{2w_{p_1}} \times r_{c_1 p_1} \\ &= p_{1v_{c_1 p_1}} + p_{2w_{p_1}} \times r_{c_1 p_1} \end{aligned}$$

olarak geliştirilen ifade Kane ve Levinson tarafından üretilen ifade ile aynıdır [8].

### 3.2. $\mathcal{R}^3$ 'teki Yüzeylerin Temel Özellikleri

Burada Kinematik denklem ilişkilerini araştırmak için bu çalışmamızda daha sonra kullanacağımız birkaç tanım ve kavramı inceleyeceğiz. Ayrıntılı olarak bu konu standart diferansiyel geometride bulunabilir.[14,22,11]

**Tanım3.2.1:**  $S_p$ ;  $p$  noktasını içeren  $S$  yüzeyinin açık bir alt kümesi olsun. Eğer  $\mathcal{R}^2$ , nin bir  $U$  açık alt kümesi var ve  $f: U \rightarrow S_p \in \mathcal{R}^3$  dönüşümü ve  $\forall \varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \in U$  için  $\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^1}$  ve  $\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}$  lineer bağımsız türev çiftleri mevcut ise  $(f, U)$  ikilisine  $S_p$  'nin Koordinat Sistemi denir.

$S_p$  açık bağı alt kümesine Harita denir.  $S$ 'nin tüm noktalarının tek bir haritası ile temsil edilebileceğini söyleyebiliriz. Böyle bir durumda  $S$ 'nin tüm noktalarını kapsayan haritaları ile bir dizi oluşturabiliriz. Yani ;  $S = \cup_{i=1}^n S_i$  'dir. Buradaki  $S_i$ 'ler  $S$ 'in haritasıdır.  $\{S_i\}_{i=1}^n$  ifadesine  $S$  için Atlas denir.  $S$ 'nin temel özelliklerini karakterize edebilmek için  $f$ 'nin türevlerini hesaplamak gerekecektir.  $f(\varepsilon^1, \varepsilon^2)$  'yi  $C^3$  sınıfından alacağız.

**Tanım.3.2.2:** Lineer bağımsız bir nokta olarak verilen  $x_i = \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^i}$   $i = (1,2)$  ifadesine yüzeyin Dayanak Vektörleri adı verilir.  $x_1$  ve  $x_2$  özel noktaları minimal teğet düzlemini kapsar.  $n$  birim normal;  $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$  ifadesine belirli bir noktada teğet düzlemine dik olan birim normal vektördür.  $\langle, \rangle$  iç çarpım sembolü olmak üzere eğer;  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$  ise  $(f, U)$ 'ya ortogonal koordinat sistemi denir.

Not:  $x_i$  'ler birim vektör olmak zorunda değildir.

**Tanım.3.2.3:**  $\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}$  ve  $n$  üçlü birim vektörlerinin etrafında oluşan değme noktası olmak üzere bir local referans çatısıdır.  $n$ , normal vektör olacak şekilde  $(f, U)$  koordinat sistemini seçeriz.

**Tanım.3.2.4:**  $G$  bir metrik tensör öyle ki  $2 \times 2$  tipinde simetrik ve pozitif tanımlı bir matrisin elemanları  $g_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$   $i, j = 1,2$  şeklinde tanımlanır.  $g_{i,j}$  katsayıları 1. Temel formu verir.

**Tanım.3.2.5:** Christoffel Sembolleri: iki tip christoffel sembolü vardır. Birinci tip christoffel sembolü  $[ij, k]$  olmak üzere;

$$[ij, k] = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon^j}, x_k \right\rangle \quad i, j, k = 1,2$$

şeklinde tanımlanır. İkinci tip christoffel sembolü  $\Gamma_{i,j}^k$  olmak üzere;

$$\Gamma_{i,j}^k = \sum_{l=1}^2 \left\langle \frac{\partial x_l}{\partial \varepsilon^j}, x_l \right\rangle g^{lk} = \sum_{l=1}^2 [ij, l] g^{lk} \quad i, j, k = 1,2$$

Şeklinde tanımlanır. Burada  $g^{lk}$  ;  $G$  metrik tensörünün ters bileşenleridir. Tanımlanmış olan christoffel sembollerinin her ikisinde simetrik olduğu açıktır. Yani;  $[ij, k] = [ji, k]$  ve  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  şeklindedir. Koordinat sistemi Kartezyen olduğundan christoffel sembolleri sıfıra eşittir. Christoffel sembollerini metrik tensörün bileşenlerinin türevi olarak ifade edebiliriz. Yani ;

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \varepsilon^k} = [jk, i] + [ik, j] = g_{il} \Gamma_{jk}^l + g_{jl} \Gamma_{ik}^l \quad (3.1)$$

şeklindedir.

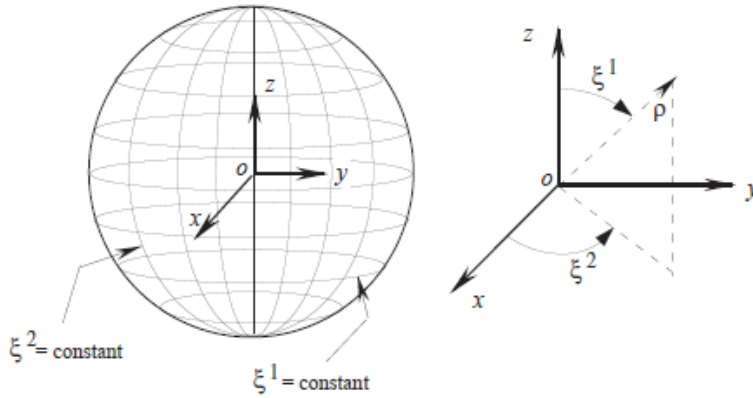
**Tanım.3.2.6:** Gauss Denklemleri: Temel vektörlerin türevi;

$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon^j} = L_{ij}n + \sum_k \Gamma_{ij}^k x_k$  şeklindedir.  $L_{ij}$  sadece metrik tensördeki ikinci temel formun bileşenleri ile ilişkilidir.  $\Gamma_{ij}^k$  teğet bileşenlerini bulmak için  $\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon^j}$  normal bileşenleri bulmak gerekir.

Yüksek Mertebeden Türevler:  $f$  en az  $C^3$  sınıfından ise  $L_{ij}$  ve  $\Gamma_{ij}^k$  diferansiyellenebilir. Straightforward tarafından  $\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon^j}$  diferansiyeli;

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \varepsilon^k \partial \varepsilon^j} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 [\Gamma_{ik,j}^\alpha + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha - L_{ij} L_k^\alpha] x_\alpha + [\Gamma_{ij}^\alpha L_{\alpha k} + L_{ij,k}] n$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $\Gamma_{ik,j}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial \varepsilon^j}$  ve  $L_{ij,k} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial \varepsilon^k}$  'dır.



