

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANNHEİM EĞRİLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

Yüksek Lisans Tezi

ESRA METİN

101121102

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: DOÇ. DR. HANDAN ÖZTEKİN

ŞUBAT-2014

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANNHEİM EĞRİLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA METİN

101121102

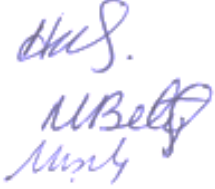
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 28 Ocak 2014

Tezin Savunulduğu Tarih: 12 Şubat 2014

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)



ŞUBAT-2014

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana gerekli imkanları sağlayan, yardımını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN e ve ayrıca her konuda bana destek olan eşim Öğr. Gör. Serkan METİN ve sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Esra METİN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY	V
SİMGELER LİSTESİ.....	VI
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
2.1. Öklid Uzayı	2
2.2. Öklid Uzayında Eğriler	3
2.3. E^3 Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çifti	8
3. E^4 ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ	12
3.1.Genelleştirilmiş Mannheim Eğrileriyle İlgili Örnekler	14
4. E^5 DE GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ.....	18
5. E^n ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ.....	27
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	45

ÖZET

MANNHEIM EĞRİLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; çalışmanın içeriği ve amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 4-Boyutlu Öklid uzayı E^4 de genelleştirilmiş Mannheim eğrileri incelenmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümlerde çalışmamızın orijinal olan kısımları verildi.

Dördüncü bölümde, 5-boyutlu Öklid uzayı E^5 de genelleştirilmiş Mannheim eğrileri ve karakterizasyonları verilmiştir.

Beşinci bölümde de n-boyutlu Öklid uzayı E^n de genelleştirilmiş Mannheim eğrileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Genelleştirilmiş Mannheim eğrileri

SUMMARY

MANNHEIM CURVES AND THEIR CHARACTERIZATIONS

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter; the aim and content of the thesis are explained.

In the second chapter; basic definitions and theorems were given.

In the third chapter; generalised Mannheim Curves in the four dimensional Euclidean Space E^4 were examined.

Fourth and fifth chapter are original parts of our study.

In the fourth chapter; generalised Mannheim Curves and their characterizations in the five dimensional Euclidean Space E^5 were given.

In the fifth chapter; generalised Mannheim Curves in the n dimensional Euclidean Space E^n were examined.

Keywords: Euclidean Space, Generalised Mannheim curves.

SİMGELER LİSTESİ

E^3 : 3-boyutlu Öklid uzayı

E^4 : 4-boyutlu Öklid uzayı

E^5 : 5-boyutlu Öklid uzayı

E^n : n-boyutlu Öklid uzayı

$\langle, \rangle$: Öklid iç çarpımı

k_1 : Eğrilik

k_2 : Torsiyon

k_3 : 3-üncü eğrilik fonksiyonu

k_i : i-inci eğrilik fonksiyonu

$\| \cdot \|$: Norm

1.GİRİŞ

Eğriler kavramı diferensiyel geometrinin temel konularından biridir. İki uzay eğrisinin Frenet çatılarının vektörleri arasındaki lineer bağımlılık göz önüne alınarak yapılan çalışmalar diferensiyel geometride ilgi çeken konulardan biridir. Bu özellikteki eğri çiftlerinden en iyi bilinenlerinden biri Bertrand eğrileridir. Son yıllarda bu eğrilerden biri olan Mannheim eğriler çalışmaya başlanmıştır. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin Mannheim eğri olması için gerek ve yeter şart eğrinin eğrilik ve burulması arasında λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $\kappa^2 = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Literatür araştırıldığında Mannheim eğri kavramı 1948 yılında O. Tigan ve 1966 yılında R.Bloom tarafından çalışılmıştır. Öklid uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter koşulları 2007 ve 2008 yıllarında Liu ve Wang incelemiştir. Bu çalışmada bir Mannheim eğrisinin genelleştirilmiş helis olması durumunda Mannheim eğri çiftinin bir doğru olduğu; Mannheim eğri çiftinin bir genelleştirilmiş helis olması durumunda ise Mannheim eğrisinin eğrilik ve burulması arasındaki oran bulunmuştur. Ayrıca 2008 yılında Liu ve Wang yaptığı çalışmada Minkowski uzayında da Mannheim eğrileri ile ilgili karakterizasyonlar bulmuştur. Orbay ve Kasap 2009 yılında yaptıkları çalışmada Öklid uzayında Mannheim eğrisinin eğrilik ve burulması arasında sabit katsayılı lineer bir ilişki olduğunu, Mannheim eğri çiftlerinin ilgili noktalarındaki τ ve τ_1 burulmalarının çarpımının sabit olmadığını ve farklı işaretli olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca α ve α_1 eğrilerinin eğriliği ve burulması ile ilgili eşitlikler elde etmişlerdir. 2009 yılında H.Matsuda ve S.Yorozu 4-boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş Mannheim eğrileri ele almıştır. Biz bu çalışmalardan yararlanarak 5-boyutlu ve n-boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş Mannheim eğri kavramını ve karakterizasyonlarını inceledik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ uzayında doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir.

$p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

diyelim.

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow \|p\|$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

Şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzayıdır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir. Bu uzay E^n ile de gösterilir [1].

2.2. Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.2.1. f , E^n uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon ve $p \in E^n$ olsun.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[f(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + s, p_{j+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n) \right]$$

limiti varsa bu limite, f fonksiyonunun j inci değişkene göre kısmi türevi denir [1].

Tanım 2.2.2. E^n in her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa “ f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün fonksiyondur” denir [1].

Tanım 2.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık alt cümle olmak üzere diferensiyellenebilir

$$\alpha: I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

fonksiyonu verilmiş olsun. (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I)$ ya E^n de bir eğri denir. t ye ise α eğrisinin yay parametresi denir. I ya da α eğrisinin parametre aralığı denir [2].

Tanım 2.2.4. E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta: J \rightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi (veya M nin I daki parametresinin J daki parametre ile değişimi) denir [2].

Tanım 2.2.5. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [2].

Tanım 2.2.6. E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha: I \rightarrow E^n$ fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha(t) \in M$$

ve

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \Big|_t \right)$$

dir. $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [2].

Tanım 2.2.7. $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir [1].

Tanım 2.2.8. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir [2].

Tanım 2.2.9. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için $\alpha^{(k)} \in S_p\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{e_1, \dots, e_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret- Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{e_1(m), \dots, e_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet vektörü adı verilir [2].

Tanım 2.2.10. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{e_1(s), \dots, e_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle e'_i(s), e_{i+1}(s) \rangle, 1 \leq i \leq r$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir [2].

Tanım 2.2.11. $\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$, $\varphi(q_1, q_2) = \eta(q_1) + q_2 \cdot e(q_1)$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $\varphi(I \times \mathbb{R})$ yüzeyine, E^3 uzayında bir regle yüzey denir.

η eğrisine regle yüzeyin bir dayanak eğrisi adı verilir. $e(t)$ vektörüne regle yüzeyin $\eta(t)$ noktasındaki doğrultmanı denir. $\eta(t)$ noktasından geçen ve $e(t)$ vektörüne paralel olan doğruya, $\eta(t)$ noktasından geçen ana doğru denir [1].

Tanım 2.2.12. $\zeta: I \rightarrow M$, $\zeta(s) = \eta(s) + \frac{a(s)}{a^2(s)+c^2(s)} \cdot e(s)$

eşitliğiyle tanımlı ζ eğrisine M regle yüzeyinin striksiyon çizgisi denir. $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğru üstündeki $\zeta(s)$ noktasına, regle yüzeyin bu ana doğruya ilişkin merkez noktası adı verilir [1].

Tanım 2.2.13. $M \subset E^3$ eğrisinin $m \in M$ noktasında M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$\bar{\alpha} = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_1(s_0)} V_2(s_0) + \lambda V_3(s_0)$$

doğrusuna M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki eğrilik ekseni denir. Eğrilik ekseni üzerindeki

$$C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_1(s_0)} V_2(s_0)$$

noktasına da M nin $m = \alpha(s_0)$ daki eğrilik merkezi denir [2].

Tanım 2.2.14. $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu denir ve ρ ile gösterilir.

$t \in I$ için $\rho(t)$ sayısına $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik yarıçapı denir [1].

Tanım 2.2.15. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $e_1 = T, e_2 = N, e_3 = B$ olmak üzere,

$\{T(s), N(s)\}$ kümesini gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki dokunum düzlemi veya oskülatör düzlem denir.

$\{T(s), B(s)\}$ kümesini gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemi veya rektifiyan düzlem denir.

$\{N(s), B(s)\}$ kümesini gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki dik düzlem veya normal düzlem denir [1].

Tanım 2.2.16. $M \subset E^3$ eğrisiyle $m \in M$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye, M nin $m \in M$ noktasındaki oskulator küresi veya eğrilik küresi adı verilir [2].

Tanım 2.2.17. E^5 5-boyutlu Öklid uzayında yay parametrelili regüler diferensiyellenebilir bir α eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow E^5 \\ s &\rightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer α eğrisi boyunca aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ çatısı ve α üzerinde $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu mevcut ise α ya özel Frenet eğrisi denir.

1) $\forall s \in I$ için

$$\begin{cases} e_1(s) = \alpha'(s) \\ e_1'(s) = k_1(s).e_2(s) \\ e_2'(s) = -k_1(s).e_1(s) + k_2(s).e_3(s) \\ e_3'(s) = -k_2(s).e_2(s) + k_3(s).e_4(s) \\ e_4'(s) = -k_3(s).e_3(s) + k_4(s).e_5(s) \\ e_5'(s) = -k_4(s).e_4(s) \end{cases}$$

Frenet-Serret formülleri sağlanır.

2) $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ çatısı pozitif yönlendirilmişse ortonormaldir.

3) k_1, k_2, k_3 fonksiyonları pozitif ve $k_4 \neq 0$ dır.

4) k_1, k_2, k_3, k_4 fonksiyonları α nın birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü eğrilik fonksiyonları, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ çatı alanı da α üzerinde Frenet çatı olarak adlandırılır [5].

$s \in I$ için $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ çatısı ve k_1, k_2, k_3, k_4 eğrilik fonksiyonları aşağıdaki adımlarla elde edilir.

