

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ
DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN
BİLEŞİK DAĞILIMLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Necmettin DİRİ**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

TEMMUZ-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ
DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN
BİLEŞİK DAĞILIMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Necmettin DİRİ
(07221102)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 8 Haziran 2010

TEMMUZ-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ
DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN
BİLEŞİK DAĞILIMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Necmettin DİRİ
(07221102)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 08 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih: 07 Temmuz 2010

Tez Danışman : Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım değerli hocam sayın Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR' e en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Necmettin DİRİ
ELAZIĞ–2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Temel Tanım ve Teoremler	2
2. SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI	7
2.1 Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Sürekli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları.....	7
2.2 Bağımsız fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Sürekli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları	8
3. SONUÇLAR.....	13
KAYNAKLAR	17
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları elde edilmiştir.

Son bölümde, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı İstatistikler, Bağımsız Tesadüfi Değişkenler, Sürekli Tesadüfi Değişkenler, Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenler, Bağımsız fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenler, Dağılım Fonksiyonu, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Permanent.

SUMMARY

Joint Distributions of Order Statistics of Nonidentically Distributed Continuous Random Variables

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems are given.

The second chapter consists of two sections. In the first section, the joint distributions of order statistics of independent and identically distributed continuous random variables are examined. In the last section of this chapter, the distributions of order statistics of independent but not necessarily identically distributed continuous random variables are obtained.

In the last chapter, the some results related to the distribution and probability density functions of order statistics of independent but not necessarily identically distributed continuous random variables are given.

Key Words: Order Statistics, Independent Random Variables, Continuous Random Variables, Independent and Identically Distributed Random Variables, Independent but not Necessarily Identically Distributed Random Variables, Distribution Function, Probability Density Function, Permanent.

SEMBOLLER LİSTESİ

F : Dağılım fonksiyonu

f : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} : \sum_{m_d=r_d}^n \dots \sum_{m_2=r_2}^{m_3} \sum_{m_1=r_1}^{m_2}$$

$$\sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} : \sum_{t_d=m_d}^n \dots \sum_{t_2=m_2}^{m_3} \sum_{t_1=m_1}^{m_2}$$

$$\sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, r_3-1, r_2-1} : \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1}$$

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ i_1 & i_2 & \end{bmatrix}$: $a_1, a_2, \dots$ kolon vektörleri olmak üzere, a_1 'in i_1 defa, a_2 'nin i_2 defa ... alınması ile oluşturulan matris

$[A][s/\cdot)$: $s \subset N$ olmak üzere, indisleri s 'de olan satırların alınması ile A 'dan oluşturulan matris

n_s : s 'nin eleman sayısı

1. GİRİŞ

Sıralı istatistikler, istatistik teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Çünkü; sıralı istatistiklerin dağılımları, örneklemin alındığı dağılımdan bağımsızdır.

Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar, Arnold vd. [1], David [2] ve Reiss [3] tarafından elde edilmiştir. Arnold vd. [1], bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Cao ve West [4], bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistiklerin dağılımları için bağıntılar vermişlerdir. Corley [5], sürekli çok değişkenli tesadüfi değişkenlerin farklı anlamlarda sıralı istatistiklerini tanımlamıştır. Vaughan ve Venables [6], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını ifade etmişlerdir. Balakrishnan [7] ve Bapat ve Beg [8], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları, permanent yardımıyla farklı şekillerde ifade edilmiştir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1 X tesadüfi değişkeni, bir aralıkta ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X 'e sürekli tesadüfi değişken denir [9].

Tanım 1.1.2 X , $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli bir tesadüfi değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f fonksiyonuna, X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

1. $f(x) \geq 0$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

X tesadüfi değişkeninin a ve b arasında bulunma olasılığı,

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx \quad a, b \in R, \quad a \leq b$$

eşitliği ile ifade edilir. Sürekli X tesadüfi değişkeninin belli bir x değerini alması olasılığı, sıfırdır. Yani, $P(X = x) = 0$ ' dır [9].

Tanım 1.1.3 X , olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan sürekli bir tesadüfi değişken olsun. Herhangi bir x reel değeri için X 'in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

eşitliği ile ifade edilir [9].