Şekil 3.2. Bir kürenin koordinat eğrileri

### 3.3. Örnekler

#### 3.3.1. Bir Kürenin Geometrik Özellikleri

$\rho$  yarıçaplı bir küre için koordinat sistemi;

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3: (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \mapsto (\rho \sin \varepsilon^1 \cos \varepsilon^2, \rho \sin \varepsilon^1 \sin \varepsilon^2, \rho \cos \varepsilon^1)$$

Şeklinde tanımlanır. Koordinat sisteminin birim normallerine karşılık gelen birim normal vektörleri;

$$x_1 = \begin{bmatrix} \rho \cos \varepsilon^1 \cos \varepsilon^2 \\ \rho \cos \varepsilon^1 \sin \varepsilon^2 \\ -\rho \sin \varepsilon^1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -\rho \sin \varepsilon^1 \sin \varepsilon^2 \\ \rho \sin \varepsilon^1 \cos \varepsilon^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad n = \begin{bmatrix} \sin \varepsilon^1 \cos \varepsilon^2 \\ \sin \varepsilon^1 \sin \varepsilon^2 \\ \cos \varepsilon^1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde değme çatısı  $\left[ \frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}, n \right]$  şeklinde tanımlanır.  $G$  metrik tensörünün bileşenleri;

$$\begin{aligned} g_{11} &= \rho^2 & g_{12} &= 0 \\ g_{21} &= 0 & g_{22} &= \rho^2 \sin(\varepsilon^1)^2 \end{aligned}$$

olarak verilir. Koordinat sistemi ortogonal olduğundan  $G$  vektörelidir.  $(\langle x_1, x_2 \rangle = 0)$

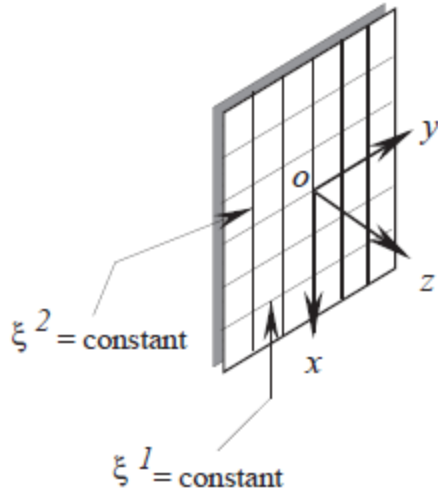
christoffel sembolleri ve  $L_{ij}$  katsayıları ;

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 & \Gamma_{11}^2 &= 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= 0 & \Gamma_{12}^2 &= \cot \varepsilon^1 \\ \Gamma_{21}^1 &= 0 & \Gamma_{21}^2 &= \cot \varepsilon^1 \\ \Gamma_{22}^1 &= -\sin \varepsilon^1 \cos \varepsilon^1 & \Gamma_{22}^2 &= 0 \\ L_{11} &= -\rho & L_{12} &= 0 \\ L_{21} &= 0 & L_{22} &= -\rho(\sin \varepsilon^1)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir.  $\Gamma_{ij}^k$  ve  $L_{ij}$  'nin türevleri sıfırdan farklıdır.

$$\begin{aligned} \Gamma_{12,1}^2 &= -\csc^2 \varepsilon^1 & \Gamma_{21,1}^2 &= -\csc^2 \varepsilon^1 \\ \Gamma_{22,1}^1 &= -\cos(2\varepsilon^1) & L_{22,1} &= -2\rho \sin \varepsilon^1 \cos \varepsilon^1 \end{aligned}$$

'dir.



Şekil 3.3. Bir düzlemin koordinat eğrileri

Gauss eğriliği ve bir kürenin ortalama eğriliği sabit olmasına rağmen  $g_{ij}$ ,  $\Gamma_{ij}^k$  ve  $L_{ij}$  katsayıları sabit değildir.

### 3.3.2. Düzlemsel bir yüzeyin geometrik özellikleri

$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \mapsto (\varepsilon^1, \varepsilon^2, 0)$  koordinat sistemi ile şekil3.3'teki düzlemi dikkate alalım. Önceki bölümde verilen tanımlardan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

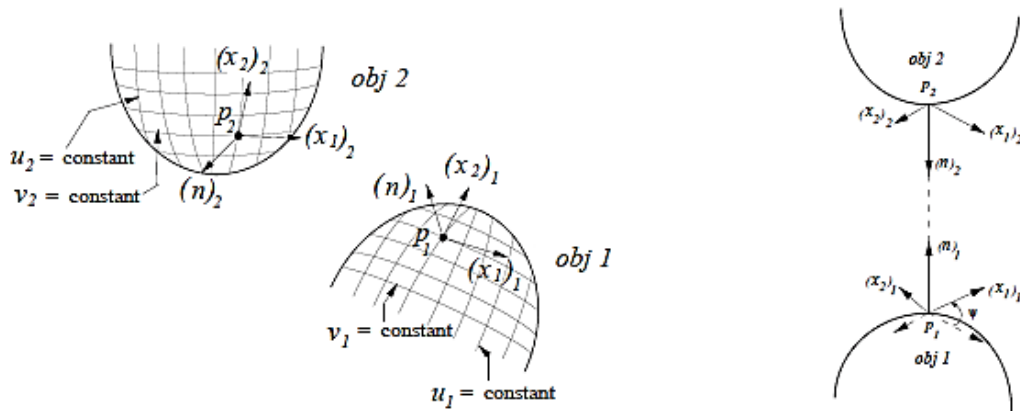
$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & x_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & n &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ g_{11} &= 1 & g_{12} &= 0 \\ g_{21} &= 0 & g_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Bir düzlemin birim normal vektörleri ve metrik tensörün bileşenleri sabit olduğundan diğer tüm yüksek mertebeden türevleri sıfırdır.

### 3.4. Değme Hareketinin Noktaları

Değme noktasının hareketini karakterize edebilmek için tanım.3.2.5'teki değme hareketini tanımlayacağız. Şekil3.4'te (sol) gösterildiği gibi  $i$  için  $\varepsilon^1 = u_i$  ve  $\varepsilon^2 = v_i$  olarak tanımlanır. Değme hareketinin dört tekil koordinatı  $u_1, v_1, u_2$  ve  $v_2$  şeklinde tanımlanır.  $u_1$  ve  $u_2$  arasındaki açı değme açısının beşinci parametresi  $\psi$ 'dir. [15]

Şekil3.4'te  $(x_1)_1$  ( $v_1$  teğeti = sabit eğri) ve  $(x_1)_2$  ( $v_2$  teğeti = sabit eğri) arasındaki açıyı ifade eder.  $p_1$  noktasındaki yüzeyde  $(n)_1$  dışa doğru birim normalini  $(x_1)_1$  etrafında döndürülmesiyle  $\psi$  açısı elde edilir ve  $(x_1)_1$  ve  $(x_1)_2$  aynı hizaya gelecek şekilde  $\psi$ 'nin işareti belirlenir.



Şekil 3.4. Koordinat eğrileri ve Değme çatıları ve  $\psi$  açısının tanımı

#### 4. BİR HAREKETİN KAPALI DÖNGÜ DENKLEMLERİ

Şekil 3.1’de [18]’deki vektör için üçgen kuralını kullanacak olursak;

$$r_{c_i o_i} = r_{c_i p_i} \quad (4.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla (4.1) denkleminin herhangi bir koordinat sisteminin bileşenleri olarak yazabiliriz. ( Bu noktada biz sadece belirli bir koordinat sisteminin vektör denklemleri ve onların bileşenleri ile ilgileneceğiz. ) (4.1) denkleminin her bir teriminin  $t$  anında  $o_i$  referans çatısına göre türevi;

$$o_{iV_{c_i o_i}} = p_{iV_{c_i p_i}} + o_{i\omega_{p_i}} \times r_{c_i p_i} + o_{iV_{p_i o_i}} \quad (4.2)$$

şeklindedir. (4.2) denkleminin  $o_i$  referans çatısına göre türevi;

$$\begin{aligned} o_{i a_{c_i o_i}} &= p_{i a_{c_i p_i}} + o_{i\omega_{p_i}} \times p_{iV_{c_i p_i}} + p_{i\dot{w}_{c_i p_i}} \times r_{c_i p_i} + \\ & o_{i\omega_{p_i}} \times (p_{iV_{c_i p_i}} + o_{i\omega_{p_i}} \times r_{c_i p_i}) + o_{i a_{p_i o_i}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklindedir. Açısal hızlara [8] ek teoremi uygulanırsa;

$$o_{i w_{c_i}} = o_{i w_{p_i}} + p_{i w_{c_i}} \quad (4.4)$$

şeklinde olur. (4.4) denkleminin her bir terimin  $o_i$  çatısına göre türevi alınır;

$$o_{i \dot{w}_{c_i}} = o_{i \dot{w}_{p_i}} + p_{i \dot{w}_{c_i}} + o_{i w_{p_i}} \times p_{i w_{c_i}} \quad (4.5)$$

olur. Burada  $a_{\dot{w}_b}$  ;  $a_{w_b}$  ’nin  $a$  çatısında zamana göre türevidir. Her  $i$  için  $p_i$  ve  $o_i$  sabit olduğundan;

$$o_{i w_{p_i}} = 0, \quad o_{i \dot{w}_{p_i}} = 0, \quad o_{i V_{p_i o_i}} = 0 \text{ dir.}$$