1. adım

$$e_1(s) = \alpha'(s)$$

II.adım

$$k_1(s) = \|e_1'(s)\| > 0$$

$$e_2(s) = \frac{1}{k_1(s)} \cdot e_1'(s)$$

III.Adım

$$k_2(s) = \|e_2'(s) + k_1(s) \cdot e_1(s)\| > 0$$

$$e_3(s) = \frac{1}{k_2(s)} \cdot (e_2'(s) + k_1(s) \cdot e_1(s))$$

IV.adım

$$k_3(s) = \|e_3'(s) + k_2(s) \cdot e_2(s)\| > 0$$

$$e_4(s) = \frac{1}{k_3(s)} \cdot (e_3'(s) + k_2(s) \cdot e_2(s))$$

V.adım

$$e_5(s) = \varepsilon \cdot \frac{1}{\|e_4'(s) + k_3(s) \cdot e_3(s)\|} \cdot (e_4'(s) + k_3(s) \cdot e_3(s)) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$k_4(s) = \langle e_4'(s), e_5(s) \rangle \neq 0$$

Teorem 2.2.1. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{e_1(s), \dots, e_r(s)\}$ ise

$$1) e_1'(s) = k_1(s) \cdot e_2(s)$$

$$2) e_i'(s) = -k_{i-1}(s) \cdot e_{i-1}(s) + k_i(s) \cdot e_{i+1}(s), 1 < i < r,$$

$$3) e_r'(s) = -k_{r-1}(s) \cdot e_{r-1}(s)$$

dir [2].

α nin her bir noktasında e_2 doğrultusundaki ℓ_1 doğrusu birinci normal doğru, e_3 doğrultusundaki ℓ_2 doğrusu ikinci normal doğru, e_4 doğrultusundaki ℓ_3 doğrusu üçüncü normal doğru, $\dots$, e_n doğrultusundaki ℓ_{n-1} doğrusu $(n-1)$ inci normal doğru olarak adlandırılır. 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de ki birinci normal doğru ve ikinci normal doğruya ise sırasıyla, asli normal doğru ve binormal doğru denir [5].

2.3. E^3 Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çifti

Tanım 2.3.1. 3- boyutlu Öklid uzayı E^3 de regüler diferensiyellenebilir bir eğri C olsun. Eğer $\phi: C \rightarrow \hat{C}$ 1:1, örten dönüşümü altında C nin her bir noktasında asli normal doğrusunu $\hat{C}$ nin binormal doğrusuna dönüştürecek şekilde diğer bir regüler diferensiyellenebilir bir $\hat{C}$ eğrisi mevcut ise bu takdirde C ye bir Mannheim eğrisi denir. $\hat{C}$ ya da C nin Mannheim eğri çifti ve $\{C, \hat{C}\}$ ikilisine de Mannheim çifti denir [3].

Teorem 2.3.1. C ve $\hat{C}$, E^3 Öklid uzayında birim hızlı iki eğri olsun. C ile $\hat{C}$ nin Mannheim çifti olması için gerek ve yeter şart α sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$k_1(s) = \alpha \{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada k_1 ve k_2 , C eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır [7].

Teorem 2.3.2. C ve $\hat{C}$, E^3 Öklid uzayında birim hızlı iki eğri olsun. C bir Mannheim eğrisi ise $\hat{C}$ eğrisinin C nin Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart C sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $\hat{C}$ eğrisinin $\hat{k}_1$ eğriliğinin ve $\hat{k}_2$ burulmasının

$$\hat{k}_1' = \frac{d\hat{k}_2}{d\hat{s}} = \frac{\hat{k}_1}{\alpha} (1 + \alpha^2 \hat{k}_2^2)$$

eşitliğini sağlamasıdır [7].

Önerme 2.3.1. $\{C, \hat{C}\}$, E^3 de bir Mannheim çifti olsun. C bir genelleştirilmiş helis ise $\hat{C}$ bir doğrudur [7].

Önerme 2.3.2. $\{C, \hat{C}\}$, E^3 de bir Mannheim çifti olsun. $\hat{C}$ bir genelleştirilmiş helis ise C nin eğriliği ve burulması, sırasıyla, k_1 ve k_2 olmak üzere

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{c_2}{2} e^{c_1 s} - \frac{1}{2c_2} e^{-c_1 s}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dir. Özel olarak $c_1 = c_2 = 1$ alırsak

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = \sinh s$$

elde edilir [7].

Teorem 2.3.3. E^3 de Mannheim eğrilerinin ilgili noktaları arasındaki uzaklık sabittir [6].

Teorem 2.3.4. E^3 de bir C eğrisi için $\{C, \hat{C}\}$ bir Mannheim çifti olacak şekilde bir $\hat{C}$ eğrisi vardır [6].

Teorem 2.3.5. $\{C, \hat{C}\}$, E^3 de Mannheim çifti olsun. Bu taktirde $\hat{C}$ Mannheim eğri çiftinin burulması $\hat{k}_2 = \frac{k_1}{\alpha k_2}$ dir [6].

Teorem 2.3.6. $\{C, \hat{C}\}$, E^3 de Mannheim çifti olsun. λ ve μ sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere C eğrisinin eğrilik ve burulması $\mu k_2 - \lambda k_1 = 1$ eşitliğini sağlar [6].

Teorem 2.3.7. $\{C, \hat{C}\}$, E^3 de Mannheim çifti olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} i) \quad \hat{k}_1 &= -\frac{d\theta}{d\hat{s}}, \\ ii) \quad \hat{k}_2 &= \sin \theta k_1 \frac{ds}{d\hat{s}} - \cos \theta k_2 \frac{ds}{d\hat{s}}, \\ iii) \quad k_1 &= \sin \theta \hat{k}_2 \frac{d\hat{s}}{ds}, \\ iv) \quad k_2 &= -\cos \theta \hat{k}_2 \frac{d\hat{s}}{ds}, \end{aligned}$$

Burada θ , C nin teğet vektör alanı e_1 ile $\hat{C}$ in teğet vektör alanı $\hat{e}_1$ arasındaki açıdır [6].

Teorem 2.3.8. $\{C, \hat{C}\}$, E^3 de Mannheim çifti olsun. $x(s)$, $\hat{x}(\hat{s})$ noktaları $\{C, \hat{C}\}$ Mannheim çiftinin ilgili noktaları ve bu noktaların eğrilik merkezleri M , $\hat{M}$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{\|\hat{x}(\hat{s})M\|}{\|x(s)M\|} \cdot \frac{\|\hat{x}(\hat{s})\hat{M}\|}{\|x(s)\hat{M}\|}$$

oranı sabit değildir [6].

Teorem 2.3.9. $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $h: U \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(u) = \frac{\{1+(g(u))^2+(\dot{g}(u))^2\}^3 + \{1+(g(u))^2\}^3 \{\ddot{g}(u)+g(u)\}^2}{\{1+(g(u))^2\}^{3/2} \{1+(g(u))^2+(\dot{g}(u))^2\}^{5/2}}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$x(u) = \begin{bmatrix} \alpha \int h(u) \sin u \, du \\ \alpha \int h(u) \cos u \, du \\ \alpha \int h(u) g(u) \, du \end{bmatrix}, u \in U \subset \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

ile verilen C eğrisinin k_1 eğrilik fonksiyonu ve k_2 torsiyon fonksiyonu arasında

$$k_1(s) = \alpha \{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \}$$

bağıntısı vardır [8].

1) Eğer $g(u) = c$ (sabit) ise bu takdirde $h(u) = 1$ dir. Dolayısıyla C bir dairesel helistir.

2) Eğer $g(u) = \tan u$ $\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$ ise bu takdirde C Mannheim eğrisi

$$x(u) = \begin{bmatrix} \alpha \int \frac{(5+3\cos^2 u) \cos u \sin u}{(1+\cos^2 u)^{5/2}} du \\ \alpha \int \frac{(5+3\cos^2 u) \cos^2 u}{(1+\cos^2 u)^{5/2}} du \\ \alpha \int \frac{(5+3\cos^2 u) \sin u}{(1+\cos^2 u)^{5/2}} du \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

şeklinde verilir.

3) Eğer $g(u) = \sinh u$ ($u \in \mathbb{R}$) ise bu takdirde C Mannheim eğrisi

$$x(u) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{(1 + \cosh^2 u) \sin u}{\cosh^2 u} du \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{(1 + \cosh^2 u) \cos u}{\cosh^2 u} du \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{(1 + \cosh^2 u) \sinh u}{\cosh^2 u} du \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

dir [8].

3. E^4 ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ

Tanım 3.1.1. E^4 de bir özel Frenet eğrisi C olsun. $\phi: C \rightarrow \hat{C}$ 1:1, örten dönüşümü altında C nin her noktasındaki birinci normal doğrusu $\hat{C}$ nin ikinci normal doğrusu ve üçüncü normal doğrusu tarafından gerilen düzlemde yatacak şekilde E^4 de bir $\hat{C}$ Frenet eğrisi mevcut ise C ye genelleştirilmiş Mannheim eğrisi denir ve $\hat{C}$ ya da C nin genelleştirilmiş Mannheim çifti denir [3].

Bu tanımdan $\hat{C}$ genelleştirilmiş Mannheim çift eğrisi

$$\hat{x}(s) = x(s) + \alpha(s).e_2(s), \quad s \in I, \quad \alpha: I \rightarrow IR$$

olacak şekilde $\hat{x}: I \rightarrow E^4$ dönüşümü ile verilir. Genel olarak $\hat{C}$ nin yay uzunluğu parametresi s değildir. Bu nedenle $\hat{C}$ nin yay uzunluğu parametresi

$$\hat{s} = \int_0^s \left\| \frac{d\hat{x}(s)}{ds} \right\| ds$$

biçiminde tanımlanır. $f(s) = \hat{s}$ şeklinde tanımlı $f: I \rightarrow \hat{I}$, C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir bir fonksiyonu göz önüne alabiliriz. Bu takdirde $s \in I$ için

$$f'(s) = \sqrt{\{1 - \alpha(s).k_1(s)\}^2 + \{\alpha'(s)\}^2 + \{\alpha(s).k_2(s)\}^2}$$

dir. Böylece

$$\hat{x}(f(s)) = x(s) + \alpha(s).e_2(s)$$

yazabiliriz ve $\phi: C \rightarrow \hat{C}$ 1:1, örten dönüşümü de $\phi(x(s)) = \hat{x}(f(s))$ şeklinde verilebilir.

Dolayısıyla $s \in I$ için

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(f(s))}{ds} &= \frac{d\hat{x}(\hat{s})}{d\hat{s}} \Big|_{\hat{s}=f(s)} \cdot f'(s) \\ &= f'(s). \hat{e}_1(f(s)) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.1.1. E^4 de bir Frenet eğrisi C olsun. Eğer C genelleştirilmiş Mannheim eğrisi ise bu takdirde C nin k_1 ve k_2 eğrilikleri

$$k_1(s) = \alpha \left\{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \right\}, s \in I$$

eşitliğini sağlar [3].

Teorem 3.1.2. $C : I \rightarrow E^4$,

$$k_1(s) = \alpha \left\{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \right\}, \quad s \in I, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

eşitliğini sağlayan $k_1 (\neq \text{sabit})$ ve $k_2 (\neq \text{sabit})$ eğriliklerine sahip bir eğri olsun. Eğer $\hat{C}$ eğrisi

$$\hat{x}(s) = x(s) + \alpha \cdot e_2(s), \quad s \in I$$

şeklinde verilen bir Frenet eğrisi ise C Mannheim çifti $\hat{C}$ olan bir genelleştirilmiş Mannheim eğrisidir [3].