Tanım 1.1.4 $X_1, X_2, \dots, X_n$, n tane tesadüfi değişken olsun. Eğer $X_1, X_2, \dots, X_n$ ' lerin meydana gelme sırası değil, büyüklüklerinin sırası gözönüne alınırsa n birimli bir örneğin sıralı istatistikleri;

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$ 'ye, r . sıralı istatistik ($r = 1, 2, \dots, n$) ve $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ tesadüfi vektörüne de sıralı istatistikler denilir. $X_{1:n}$, örneğin minimumu ve $X_{n:n}$, örneğin maksimumudur. Bundan dolayı,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

yazılabilir [3].

Teorem 1.1.1 $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty$ olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

şeklinde verilir [10].

Teorem 1.1.2 Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1 \leq r \leq n$ ve $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x)$$

şeklinde verilir [2].

Teorem 1.1.3 Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < x < y < \infty$ olmak üzere

$$f_{r,s;n}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} \cdot [1-F(y)]^{n-s} f(x) f(y)$$

şeklinde verilir [2].

Teorem 1.1.4 $1 \leq d \leq n$ ve $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_d < r_{d+1} = n+1$ olsun. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = n! \prod_{i=1}^d f(x_i) \prod_{i=1}^{d+1} \frac{[F(x_i) - F(x_{i-1})]^{r_i - r_{i-1} - 1}}{(r_i - r_{i-1} - 1)!}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_d$$

şeklinde verilir. Burada, $F(x_0) = 0$ ve $F(x_{d+1}) = 1$ 'dir [3].

Teorem 1.1.5 Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin dağılım fonksiyonu, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$F_{r;n}(x) = P\{X_{r;n} \leq x\} = \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} F^m(x) [1-F(x)]^{n-m}$$

şeklinde verilir.

Özel olarak; $X_{1:n}$ ve $X_{n:n}$ 'nin dağılım fonksiyonları, sırasıyla

$$F_{1;n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

ve

$$F_{n;n}(x) = F^n(x)$$

olarak ifade edilir [3].

Tanım 1.1.5 Permanent; açılımındaki bütün terimlerin işaretlerinin pozitif olması hariç, determinantla aynıdır.

Mesela; mertebesi 2 olan bir A karesel matrisinin permanenti,

$$\text{per}A = \text{per} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a.d+b.c$$

şeklinde ifade edilir [6].

Teorem 1.1.6 Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \text{per} \begin{bmatrix} F(x) & f(x) & 1-F(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

şeklinde verilir [6]. Burada; $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))'$, $1-F(x) = (1-F_1(x), \dots, 1-F_n(x))'$ ve $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))'$ kolon vektörleridir. Ayrıca; (1.1)'deki permanent açılırsa,

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \prod_{a=1}^{r-1} F_{i_a}(x) f_{i_r}(x) \prod_{b=r+1}^n [1-F_{i_b}(x)]$$

ifadesi elde edilir. Burada; $\sum_P$, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları üzerinden toplamı göstermektedir [11].

Teorem 1.1.7 Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < x < y < \infty$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{C_{r,s:n}}{n!} \text{per} \begin{bmatrix} F(x) & f(x) & F(y)-F(x) & f(y) & 1-F(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

şeklinde verilir. Burada; $C_{r,s;n} = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$ ve $F(x)$, $f(x)$, $F(y) - F(x)$,

$f(y)$, $1 - F(y)$ kolon vektörleridir [12]. Ayrıca; (1.2)'deki permanent açılırsa,

$$f_{r,s;n}(x,y) = \frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \sum_P \prod_{a=1}^{r-1} F_{i_a}(x) f_{i_r}(x) \cdot \prod_{b=r+1}^{s-1} [F_{i_b}(y) - F_{i_b}(x)] f_{i_s}(y) \prod_{c=s+1}^n [1 - F_{i_c}(y)]$$

ifadesi elde edilir [11].

Teorem 1.1.8 Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin dağılım fonksiyonu, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$F_{r:n}(x) = \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \text{per} \begin{bmatrix} F(x) & 1 - F(x) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada; $F(x)$ ve $1 - F(x)$ kolon vektörleridir [13].

2. SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

Bu bölümde önce, bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları verilecektir. Daha sonra, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları ile ilgili teoremler verilecektir.

2.1 Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Sürekli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$, dağılım fonksiyonu F ve olasılık yoğunluk fonksiyonu f 'ye sahip bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenler olsun.