(4.5) denklemi (4.2) de yerine yazılırsa;

$$o_{iV_{c_i o_i}} = p_{iV_{c_i p_i}} \quad (4.6)$$

$$o_{i a_{c_i o_i}} = p_{i a_{c_i p_i}} \quad (4.7)$$

$$o_{i w_{c_i}} = p_{i w_{c_i}} \quad (4.8)$$

$$o_{i \dot{w}_{c_i}} = p_{i \dot{w}_{c_i}} \quad (4.9)$$

elde edilir. Kapalı  $p_2 \rightarrow c_1 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2$  döngüsünü ele alalım. Yer vektörlerinin toplamına üçgen kanununu uygulayabilmek için;

$$r_{c_1 p_2} = r_{c_1 p_1} + r_{p_1 p_2} \quad (4.10)$$

ifadesini kullanacağız. (4.10) denkleminin  $p_2$  referans çatısına göre ikinci kez türevi alınacak olursa;

$$p_{2V_{c_1 p_2}} = p_{1V_{c_1 p_1}} + p_{2w_{p_1}} \times r_{c_1 p_1} + p_{2V_{p_1 p_2}} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} p_{2a_{c_1 p_2}} &= p_{1a_{c_1 p_1}} + p_{2\dot{w}_{p_1}} \times r_{c_1 p_1} + p_{2w_{p_1}} \times (p_{2w_{p_1}} \times r_{c_1 p_1}) \\ &+ 2p_{2w_{p_1}} \times p_{1V_{c_1 p_1}} + p_{2a_{p_1 p_2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde  $r_{c_i p_i} = 0$  'dır. Benzer şekilde açısal hızlar için hız ve ivme denklemlerini elde edeceğiz.

$$p_{2V_{c_1}} = p_{1w_{c_1}} + p_{2w_{p_1}} \quad (4.13)$$

$$p_{2\dot{w}_{c_1}} = p_{1\dot{w}_{c_1}} + p_{2w_{p_1}} \times p_{1w_{c_1}} + p_{2\dot{w}_{p_1}} \quad (4.14)$$

Şimdi  $p_2 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow p_2$  kapalı döngüsünü ele alalım.

$$r_{c_1 p_2} = r_{c_1 c_2} + r_{c_2 p_2} \quad (4.15)$$

$$p_{2V_{c_1 p_2}} = c_{2V_{c_1 c_2}} + p_{2w_{c_2}} \times r_{c_1 c_2} + p_{2V_{c_2 p_2}} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} p_{2a_{c_1 p_2}} &= c_{2a_{c_1 c_2}} + p_{2\dot{w}_{c_2}} \times r_{c_1 c_2} + p_{2w_{c_2}} \times (p_{2w_{c_2}} \times r_{c_1 c_2}) \\ &+ 2p_{2w_{c_2}} \times c_{1V_{c_1 c_2}} + p_{2a_{c_2 p_2}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Şeklinde kapalı döngü denklemleri vardır. Tanım olarak yukarıdaki denklemde  $r_{c_1 c_2}, c_{2V_{c_1 c_2}}$  ve  $c_{2a_{c_1 c_2}}$  vektörleri sıfırdır. Kapalı döngü denklemleri için açısal hızlar ;

$$p_{2w_{c_1}} = c_{2w_{c_1}} + p_{2w_{c_2}} \quad (4.18)$$

$$p_{2\dot{w}_{c_1}} = c_{2\dot{w}_{c_1}} + p_{2w_{c_2}} \times c_{2w_{c_1}} + p_{2\dot{w}_{c_2}} \quad (4.19)$$

şeklindedir. Şimdi kapalı döngü denklemlerinin değme hareketi dediğimiz kapalı döngü denklemlerini elde edeceğiz. (4.11) ve (4.16) denklemlerini eşitledikten sonra  $r_{c_1 p_1}, r_{c_1 c_2}$  ve  $V_{c_1 c_2}$  'yi sıfır alırsak ;

$$p_{2V_{c_2 p_2}} = p_{1V_{c_1 p_1}} + p_{2V_{p_1 p_2}} \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.20) denklemini (4.2) denkleminde yazarsak ;

$$o_{2V_{c_2 o_2}} = o_{2V_{c_1 o_1}} + p_{2V_{p_1 p_2}} \quad (4.21)$$

denklemini elde edilir. Çünkü  $o_{iV_{p_i o_i}} = 0$  ve  $o_{i w_{p_i}} = 0$ 'dır. (4.13) ve (4.18) denklemlerinin sağ tarafları eşitlenip (4.8) denkleminde yazılırsa ;

$$o_{1w_{c_1}} + p_{2w_{p_1}} = c_{2w_{c_1}} + o_{2w_{c_2}} \quad (4.22)$$

elde edilir. Daha sonra (4.12) ve (4.17) denklemlerinin sağ tarafları eşitlenip 4.6-4.7 denklemlerini kullanarak basitleştirirsek ;

$$o_{2a_{2o_2}} = o_{1a_{c_1o_1}} + 2p_{2w_{p_1}} \times o_{1v_{c_1o_1}} + p_{1a_{p_1p_2}} \quad (4.23)$$

elde edilir. Son olarak (4.14) ve (4.19) denklemlerinin sağ tarafları eşitlenerek ve 4.8-4.9 denklemleri ile basitleştirirsek;

$$o_{1\dot{w}_{c_1}} + p_{2w_{p_1}} \times o_{1w_{c_1}} + p_{2\dot{w}_{p_1}} = c_{2\dot{w}_{c_1}} + o_{2w_{c_2}} \times c_{2w_{c_1}} + o_{2\dot{w}_{c_2}} \quad (4.24)$$

elde edilir. Özetle (4.21) ve (4.22) denklemleri değme noktasında (4.23) ve (4.24) denklemleri kapalı döngü hareketinin hız ve ivmesidir.

#### 4.1. Hız Analizi

$p_2$  çatısında (ayrıca  $c_2$  çatısında) katı cisimlerin birbirine göre hareketinde relatif lineer ve açısal hızların vektörel formda gösterimi;

$$p_{2V_{p_1p_2}} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad p_{2w_{p_1}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde yukarıda tanımlanan relatif lineer ve açısal hızların değme hareketindeki değişiklikleri ile (4.21) ve (4.22) denklemlerine bağlı olarak koordinat değişimleri aşağıdaki yer vektörü ile verilir.

$i$  için  $o_i$  'deki  $c_i$  değme noktasındaki yer vektörü;

$$r_{c_i o_i} = r_{c_i o_i}(\xi^1, \xi^2) \quad i = 1, 2 \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlanır.  $o_i$  ve  $c_i$  arasındaki ve  $c_1$  ile  $c_2$  arasındaki dönüşümü dikkate alalım.