Teorem 3.1.3. C, E^4 de k_3 üçüncü eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir Frenet eğrisi olsun. Bu eğrinin k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonlarının sabit olması için gerek ve yeter şart her bir noktasındaki birinci normal doğrusu $\hat{C}$ nın üçüncü normal doğrusu olacak şekilde bir $\hat{C}$ Frenet eğrisinin mevcut olmasıdır [3].

Teorem 3.1.4. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(u) = & (1 + (g(u))^2 + (h(u))^2)^{-3/2} \\ & \times \left\{ 1 + (g(u))^2 + (h(u))^2 + (\dot{g}(u))^2 + (\dot{h}(u))^2 \right. \\ & \left. + (g(u)\dot{h}(u) - \dot{g}(u)h(u))^2 \right\}^{-5/2} \\ & \times \left[\left\{ 1 + (g(u))^2 + (h(u))^2 + (\dot{g}(u))^2 + (\dot{h}(u))^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (g(u)\dot{h}(u) - \dot{g}(u)h(u))^2 \right\}^3 \right. \\ & + (1 + (g(u))^2 + (h(u))^2)^3 \times \left\{ (g(u) + \ddot{g}(u))^2 + (h(u) + \ddot{h}(u))^2 \right. \\ & + \left((g(u)\dot{h}(u) - \dot{g}(u)h(u)) - (\dot{g}(u)\ddot{h}(u) - \ddot{g}(u)\dot{h}(u)) \right)^2 \\ & \left. \left. + (g(u)\ddot{h}(u) - \ddot{g}(u)h(u))^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ve $g: U \rightarrow \mathbb{R}$, $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$x(u) = \begin{bmatrix} \alpha \int f(u) \sin u \, du \\ \alpha \int f(u) \cos u \, du \\ \alpha \int f(u) g(u) \, du \\ \alpha \int f(u) h(u) \, du \end{bmatrix}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

ile verilen bir eğri C olsun. Bu takdirde C nin k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonları arasında

$$k_1(s) = \alpha \{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \}, \quad s \in I \subset \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

bağıntısı vardır [3].

Teorem 3.1.5. E^4 de dayanak eğrisi C Mannheim eğrisi ve ana doğrusu C nin birinci normal doğrusu olan bir regle yüzey S olsun. Bu takdirde $\hat{C}$ Mannheim çifti S in striksiyon eğrisidir [3].

3.1.Genelleştirilmiş Mannheim Eğrileriyle İlgili Örnekler

Örnek 3.1.1. Teorem 2.1.4. de $g(u) = \sinh(u)$, $h(u) = \cosh(u)$, alınırsa

$$f(u) = \frac{1 + \cosh^2 u}{\sqrt{2} \cosh^2 u}$$

olur. Böylece E^4 de C eğrisi, $x: U \rightarrow E^4$,

$$x(u) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{1 + \cosh^2 u}{\cosh^2 u} \sin u \, du \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{1 + \cosh^2 u}{\cosh^2 u} \cos u \, du \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{1 + \cosh^2 u}{\cosh^2 u} \sinh u \, du \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{1 + \cosh^2 u}{\cosh^2 u} \cosh u \, du \end{bmatrix}, u \in U$$

şeklinde verilir. C eğrisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere,

$$\left. \frac{du}{ds} \right|_s = \varphi'(s) = \frac{\cosh \varphi(s)}{\alpha(1 + \cosh^2 \varphi(s))}, s \in I$$

dir. Bu taktirde C eğrisi

$$x(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\cosh g(s)} \sin g(s) \, ds \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\cosh g(s)} \cos g(s) \, ds \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sinh g(s)}{\cosh g(s)} \, ds \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \int 1 \, ds \end{bmatrix}, s \in I$$

şeklinde yay parametresi cinsinden ifade edilebilir. Dolayısıyla C eğrisi E^4 de bir özel Frenet eğrisidir ve

$$k_1(s) = \frac{1}{\alpha(1 + \cosh^2 g(s))},$$

$$k_2(s) = \frac{\cosh g(s)}{\alpha(1 + \cosh^2 g(s))},$$

$$k_3(s) = \frac{1}{\alpha(1+\cosh^2 g(s))}$$

olup

$$k_1(s) = \alpha \left\{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \right\},$$

elde edilir. Şimdi

$$\hat{x}(s) = x(s) + \alpha \cdot e_2(s), s \in I$$

şeklinde tanımlanan regüler diferensiyellenebilir bir $\hat{C}$ eğrisini göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\hat{x}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \int \frac{1}{\cosh g(s)} \sinh g(s) ds - \alpha \frac{\sinh g(s)}{\cosh g(s)} \sinh g(s) + \alpha \cos g(s) \\ \int \frac{1}{\cosh g(s)} \cos g(s) ds - \alpha \frac{\sinh g(s)}{\cosh g(s)} \cos g(s) - \alpha \sinh g(s) \\ \int \frac{\sinh g(s)}{\cosh g(s)} ds + \alpha \frac{1}{\cosh g(s)} \\ \int 1 ds \end{bmatrix}$$

olup $\hat{C}$ eğrisi de E^4 de özel Frenet eğrisidir. Bu nedenle C eğrisi E^4 de genelleştirilmiş Mannheim eğrisidir ve $\hat{C}$ eğrisi de C nin genelleştirilmiş Mannheim eğri çiftidir.

Örnek 3.1.2. Teorem 2.1.4. de, $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$ olmak üzere

$g(u) = \sin(bu)$ ve $h(u) = \cos(bu)$ olarak alalım. Bu taktirde $f = \frac{1+a^2b^4}{(1+a^2b^2)^{3/2}}$ olup sabit bir fonksiyondur. Böylece E^4 de C eğrisi

$$x(u) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \int \sin(u) du \\ \frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \int \cos(u) du \\ \frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \int \sin(bu) du \\ \frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \int \cos(bu) du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \cos(u) \\ \frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \sin(u) \\ -\frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}} \cos(bu) \\ -\frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}} \sin(bu) \end{bmatrix}, u \in U$$

şeklinde verilir. Ayrıca

$$u = \frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)} s$$

olmak üzere yay parametresi cinsinden C ,

$$x(s) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)} s\right) \\ \frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)} s\right) \\ -\frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{b(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)} s\right) \\ -\frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{b(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)} s\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Dolayısıyla C bir özel Frenet eğrisidir ve $s \in I$ için

$$k_1(s) = \frac{(1+a^2b^2)^2}{\alpha(1+a^2)(1+a^2b^4)}$$

$$k_2(s) = \frac{a(b^2-1)(1+a^2b^2)}{\alpha(1+a^2)(1+a^2b^4)}$$

$$k_3(s) = \frac{b(1+a^2b^2)}{\alpha(1+a^2b^4)}$$

dir. k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonları sabit fonksiyonlardır ve bu takdirde

$$k_1 = \alpha\{(k_1)^2 + (k_2)^2\}$$

olur. Böylece C nin Mannheim çifti $\hat{C}, \hat{s} = \frac{a(b^2-1)}{(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)^{1/2}} s$ olmak üzere

$$\hat{x}(\hat{s}) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha a^2 b^2 (b^2-1)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a (b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}} \hat{s}\right) \\ \frac{\alpha a^2 b^2 (b^2-1)}{(1+a^2b^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a (b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}} \hat{s}\right) \\ \frac{\alpha a (b^2-1)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{b(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a (b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}} \hat{s}\right) \\ -\frac{\alpha a (b^2-1)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{b(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a (b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}} \hat{s}\right) \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve C nin her bir noktasındaki birinci normal doğrusu, ϕ dönüşümü altındaki karşılık gelen her bir noktada, $\hat{C}$ nın üçüncü normal doğrusudur. Bu nedenle C eğrisi E^4 de genelleştirilmiş Mannheim eğrisidir.

4. E⁵ DE GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ

Tanım 4.1.1. E⁵ de bir özel Frenet eğrisi α olsun. $\phi: \alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ 1:1, örten dönüşü altında α nın her noktasındaki birinci normal doğrusu $\tilde{\alpha}$ nın ikinci normal doğrusu, üçüncü normal doğrusu ve dördüncü normal doğrusu tarafından gerilen uzayda yatacak şekilde E⁵ de bir $\tilde{\alpha}$ Frenet eğrisi mevcut ise α eğrisine E⁵ de genelleştirilmiş Mannheim eğrisi denir. $\tilde{\alpha}$ ya da E⁵ de genelleştirilmiş Mannheim çifti denir.

Bu tanımdan $\tilde{\alpha}$ genelleştirilmiş Mannheim çifti

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s).e_2(s), \quad s \in I, \quad \lambda: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.1.1)$$

olacak şekilde $\tilde{\alpha}: I \rightarrow E^5$ dönüşü ile verilir. Genel olarak $\tilde{\alpha}$ nın yay uzunluğu parametresi

s değildir. Bu nedenle $\tilde{\alpha}$ nın yay uzunluğu parametresini $\tilde{s} = \int_0^s \left\| \frac{d\tilde{\alpha}(s)}{ds} \right\| ds$ şeklinde

tanımlarsak $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{I} \subset \mathbb{R}$, $f(s) = \tilde{s}$, C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir bir fonksiyonu göz önüne alabiliriz. Bu taktirde $s \in I$ için

$$f'(s) = \sqrt{\{1 - \lambda(s)k_1(s)\}^2 + \{\lambda'(s)\}^2 + \{\lambda(s)k_2(s)\}^2} \quad (4.1.2)$$

dir. Böylece

$$\tilde{\alpha}(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s).e_2(s) \quad (4.1.3)$$

yazabiliriz. $\phi: \alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ 1:1 örten dönüşümü de $\phi(\alpha(s)) = \tilde{\alpha}(f(s))$ şeklinde verilebilir. O halde

$$\frac{d\tilde{\alpha}(f(s))}{ds} = \frac{d\tilde{\alpha}(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \Big|_{\tilde{s}=f(s)} \cdot f'(s) = f'(s) \cdot \tilde{e}_1(f(s))$$

dir.

Teorem 4.1.1. E⁵ de bir Frenet eğrisi α olsun. Eğer E⁵ de genelleştirilmiş Mannheim eğrisi α ise bu takdirde α nın k_1, k_2 eğrilikleri

$$k_1(s) = \lambda \left\{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \right\}, \quad s \in I \quad (4.1.4)$$

eşitliğini sağlar.