$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_d \leq n$, $d = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} n! C \prod_{w=1}^{d+1} [F(x_w) - F(x_{w-1})]^{m_w - m_{w-1}}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_d$$

olarak ifade edilir. Burada; $C = [\prod_{w=1}^{d+1} (m_w - m_{w-1})!]^{-1}$, $F(x_0) = 0$, $F(x_{d+1}) = 1$, $m_0 = 0$,

$m_{d+1} = n$ ve $x_w \in R$ 'dir.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = n! D \prod_{w=1}^d f(x_w) \prod_{w=1}^{d+1} [F(x_w) - F(x_{w-1})]^{r_w - r_{w-1} - 1}$$

olarak ifade edilir. Burada; $D = [\prod_{w=1}^{d+1} (r_w - r_{w-1} - 1)!]^{-1}$, $r_0 = 0$ ve $r_{d+1} = n + 1$ 'dir.

2.2. Bağımsız fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Sürekli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenler olsun. X_i ($i=1,2,\dots,n$) tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu F_i ve olasılık yoğunluk fonksiyonu f_i olsun.

$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_d \leq n$, $d=1, 2, \dots, n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik dağılım fonksiyonu, aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.2.1

$$F_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1} - t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1} - m_w}{t_w - m_w} \cdot \sum_{n_s = n - t_d + m_d} (t_d - m_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d \text{per} [F(x_w) / s_w] , \quad x_1 < x_2 < \dots < x_d. \quad (2.2.1)$$

Burada; $F(x_w) = (F_1(x_w), F_2(x_w), \dots, F_n(x_w))'$ ($w=1, 2, \dots, d+1$) kolon vektörleri, $\sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}}$,

$u \neq v$ için $s_u \cap s_v = \emptyset$ olmak üzere $\bigcup_{w=1}^{d-1} s_w$ üzerinden toplamı ifade etmektedir. Ayrıca,

$$s = \bigcup_{w=1}^d s_w, \quad n_{s_w} = m_{w+1} - m_{w-1} - t_w + t_{w-1} \quad \text{ve} \quad t_0 = m_1 \text{ 'dir.}$$

İspat.

$$F_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = P\{X_{r_1:n} \leq x_1, X_{r_2:n} \leq x_2, \dots, X_{r_d:n} \leq x_d\} \quad (2.2.2)$$

eşitliği yazılabilir. (2.2.2),

$$F_{r_1, r_2, \dots, r_d:n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{m_d, \dots, m_2, m_1}^{n, \dots, m_3, m_2} C \text{ per} A \quad (2.2.3)$$

olarak ifade edilebilir. Burada, $A = \begin{bmatrix} F(x_1) & F(x_2) - F(x_1) & \dots & 1 - F(x_d) \end{bmatrix}$ karesel bir matristir.

Ayrıca, $F(x_w) - F(x_{w-1}) = (F_1(x_w) - F_1(x_{w-1}), F_2(x_w) - F_2(x_{w-1}), \dots, F_n(x_w) - F_n(x_{w-1}))'$ kolon vektörleri, $F_i(x_0) = 0$ ve $F_i(x_{d+1}) = 1$ 'dir.