$o_i R_{c_i}$  rotasyon matrisi basit olarak;

$${}^{o_i}R_{c_i} = \begin{bmatrix} \left( \frac{x_1}{\|x_1\|} \right)_i & \left( \frac{x_2}{\|x_2\|} \right)_i & (n)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1)_i & (x_2)_i & (n)_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sqrt{G_i})^{-1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlanır. Koordinat sistemi dik olduğundan  $G_i$  metrik tensörün tüm elemanları pozitifdir ve karekök işlemi uygulanabilir.  $\psi$  için  $c_{2R_{c_1}}$  'in ;

$$c_{2R_{c_1}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\psi & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & -1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülebilir. Şimdi hız ifadelerinin terimlerini bulmaya çalışacağız.  $o_i$  çatısında (4.25) denkleminin türevi bu çatıda  $c_i$  değme noktasındaki hızını verir. Sonuç olarak;

$$o_{iV_{c_i}o_i} = \frac{d}{dt} \left[ o_{i r_{c_i} o_i} (\xi^1, \xi^2) \right] = \sum_{j=1}^2 (x_j)_i \dot{\xi}^j \quad i = 1, 2 \quad (4.27)$$

denklemini ortaya çıkar.  $c_2$  değme çatısındaki noktaların hızları ((4.27) denklemini kullanılacak);

$${}^{o_1}V_{c_1 o_1} = {}^{c_2}R_{c_1} {}^{c_2}R_{o_1} \left[ (x_1)_1 \dot{u}_1 + (x_2)_1 \dot{v}_1 \right] = \begin{bmatrix} R_\Psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$${}^{o_2}V_{c_2 o_2} = {}^{c_2}R_{o_2} \left[ (x_1)_2 \dot{u}_2 + (x_2)_2 \dot{v}_2 \right] = \begin{bmatrix} \sqrt{G_2} \dot{U}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$U_1 = [u_1 \quad v_1]^T \text{ ve } U_2 = [u_2 \quad v_2]^T \text{ 'dir.}$$

Açısal hız için anti simetrik matris gösterimi direkt olarak [13] rotasyon matrisi ile elde edilmiştir. Herhangi bir  $f_{R_m}$  rotasyon matrisi için  $f$  çatısındaki türevi  $f_{\Omega_m} = \dot{R}R^T$  ile verilir.

Bu nedenle;

$$c_{2\Omega_{c_1}} = c_{2\dot{R}_{c_1}} c_{2R_{c_1}^T} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

dir. Burada  $c_{2\Omega_{c_1}}$ ; matris formdaki  $c_2$  değme çatısındaki açısal hızı ifade eder. Benzer şekilde  $o_{i\Omega_{c_i}}$ ;  $c_i$  değme çatısında basitleştirilmiş olarak;

$${}^o\Omega_{c_i} = {}^oR_{c_i}^T {}^o\dot{R}_{c_i} \\ = \begin{bmatrix} (\sqrt{G_i})^{-1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1)_i^T \\ (x_2)_i^T \\ (n)_i^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} (x_1)_i & (x_2)_i & (n)_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sqrt{G_i})^{-1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} + \left[ \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon^j} \right)_i \dot{\varepsilon}^j \quad \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon^j} \right)_i \dot{\varepsilon}^j \quad \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial n}{\partial \varepsilon^j} \right)_i \dot{\varepsilon}^j \right] \begin{bmatrix} (\sqrt{G_i})^{-1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

şeklinde ifade edilir.  $[ij, k]$  ve  $\Gamma_{jk}^i$  christoffel sembollerini ve  $L_{ij}$  ikinci temel formun katsayılarını aşağıdaki gibi cebirsel olarak ifade edilmiştir.

$${}^a\Omega_{c_1} = - \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{g_{11}}\right)_{,1} ([11,1]_1 \dot{u}_1 + [12,1]_1 \dot{v}_1) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{g_{22}}\right)_{,1} ([21,1]_1 \dot{u}_1 + [22,1]_1 \dot{v}_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{g_{11}}\right)_{,1} ([11,1]_1 \dot{u}_1 + [12,1]_1 \dot{v}_1) & -\left(\frac{1}{g_{11}}\right)_{,1} \left(\frac{1}{g_{22}}\right)_{,1} ([11,2]_1 \dot{u}_1 + [12,2]_1 \dot{v}_1) & -\left(\frac{1}{g_{11}}\right)_{,1} \{(L_{11})_1 \dot{u}_1 + (L_{12})_1 \dot{v}_1\} \\ \left(\frac{1}{g_{11}}\right)_{,1} \left(\frac{1}{g_{22}}\right)_{,1} ([11,2]_1 \dot{u}_1 + [12,2]_1 \dot{v}_1) & \left(\frac{1}{g_{22}}\right)_{,1} ([21,1]_1 \dot{u}_1 + [22,1]_1 \dot{v}_1) & -\left(\frac{1}{g_{22}}\right)_{,1} \{(L_{21})_1 \dot{u}_1 + (L_{22})_1 \dot{v}_1\} \\ \left(\frac{1}{g_{11}}\right)_{,1} \{(L_{11})_1 \dot{u}_1 + (L_{12})_1 \dot{v}_1\} & \left(\frac{1}{g_{22}}\right)_{,1} \{(L_{21})_1 \dot{u}_1 + (L_{22})_1 \dot{v}_1\} & 0 \end{bmatrix}$$

buradan;

$$o_{1\Omega_{c_1}} = \begin{bmatrix} 0 & -(\sigma_1 \Gamma_1 \dot{U}_1) & \{-(\sqrt{G_1})^{-1} L_1 \dot{U}_1\}_{2 \times 1} \\ (\sigma_1 \Gamma_1 \dot{U}_1) & 0 & 1 \\ \{-(\sqrt{G_1})^{-1} L_1 \dot{U}_1\}_{1 \times 2}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

elde edilir. Burada  $i = 1, 2$  için  $\sigma_i = \left\{ \frac{(g_{22})_i}{(g_{11})_i} \right\}^{\frac{1}{2}}$  baz vektörlerinin normlarına oranıdır.

Ortonormal bir sistem için  $\sigma_i = 1$ 'dir.  $i$  için  $\Gamma_i$  ve  $L_i$  sırasıyla christoffel sembolü ve ikinci temel formun katsayılarından oluşan  $1 \times 2$  ve  $2 \times 2$  tipinden matrislerdir.  $\Gamma$  ve  $L$ ;

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde;

$$o_{2\Omega_{c_2}} = \begin{bmatrix} 0 & -(\sigma_2 \Gamma_2 \dot{U}_2) & \{-(\sqrt{G_2})^{-1} L_2 \dot{U}_2\}_{2 \times 1} \\ (\sigma_2 \Gamma_2 \dot{U}_2) & 0 & 1 \\ \{-(\sqrt{G_2})^{-1} L_2 \dot{U}_2\}_{1 \times 2}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

şeklinde olur.  $c_2$  çatısındaki her vektör için (4.21) denkleminde 4.28-4.29 denklemlerindeki  $o_{2V_{c_2o_2}}$  ve  $o_{1V_{c_1o_1}}$  ifadeleri yerine yazılırsa ;

$$\sqrt{G_2} \dot{U}_2 = R_\psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1 + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

$$V_z = 0$$

ifadesi elde edilir. (4.68) denklemindeki  $o_{1\omega_{c_1}}$ , (4.32) denklemindeki  $o_{2\omega_{c_2}}$  ve (4.30) denklemindeki  $c_{2\omega_{c_1}}$  ifadesi (4.22) denkleminde yerine yazılırsa;

$$R_\psi(\sqrt{G_1})^{-1}L_1\dot{U}_1 + \begin{bmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \end{bmatrix} = -(\sqrt{G_2})^{-1}L_2\dot{U}_2$$

$$-\sigma_1\Gamma_1\dot{U}_1 + \omega_z = -\dot{\psi} + \sigma_2\Gamma_2\dot{U}_2$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem basitleştirilerek katı cisimlerin hızlarındaki değme hareketlerinin değişim oranı olan ;

$$\dot{U}_1 = (\sqrt{G_1})^{-1}R_\psi(\tilde{H}_1 + H_2)^{-1} \left[ - \begin{pmatrix} \omega_y \\ -\omega_z \end{pmatrix} - H_2 \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \right] \quad (4.33)$$

$$\dot{U}_2 = (\sqrt{G_2})^{-1}(\tilde{H}_1 + H_2)^{-1} \left[ - \begin{pmatrix} \omega_y \\ -\omega_z \end{pmatrix} + \tilde{H}_1 \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \right] \quad (4.34)$$

$$\dot{\psi} = \sigma_1\Gamma_1\dot{U}_1 + \sigma_2\Gamma_2\dot{U}_2 - \omega_z \quad (4.35)$$

$$V_z = 0 \quad (4.36)$$

ifadeler birinci dereceden değme hareketinin kinematiklerini verir. Burada;

$H_i = (\sqrt{G_1})^{-1}L_i(\sqrt{G_1})^{-1}$  ve  $\tilde{H}_1 = R_\psi H_1 R_\psi$  şeklinde tanımlıdır. Bu denklemler ilk olarak Montana [15] tarafından hız denklemleri olarak ifade edildi. İlk olarak yüzey özelliklerini açıklamak için standart diferansiyel geometri gösterimini ( $g_{ij}, \Gamma_{ij}^k$  ve  $L_{ij}$ ) kullanacağız. İkinci olarak ;  $c_1$  montana gibi  $c_2$  çatısındaki tüm vektörleri çözeceğiz.