İspat: E⁵ de genelleştirilmiş Mannheim eğrisi α ve $\tilde{\alpha}$ da α nın genişletilmiş Mannheim çifti olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s).e_2(s)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. Burada $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Tanım 4.1.1. den x, y, z fonksiyonları I üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$e_2(s) = x(s).\tilde{e}_3(f(s)) + y(s).\tilde{e}_4(f(s)) + z(s).\tilde{e}_5(f(s)) \quad (4.1.6)$$

yazılabilir. (4.1.3) eşitliğinin türevi alınırsa $s \in I$ için

$$\begin{aligned} f'(s).\tilde{\alpha}'(f(s)) &= \alpha'(s) + \lambda'(s).e_2(s) + \lambda(s)e_2'(s) \\ f'(s).\tilde{e}_1(f(s)) &= e_1(s) + \lambda'(s).e_2(s) + \lambda(s)(-k_1(s).e_1(s) + k_2(s).e_3(s)) \\ &= (1 - \lambda k_1(s)).e_1(s) + \lambda'(s).e_2(s) + \lambda(s)k_2(s).e_3(s) \\ \langle \tilde{e}_1(f(s)), e_2(s) \rangle &= \langle \tilde{e}_1(f(s)), x(s).\tilde{e}_3(f(s)) + y(s).\tilde{e}_4(f(s)) + z(s).\tilde{e}_5(f(s)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan herhangi bir $s \in I$ için $\lambda'(s) = 0$ olur. Yani λ fonksiyonu sabittir.

Böylece

$$f'(s).\tilde{e}_1(f(s)) = (1 - \lambda k_1(s)).e_1(s) + \lambda k_2(s).e_3(s) \quad (4.1.7)$$

olur. Buradan da

$$\tilde{e}_1(f(s)) = \frac{1 - \lambda k_1(s)}{f'(s)}.e_1(s) + \frac{\lambda k_2(s)}{f'(s)}.e_3(s) \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Burada

$$f'(s) = \sqrt{\{1 - \lambda k_1(s)\}^2 + (\lambda k_2(s))^2}, s \in I \quad (4.1.9)$$

dir. (4.1.8) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} f'(s).\tilde{k}_1(f(s)).\tilde{e}_2(f(s)) &= \left(\frac{1 - \lambda k_1(s)}{f'(s)} \right)' .e_1(s) \\ &\quad + \left(\frac{(1 - \lambda k_1(s)).k_1(s) - \lambda (k_2(s))^2}{f'(s)} \right) .e_2(s) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda k_2(s)}{f'(s)} \right)' .e_3(s) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda k_2(s)k_3(s)}{f'(s)} \right) .e_4(s), s \in I \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

bulunur. (4.1.10) denkleminin her iki tarafı $e_2(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve (4.1.6) eşitliği yerine yazılırsa

$$\langle \tilde{e}_2(f(s)), x(s).\tilde{e}_3(f(s)) + y(s).\tilde{e}_4(f(s)) + z(s).\tilde{e}_5(f(s)) \rangle = 0, s \in I$$

olup (4.1.10) denkleminde $e_2(s)$ in katsayısı sıfır bulunur. Böylece

$$(1 - \lambda k_1(s))k_1(s) - \lambda(k_2(s))^2 = 0, s \in I$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$k_1(s) = \lambda \{(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\}, s \in I$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve $h_1, h_2, h_3: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(u) = \begin{bmatrix} \lambda \int f(u) \cos u du \\ \lambda \int f(u) \sin u du \\ \lambda \int f(u) h_1(u) du \\ \lambda \int f(u) h_2(u) du \\ \lambda \int f(u) h_3(u) du \end{bmatrix}, u \in U$$

ile verilen bir eğri α olsun. Bu takdirde α nın k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonları arasında

$$k_1(s) = \lambda \{(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\}, s \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}^+, h_1, h_2, h_3: U \rightarrow \mathbb{R}, f: U \rightarrow \mathbb{R}^+$ herhangi bir diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(u) = \begin{bmatrix} \lambda \int f(u) \cos u du \\ \lambda \int f(u) \sin u du \\ \lambda \int f(u) h_1(u) du \\ \lambda \int f(u) h_2(u) du \\ \lambda \int f(u) h_3(u) du \end{bmatrix}, u \in U$$

şeklinde tanımlı bir eğri α olsun. Bu takdirde

$$\dot{\alpha}(u) = \begin{bmatrix} \lambda f(u) \cos u \\ \lambda f(u) \sin u \\ \lambda f(u) h_1(u) \\ \lambda f(u) h_2(u) \\ \lambda f(u) h_3(u) \end{bmatrix}, u \in U$$

elde edilir. α nın yay uzunluğu parametresi

$$s = \psi(u) = \int_{u_0}^u \|\dot{\alpha}(u)\| du$$

şeklinde verilir. Burada

$$\|\dot{\alpha}(u)\| = \lambda f(u) \{1 + (h_1(u))^2 + (h_2(u))^2 + (h_3(u))^2\}^{1/2}$$

dir.

$\psi: U \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ in ters fonksiyonu φ olsun. Böylece $u = \varphi(s)$ ve

$$\varphi'(s) = \left\| \frac{d\alpha(u)}{du} \right\|_{u=\varphi(s)}, s \in I$$

dir. Böylece her $\alpha(\varphi(s))$ noktasında α eğrisinin birim teğet vektörü $e_1(s)$

$$e_1(s) = \begin{bmatrix} \{1 + (h_1(\varphi(s)))^2 + (h_2(\varphi(s)))^2 + (h_3(\varphi(s)))^2\}^{-1/2} \sin(\varphi(s)) \\ \{1 + (h_1(\varphi(s)))^2 + (h_2(\varphi(s)))^2 + (h_3(\varphi(s)))^2\}^{-1/2} \cos(\varphi(s)) \\ \{1 + (h_1(\varphi(s)))^2 + (h_2(\varphi(s)))^2 + (h_3(\varphi(s)))^2\}^{-1/2} h_1(\varphi(s)) \\ \{1 + (h_1(\varphi(s)))^2 + (h_2(\varphi(s)))^2 + (h_3(\varphi(s)))^2\}^{-1/2} h_2(\varphi(s)) \\ \{1 + (h_1(\varphi(s)))^2 + (h_2(\varphi(s)))^2 + (h_3(\varphi(s)))^2\}^{-1/2} h_3(\varphi(s)) \end{bmatrix}, s \in I$$

şeklinde verilir. Burada kısaltma yapmak amacıyla

$$f = f(\varphi(s)),$$

$$h_1 = h_1(\varphi(s)), h_2 = h_2(\varphi(s)), h_3 = h_3(\varphi(s))$$

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_1(\varphi(s)) = \frac{dh_1(u)}{du} \Big|_{u=\varphi(s)}, \dot{h}_2 = \dot{h}_2(\varphi(s)) = \frac{dh_2(u)}{du} \Big|_{u=\varphi(s)}, \dot{h}_3 = \dot{h}_3(\varphi(s)) = \frac{dh_3(u)}{du} \Big|_{u=\varphi(s)}$$

$$\ddot{h}_1 = \ddot{h}_1(\varphi(s)) = \frac{d^2 h_1(u)}{du^2} \Big|_{u=\varphi(s)}, \ddot{h}_2 = \ddot{h}_2(\varphi(s)) = \frac{d^2 h_2(u)}{du^2} \Big|_{u=\varphi(s)}, \ddot{h}_3 = \ddot{h}_3(\varphi(s)) = \frac{d^2 h_3(u)}{du^2} \Big|_{u=\varphi(s)}$$

$$\varphi' = \varphi'(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} \Big|_s, A = 1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2, B = h_1 \dot{h}_1 + h_2 \dot{h}_2 + h_3 \dot{h}_3$$

$$C = \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2, D = h_1 \ddot{h}_1 + h_2 \ddot{h}_2 + h_3 \ddot{h}_3, E = \dot{h}_1 \ddot{h}_1 + \dot{h}_2 \ddot{h}_2 + \dot{h}_3 \ddot{h}_3, F = \ddot{h}_1^2 + \ddot{h}_2^2 + \ddot{h}_3^2$$

gösterimlerini kullanacağız. Bu takdirde

$$\dot{A} = 2B, \quad \dot{B} = C + D, \quad \dot{C} = 2E, \quad \dot{\varphi} = \lambda^{-1} f^{-1} A^{-\frac{1}{2}}$$

ve

$$e_1 = e_1(s) = \begin{bmatrix} A^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi(s)) \\ A^{-\frac{1}{2}} \cos(\varphi(s)) \\ A^{-\frac{1}{2}} h_1 \\ A^{-\frac{1}{2}} h_2 \\ A^{-\frac{1}{2}} h_3 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi k_1, k_2 eğrilik fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} \sin(\varphi(s)) + A^{-\frac{1}{2}} \cos(\varphi(s)) \\ -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} \cos(\varphi(s)) - A^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi(s)) \\ -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} h_1 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_1 \\ -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} h_2 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_2 \\ -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} h_3 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_3 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -A^{-\frac{3}{2}} B \sin(\varphi(s)) + A^{-\frac{1}{2}} \cos(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{3}{2}} B \cos(\varphi(s)) - A^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{3}{2}} B h_1 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_1 \\ -A^{-\frac{3}{2}} B h_2 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_2 \\ -A^{-\frac{3}{2}} B h_3 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Böylece

$$k_1 = k_1(s) = \|\dot{e}_1\| = \dot{\varphi} A^{-1} (A + AC - B^2)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Sonra $e_2 = (k_1)^{-1} \cdot \dot{e}_1$ eşitliğinden

$$e_2 = \begin{bmatrix} -A^{-\frac{1}{2}}B(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}\sin(\varphi(s)) + A^{\frac{1}{2}}(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}\cos(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{1}{2}}B(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}\cos(\varphi(s)) - A^{\frac{1}{2}}(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}\sin(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{1}{2}}B(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}h_1 - A^{\frac{1}{2}}(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{h}_1 \\ -A^{-\frac{1}{2}}B(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}h_2 - A^{\frac{1}{2}}(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{h}_2 \\ -A^{-\frac{1}{2}}B(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}h_3 - A^{\frac{1}{2}}(A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{h}_3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$P = (A+AC-B^2)^2 + (A+AC-B^2)(B^2-AC-AD) + AB(B+AE-BD)$$

$$Q = A^2(A+AC-B^2)$$

$$R = A^2(B+AE-BD)$$

olmak üzere

$$e_2' + k_1.e_1 = \varphi' . A^{-\frac{3}{2}} . (A+AC-B^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} (P-Q)\sin(\varphi(s)) - R\cos(\varphi(s)) \\ (P-Q)\cos(\varphi(s)) + R\sin(\varphi(s)) \\ Ph_1 - R\dot{h}_1 + Q\ddot{h}_1 \\ Ph_2 - R\dot{h}_2 + Q\ddot{h}_2 \\ Ph_3 - R\dot{h}_3 + Q\ddot{h}_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$P = A^2(1+C+BE-D-CD)$$