Permanentin özelliklerinden,

$$\begin{aligned}
per A &= per \begin{bmatrix} F(x_1) & F(x_2) - F(x_1) & F(x_3) - F(x_2) & \dots & F(x_d) - F(x_{d-1}) & 1 - F(x_d) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{t_d=0}^{n-m_d} (-1)^{n-m_d-t_d} \binom{n-m_d}{t_d} \dots \sum_{t_2=0}^{m_3-m_2} (-1)^{m_3-m_2-t_2} \binom{m_3-m_2}{t_2} \sum_{t_1=0}^{m_2-m_1} (-1)^{m_2-m_1-t_1} \binom{m_2-m_1}{t_1} \\
&\quad \cdot per \begin{bmatrix} F(x_1) & F(x_2) & 1 & \dots & F(x_d) \end{bmatrix}_{\substack{m_2-t_1 & m_3-m_2-t_2+t_1 & t_d & n-m_d-t_d+t_{d-1}}} \\
&= \sum_{t_d=0}^{n-m_d} \dots \sum_{t_2=0}^{m_3-m_2} \sum_{t_1=0}^{m_2-m_1} (-1)^{n-m_1-\sum_{w=1}^d t_w} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w} \sum_{n_s=n-t_d} t_d! \\
&\quad \cdot per \begin{bmatrix} F(x_1) & F(x_2) & \dots & F(x_d) \end{bmatrix}_{\substack{m_2-t_1 & m_3-m_2-t_2+t_1 & n-m_d-t_d+t_{d-1}}} [s/.] \\
&= \sum_{t_d=m_d}^n \dots \sum_{t_2=m_2}^{m_3} \sum_{t_1=m_1}^{m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! per \begin{bmatrix} F(x_1) & F(x_2) & \dots & F(x_d) \end{bmatrix}_{\substack{m_2-t_1+m_1 & m_3-m_1-t_2+t_1 & n-m_d-t_d+t_{d-1}}} [s/.] \\
&= \sum_{t_d=m_d}^n \dots \sum_{t_2=m_2}^{m_3} \sum_{t_1=m_1}^{m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \\
&\quad \cdot per \begin{bmatrix} F(x_1) \end{bmatrix}_{m_2-t_1+m_1} [s_1/.] per \begin{bmatrix} F(x_2) \end{bmatrix}_{m_3-m_1-t_2+t_1} [s_2/.] \dots per \begin{bmatrix} F(x_d) \end{bmatrix}_{n-m_{d-1}-t_d+t_{d-1}} [s_d/.] \\
&= \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, m_3, m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^d (m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d per \begin{bmatrix} F(x_w) \end{bmatrix}_{m_{w+1}-m_{w-1}-t_w+t_{w-1}} [s_w/.] \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $1 = (1, 1, \dots, 1)'$ kolon vektörüdür. (2.2.4), (2.2.3)'de yerine yazılırsa (2.2.1) elde edilmiş olur.

Yukarıdaki teoremden; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım fonksiyonu, permanent kullanılarak verilmiştir.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.2.2

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D \sum_{t_d, \dots, t_2, t_1}^{n, \dots, r_3-1, r_2-1} (-1)^{-d + \sum_{w=1}^d (r_{w+1} - t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1} - r_w - 1}{t_w - r_w} \cdot \sum_{n_s = n + r_d - t_d} (t_d - r_d)! \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d \sum_{n_{s_w}} \text{per} \left[\begin{matrix} F(x_w) \\ r_{w+1} - r_{w-1} - 1 - t_w + t_{w-1} \end{matrix} \right]_{\zeta_w / .} \text{per} [f(x_w)]_{\zeta'_w / .}. \quad (2.2.5)$$

Burada, $F(x_w) = (F_1(x_w), F_2(x_w), \dots, F_n(x_w))'$, $f(x_w) = (f_1(x_w), f_2(x_w), \dots, f_n(x_w))'$ kolon vektörleri,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{w=1}^d \mathcal{S}_w, \quad \mathcal{S} \subset N, \quad \nu \neq \nu' \quad \text{için} \quad \mathcal{S}_\nu \cap \mathcal{S}_{\nu'} = \emptyset, \quad \mathcal{S}_w = \mathcal{S}_w \cup \mathcal{S}'_w, \quad n_{\mathcal{S}_w} = r_{w+1} - r_{w-1} - t_w + t_{w-1},$$

$$t_0 = r_1 - 1, \quad n_{\mathcal{S}_w} = r_{w+1} - r_{w-1} - 1 - t_w + t_{w-1} \quad \text{ve} \quad n_{\mathcal{S}'_w} = 1 \text{ 'dir.}$$

İspat.

$$P\{x_1 < X_{r_1:n} \leq x_1 + \delta x_1, x_2 < X_{r_2:n} \leq x_2 + \delta x_2, \dots, x_d < X_{r_d:n} \leq x_d + \delta x_d\} \quad (2.2.6)$$

ifadesini gözönüne alalım.

(2.2.6), $\prod_{w=1}^d \delta x_w$ bölünür ve $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_d$ 'ler sıfıra götürülürse, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_d; n}(x_1, x_2, \dots, x_d) = D \text{per} B. \quad (2.2.7)$$

Burada, $B = \begin{bmatrix} F(x_1) & f(x_1) & F(x_2) - F(x_1) & f(x_2) \dots f(x_d) & 1 - F(x_d) \end{bmatrix}$ karesel bir matristir.