## 4.2. İvme Analizi

$c_2$  çatısında ki değme hareketindeki katı cisimlerin relatif doğrusal ve açısal bileşenlerini;

$$p_{2_{a_{p_1 p_2}}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad p_{2_{\dot{\omega}_{p_1}}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

şeklinde alalım. Bu bölümde (4.23) ve (4.24) denklemlerindeki kalan terimleri bulmak için yukarıda tanımlanan relatif lineer ve açısal ivmelerin değme hareketindeki koordinatları ve onların türevlerindeki değişiklikler ile ilişkilendirerek terimleri bulacağız. Yüzey özelliklerinin diğer matris fonksiyonlarını tanımlamak için uygundur. ( $\Gamma$  ve  $L$  ile benzer şekilde)

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & 2\Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & 2\Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 2L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\Gamma}} = \begin{bmatrix} (\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1)\Gamma_{11}^2 + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \xi^1} \\ (\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1)\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)\Gamma_{11}^2 + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \xi^2} \\ (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)\Gamma_{12}^2 + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\bar{L}} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \Gamma_{11}^1 L_{11} - \frac{\partial L_{11}}{\partial \xi^1} \\ \Gamma_{11}^1 L_{12} + \Gamma_{12}^1 L_{11} - \frac{\partial L_{12}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial L_{11}}{\partial \xi^2} \\ \Gamma_{12}^1 L_{12} - \frac{\partial L_{12}}{\partial \xi^2} \end{array} \right)^T \\ \left( \begin{array}{c} \Gamma_{21}^2 L_{21} - \frac{\partial L_{21}}{\partial \xi^1} \\ \Gamma_{21}^2 L_{22} + \Gamma_{12}^2 L_{21} - \frac{\partial L_{22}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial L_{21}}{\partial \xi^2} \\ \Gamma_{22}^2 L_{22} - \frac{\partial L_{22}}{\partial \xi^2} \end{array} \right)^T \end{bmatrix}^T$$

ilk olarak değme hareketinin lineer ivmelerini dikkate alacağız.  $o_i$  çatısındaki;

$$o_{i a_{c_i o_i}} = \frac{d}{dt} \left[ o_{i v_{c_i o_i}} \right] = \sum_{j=1}^2 (x_i)_i \ddot{\xi}^j + \sum_{j,k=1}^2 \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi^k} \right)_i \dot{\xi}^j \dot{\xi}^k$$

ifadesi  $c_2$  değme çatısında;

$$\begin{aligned} o_{1 a_{c_1 o_1}} &= c_{2 R_{c_1}} c_{1 R_{o_1}} [(x_1)_1 \ddot{u}_1 + (x_2)_1 \ddot{v}_1 \\ &+ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \right)_1 (\dot{u}_1)^2 + 2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \right)_1 \dot{u}_1 \dot{v}_1 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial v_1} \right)_1 (\dot{v}_1)^2] \\ o_{1 a_{c_1 o_1}} &= \begin{bmatrix} R_\psi \sqrt{G_1} (\ddot{U}_1 + \bar{\Gamma}_1 W_1) \\ -\bar{L}_1 W_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki  $W_i = [(\dot{u}_i)^2 \quad \dot{u}_i \dot{v}_i \quad (\dot{v}_i)^2]^T$  ifadesi non-lineer hız terimlerini temsil eder. Benzer şekilde;

$$o_{2 a_{c_2 o_2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{G_2} (\ddot{U}_2 + \bar{\Gamma}_2 W_2) \\ \bar{L}_2 W_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.  $c_i$  değme noktasındaki  $i$ 'ye bağlı  $o_i$  relatif çatısı için  $c_i$  çatısının  $o_{i \Omega_{c_i}}$  anti-simetrik matrisini tanımlayacağız.

$$o_{i \dot{\Omega}_{c_i}} = o_{i R_{c_i}^T} o_{i \ddot{R}_{c_i}} - (o_{i R_{c_i}^T} o_{i \dot{R}_{c_i}}) (o_{i R_{c_i}^T} o_{i \dot{R}_{c_i}})$$

$$= o_{iR_{c_i}^T} o_{i\ddot{R}_{c_i}} - o_{i\Omega_{c_i}} o_{i\Omega_{c_i}}$$

şeklinde tanımlanır.  $o_{i\Omega_{c_i}}$ 'nin (4.68) 'daki ifadesi ve  $o_{iR_{c_i}}$ 'nin (4.26) 'de ifadesi yerine yazıldıktan sonra gerekli işlemler yapılırsa;

$$o_{i\dot{\Omega}_{c_i}} = o_{iR_{c_i}^T} o_{i\ddot{R}_{c_i}} - o_{i\Omega_{c_i}} o_{i\Omega_{c_i}}$$

Not:  $1 \times 3$  tipindeki  $\bar{\Gamma}$  matrisi ve  $2 \times 3$  tipindeki  $\bar{L}$  matrisi 3. dereceden yüzey özelliklerinin denklemleri içine girer.  $c_2$  çatısında (4.23) ve (4.24) denklemlerinin terimleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p_{2\omega_{p_1}} \times o_{1V_{c_1}o_1} &= \begin{bmatrix} \omega_2 E_1 R_\psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1 \\ \left( \begin{smallmatrix} -\omega_y \\ \omega_z \end{smallmatrix} \right)^T R_\psi (\sqrt{G_1})^{-1} \dot{U}_1 \end{bmatrix} \\ p_{2\omega_{p_1}} \times o_{1\omega_{c_1}} &= \begin{bmatrix} -R_\psi (\sqrt{G_1})^{-1} L_1 \dot{U}_1 \omega_z + \sigma_1 \Gamma_1 \dot{U}_1 \left( \begin{smallmatrix} -\omega_y \\ \omega_z \end{smallmatrix} \right) \\ -\left( \begin{smallmatrix} -\omega_y \\ \omega_z \end{smallmatrix} \right)^T R_\psi E_1 (\sqrt{G_1})^{-1} L_1 \dot{U}_1 \end{bmatrix} \\ o_{2\omega_{c_2}} \times c_{2\omega_{c_1}} &= \begin{bmatrix} (\sqrt{G_1})^{-1} L_1 \dot{U}_1 \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} \\ c_{2\dot{\omega}_{c_1}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Burada  $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  'dır. (4.23) denklemindeki uygun ifadeler yerine yazılırsa;

$$\sqrt{G_2}(\ddot{U}_2 + \bar{\Gamma}_2 W_2) = R_\psi \sqrt{G_1}(\ddot{U}_1 + \bar{\Gamma}_1 W_1) + 2\omega_z E_1 R_\psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1 + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\bar{L}_2 W_2 = -\bar{L}_1 W_1 + 2 \left( \begin{smallmatrix} -\omega_y \\ \omega_z \end{smallmatrix} \right)^T R_\psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1 + a_z \quad (4.39)$$

ve (25) denkleminde;