dir. Böylece

$$e_1' + k_1.e_1 = \varphi' A^{\frac{1}{2}} (A+AC-B^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} (\tilde{P}-\tilde{Q})\sin(\varphi(s)) - \tilde{R}\cos(\varphi(s)) \\ (\tilde{P}-\tilde{Q})\cos(\varphi(s)) + \tilde{R}\sin(\varphi(s)) \\ \tilde{P}h_1 - \tilde{R}\dot{h}_1 + \tilde{Q}\ddot{h}_1 \\ \tilde{P}h_2 - \tilde{R}\dot{h}_2 + \tilde{Q}\ddot{h}_2 \\ \tilde{P}h_3 - \tilde{R}\dot{h}_3 + \tilde{Q}\ddot{h}_3 \end{bmatrix}$$

olur. Burada

$$\tilde{P} = (1+C+BE-D-CD)$$

$$\tilde{Q} = A+AC-B^2$$

$$\tilde{R} = B+AE-BD$$

dir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\|e_2' + k_1 e_1\|^2 &= (\varphi')^2 A(A+AC-B^2)^{-3} \{ \tilde{P}^2 - 2\tilde{P}\tilde{Q} + \tilde{Q}^2 + \tilde{R}^2 + \tilde{P}^2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \\
&\quad + \tilde{R}^2(\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2) + \tilde{Q}(\ddot{h}_1^2 + \ddot{h}_2^2 + \ddot{h}_3^2) \\
&\quad - 2\tilde{P}\tilde{R}(\dot{h}_1\dot{h}_1 + \dot{h}_2\dot{h}_2 + \dot{h}_3\dot{h}_3) - 2\tilde{R}\tilde{Q}(\dot{h}_1\ddot{h}_1 + \dot{h}_2\ddot{h}_2 + \dot{h}_3\ddot{h}_3) \\
&\quad + 2\tilde{P}\tilde{Q}(\dot{h}_1\ddot{h}_1 + \dot{h}_2\ddot{h}_2 + \dot{h}_3\ddot{h}_3) \} \\
&= (\varphi')^2 A(A+AC-B^2)^{-3} \{ A(1+C+BE-D-CD)^2 \\
&\quad - 2(1+C+BE-D-CD)(A+AC-B^2) + (A+AC-B^2)^2 \\
&\quad + (B+AE-BD)^2 + C(B+AE-BD)^2 + F(A+AC-B^2)^2 \\
&\quad - 2B(1+C+BE-D-CD)(B+AE-BD) \\
&\quad - 2E(B+AE-BD)(A+AC-B^2) \\
&\quad + 2D(1+C+BE-D-CD)(A+AC-B^2) \} \\
&= (\varphi')^2 A(A+AC-B^2)^{-3} \\
&\quad \times \{ (A+AC-B^2)^2(1+F) \\
&\quad + 2(A+AC-B^2)(D-1)(1+C+BE-D-CD) \\
&\quad - 2(A+AC-B^2)E(B+AE-BD) \\
&\quad + A(1+C+BE-D-CD)^2 + (B+AE-BD)^2(1+C) \\
&\quad - 2B(1+C+BD-D-CD)(B+AE-BD) \}
\end{aligned}$$

olur. Burada yukarıdaki son üç terim hesaplandığında

$$\begin{aligned}
&A(1+C+BE-D-CD)^2 + (B+AE-BD)^2(1+C) - 2B(1+C+BE-D-CD)(B+AE-BD) \\
&= (A+AC-B^2)(1+C-2D-2CD+D^2+CD^2+2BE-2BDE+AE^2)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
(k_2)^2 &= \|e_2' + k_1 e_1\|^2 \\
&= (\varphi')^2 A(A+AC-B^2)^{-2} \\
&\quad \times \{ (A+AC-B^2)(1+F) + 2(D-1)(1+C+BE-D-CD) \\
&\quad - 2E(B+AE-BD) + 1+C-2D-2CD+D^2+CD^2+2BE \\
&\quad - 2BDE+AE^2 \} \\
&= (\varphi')^2 A(A+AC-B^2)^{-2} \\
&\quad \times \{ (A+AC-B^2)(1+F) - 1-C+2D+2CD-2BE-AE^2-D^2-CD^2+2BDE \}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $(k_1)^2 = \varphi' A^{-2} (A+AC-B^2)$ olduğundan

$$(k_1)^2 + (k_2)^2 = (\varphi')^2 A^{-2} (A + AC - B^2)^{-2} \\ \times \{(A + AC - B^2)^3 \\ + A^3(A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D \\ + 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE)\}$$

dir. Böylece $\varphi' = \lambda^{-1} f^{-1} A^{-\frac{1}{2}}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$(k_1)^2 + (k_2)^2 = \lambda^{-2} f^{-2} A^{-3} (A + AC - B^2)^{-2} \\ \times \{(A + AC - B^2)^3 \\ + A^3(A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D \\ + 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE)\}$$

ve

$$k_1 = \lambda^{-1} f^{-1} A^{-\frac{3}{2}} (A + AC - B^2)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Böylece

$$f = A^{-\frac{3}{2}} (A + AC - B^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \times \{(A + AC - B^2)^3 + A^3(A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D \\ + 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE)\}$$

olarak alınır

$$k_1 = \lambda \{(k_1)^2 + (k_2)^2\}$$

olur. f fonksiyonu ile $h_1, h_2, h_3, \dot{h}_1, \dot{h}_2, \dot{h}_3$ lerin açık bir ifadesini gösterebiliriz. Yani

$$A = 1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \\ A + AC - B^2 = 1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2 + (h_1\dot{h}_2 - h_2\dot{h}_1)^2 + (h_1\dot{h}_3 - h_3\dot{h}_1)^2 + (h_2\dot{h}_3 - h_3\dot{h}_2)^2$$

ve

$$A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D + 2CD - 2BE - AE^2 \\ - D^2 - CD^2 + 2BDE \\ = (h_1 + \ddot{h}_1)^2 + (h_2 + \ddot{h}_2)^2 + (h_3 + \ddot{h}_3)^2 \\ + \left((h_1\dot{h}_2 - \dot{h}_1h_2) - (\dot{h}_1\ddot{h}_2 - \ddot{h}_1\dot{h}_2) \right)^2 \\ + \left((h_1\dot{h}_3 - \dot{h}_1h_3) - (\dot{h}_1\ddot{h}_3 - \ddot{h}_1\dot{h}_3) \right)^2 \\ + \left((h_2\dot{h}_3 - \dot{h}_2h_3) - (\dot{h}_2\ddot{h}_3 - \ddot{h}_2\dot{h}_3) \right)^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
f &= (1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{-3/2} \\
&\quad \times \left\{ 1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 \right. \\
&\quad \left. \dot{h}_3^2 + (h_1\dot{h}_2 - \dot{h}_1h_2)^2 + (h_1\dot{h}_3 - \dot{h}_1h_3)^2 + (h_2\dot{h}_3 - \dot{h}_2h_3)^2 \right\}^{-5/2} \\
&\quad \times \left[\left\{ 1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dot{h}_3^2 + (h_1\dot{h}_2 - \dot{h}_1h_2)^2 + (h_1\dot{h}_3 - \dot{h}_1h_3)^2 + (h_2\dot{h}_3 - \dot{h}_2h_3)^2 \right\}^3 \right. \\
&\quad + (1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^3 \times \left\{ (h_1 + \ddot{h}_1)^2 + (h_2 + \ddot{h}_2)^2 + (h_3 + \ddot{h}_3)^2 \right. \\
&\quad + \left((h_1\dot{h}_2 - \dot{h}_1h_2) - (\dot{h}_1\ddot{h}_2 - \ddot{h}_1\dot{h}_2) \right)^2 \\
&\quad + \left((h_1\dot{h}_3 - \dot{h}_1h_3) - (\dot{h}_1\ddot{h}_3 - \ddot{h}_1\dot{h}_3) \right)^2 \\
&\quad + \left((h_2\dot{h}_3 - \dot{h}_2h_3) - (\dot{h}_2\ddot{h}_3 - \ddot{h}_2\dot{h}_3) \right)^2 \\
&\quad + \left(h_1\ddot{h}_2 - \ddot{h}_1h_2 \right)^2 + \left(h_1\ddot{h}_3 - \ddot{h}_1h_3 \right)^2 \\
&\quad \left. \left. + \left(h_2\ddot{h}_3 - \ddot{h}_2h_3 \right)^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

5. E^n ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ

Tanım 5.1.1. E^n de bir özel Frenet eğrisi α olsun. $\phi: \alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ 1:1, örten dönüşümü altında α nın her noktasındaki birinci normal doğrusu $\tilde{\alpha}$ nın ikinci normal, üçüncü normal, ..., n-inci normal doğrusu tarafından gerilen uzayda yatacak şekilde E^n de bir $\tilde{\alpha}$ özel Frenet eğrisi mevcut ise α ya E^n de genelleştirilmiş Mannheim eğrisi denir ve $\tilde{\alpha}$ eğrisine de α nın E^n de genelleştirilmiş Mannheim çifti denir.

Teorem 5.1.1. E^n de Mannheim eğrilerinin ilgili noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat: E^n de genelleştirilmiş Mannheim eğrisi α ve $\tilde{\alpha}$ da α nın E^n de genelleştirilmiş Mannheim çifti olsun. Tanım 5.1.1 gereğince $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s).e_2(s) \quad (5.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \rightarrow \lambda(s)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. $\tilde{\alpha}$ genel olarak yay parametrelili olmadığından diferensiyellenebilir bir $f: I \rightarrow \tilde{I}$, $s \rightarrow f(s)$ fonksiyonu

$$f(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\tilde{\alpha}(s)}{ds} \right\| ds = \tilde{s}$$

şeklinde tanımlayalım. ϕ dönüşümü altında α nın her noktasındaki birinci normal doğrusu $\tilde{\alpha}$ nın ikinci normal doğrusu, üçüncü normal doğrusu, ..., n-inci normal doğrusu tarafından gerilen uzayda yattığından dolayı $\forall s \in I$ için $e_2(s)$ vektörü $\tilde{e}_3(f(s)), \tilde{e}_4(f(s)), \dots, \tilde{e}_n(f(s))$ in lineer birleşimi şeklinde yazılır. Yani I üzerinde en az bir diferensiyellenebilir $\mu_i, i \in \{3, 4, \dots, n\}$ fonksiyonları için

$$e_2(s) = \sum_{i=3}^n \mu_i(s). \tilde{e}_i(f(s))$$

yazabiliriz. (5.1.1) eşitliğinin s ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} f'(s).\tilde{e}(f(s)) &= e_1(s) + \lambda'(s).e_2(s) + \lambda(s).(-k_1(s).e_1(s) + k_2(s).e_3(s)) \\ &= (1 - \lambda(s)k_1(s)).e_1(s) + \lambda'(s).e_2(s) + \lambda(s)k_2(s).e_3(s) \end{aligned}$$

$$\langle \tilde{e}_1(f(s)), \sum_{i=3}^n \mu_i(s).\tilde{e}_i(f(s)) \rangle = 0$$

olduğundan herhangi bir $s \in I$ için $\lambda'(s) = 0$ olur. Yani λ fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabittir. Diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonundan;

$$\begin{aligned} d(\alpha, \tilde{\alpha}) &= \|\tilde{\alpha} - \alpha\| \\ &= \|\alpha + \lambda.e_2 - \alpha\| \\ &= \|\lambda.e_2\| \\ &= |\lambda|.\|e_2\| \\ &= |\lambda| = \text{sabit} \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.2. E^n de bir Frenet eğrisi α olsun. Eğer α E^n de genelleştirilmiş Mannheim eğrisi ise bu taktirde λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere α nın k_1 ve k_2 eğrileri

$$k_1(s) = \lambda \{(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\}, s \in I \quad (5.1.2)$$

eşitliğini sağlar.