Permanentin özelliklerinden,

$$\begin{aligned} per B &= per \begin{bmatrix} F(x_1) & f(x_1) & F(x_2) - F(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_d) & 1 - F(x_d) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{t_d=0}^{n-r_d} (-1)^{n-r_d-t_d} \binom{n-r_d}{t_d} \dots \sum_{t_2=0}^{r_3-r_2-1} (-1)^{r_3-r_2-1-t_2} \binom{r_3-r_2-1}{t_2} \sum_{t_1=0}^{r_2-r_1-1} (-1)^{r_2-r_1-1-t_1} \binom{r_2-r_1-1}{t_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot per \begin{bmatrix} F(x_1) & f(x_1) & F(x_2) & f(x_2) & \dots & f(x_d) & 1 & F(x_d) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{t_d=0}^{n-r_d} \dots \sum_{t_2=0}^{r_3-r_2-1} \sum_{t_1=0}^{r_2-r_1-1} (-1)^{n+1-r_1-d-\sum_{w=1}^d t_w} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \sum_{n_s=n-t_d} t_d! per \begin{bmatrix} F(x_1) & F(x_2) & \dots & F(x_d) & f(x_1) & f(x_2) \dots f(x_d) \end{bmatrix} [\leq / .) \\ &= \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1} (-1)^{-d+\sum_{w=1}^d (r_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w-r_w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)! per \begin{bmatrix} F(x_1) & F(x_2) & \dots & F(x_d) & f(x_1) & f(x_2) \dots f(x_d) \end{bmatrix} [\leq / .) \\ &= \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1} (-1)^{-d+\sum_{w=1}^d (r_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w-r_w} \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)! \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} per \begin{bmatrix} F(x_1) & f(x_1) \end{bmatrix} [\leq_1 / .) per \begin{bmatrix} F(x_2) & f(x_2) \end{bmatrix} [\leq_2 / .) \dots per \begin{bmatrix} F(x_d) & f(x_d) \end{bmatrix} [\leq_d / .)$$

$$= \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1} (-1)^{-d+\sum_{w=1}^d (r_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w-r_w} \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)!$$

$$\cdot \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d \text{per} \left[\begin{array}{cc} F(x_w) & f(x_w) \\ r_{w+1}-r_{w-1}-1-t_w+t_{w-1} & 1 \end{array} \right] [\zeta_w / .)$$

$$= \sum_{t_d=r_d}^n \dots \sum_{t_2=r_2}^{r_3-1} \sum_{t_1=r_1}^{r_2-1} (-1)^{-d+\sum_{w=1}^d (r_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^d \binom{r_{w+1}-r_w-1}{t_w-r_w} \sum_{n_s=n+r_d-t_d} (t_d-r_d)!$$

$$\cdot \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^d \sum_{n_{\zeta_w}} \text{per} \left[\begin{array}{cc} F(x_w) & \\ r_{w+1}-r_{w-1}-1-t_w+t_{w-1} & 1 \end{array} \right] [\zeta_w / .) \text{per} [f(x_w)] [\zeta'_w / .) \quad (2.2.8)$$

yazılabilir. (2.2.8), (2.2.7)'de yerine yazılırsa (2.2.5) elde edilmiş olur.

Yukarıdaki teoremden; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, permanent kullanılarak verilmiştir.

3. SONUÇLAR

Bu bölümde, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_d:n}$ 'nin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki sonuçta, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.1

$$F_{r:n}(x) = \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \binom{n-m}{t-m} \sum_{n_s=n-t+m} (t-m)! \text{per}[F(x)][s/.]. \quad (3.1)$$

İspat. (2.2.1)'de $d=1$ alınırsa, (3.1) elde edilir.

Sonuç 3.1'den bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} [F(x)]^m \sum_{t=m}^n (-1)^{n-t} \binom{n-m}{t-m} [F(x)]^{n-t}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2 ve Sonuç 3.3'de; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sırasıyla, minimum ve maksimumunun dağılım fonksiyonları verilecektir.

Sonuç 3.2

$$F_{1:n}(x) = 1 - \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^n (-1)^{n-t} \binom{n}{t} \sum_{n_s=n-t} t! \text{per}[F(x)][s/.]. \quad (3.2)$$

İspat. (3.1)'de $r = 1$ alınırsa, (3.2) elde edilir.