$$\begin{aligned} &R_\psi E_1 (\sqrt{G_1})^{-1} (\bar{L}_1 W_1 - L_1 \dot{U}_1) - R_\psi E_1 (\sqrt{G_1})^{-1} L_1 \dot{U}_1 \omega_z + \sigma_1 \Gamma_1 \dot{U}_1 \left( \begin{smallmatrix} -\omega_y \\ \omega_z \end{smallmatrix} \right) \\ &+ \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = (\sqrt{G_2})^{-1} L_2 \dot{U}_2 \dot{\psi} + E_1 (\sqrt{G_2})^{-1} (\bar{L}_2 W_2 - L_2 \ddot{U}_2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} &-\sigma_1 (\Gamma_1 \dot{U}_1 + \bar{\Gamma}_1 W_1) - \left( \begin{smallmatrix} -\omega_y \\ \omega_z \end{smallmatrix} \right)^T R_\psi E_1 (\sqrt{G_2})^{-1} L_1 \dot{U}_1 + \alpha_z \\ &= -\ddot{\psi} + \sigma_2 (\Gamma_2 \ddot{U}_2 + \bar{\Gamma}_2 W_2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.38), (4.40) ve (4.41) denklemlerinin çözümleri ile katı cisim hızları ve ivmelerindeki değme hareketlerinin ikinci türevlerine ilişkin ikinci mertebeden değme hareketlerinin kinematik denklemlerini elde ederiz. Bunlar;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_\Psi \sqrt{G_1} & -\sqrt{G_2} \\ R_\Psi E_1 H_1 \sqrt{G_1} & -E_1 H_2 \sqrt{G_2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} R_\Psi \sqrt{G_1} \bar{\Gamma}_1 \\ R_\Psi (\sqrt{G_1})^{-1} \bar{L}_1 \end{bmatrix} W_1 \right. \\ &+ \begin{bmatrix} \sqrt{G_2} \bar{\Gamma}_2 \\ E_1 (\sqrt{G_2})^{-1} \bar{L}_2 \end{bmatrix} W_2 + \begin{bmatrix} -2\omega_z E_1 R_\Psi \sqrt{G_1} & 0 \\ -\omega_z R_\Psi H_1 \sqrt{G_1} & -\dot{\psi} H_2 \sqrt{G_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \\ &\left. - \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ \sigma_1 \Gamma_1 \dot{U}_1 \begin{pmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \end{pmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{pmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \sigma_1 (\Gamma_1 \ddot{U}_1 + \bar{\Gamma} W_1) + \sigma_2 (\Gamma_2 \ddot{U}_2 + \bar{\Gamma}_2 W_2) \\ &+ \begin{pmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \end{pmatrix}^T R_\Psi E_1 (\sqrt{G_2})^{-1} L_1 \dot{U}_1 - \alpha_z \end{aligned} \quad (4.43)$$

şeklindedir. (40) denklemi düzenlenirse ;

$$\alpha_z = \bar{L}_1 W_1 + \bar{L}_2 W_2 + 2 \begin{pmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \end{pmatrix}^T R_\Psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1 \quad (4.44)$$

şeklinde elde edilen ifade bir değme hareketinin ivmesidir.

### 4.3. Örnekler

#### 4.3.1. İki Kürenin Birbirine göre Değme Hareketi

Değme halindeki iki küre için birinci ve ikinci dereceden değme hareketinin kinematik denklemini elde edeceğiz. Koordinatları ve denklem seçimini 3.3 bölümüne göre yapacağız. (4.33)-(4.35) denklemlerini kullanacak olursak;

$$\dot{u}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} [\omega_z \sin \psi + \omega_y \cos \psi] + \frac{[V_y \sin \psi - V_x \cos \psi]}{\rho_1 + \rho_2} \quad (4.45)$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{(\rho_1 + \rho_2) \sin u_1} [\rho_2 (\omega_x \cos \psi - \omega_y \sin \psi) + (V_x \sin \psi + V_y \cos \psi)] \quad (4.46)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\rho_1 \omega_y + V_x}{\rho_1 + \rho_2} \quad (4.47)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{-\rho_1 \omega_x + V_y}{(\rho_1 + \rho_2) \sin u_2} \quad (4.48)$$

$$\dot{\psi} = -\omega_z + \frac{1}{\tan v_1} \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (\omega_x \cos \psi - \omega_y \sin \psi) + \frac{[V_x \sin \psi + V_y \cos \psi]}{\rho_1 + \rho_2} \right] \quad (4.49)$$

şeklinde ifade edilen birinci dereceden değme hareketinin kinematik denklemlerini elde ederiz. Hızlanma anında (4.42) denklemini;

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \rho_2 \sin \psi \sin u_1 \sin u_2 & \rho_2 \cos \psi \sin u_1 \sin u_2 & \cos \psi \sin u_1 \sin u_2 & \sin \psi \sin u_1 \sin u_2 \\ \rho_2 \cos \psi \sin u_2 & \rho_2 \sin \psi \sin u_2 & \sin \psi \sin u_2 & \cos \psi \sin u_2 \\ 0 & \rho_1 \sin u_1 \sin u_2 & \sin u_1 \sin u_2 & 0 \\ \rho_1 \sin u_1 & 0 & 0 & \sin u_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ a_x \\ a_y \end{pmatrix} + h \quad (4.50)$$

formunda ifade edebiliriz. Burada  $h$  değme hareketinin koordinatlarının değişim oranı ile katı cisim hızlarının bir non- lineer fonksiyonu olacak şekilde ;

$$h = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{u}_2 + w_z \dot{u}_1 \cos \Psi - w_y \dot{v}_1 \cos u_1 - \dot{u}_1 \dot{v}_1 \cos \Psi \cos u_1 + \dot{u}_2 \dot{v}_2 \cos u_2 - w_z \dot{v}_1 \sin \Psi \sin u_1 \\ w_x \dot{v}_1 \cos u_1 - w_z \dot{u}_1 \sin \Psi + \dot{u}_1 \dot{v}_1 \cos u_1 \sin \Psi - w_z \dot{v}_1 \cos \Psi \sin u_1 + \dot{\Psi} \dot{v}_2 \sin u_2 \\ 2w_z \rho_1 \dot{u}_1 \sin \Psi - 2\rho_1 \dot{u}_1 \dot{v}_1 \cos u_1 \sin \Psi + 2w_z \rho_1 \dot{v}_1 \cos \Psi \sin u_1 - \rho_1 \dot{v}_1^2 \cos \Psi \cos u_1 \sin u_1 + \rho_2 \dot{v}_2^2 \cos u_2 \sin u_2 \\ 2w_z \rho_1 \dot{u}_1 \cos \Psi - 2\rho_1 \dot{u}_1 \dot{v}_1 \cos \Psi \cos u_1 - 2\rho_2 \dot{u}_2 \dot{v}_2 \cos u_2 - 2w_z \rho_1 \dot{v}_1 \sin \Psi \sin u_1 + \rho_1 \dot{v}_1^2 \cos u_1 \sin \Psi \sin u_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\Delta = (\rho_1 + \rho_2) \sin u_1 \sin u_2$$

dir. (4.43) denkleminde;

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & -\alpha_z + \ddot{v}_1 \cos u_1 + \ddot{v}_2 \cos u_2 - \omega_y (\dot{u}_1 \sin \psi + \dot{v}_1 \sin u_1 \cos \psi \\ & - \dot{u}_1 \dot{v}_1 \sin u_1 - \dot{u}_2 \dot{v}_2 \sin u_2 + \omega_x (\dot{v}_1 \sin u_1 \sin \psi - \dot{u}_1 \cos \psi) \end{aligned} \quad (4.51)$$

denklemini elde edilir ve (4.39) denkleminde değme hareketinin ivmesi ;

$$a_z = -(\rho_1 \dot{u}_1^2 + \rho_1 (\dot{v}_1 \sin u_1)^2 + \rho_2 \dot{u}_2^2 + \rho_2 (\dot{v}_2 \sin u_2)^2 - 2\rho_1 \omega_y \dot{u}_1 + 2\rho_1 \omega_x \dot{v}_1 \sin u_1) \quad (4.52)$$