İspat: E^n de genelleştirilmiş Mannheim eğrisi α ve $\tilde{\alpha}$ da α nın E^n de genelleştirilmiş Mannheim çifti olsun. Tanım 5.1.1 gereğince $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s).e_2(s)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. Burada $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow \lambda(s)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. $\tilde{\alpha}$ genel olarak yay parametrelili olmadığından diferensiyellenebilir bir $f : I \rightarrow \tilde{I}, s \rightarrow f(s)$ fonksiyonunu

$$f(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\tilde{\alpha}(s)}{ds} \right\| ds = \tilde{s} \quad (5.1.3)$$

şeklinde tanımlayalım.

(5.1.1) eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} f'(s).\tilde{e}_1(f(s)) &= e_1(s) + \lambda'(s).e_2(s) + \lambda(s)(-k_1(s).e_1(s) + k_2(s).e_3(s)) \\ &= (1 - \lambda k_1(s)).e_1(s) + \lambda k_2(s).e_3(s) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

eşitliğinden

$$\tilde{e}_1(f(s)) = \frac{1 - \lambda k_1(s)}{f'(s)}.e_1(s) + \frac{\lambda k_2(s)}{f'(s)}.e_3(s) \quad (5.1.5)$$

elde edilir. Burada

$$f'(s) = \sqrt{(1 - \lambda k_1(s))^2 + (\lambda k_2(s))^2} \quad (5.1.6)$$

(5.1.5) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} f'(s)\tilde{k}_1(f(s)).\tilde{e}_2(f(s)) &= \left(\frac{1 - \lambda k_1(s)}{f'(s)} \right)' .e_1(s) \\ &+ \left(\frac{(1 - \lambda k_1(s))k_1(s) - \lambda(k_2(s))^2}{f'(s)} \right) .e_2(s) \\ &+ \left(\frac{\lambda k_2(s)}{f'(s)} \right)' .e_3(s) + \left(\frac{\lambda k_2(s)k_3(s)}{f'(s)} \right) .e_4(s) \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

olur. Tanım 5.1.1 den dolayı $\forall s \in I$ için diferensiyellenebilir $\mu_i, i \in \{3, 4, \dots, n\}$ fonksiyonları için

$$e_2(s) = \sum_{i=3}^n \mu_i(s).\tilde{e}_i(f(s)) \quad (5.1.8)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.1.7) denkleminin her iki tarafı $e_2(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve (5.1.8) eşitliği yerine yazılırsa

$$\langle \tilde{e}_2(f(s)), \sum_{i=3}^n \mu_i(s).\tilde{e}_i(f(s)) \rangle = 0$$

ve

$$(1 - \lambda k_1(s))k_1(s) - \lambda(k_2(s))^2 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$k_1(s) = \lambda \{(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.3. $\alpha : I \rightarrow E^n$,

$$k_1(s) = \lambda \{(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\}, s \in I, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

eşitliğini sağlayan $k_1(\neq \text{sabit})$ ve $k_2(\neq \text{sabit})$ eğriliklerine sahip bir eğri olsun. Eğer $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda.e_2(s), s \in I$$

şeklinde verilen bir Frenet eğrisi ise α , Mannheim çifti $\tilde{\alpha}$ olan bir genelleştirilmiş Mannheim eğrisidir.

İspat: $\tilde{s}, \tilde{\alpha}$ nın yay parametresi olsun. Yani $\tilde{s}$

$$\tilde{s} = \int_0^s \left\| \frac{d\tilde{\alpha}(s)}{ds} \right\| ds, s \in I$$

şeklinde tanımlı olmak üzere diferensiyellenebilir bir $f : I \rightarrow \tilde{I}$, $f(s) = \tilde{s}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin hipotezinden

$$f'(s) = \sqrt{(1 - \lambda k_1(s))^2 + (\lambda k_2(s))^2} = \sqrt{1 - \lambda k_1(s)}$$

dir. Bu taktirde $\tilde{\alpha}$ eğrisi için

$$\tilde{\alpha}(\tilde{s}) = \tilde{\alpha}(f(s)) = \alpha(s) + \lambda.e_2(s)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\tilde{e}_1(f(s)) = \sqrt{1 - \lambda k_1(s)}.e_1(s) + \frac{\lambda k_2(s)}{\sqrt{1 - \lambda k_1(s)}}.e_3(s) \quad (5.1.9)$$

elde edilir. (5.1.9) eşitliğinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned} f'(s) \cdot \frac{d\tilde{e}_1(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \Big|_{\tilde{s}=f(s)} &= \left(\sqrt{1-\lambda k_1(s)} \right)' \cdot e_1(s) + \sqrt{1-\lambda k_1(s)} \cdot k_1(s) \cdot e_2(s) \\ &+ \left(\frac{\lambda k_2(s)}{\sqrt{1-\lambda k_1(s)}} \right)' \cdot e_3(s) + \frac{\lambda k_2(s)}{\sqrt{1-\lambda k_1(s)}} \cdot (-k_2(s) \cdot e_2(s) + k_3(s) \cdot e_4(s)) \end{aligned}$$

$\tilde{\alpha}$ özel Frenet eğrisinden

$$\frac{d\tilde{e}_1(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \Big|_{\tilde{s}=f(s)} = \tilde{k}_1(f(s)) \cdot \tilde{e}_2(f(s))$$

olur. Bulunan bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} f'(s) \cdot \tilde{k}_1(f(s)) \cdot \tilde{e}_2(f(s)) &= \left(\sqrt{1-\lambda k_1(s)} \right)' \cdot e_1(s) \\ &+ \left(\sqrt{1-\lambda k_1(s)} \cdot k_1(s) - \frac{\lambda (k_2(s))^2}{\sqrt{1-\lambda k_1(s)}} \right) \cdot e_2(s) \\ &+ \left(\frac{\lambda k_2(s)}{\sqrt{1-\lambda k_1(s)}} \right)' \cdot e_3(s) + \left(\frac{\lambda (k_2(s) k_3(s))}{\sqrt{1-\lambda k_1(s)}} \right) \cdot e_4(s) \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-\lambda k_1(s)} \cdot k_1(s) + \frac{\lambda k_2(s)}{\sqrt{1-\lambda k_1(s)}} \cdot (-k_2(s)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda k_1(s)}} \cdot (k_1(s) - \lambda (k_1(s))^2 - \lambda (k_2(s))^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitlikten $e_2(s)$ in katsayısının sıfır olduğunu görürüz.

(5.1.3) eşitliğinden $\tilde{e}_1(f(s))$, $e_1(s)$ ve $e_3(s)$ in lineer birleşimidir. $\tilde{\alpha}$ eğrisi E^n de özel Frenet eğrisi olduğundan $e_2(s)$ vektörü $\tilde{e}_3(f(s)), \tilde{e}_4(f(s)), \dots, \tilde{e}_n(f(s))$ in lineer

birleşimidir. Dolayısıyla $\forall s \in I$ için $\tilde{e}_2(f(s))$ vektörü $e_1(s), e_3(s)$ ve $e_4(s)$ in lineer birleşimi şeklinde verilir. Böylece $\tilde{e}_1(f(s))$ ve $\tilde{e}_2(f(s))$, $e_2(s)$ e bağlı değildir.

Bu nedenle $\phi: \alpha \rightarrow \tilde{\alpha}, \phi(\alpha(s)) = \tilde{\alpha}(f(s))$ 1:1, örten dönüşümü altında α nın her noktasındaki birinci normal doğrusu $\tilde{\alpha}$ nın ikinci normal doğrusu, üçüncü normal doğrusu, ..., n-inci normal doğrusu tarafından gerilen uzayda yatar. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.4. $f: U \rightarrow IR, i \neq j$ için

$$\begin{aligned} f(u) = & \left(1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i(u))^2 \right)^{-3/2} \\ & \times \left(1 + \sum_{i,j=1}^{n-2} ((h_i(u))^2 + (\dot{h}_i(u))^2 + (h_i(u)\dot{h}_j(u) - \dot{h}_i(u)h_j(u))^2) \right)^{-5/2} \\ & \times \left[\left\{ 1 + \sum_{i,j=1}^{n-2} ((h_i(u))^2 + (\dot{h}_i(u))^2 + (h_i(u)\dot{h}_j(u) - \dot{h}_i(u)h_j(u))^2) \right\}^3 \right. \\ & + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i(u))^2 \right)^3 \times \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-2} ((h_i(u) + \ddot{h}_i(u))^2 \right. \\ & + (h_i(u)\dot{h}_j(u) - \dot{h}_i(u)h_j(u)) - (\dot{h}_i(u)\ddot{h}_j(u) - \ddot{h}_i(u)\dot{h}_j(u))^2 \\ & \left. \left. + (h_i(u)\ddot{h}_j(u) - \ddot{h}_i(u)h_j(u))^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ve $h_i: U \rightarrow IR, i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(u) = \begin{bmatrix} \lambda \int f(u) \sin u du \\ \lambda \int f(u) \cos u du \\ \lambda \int f(u) h_1(u) du \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda \int f(u) h_{n-2}(u) du \end{bmatrix}, u \in U \subset IR, \lambda \in IR^+$$

ile verilen bir eğri α olsun. Bu taktirde α nın k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonları arasında

$$k_1(s) = \lambda \{(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\}, s \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}^+, h_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ herhangi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(u) = \begin{bmatrix} \lambda \int f(u) \sin u du \\ \lambda \int f(u) \cos u du \\ \lambda \int f(u) h_1(u) du \\ . \\ . \\ . \\ \lambda \int f(u) h_{n-2}(u) du \end{bmatrix}, u \in U \subset \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı bir eğri α olsun. Bu taktirde

$$\dot{\alpha}(u) = \begin{bmatrix} \lambda \int f(u) \sin u \\ \lambda \int f(u) \cos u \\ \lambda \int f(u) h_1(u) \\ . \\ . \\ . \\ \lambda \int f(u) h_{n-2}(u) \end{bmatrix}, u \in U \subset \mathbb{R}$$

elde edilir. α nın yay uzunluğu parametresi

$$\|\dot{\alpha}(u)\| = \lambda f(u) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i(u))^2 \right\}^{1/2}$$

olmak üzere

$$s = \psi(u) = \int_{u_0}^u \|\dot{\alpha}(u)\| du$$

şeklinde verilir.