Sonuç 3.3

$$F_{n:n}(x) = \frac{1}{n!} \text{per}[F(x)]_n. \quad (3.3)$$

İspat. (3.1)'de $r = n$ alınırsa, (3.3) elde edilir.

Sonuç 3.2 ve Sonuç 3.3'den bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun dağılım fonksiyonları sırasıyla,

$$F_{1:n}(x) = 1 - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} [F(x)]^{n-t}$$

ve

$$F_{n:n}(x) = [F(x)]^n$$

olarak elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.4

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{t=r}^n (-1)^{n-t} \binom{n-r}{t-r} \sum_{n_{\zeta}=n+r-1-t} (t-r)! \sum_{n_{\zeta}=n+r-1-t} \text{per}[F(x)]_{n_{\zeta}} \text{per}[f(x)]_1. \quad (3.4)$$

İspat. (2.2.5)'de $d = 1$ alınırsa, (3.4) elde edilir.

Sonuç 3.4'den bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} \sum_{t=r}^n \binom{n-r}{t-r} (-1)^{n-t} [F(x)]^{n-t} f(x)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.5 ve Sonuç 3.6'da; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sırasıyla, minimum ve maksimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonları verilecektir.

Sonuç 3.5

$$f_{1:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} \sum_{n_{\zeta}=n+1-t} (t-1)! \sum_{n_{\zeta}=n-t}^{n-t} per[F(x)][\zeta/.] per[f(x)][\zeta'/.]_1. \quad (3.5)$$

İspat. (3.4)'de $r=1$ alınırsa, (3.5) elde edilir.

Sonuç 3.6

$$f_{n:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n_{\zeta}=n-1}^{n-1} per[F(x)][\zeta/.] per[f(x)][\zeta'/.]_1. \quad (3.6)$$

İspat. (3.4)'de $r=n$ alınırsa, (3.6) elde edilir.

Sonuç 3.5 ve Sonuç 3.6'dan bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla,

$$f_{1n}(x) = n \sum_{t=1}^n \binom{n-1}{t-1} (-1)^{n-t} [F(x)]^{n-t} f(x)$$

ve

$$f_{nn}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$$

olarak elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N.,** 1992. A first course in order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [2] **David, H. A.,** 1981. Order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [3] **Reiss, R. D.,** 1989. Approximate distributions of order statistics, Springer, Verlag, New York Inc., USA.
- [4] **Cao, G. and West, M.,** 1997. Computing distributions of order statistics, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **26**, 755-764.
- [5] **Corley, H. W.,** 1984. Multivariate order statistics, *Commun. Statist.- Theor. Meth.*, **13**, 1299-1304.
- [6] **Vaughan, R. J. and Venables, W. N.,** 1972. Permanent expressions for order statistics densities, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **34**, 308-310.
- [7] **Balakrishnan, N.,** 2007. Permanents, order statistics, outliers and robustness, *Rev. Mat. Complut.*, **20**, 7-107.
- [8] **Bapat, R. B. and Beg, M. I.,** 1989. Order statistics for nonidentically distributed variables and permanents, *Sankhyā, Ser. A*, **51**, 79-93.
- [9] **Akdeniz, Fikri,** 2002. Olasılık ve istatistik, Baki Kitabevi, Adana.
- [10] **Balakrishnan, N. and Cohen, A. C.,** 1991. Order statistics and inference, Academic Press, Inc., San Diego.
- [11] **Balakrishnan, N.,** 1994. On order statistics from non-identical right truncated exponential random variables and some applications, *Commun. Statist.- Theory Meth.*, **23**, 3373-3393.
- [12] **Beg, M. I.,** 1991. Recurrence relations and identities from product moments of order statistics corresponding to nonidentically distributed variables, *Sankhyā, Ser.A*, **53**, 365-374.
- [13] **Barakat, H. M. and Abdelkader, Y. H.,** 2004. Computing the moments of order statistics from nonidentical random variables, *Statistical Methods and Applications*, **13**, 13-24.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladıktan sonra 1997 yılında Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2001 yılında bu bölümden mezun oldum. 2001 yılında MEB'de Matematik Öğretmeni olarak göreve başladım. Halen aynı görevi sürdürmekteyim. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik Programında tezli yüksek lisansa başladım.

Necmettin DİRİ