şeklinde olur. Cai ve Roth [4] ‘un buluşuna göre özel bir durum olarak aynı hızda bulunan iki yüzey üzerindeki koordinat eğrileri arasındaki  $\psi$  açısı 0’dır. Bu özel durum için;

$$\psi = 0, u_1 = \frac{\pi}{2}, v_1 = 0, u_2 = \frac{\pi}{2}, v_2 = 0 \text{ değerlerini yukarıdaki denklemde yerine}$$

yazarsak aynı sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{\rho_2 \omega_y - V_x}{\rho_1 + \rho_2} \\ \dot{v}_1 &= \frac{\rho_2 \omega_x + V_y}{\rho_1 + \rho_2} \\ \dot{u}_2 &= \frac{\rho_1 \omega_y + V_x}{\rho_1 + \rho_2} \\ \dot{v}_2 &= \frac{-\rho_1 \omega_x + V_y}{\rho_1 + \rho_2} \\ \ddot{u}_1 &= \frac{-a_z + \alpha_y \rho_2 - \omega_x \omega_z \rho_2 - 2\omega_z v_y}{\rho_1 + \rho_2} \\ \ddot{v}_1 &= \frac{a_y + \alpha_x \rho_2 + \omega_y \omega_z \rho_2 - 2\omega_z v_x}{\rho_1 + \rho_2} \end{aligned}$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{-a_z + \alpha_y \rho_2 - \omega_x \omega_z \rho_2 - 2\omega_z v_y}{\rho_1 + \rho_2}$$

$$\ddot{v}_2 = \frac{a_y - \alpha_x \rho_1 + \omega_y \omega_z \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$$

olacak şekilde tanımlıdır. Bu kısımda ;

$$\dot{\psi} = -\omega_z$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\omega_x(\omega_y \rho_1 + v_x)}{\rho_1 + \rho_2}$$

dir.

#### 4.4. Küre ile Düzlemin Birbirine göre Değme Hareketi

Bir küreyle (obj2) temas eden bir düzlemin (obj1) örneğini düşünelim. Hız denklemleri;

$$\dot{u}_1 = \rho(\omega_y \cos \psi + \omega_x \sin \psi - V_x \cos \psi + V_y \sin \psi)$$

$$\dot{v}_1 = \rho(-\omega_y \sin \psi + \omega_x \cos \psi + V_x \sin \psi + V_y \cos \psi)$$

$$\dot{u}_2 = \omega_y$$

$$\dot{v}_2 = -\omega_x \csc u_2$$

$$\dot{\psi} = -(\omega_x \cot u_2 + \omega_z)$$

şeklinde tanımlanır. İvme denklemleri;

$$\ddot{u}_1 = \rho\dot{\psi}(\dot{u}_2 \sin \psi + \dot{v}_2 \sin u_2 \cos \psi) - \rho\dot{u}_2\dot{v}_2 \cos u_2 \sin \psi - \rho(\dot{v}_2)^2 \sin u_2 \cos u_2 \cos \psi$$

$$- 2\omega_z \dot{v}_1 + \rho(\alpha_x \sin \psi + \alpha_y \cos \psi) - (a_x \cos \psi - a_y \sin \psi)$$

$$\ddot{v}_1 = \rho\dot{\psi}(\dot{u}_2 \cos \psi - \dot{v}_2 \sin u_2 \sin \psi) - \rho\dot{u}_2\dot{v}_2 \cos u_2 \cos \psi + \rho(\dot{v}_2)^2 \sin u_2 \cos u_2 \sin \psi$$

$$+ 2\omega_z \dot{u}_1 + \rho(\alpha_x \cos \psi - \alpha_y \sin \psi) + (a_x \sin \psi + a_y \cos \psi)$$

$$\ddot{u}_2 = \dot{v}_2 \dot{\psi} \sin u_2 + \alpha_y$$

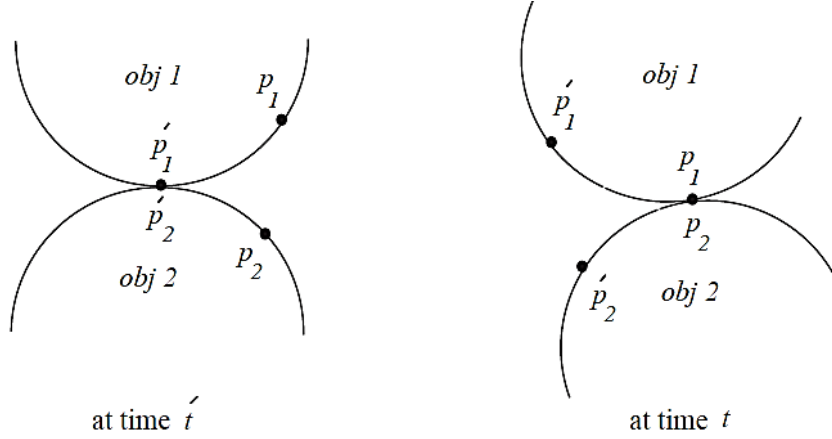
$$\ddot{v}_2 = \dot{u}_2 \dot{\psi} \csc u_2 - \dot{u}_2 \dot{v}_2 \cot u_2 - \alpha_x \csc u_2$$

$$\ddot{\psi} = \dot{v}_2 \sin u_2 - \dot{u}_2 \dot{v}_2 \cos u_2 - \alpha_z$$

şeklinde tanımlanır.

#### 4.4.1. Bir Eksen Etrafında Dönme Hareketinin Kinematığı

Eğer bir cisim üzerindeki değme hareketinin hızı başka bir cisim üzerindeki değme hareketinin hızına eşit ise bu durum iki cismin dönme hareketinin değme şartıdır.



Şekil 4.1. İki katı cismin dönme hareketi

Başka bir deyişle değme hareketleri arasındaki bağıl hız ya da kayma hızı [3,4] sıfırdır. Bu tanım iyi bilinen ve standart kinematik konusunda bulunabilir. Dönme hareketi için 1. dereceden değme hareketi tanımlanır. (ve daha yüksek mertebeden türevler üzerinde ) Çünkü bu hızlar üzerinde bir koşulu getirir. Dönme hareketi için 1. dereceden koşulu kullanacağız. Bununla birlikte değme hareketleri arasındaki relatif hızın sıfır olmasının yanı sıra belli bir aralıkta sabit kalır. iki cismin dönme hareketi için 2. dereceden şartını kullanacağız. Şekil.4.1 de  $p_i$  ve  $p'_i$  'ye bağlı noktalardır.  $t$  anındaki değme noktası  $p_i$  ,  $t'$  anındaki değme noktası  $p'_i$  'dür.  $t$  ve  $t'$  ,  $\Delta t$  aallığı ile bölünmüş anlık zamanlar olarak ifade edilir. Dönme hareketi için 1. dereceden koşul;

$$p_{2v_{p_1p_2}}(t) = 0 \quad (4.53)$$

şeklinde tanımlıdır.  $c_2$  temas çatısında ;

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = 0 \quad (4.54)$$

dır. Dönme hareketi için 2. dereceden koşul;

$$\lim_{(t-t') \rightarrow 0} \frac{p_{2v_{p_1p_2}}(t) - p'_{2v_{p'_1p'_2}}(t')}{t - t'} = 0 \quad (4.55)$$

şeklindedir. (4.55) denklemini yeniden düzenleyip yazarsak ;

$$\lim_{(t-\hat{t}) \rightarrow 0} \frac{p_{2V_{p_1 p_2}}(t) - p_{2V_{p_1 p_2}}(\hat{t})}{t - \hat{t}} + \lim_{(t-\hat{t}) \rightarrow 0} \frac{p_{2V_{p_1 p_2}}(\hat{t}) - \dot{p}_{2V_{p_1 p_2}}(\hat{t})}{t - \hat{t}} = 0 \quad (4.56)$$

ifadesi elde edilir. Yukardaki denklemin  $p_{2a_{p_1 p_2}}(t)$  hariç ilk terimi sıfırdır.

$$\dot{p}_{2V_{p_1 p_2}} = p_{2V_{p_1 p_2}} \text{ olduğu kabul edilerek ikinci terimi } \lim_{(t-\hat{t}) \rightarrow 0} \frac{-p_{2\omega_{p_1}} \times p_{1r_{p_1 p_1}}}{t - \hat{t}}$$

şeklinde yazabiliriz.  $\Delta t \rightarrow 0$  iken  $\lim_{(t-\hat{t}) \rightarrow 0} \frac{p_{1V_{p_1 p_1}}}{t - \hat{t}} = -p_{1V_{c_1 p_1}}$  'dir. Böylece ;

$$p_{2a_{p_1 p_2}}(t) + p_{2\omega_{p_1}} \times (p_{1V_{c_1 p_1}}) = 0 \quad (4.57)$$

şeklinde yazabiliriz. Çünkü ;

$$p_{1V_{c_1 p_2}} = o_{1V_{c_{1o_1}}}$$

'dir. (58) denklemini düzenlersek

$$p_{2a_{p_1 p_2}}(t) = -p_{2\omega_{p_1}} \times o_{1V_{c_{1o_1}}} \quad (4.58)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade dönme hareketi için 2. dereceden koşuldur.  $c_2$  değme çatısında ;

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-E_1 R_\psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1) \omega_z \\ \left( \begin{matrix} \omega_y \\ -\omega_z \end{matrix} \right)^T R_\psi \sqrt{G_1} \dot{U}_1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

şeklinde olur. (4.28) denkleminden  $o_{1V_{c_{1o_1}}}$  ifadesi ve  $p_{2\omega_{p_1}} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  eşitliğini

kullanacağız. Dönme hareketi için 1. dereceden koşul aslında (4.44) denklemi ile aynı olan bir 3. skalar denklemi olarak gösterilebilir[20]. Daha önce tanımlamış olduğumuz dönme hareketi koşullarına ilave olarak no-spin koşulu olarak bilinen sadece dönme hareketi denilen başka bir koşulu elde edeceğiz. Dönme hareketi için açısal hızların dönme bileşenleri sıfırdır[16]. Başka bir ifade ile  $c_2$  çatısında

$$\omega_z = 0 \quad (4.60)$$

dır. 2. dereceden dönme hareketi için dönme hızının türevi ya da bağıl açısal hızın  $z$  bileşenine göre türevi sıfırdır. Yani ;

$$\alpha_z = 0 \quad (4.61)$$

dır.

#### 4.5. Örnek: İki Kürenin Değme Hareketi

Bir önceki bölümde küre dışında bir değmenin küre için olan örneği dikkate alalım.

1. dereceden dönme hareketi koşulları ;

$$V_x = 0 \quad V_y = 0 \quad V_z = 0$$

'dır. (4.59) denkleminde 2. dereceden dönme hareketi için;

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\rho_1 \dot{u}_1 \sin \psi + \rho_2 \dot{v}_1 \cos \psi) \omega_z \\ -(\rho_1 \dot{u}_1 \cos \psi - \rho_2 \dot{v}_1) \omega_z \\ (\rho_1 \dot{u}_1 \sin \psi + \rho_2 \dot{v}_1 \cos \psi) \omega_x + (\rho_1 \dot{u}_1 \cos \psi - \rho_2 \dot{v}_1 \sin \psi) \omega_y \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Buradaki  $\dot{u}_i$  ve  $\dot{v}_i$  (4.45) ve (4.48) denklemlerinde verilmiştir. Ayrıca dönme hareketi için ;

$$\omega_z = 0 \quad (4.63)$$

$$\alpha_z = 0 \quad (4.64)$$

'dir.

(4.45)-(4.48) denklemlerindeki  $\dot{u}_i$  ve  $\dot{v}_i$  ifadeleri yerine yazılırsa;

$$a_z = 0 \quad (4.65)$$

$$a_y = 0 \quad (4.66)$$

$$a_z = \frac{(\omega_x^2 + \omega_y^2) \rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (4.67)$$

olarak elde edilir.

## KAYNAKLAR

- [1] J. S. Beggs. *Advanced mechanism*. The Macmillan Company, New York, 1966.
- [2] D. L. Brock. Enhancing the dexterity of a robot hand using controlled slip. In *1988 IEEE Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, PA, April 1988.
- [3] C. Cai and B. Roth. On the Planar motion of rigid bodies with point contact. *Mechanism and Machine Theory*, 21(6):453-466, 1986.
- [4] C. Cai and B. Roth. On the spatial motion of rigid bodies with point contact. In *Proceedings of 1987 International Conference on Robotics and Automation*, pages 686-695, Raleigh, North Carolina, March 1987.
- [5] C. Cai and B. Roth. On the spatial motion of rigid bodies with line contact. In *Proceedings of 1988 International Conference on Robotics and Automation*, pages 1036-1041, Philadelphia, Pennsylvania, April 1988.
- [6] A. S. Hall. *Kinematics and Linkage Design*. Balt Publishers, West Lafayette, Indiana, 1966.
- [7] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, London, 1985.
- [8] T. R. Kane and D. A. Levinson. *Dynamics, theory and applications*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [9] Y. Kirson and A. T. Yang. Instantaneous invariants in three-dimensional kinematics. *Journal of Applied Mechanics*, 45:409-414, 1978.
- [10] V. Kumar and K. J. Waldron. Actively coordinated mobility system. *ASME Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*, 111(2):223-231, 1989.
- [11] M. M. Lipschutz. *Differential Geometry*. McGraw-Hill Book Company, 1969.
- [12] M. Mason and J. K. Salisbury. *Robot Hands and the Mechanism of Manipulation*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.
- [13] J. M. McCarthy. *An Introduction to Theoretical Kinematics*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.

- [14] R. S. Millman and G. D. Parker. *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall Inc. , 1977.
- [15] D. J. Montana. The kinematics of contact and grasp. *The International Journal of Robotics Research*, 7(3):17-32, June 1988.
- [16] J. I. Neimark and N. A. Fufaev. *Dynamics of Nonholonomic system*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1972.
- [17] L. A. Pars. *A Treatise on Analytical Dynamics*. New York, 1968.
- [18] B. Paul. *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. Prentice-Hall, Inc. , Englewoods Cliffs, N. J. 07632, 1979.
- [19] N. Rosenauer and A. H. Wills. *Kinematics of mechanism*. Associated General Publications Pty Ltd, Sydney, Australia, 1953.
- [20] N. Sarkar. *Control of Mechanical Systems with Rolling Contacts*. Phd thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, December 1993.
- [21] N. Sarkar, X. Yun, and V. Kumar. Dynamic control of 3-D Rolling in multi-arm manipulation. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, Georgia, May 1993.
- [22] J. J. Stoker. *Differential Geometry*. John Wiley & Sons, Inc. , 1969.
- [23] E. T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies*. Cambridge University Press, 1988.
- [24] HACISALİHOĞLU, H.H. “Lineer Cebir”. Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.1987.
- [25] HACISALİHOĞLU, H.H. “Diferensiyel Geometri”. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.1996.
- [26] Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H., H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A., 1998, “Soyut Matematik”, Ankara.
- [27] Warner, W., F., 1971, “Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups”, University of Pennsylvania, London.
- [28] Çallıalp, F., “Soyut Cebir-I”, 1981, H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi.

## ÖZGEÇMİŞ

22.09.1992 tarihinde Elazığ' da doğmuşum. İlköğretimimi Elazığ Şair Hayri ilköğretim okulunda tamamladım. Orta öğrenimimi Elazığ Mehmet Akif Ersoy Lisesinde tamamlayıp 2010 yılında mezun oldum.2010-2014 yılları arasında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimimi tamamladım. 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalında Yüksek lisansa başladım. Halen aynı bölümde Yüksek Lisans öğrenimime devam etmekteyim.