$\psi: U \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ in ters fonksiyonu φ olsun. Böylece $u = \psi^{-1}(s) = \varphi(s)$ ve

$$\varphi'(s) = \left\| \frac{d\alpha(u)}{du} \Big|_{u=\varphi(s)} \right\|, \quad s \in I$$

dir. Böylece her $\alpha(\varphi(s))$ noktasında α eğrisinin birim teğet vektörü $e_1(s)$

$$e_1(s) = \begin{bmatrix} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i(\varphi(s)))^2 \right\}^{-1/2} \sin(\varphi(s)) \\ \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i(\varphi(s)))^2 \right\}^{-1/2} \cos(\varphi(s)) \\ \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i(\varphi(s)))^2 \right\}^{-1/2} h_1(\varphi(s)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i(\varphi(s)))^2 \right\}^{-1/2} h_{n-2}(\varphi(s)) \end{bmatrix}, \quad s \in I$$

şeklinde elde edilir. Burada kısaltma yapmak amacıyla

$$h_1 = h_1(\varphi(s)), h_2 = h_2(\varphi(s)), \dots, h_{n-2} = h_{n-2}(\varphi(s))$$

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_1(\varphi(s)) = \frac{dh_1(u)}{du} \Big|_{u=\varphi(s)}$$

$$\cdot \\ \cdot \\ \cdot$$

$$\dot{h}_{n-2} = \dot{h}_{n-2}(\varphi(s)) = \frac{dh_{n-2}(u)}{du} \Big|_{u=\varphi(s)}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{h}_1 &= \ddot{h}_1(\varphi(s)) = \frac{d^2 h_1(u)}{du^2} \Big|_{u=\varphi(s)} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\ddot{h}_{n-2} &= \ddot{h}_{n-2}(\varphi(s)) = \frac{d^2 h_{n-2}(u)}{du^2} \Big|_{u=\varphi(s)} \\
\varphi' &= \varphi'(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} \Big|_s \\
A &= 1 + \sum_{i=1}^{n-2} h_i^2, B = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-2} (h_i \dot{h}_i + h_j \dot{h}_j) \\
C &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-2} (\dot{h}_i^2 + \dot{h}_j^2), D = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-2} (h_i \ddot{h}_i + h_j \ddot{h}_j) \\
E &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-2} (\dot{h}_i \ddot{h}_i + \dot{h}_j \ddot{h}_j), F = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-2} (\ddot{h}_i^2 + \ddot{h}_j^2)
\end{aligned}$$

olarak alalım. Bu taktirde

$$\dot{A} = 2B, \dot{B} = C + D, \dot{C} = 2E, \varphi' = \alpha^{-1} f^{-1} A^{-1/2} \text{ ve}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} A^{-1/2} \sin(\varphi(s)) \\ A^{-1/2} \cos(\varphi(s)) \\ A^{-1/2} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A^{-1/2} h_{n-2} \end{bmatrix}$$

dir. k_1, k_2 eğrilik fonksiyonlarını elde etmek için hesaplamaya devam edelim. Şimdi

$$\begin{aligned}
e'_1 &= \varphi' \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} \sin(\varphi(s)) + A^{-\frac{1}{2}} \cos(\varphi(s)) \\ -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} \cos(\varphi(s)) - A^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi(s)) \\ -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} h_1 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} \dot{A} h_{n-2} + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \varphi' \begin{bmatrix} -A^{-\frac{3}{2}} B \sin(\varphi(s)) + A^{-\frac{1}{2}} \cos(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{3}{2}} B \cos(\varphi(s)) - A^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{3}{2}} B h_1 + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -A^{-\frac{3}{2}} B h_{n-2} + A^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_{n-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Böylece $k_1 = k_1(s) = \|e'_1\|$ eşitliğinden

$$k_1 = k_1(s) = \|e'_1\| = \varphi' A^{-1} (A + AC - B^2)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Sonra $e_2 = (k_1)^{-1} \cdot e'_1$ den

$$e_2 = \begin{bmatrix} -A^{-\frac{1}{2}} B (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi(s)) + A^{\frac{1}{2}} (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{1}{2}} B (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(\varphi(s)) - A^{\frac{1}{2}} (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi(s)) \\ -A^{-\frac{1}{2}} B (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} h_1 - A^{\frac{1}{2}} (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -A^{-\frac{1}{2}} B (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} h_{n-2} - A^{\frac{1}{2}} (A + AC - B^2)^{-\frac{1}{2}} \dot{h}_{n-2} \end{bmatrix}$$

ve

$$e_2' + k_1.e_1 = \varphi' A^{-\frac{3}{2}} (A + AC - B^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} (P - Q) \sin(\varphi(s)) - R \cos(\varphi(s)) \\ (P - Q) \cos(\varphi(s)) + R \sin(\varphi(s)) \\ Ph_1 - R\dot{h}_1 + Q\ddot{h}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Ph_{n-2} - R\dot{h}_{n-2} + Q\ddot{h}_{n-2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} P &= (A + AC - B^2)^2 + (A + AC - B^2)(B^2 - AC - AD) + AB(B + AE - BD) \\ Q &= A^2(A + AC - B^2) \\ R &= A^2(B + AE - BD) \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$P = A^2(1 + C + BE - D - CD)$$

dir. Böylece

$$e_2' + k_1.e_1 = \varphi' A^{\frac{1}{2}} (A + AC - B^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} (\tilde{P} - \tilde{Q}) \sin(\varphi(s)) - \tilde{R} \cos(\varphi(s)) \\ (\tilde{P} - \tilde{Q}) \cos(\varphi(s)) + \tilde{R} \sin(\varphi(s)) \\ \tilde{P}h_1 - \tilde{R}\dot{h}_1 + \tilde{Q}\ddot{h}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{P}h_{n-2} - \tilde{R}\dot{h}_{n-2} + \tilde{Q}\ddot{h}_{n-2} \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= 1 + C + BE - D - CD \\ \tilde{Q} &= A + AC - B^2 \\ \tilde{R} &= B + AE - BD \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\|e'_2 + k_1.e_1\|^2 &= (\varphi')^2.A(A+AC-B^2)^{-3} \left\{ \tilde{P}^2 - 2\tilde{P}\tilde{Q} + \tilde{Q}^2 + \tilde{R}^2 \right. \\
&\quad + \tilde{R}^2(\dot{h}_1^2 + \dots + \dot{h}_{n-2}^2) \\
&\quad + \tilde{Q}^2(\ddot{h}_1^2 + \dots + \ddot{h}_{n-2}^2) \\
&\quad - 2\tilde{P}\tilde{R}(h_1\dot{h}_1 + \dots + h_{n-2}\dot{h}_{n-2}) \\
&\quad - 2\tilde{R}\tilde{Q}(\dot{h}_1\ddot{h}_1 + \dots + \dot{h}_{n-2}\ddot{h}_{n-2}) \\
&\quad \left. + 2\tilde{P}\tilde{Q}(h_1\ddot{h}_1 + \dots + h_{n-2}\ddot{h}_{n-2}) \right\} \\
&= (\varphi')^2.A(A+AC-B^2)^{-3} \left\{ A(1+C+BE-D-CD)^2 \right. \\
&\quad - 2(1+C+BE-D-CD)(A+AC-B^2) + (A+AC-B^2)^2 \\
&\quad + (B+AE-BD)^2 + C(B+AE-BD)^2 + F(A+AC-B^2)^2 \\
&\quad \left. - 2B(1+C+BE-D-CD)(B+AE-BD) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki işlemin son üç terimi hesaplandığında

$$\begin{aligned}
&A(1+C+BE-D-CD)^2 + (B+AE-BD)^2(1+C) \\
&- 2B(1+C+BD-D-CD)(B+AE-BD) \\
&= (A+AC-B^2)(1+C-2D-2CD+D^2+CD^2+2BE-2BDE+AE^2)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
(k_2)^2 &= \|e'_2 + k_1.e_1\|^2 \\
&= (\varphi')^2.A(A+AC-B^2)^{-2} \times \left\{ (A+AC-B^2)(1+F) - 1 - C + 2D + 2CD - 2BE \right. \\
&\quad \left. - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
(k_1)^2 + (k_2)^2 &= (\varphi')^2.A^{-2}(A+AC-B^2)^{-2} \\
&\quad \times \left\{ (A+AC-B^2)^3 \right. \\
&\quad + A^3(A+AC-B^2+AF+ACF-B^2F-1-C+2D \\
&\quad \left. + 2CD-2BE-AE^2-D^2-CD^2+2BDE) \right\}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\varphi' = \lambda^{-1}f^{-1}A^{-\frac{1}{2}}$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(k_1)^2 + (k_2)^2 &= \lambda^{-2} f^{-2} A^{-3} (A + AC - B^2)^{-2} \\
&\times \{ (A + AC - B^2)^3 \\
&\quad + A^3 (A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2 F - 1 - C + 2D \\
&\quad + 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE) \}
\end{aligned}$$

ve

$$k_1 = \lambda \{ (k_1)^2 + (k_2)^2 \}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \sum_{i=1}^{n-2} h_i^2 \\
A + AC - B^2 &= 1 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-2} (h_i^2 + \dot{h}_i^2 + (h_i \dot{h}_j - \dot{h}_i h_j)^2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2 F - 1 - C + 2D \\
&\quad + 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-2} ((h_i + \ddot{h}_i)^2 + \{ (h_i \dot{h}_j - \dot{h}_i h_j) - (\dot{h}_i \ddot{h}_j - \ddot{h}_i \dot{h}_j)^2 \} + (h_i \ddot{h}_j - \ddot{h}_i h_j)^2)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $i \neq j$ için

$$\begin{aligned}
f &= \left(1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i)^2 \right)^{-3/2} \\
&\times \left(1 + \sum_{i,j=1}^{n-2} ((h_i)^2 + (\dot{h}_i)^2 + (h_i \dot{h}_j - \dot{h}_i h_j)^2) \right)^{-5/2} \\
&\times \left[\left\{ 1 + \sum_{i,j=1}^{n-2} ((h_i)^2 + (\dot{h}_i)^2 + (h_i \dot{h}_j - \dot{h}_i h_j)^2) \right\}^3 \right. \\
&\quad \left. + (1 + \sum_{i=1}^{n-2} (h_i)^2)^3 \times \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-2} ((h_i - \ddot{h}_i)^2 + (h_i \dot{h}_j - \dot{h}_i h_j) - (\dot{h}_i \ddot{h}_j - \ddot{h}_i \dot{h}_j))^2 + (h_i \ddot{h}_j - \ddot{h}_i h_j)^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

elde ediliri ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.5. $\{\alpha, \tilde{\alpha}\}$, E^n de genelleştirilmiş Mannheim çifti olsun. $\alpha(s), \tilde{\alpha}(\tilde{s})$ noktaları $\{\alpha, \tilde{\alpha}\}$ genelleştirilmiş Mannheim çiftinin ilgili noktalardaki ve bu noktaların eğrilik merkezleri $M, \tilde{M}$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{\|\tilde{\alpha}(\tilde{s})M\|}{\|\alpha(s)M\|} : \frac{\|\tilde{\alpha}(\tilde{s})\tilde{M}\|}{\|\alpha(s)\tilde{M}\|}$$

oranı sabit değildir.

İspat: α eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik çemberi oskütatör düzlemde yatan ve merkezi $\alpha(s)$ in birinci normal doğrusu e_2 üzerinde ve $\alpha(s)$ den $\frac{1}{k_1}$ yarıçapı kadar uzaklıktadır. Yani $M = \alpha(s) + \frac{1}{k_1} \cdot e_2$ dir.

$$\begin{aligned} \|\alpha(s)M\| &= \|M - \alpha(s)\| = \left\| \alpha(s) + \frac{1}{k_1} \cdot e_2 - \alpha(s) \right\| = \left\| \frac{1}{k_1} \cdot e_2 \right\| \\ &= \left| \frac{1}{k_1} \right| \cdot \|e_2\| = \left| \frac{1}{k_1} \right| = \frac{1}{k_1} \\ \|\tilde{\alpha}(\tilde{s})\tilde{M}\| &= \|\tilde{M} - \tilde{\alpha}(\tilde{s})\| = \left\| \tilde{\alpha}(\tilde{s}) + \frac{1}{\tilde{k}_1} \cdot \tilde{e}_2 - \tilde{\alpha}(\tilde{s}) \right\| = \left\| \frac{1}{\tilde{k}_1} \cdot \tilde{e}_2 \right\| \\ &= \left| \frac{1}{\tilde{k}_1} \right| \cdot \|\tilde{e}_2\| = \left| \frac{1}{\tilde{k}_1} \right| = \frac{1}{\tilde{k}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\alpha(s)\tilde{M}\| &= \|\tilde{M} - \alpha(s)\| \\ &= \left\| \tilde{\alpha}(\tilde{s}) + \frac{1}{\tilde{k}_1} \cdot \tilde{e}_2 - \alpha(s) \right\| \\ &= \left\| \tilde{\alpha}(\tilde{s}) + \frac{1}{\tilde{k}_1} \cdot \tilde{e}_2 - (\tilde{\alpha}(\tilde{s}) + \sum_{i=3}^n \mu_i \tilde{e}_i) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\tilde{k}_1} \cdot \tilde{e}_2 - \sum_{i=3}^n \mu_i \tilde{e}_i \right\| \\ &= \frac{\sqrt{1 + \tilde{k}_1^2 \cdot \sum_{i=3}^n \mu_i^2}}{\tilde{k}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\alpha}(\tilde{s})M\| &= \|M - \tilde{\alpha}(\tilde{s})\| \\
&= \left\| \alpha(s) + \frac{1}{k_1} \cdot e_2 - \tilde{\alpha}(\tilde{s}) \right\| \\
&= \left\| \tilde{\alpha}(\tilde{s}) + \sum_{i=3}^n \mu_i \tilde{e}_i + \frac{1}{k_1} \cdot e_2 - \tilde{\alpha}(\tilde{s}) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=3}^n \mu_i \tilde{e}_i + \frac{1}{k_1} \cdot e_2 \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=3}^n \mu_i \tilde{e}_i + \frac{1}{k_1} \cdot \sum_{i=3}^n \mu_i \tilde{e}_i \right\| \\
&= \left\| \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) \sum_{i=3}^n \mu_i \tilde{e}_i \right\| \\
&= \left| 1 + \frac{1}{k_1} \right| \cdot \sqrt{\sum_{i=3}^n \mu_i^2} = \frac{(1+k_1)}{k_1} \sqrt{\sum_{i=3}^n \mu_i^2}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tilde{\alpha}(\tilde{s})M\|}{\|\alpha(s)M\|} \cdot \frac{\|\tilde{\alpha}(\tilde{s})\tilde{M}\|}{\|\alpha(s)\tilde{M}\|} &= \frac{\frac{(1+k_1)}{k_1} \sqrt{\sum_{i=3}^n \mu_i^2}}{\frac{1}{k_1}} \cdot \frac{\frac{1}{\tilde{k}_1}}{\frac{\sqrt{1+\tilde{k}_1^2 \sum_{i=3}^n \mu_i^2}}{\tilde{k}_1}} \\
&= (1+k_1) \cdot \sqrt{\sum_{i=3}^n \mu_i^2} \cdot \sqrt{1+\tilde{k}_1^2 \sum_{i=3}^n \mu_i^2} \\
&\neq \text{sabit}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.6. α ve $\tilde{\alpha}$, E^n Öklid uzayında birim hızlı iki eğri olsun. α bir genelleştirilmiş Mennheim eğrisi ise $\tilde{\alpha}$ eğrisinin α nın genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti ise $\mu_i, \xi_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sabitler olmak üzere $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ eğrilikleri arasında

$$\sum_{i=3}^n \xi_i (\mu_{i-1} \tilde{k}_{i-1} - \mu_{i+1} \tilde{k}_i) = 0$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat: α genelleştirilmiş Mannheim eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti $\tilde{\alpha}$ olsun. Tanım 5.1.1. den

$$\alpha(\tilde{s}) = \tilde{\alpha}(\tilde{s}) + \sum_{i=3}^n \mu_i(\tilde{s}) \cdot \tilde{e}_i(\tilde{s}) \quad (5.1.20)$$

yazabiliriz. (5.1.20) eşitliğinin $\tilde{s}$ ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\alpha}{d\tilde{s}} = \tilde{\alpha}' + \sum_{i=3}^n \mu_i' \cdot \tilde{e}_i + \sum_{i=3}^n \mu_i \cdot \tilde{e}_i'$$

bulunur. Frenet eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\tilde{s}} &= \tilde{e}_1 + \mu_3(-\tilde{k}_2 \cdot \tilde{e}_2 + \tilde{k}_3 \cdot \tilde{e}_4) + \mu_4(-\tilde{k}_3 \cdot \tilde{e}_3 + \tilde{k}_4 \cdot \tilde{e}_5) \\ &\quad + \dots + \mu_{n-1}(-\tilde{k}_{n-2} \cdot \tilde{e}_{n-2} + \tilde{k}_{n-1} \cdot \tilde{e}_n) + \mu_n(-\tilde{k}_{n-1} \cdot \tilde{e}_{n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{d\alpha}{d\tilde{s}} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{d\tilde{s}} = \alpha' \frac{ds}{d\tilde{s}} = e_1 \frac{ds}{d\tilde{s}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} e_1 \cdot \frac{ds}{d\tilde{s}} &= \tilde{e}_1 + \mu_3(-\tilde{k}_2 \cdot \tilde{e}_2 + \tilde{k}_3 \cdot \tilde{e}_4) + \mu_4(-\tilde{k}_3 \cdot \tilde{e}_3 + \tilde{k}_4 \cdot \tilde{e}_5) \\ &\quad + \mu_5(-\tilde{k}_4 \cdot \tilde{e}_4 + \tilde{k}_5 \cdot \tilde{e}_6) + \dots + \mu_{n-1}(-\tilde{k}_{n-2} \cdot \tilde{e}_{n-2} + \tilde{k}_{n-1} \cdot \tilde{e}_n) \\ &\quad + \mu_n(-\tilde{k}_{n-1} \cdot \tilde{e}_{n-1}) \end{aligned}$$

ve

$$e_1 \cdot \frac{ds}{d\tilde{s}} = \tilde{e}_1 - \mu_3 \tilde{k}_2 \tilde{e}_2 + \sum_{i=3}^n (\mu_{i-1} \tilde{k}_{i-1} - \mu_{i+1} \tilde{k}_i) \tilde{e}_i$$

bulunur. Son denklemi $e_2 = \sum_{i=3}^n \xi_i \cdot \tilde{e}_i$ ile çarpım işlemine tabii tutarsak

$$\begin{aligned}
\langle e_1 \frac{ds}{d\tilde{s}}, e_2 \rangle &= \langle \tilde{e}_1, \sum_{i=3}^n \xi_i \cdot \tilde{e}_i \rangle - \langle \mu_3 \tilde{k}_3 \tilde{e}_2, \sum_{i=3}^n \xi_i \cdot \tilde{e}_i \rangle \\
&\quad + \langle \sum_{i=3}^n (\mu_{i-1} \tilde{k}_{i-1} - \mu_{i+1} \tilde{k}_i) \cdot \tilde{e}_i, \sum_{i=3}^n \xi_i \cdot \tilde{e}_i \rangle \\
0 &= 0 - 0 + \sum_{i=3}^n \xi_i (\mu_{i-1} \tilde{k}_{i-1} - \mu_{i+1} \tilde{k}_i) \langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle \\
\sum_{i=3}^n \xi_i (\mu_{i-1} \tilde{k}_{i-1} - \mu_{i+1} \tilde{k}_i) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 5.1.7. $k_1(s) = \lambda \{ (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 \}$ bağıntısı Mannheim eğrileri için bir diferensiyel invaryanttir.

KAYNAKLAR

- [1] Sabuncuoğlu A. 2006, Diferensiyel Geometri, Ankara
- [2] Hacısalihoğlu H.H. 1993, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara
- [3] Matsuda H. , Yorozu S., 2009, “On Genaralized Mannheim Curves in Euclidean 4-space” , Nihonkai Math. J., vol. 20,33-56.
- [4] İlarslan, K., Nešović, E., 2008, “ Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4 ” , Turk J. Math. Vol. 32, 21-30
- [5] Matsuda H. , Yorozu S. , 2003, “Notes on Bertrand curves” ,Yokohama Math. J. , vol. 50 ,41-58.
- [6] Orbay, K. and Kasap, E. (2009), “On Mannheim partner curves in E^3 ” International Journey of Physical Science, Vol. 4, 261-264.
- [7] Liu, H. and Wang, F. (2008), “ Mannheim partner curves in 3-space”, Journal of Geometry, Vol. 88, 120-126.
- [8] L. P. Eisenhart (1960), A treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces (Dover Edition), Dover Publication.
- [9] Blum, R. 1966, A Remarkable Class of Mannheim-Curves, Canad. Math. Bull., Vol. 9(2),223-228.
- [10] Do Carmo, M.P 1976, Diferantial Geometry of Curves and, Personal Education., New York: Academic Press.
- [11] İlarslan, K., Nešović, E., “Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space E_1^3 , Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 35(7),881-888, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Yozgat' ta doğmuşum. İlk ve orta öğretimi Şeht. Yarb. Yusuf Turğut ilköğretim okulunda lise öğrenimimi ise Çayıralan Çok Programlı Lisesinde tamamladım. 2003 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2007 yılında lisans eğitimimi tamamladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım.