

REKTİFİYE EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma ALMAZ
(111121115)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri
Danışman: Doç. Dr. Mihriban KÜLAHÇI (F.Ü.)

OCAK- 2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REKTİFİYE EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma ALMAZ

(111121115)

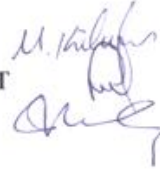
Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: GEOMETRİ

Tezin Enstitüye verildiği Tarih: 08.01.2014

Tezin savunulduğu Tarih: 23.01.2014

Danışmanı: Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT
Doç. Dr. Erol KILIÇ



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve düzenlenmesinde benden yardımını esirgemeyen ve beni bu konuda araştırmaya yönelten sayın hocam Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI ve diğer saygıdeğer hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Fatma ALMAZ

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa no

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
1. BÖLÜM	
1.1. Temel Kavramlar.....	1
2. BÖLÜM	
2.1. E^4 Öklid Uzayında Rektifiye Eğriler ile İlgili Bazı Özellikler.....	5
2.2. E^4 de Rektifiye Eğriler ve Karakterizasyonları ile İlgili Teoremler.....	7
3. BÖLÜM	
3.1. $Q^2 \subset E_1^3$ de Rektifiye Eğriler	14
3.2. Q^2 de Rektifiye Eğrilerin Karakterizasyonları.....	16
4. BÖLÜM	
4.1. $Q^3 \subset E_1^4$ de Rektifiye Eğriler.....	21
4.2. Q^3 de Rektifiye Eğrilerin Karakterizasyonları.....	23
5. BÖLÜM	
5.1. Tzitzeica Tipinde Rektifiye Eğriler.....	31
KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ.....	42

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde; temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde; E^4 de rektifiye eğrilerle ilgili özellikler ve rektifiye eğrilerin bazı karakterizasyonları ile ilgili teoremler ve örnek verilmiştir.

Üçüncü, dördüncü, beşinci bölüm çalışmamızın orijinal kısımlarını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde; $Q^2 \subset E_1^3$ de rektifiye eğriler ve rektifiye eğrilerin bazı karakterizasyonları ile ilgili teoremler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; $Q^3 \subset E_1^4$ de rektifiye eğriler ve rektifiye eğrilerin karakterizasyonları ile ilgili teoremler analiz edilmiştir.

Beşinci bölümde; Tzitzeica tipinde rektifiye eğriler ile ilgili teoremler ve örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rektifiye eğriler, Tzitzeica eğrisi, Tzitzeica tipinde rektifiye eğriler.

SUMMARY

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF THE RECTIFYING CURVES

This work consists of five chapters:

In the first chapter; basic concepts are given.

In the second chapter; some properties, characterizations, theorems and an example related to rectifying curves are given.

The third, fourth and fifth chapters are the original parts of our work.

In the third chapter; rectifying curves in $Q^2 \subset E_1^3$, some theorems and characterizations of rectifying curves are examined.

In the fourth chapter; rectifying curves in $Q^3 \subset E_1^4$, some theorems and also some characterizations of rectifying curves are analysed.

In the fifth chapter; some theorems and examples on rectifying curves of Tzitzeica type are given.

Keywords: Rectifying curves, Tzitzeica curve, Rectifying curves of Tzitzeica type.

1. BÖLÜM

1.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayı V olsun. Bu takdirde,

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir [1].

$$(A1) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2) \quad \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(\overrightarrow{PQ}) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ vardır.}$$

Tanım 1.1.2. Reel bir afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzay V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak,

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{array} \right\}$$

öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.3.

$$d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de uzaklık fonksiyonu veya Öklid metriği denir [1].

Tanım 1.1.4. A bir afin uzay ve A ile birleşen bir vektör uzayı V olsun. A da verilen $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)- lisine V de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi bir baz oluşturuyorsa, $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine afin çatı denir [1].

Tanım 1.1.5. E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi $\mathbb{R}^n$ de ortonormal bir baz ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n de Öklid çatı denir [1].

Tanım 1.1.6. $X \neq \Phi$ bir cümle ve X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Eğer τ için aşağıdakiler doğru ise τ ya X üzerinde bir topoloji denir [1].

$$(T1) \quad X, \Phi \in \tau$$

$$(T2) \quad \forall A, B \in \tau \text{ için } A \cap B \in \tau$$

$$(T3) \quad i \in I, A_i \in \tau \text{ için } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$

Tanım 1.1.7. Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [1].

Tanım 1.1.8. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar.

$$f: X \rightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm denir. Bu takdirde X ile Y uzaylarına homeomorfik uzaylar denir [1].

Tanım 1.1.9. X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de sırası ile P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri, $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse, X uzayına Hausdorff uzayı denir [1].

Tanım 1.1.10. M bir topolojik uzay ve M için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa, M ye n -boyutlu topolojik manifold denir [1].

$$(M1) \quad M \text{ bir Hausdorff uzayıdır.}$$

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e ya da E^n in bir açık alt cümlesine homeomorfdur.

$$(M3) \quad M \text{ sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.}$$

Tanım 1.1.11: M bir topolojik manifold ve M nin bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun.

Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlasına M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir [1].

Tanım 1.1.12. M bir topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir bir yapı tanımlanırsa, M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [1].

Tanım 1.1.13. E^n n-boyutlu Öklid uzayında (n-1)-boyutlu bir yüzey veya (n-1) yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$M = \{ x \in U \subset E^n \mid f: U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}, \\ x \rightarrow f(x) = c \}$$

$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır [2].

Tanım 1.1.14. $I \subset \mathbb{R}$ açık(kapalı) bir aralık olmak üzere $\alpha: I \xrightarrow{C^\infty} E^n$ fonksiyonuna E^n de bir eğri denir [1].

Tanım 1.1.15. $M, (I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. $s \in I$ ya da yay-parametresi adı verilir [1].

Tanım 1.1.16. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için $\alpha'(t) \neq 0$ dır [1].

Tanım 1.1.17. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(r)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in S_p\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r- ayaklı alanı denir. $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. $1 \leq i \leq r$ için her V_i vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir [1].

Tanım 1.1.18. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı,

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \\ N(t) = B(t) \times T(t) \\ B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

şeklindedir [1].

Tanım 1.1.19. $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı,

$$T(s) = \alpha'(s) \\ N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot T'(s) \\ B(s) = T(s) \times N(s)$$

şeklindedir [1].

Tanım 1.1.20. $M \subset E^n$ eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1, \dots, V_p\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ belli bir nokta olmak üzere E^n nin

$$S_p\{V_1, \dots, V_p\}, \quad p \leq r$$

vektör uzayı ile birleşen afin alt uzayına, $\alpha(s)$ noktasında M eğrisinin p -yinci Oskülatör Hiperdüzlemi denir [1].

Tanım 1.1.21. $M \subset E^n$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle, \quad 1 \leq i < r$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu denir. $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına, $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir [1].

Tanım 1.1.22. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu takdirde Frenet formülleri,

$$1) \quad V_1'(s) = k_1(s) V_1(s)$$

$$2) \quad V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r \quad (1.1.1)$$

$$3) \quad V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$$

şeklindedir [1].

Tanım 1.1.23. E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M de bir eğri α ve α nın teğet vektör alanı T olmak üzere α üzerindeki bir Y vektör alanı için, α boyunca,

$$D_T^Y = 0$$

ise Y vektör alanına M üzerinde α boyunca bir Levi-Civita anlamında paralel vektör alanı denir. Eğer $D_T^T = 0$ ise α eğrisine M üzerinde bir geodezik eğri denir [2].

Tanım 1.1.24. M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki Riemann koneksiyonu D olsun. O zaman, M üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilen eğri boyunca geodezik eğrilik vektör alanı diye, bu eğrinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere $D_T T$ vektör alanına denir.

$$k_g: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_g(s) = \|D_T T\|$$

olarak tanımlanan k_g fonksiyonuna da α eğrisinin geodezik eğrilik fonksiyonu denir [3].

2. BÖLÜM

2.1. E^4 Öklid Uzayında Rektifiye Eğrilerle İlgili Bazı Özellikler

Rektifiye eğriler, ilk olarak B.Y.Chen (2003) tarafından, E^3 de eğrinin teğet(T) ve binormal(B) vektör alanları tarafından gerilen rektifiye düzleminde yatan uzay eğrileri olarak tanımlanmıştır [4,5]. Bundan dolayı E^3 de orijinden geçen bir α rektifiye eğrisi, $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

denklemleri ile ifade edilir.

3-boyutlu Minkowski uzayında rektifiye eğriler Kazım İlarslan, Emilija Nesovic, Miroslava Petrović-Torgasev(2003) tarafından çalışılmıştır [6]. Daha sonra Ahmad T. Ali, Mehmet A. Önder (2012) tarafından Minkowski Space-Time uzayında Space-Like Rektifiye eğriler incelenmiştir [7]. Yine rektifiye eğriler Pseudo-Galilean uzayında Handan Öztekin ve Alper O. Öğrenmiş (2012) tarafından da çalışılmıştır [8].

Bu bölümde E^4 , 4-boyutlu Öklid uzayında rektifiye eğri tanımlanmıştır ve rektifiye eğri ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca 3 ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında rektifiye eğrilerle ilgili örnek verilmiştir.

Burada E^3 Öklid uzayı ile benzer olarak E^4 de bir rektifiye eğri tanımlanacaktır. E^4 de bir α rektifiye eğrisi, E^4 de asli normal vektör alanı N olmak üzere yer vektörü N nin $N^\perp$ ortogonal komplemanı üzerinde yatan bir eğri olarak tanımlanmıştır [6]. $N^\perp$ ile N nin ortogonal komplemanı gösterilmek üzere,

$$N^\perp = \{ W \in E^4 \mid \langle W, N \rangle = 0 \}$$

ile verilir. $\langle, \rangle$ ile E^4 de standart iç çarpım gösterilir. Böylece $N^\perp$, E^4 ün teğet(T), birinci binormal(B_1), ikinci binormal(B_2) vektör alanları tarafından gerilen üç boyutlu bir alt uzaydır. Dolayısıyla E^4 de orijinden geçen pozitif yönlü bir rektifiye eğrisi,

$$\alpha(s) = \lambda(s) T(s) + \mu(s) B_1(s) + \gamma(s) B_2(s) \quad (2.1.1)$$

ile tanımlıdır [6].

Burada s yay parametresi olmak üzere $\lambda(s)$, $\mu(s)$, $\gamma(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. İkinci bölümde rektifiye eğriler k_1 , k_2 , k_3 eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize edilecektir ve E^4 de verilen keyfi bir eğrinin rektifiye eğri olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir. Böylece E^4 de bir rektifiye eğrinin açık denklemleri bulunacaktır.

E^4 de $\alpha: I \rightarrow E^4, \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ olmak üzere birim hızlı bir eğri olsun. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle, E^4$ de standart iç çarpımdır. Bu iç çarpım,

$\forall X, Y \in E^4$ için,

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak bir $X \in E^4$ vektörünün normu $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ dir.

Birim hızlı bir α eğrisi boyunca hareket eden Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. T, N, B_1, B_2 sırasıyla eğrinin teğet, asli normal, birinci binormal, ikinci binormal vektör alanları olmak üzere Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

ile verilir [9].

k_1, k_2, k_3 fonksiyonları α nın birinci, ikinci, üçüncü eğrilikleridir. $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $k_3(s) \neq 0$ ise α eğrisi tam olarak E^4 de yatar. E^4 de orijin merkezli birim küre $S^3(1)$,

$$S^3(1) = \{ X \in E^4, \langle X, X \rangle = 1 \}$$

ile tanımlı hiperyüzeydir.

2.2. E^4 de Rektifiye Eğriler ve Karakterizasyonları

Bu bölümde ilk olarak E^4 de rektifiye eğriler, eğrilikler cinsinden karakterize edilecektir.

Teorem 2.2.1. E^4 de sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri $\alpha(s)$ olsun. O zaman α nın bir rektifiye eğri olması için gerek ve yeter şart ($c \in \mathbb{R}$ olmak üzere)

$$\frac{k_1(s)k_3(s)(s+c)}{k_2(s)} + \left(\frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)(k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s))}{k_2^2(s).k_3(s)} \right)' = 0$$

olmasıdır [10].

İspat. E^4 de sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğrilikli birim hızlı bir eğri α olsun. Tanımdan α nın yer vektörü (2.1.1) denklemini sağlar. $\lambda(s), \mu(s), \gamma(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için (2.1.2) Frenet denklemleri kullanılıp s ye göre (2.1.1) denkleminin diferensiyeli alınarak,

$$T = \lambda' T + (\lambda k_1 - \mu k_2) N + (\mu' - \gamma k_3) B_1 + (\mu k_3 + \gamma') B_2$$

bulunur. Daha sonra eşitliğin her iki yanı sırasıyla T, N, B₁, B₂ ile ayrı ayrı iç çarpıma tabi tutularak,

$$\begin{aligned}\lambda' &= 1 \\ \lambda k_1 - \mu k_2 &= 0 \\ \mu' - \gamma k_3 &= 0 \\ \mu k_3 + \gamma' &= 0\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

eşitlikleri elde edilir. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (2.2.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= s + c \\ \mu(s) &= \frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)} \\ \gamma(s) &= \frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)(k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s))}{k_2^2(s)k_3(s)}\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

bulunur. Sonuç olarak λ, μ, γ fonksiyonları α nın k_1, k_2, k_3 eğrilikleri cinsinden ifade edilmiş olur. Ayrıca (2.2.4) de verilen son iki eşitlik ile (2.2.3) deki son eşitlik kullanılarak,

$$\frac{k_1(s)k_3(s)(s+c)}{k_2(s)} + \left(\frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)(k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s))}{k_2^2(s)k_3(s)} \right)' = 0\tag{2.2.5}$$

denklemini elde edilir.

Sonuç 2.2.1. E^4 de birim hızlı keyfi bir α eğrisinin k_1, k_2, k_3 eğrilikleri (2.2.5) denklemini sağlar.

$$\begin{aligned}X(s) &= \alpha(s) - (s+c)T(s) - \frac{k_1(s)(s+c)}{k_2} B_1(s) \\ &\quad - \frac{k_1(s)(k_2(s) - (s+c)k_2'(s)) + k_1'(s)k_2(s)(s+c)}{k_2^2(s)k_3(s)} B_2(s)\end{aligned}$$

şeklinde verilen bir $X \in E^4$ vektörü için (2.1.2) ve (2.2.5) bağıntıları kullanılarak kolayca $X'(s)=0$ bulunur. Bu da X in sabit bir vektör olduğunu gösterir. Bu da açıkça α nın bir rektifiye eğrisine eşdeğer olduğunu ifade eder.

E^4 de bir rektifiye eğrinin k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonlarının sıfırdan farklı ve sabit olduğu kabul edildiğinde (2.2.5) denklemi açıkça bir çelişki oluşturur. Bundan dolayı aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.2.2. E^4 de tam olarak yatan, sıfırdan farklı ve k_1, k_2, k_3 sabit eğriliklerine sahip bir rektifiye eğri yoktur [10].

Şimdi eğrilik fonksiyonlarının ikisinin sabit olduğu durumlar aşağıda incelenecektir.

Kabul edelim ki $k_1(s) = \text{sabit} > 0$, $k_2(s) = \text{sabit} \neq 0$, $k_3(s) \neq \text{sabit}$ olsun. (2.2.5) denklemini kullanarak, $c \in IR$ olmak üzere

$$k'_3(s) - k_3^3(s)(s + c) = 0 \quad (2.2.6)$$

diferensiyel denklemi bulunur. (2.2.6) diferensiyel denklemin çözümü $c, c_1 \in IR$ olmak üzere

$$k_3(s) = \frac{1}{\sqrt{-s^2 - 2cs - 2c_1}}$$

şeklindedir.

Benzer olarak $k_2(s) = \text{sabit} \neq 0$, $k_3(s) = \text{sabit} \neq 0$, $k_1(s) \neq \text{sabit}$ olduğu takdirde (2.2.5) denklemi, $c \in IR$, $k_3 \in IR_0$ olmak üzere

$$k_3^2(s)k_1(s)(s + c) + (k_1(s)(s + c))' = 0 \quad (2.2.7)$$

diferensiyel denklemi ile belli olur. (2.2.7) diferensiyel denklemin çözümü ise, $c_1 \in IR^+$ olmak üzere

$$k_1(s) = \frac{c_1}{e^{k_3^2(s)}(s + c)}$$

şeklinde bulunur.

Son olarak $k_1(s) = \text{sabit} > 0$, $k_3(s) = k_3 = \text{sabit} \neq 0$ ve $k_2 \neq \text{sabit} \neq 0$ olduğu takdirde (2.2.5) kullanılarak, $c \in IR$, $k_3 \in IR_0$ olmak üzere

$$\frac{k_3^2(s)(s+c)}{k_2(s)} + \left(\frac{(s+c)}{k_2(s)} \right)' = 0 \quad (2.2.8)$$

diferensiyel denklemi bulunur. (2.2.8) diferensiyel denklemin çözümü, $c_1 \in IR^+$ olmak üzere

$$k_2(s) = c_1 e^{k_3^2(s)}(s + c)$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.3. E^4 de k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri α olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanırsa α eğrisi bir rektifiye eğrisine denk olur [10]:

$$a) k_1(s) = \text{sabit} > 0, k_2(s) = \text{sabit} \neq 0 \text{ ve } k_3(s) = \frac{1}{\sqrt{|-s^2 - 2cs - 2c_1|}}, \quad c, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$b) k_2(s) = \text{sabit} > 0, k_3(s) = \text{sabit} \neq 0 \text{ ve } k_1(s) = \frac{c_1}{e^{k_3^2(s)}(s+c)}, \quad c, c_1 \in \mathbb{R}^+$$

$$c) k_1(s) = \text{sabit} > 0, k_3(s) = k_3 = \text{sabit} \neq 0 \text{ ve } k_2 = c_1 e^{k_3^2(s)}(s+c), \quad c, c_1 \in \mathbb{R}^+$$

Aşağıdaki teoremden E^4 deki eğrinin bir rektifiye eğri olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Teorem 2.2.4. E^4 de α sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$i) \rho(s) = \|\alpha(s)\| \text{ uzaklık fonksiyonu } c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ için,}$$

$$\rho^2(s) = s^2 + c_1 s + c_2$$

ifadesini sağlar.

ii) Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni, $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = c + s, \quad c \in \mathbb{R}$ şeklinde verilir.

iii) Eğrinin yer vektörünün $\alpha^N(s)$ normal elemanı sabit uzunluğa sahiptir ve $\rho(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv) Eğrinin yer vektörünün birinci ve ikinci binormal elemanları, sırasıyla $c \in \mathbb{R}$ için,

$$\langle \alpha(s), B_1(s) \rangle = \frac{k_1(s) \cdot (s+c)}{k_2(s)} \quad (2.2.9)$$

$$\langle \alpha(s), B_2(s) \rangle = \frac{k_1(s) \cdot k_2(s) + (s+c)(k_1'(s)k_2(s) - k_2(s)k_1'(s))}{k_2^2(s)k_3(s)}$$

ile verilir [10].

Tersine E^4 de sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir α eğrisi (i), (ii), (iii), (iv) ifadelerinden birini sağlar ise α bir rektifiye eğri olur.

İspat. İlk olarak kabul edelim ki $\alpha(s)$, E^4 de sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde α nın yer vektörü (2.1.1) denklemini sağlar. Buradaki $\lambda(s), \mu(s), \gamma(s)$ fonksiyonları (2.2.3) bağıntısını gerçekler. (2.2.3) de üçüncü denklem $-\gamma'(s)$ ile çarpılıp ve (2.2.3) de son denklem $\mu'(s)$ ile çarpılarak bu iki denklem karşılıklı olarak toplanıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$k_3(s)(\mu(s)\mu'(s) + \gamma(s)\gamma'(s)) = 0$$

denklemini bulunur. Burada $k_3(s) \neq 0$ olduğundan $\mu\mu' + \gamma\gamma' = 0$ olur. Son olarak $a \in \mathbb{R}_0^+$ sabiti için,

$$\mu^2(s) + \gamma^2(s) = a^2 \quad (2.2.10)$$

bulunur. (2.1.1) bağıntısından,

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \lambda^2(s) + \mu^2(s) + \gamma^2(s)$$

yazılır. (2.2.4) ve (2.2.10) kullanılarak son eşitlik,

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = (s + c)^2 + a^2$$

şeklinde olur. Dolayısıyla $c_2 \in \mathbb{R}_0$, $c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\rho^2(s) = s^2 + c_1 s + c_2$$

olur ki bununla (i) ispatlanır.

Ayrıca (2.1.1) ve (2.2.4) bağıntıları kullanılarak $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = s + c$, $c \in \mathbb{R}$ bulunur. Bununla da (ii) ispatlanır.

E^4 de keyfi bir eğrinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = m(s) T(s) + \alpha^N(s)$$

şeklinde kabul edilebilir. $m(s)$ diferensiyellenebilir keyfi bir fonksiyon ve $\alpha^N(s)$, yer vektörünün normal bileşeni olmak üzere α bir rektifiye eğri ise (2.1.1) bağıntısında,

$$\alpha^N(s) = \mu(s)B_1(s) + \gamma(s)B_2(s)$$

yazılıp gerekli işlemler yapıldığında $\langle \alpha^N(s), \alpha^N(s) \rangle = \mu^2(s) + \gamma^2(s)$ ifadesi bulunur.

Ayrıca (2.2.10) kullanılarak $\|\alpha^N\| = a$, $a \in \mathbb{R}_0^+$ bulunur. (i) den $\rho(s)$ sabit fonksiyon olmadığından (iii) ispatlanır. Son olarak (2.1.1) ve (2.2.4) kullanılarak kolayca (2.2.9) ifadesi bulunur. Böylece (iv) ifadesi ispatlanır.

Tersine kabul edelim ki (i) sağlansın. O zaman, $c_1 \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = s^2 + c_1 s + c_2$$

olur. Son denklemin s ye göre iki defa diferensiyeli alınıp (i) kullanılırsa $\langle \alpha(s), N(s) \rangle = 0$ bulunur. Bu da α nın bir rektifiye eğri olduğunu gösterir.

Eğer (ii) sağlanırsa, benzer yolla α nın rektifiye eğri olduğu gösterilebilir.

Eğer (iii) sağlanırsa α eğrisi $\alpha(s) = m(s)T(s) + \alpha^N(s)$ şeklinde yazılabilir. $m(s)$ keyfi bir diferensiyellenebilir fonksiyon olup,

$$\langle \alpha^N(s), \alpha^N(s) \rangle = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle - 2 \langle \alpha(s), T(s) \rangle m(s) + m^2(s)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = m(s)$ olduğundan

$$\langle \alpha^N(s), \alpha^N(s) \rangle = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle - \langle \alpha(s), T(s) \rangle^2$$

bulunur. Burada $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \rho^2(s) \neq \text{sabit olup } s \text{ ye göre yukarıdaki denklemin diferensiyeli alınıp (2.1.2) kullanılarak,}$

$$k_1(s) \langle \alpha(s), T(s) \rangle \langle \alpha(s), N(s) \rangle = 0$$

bulunur. Buradan $\langle \alpha(s), N(s) \rangle = 0$ olur. Bu da α nın bir rektifiye eğri olduğunu gösterir.

Eğer (iv) sağlanırsa $\langle \alpha(s), B_1(s) \rangle = \frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)}$ denkleminin s ye göre türevi alınıp (2.1.2) kullanılarak,

$$-k_2(s) \langle \alpha(s), N(s) \rangle + k_3(s) \langle \alpha(s), B_2(s) \rangle = \left(\frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)} \right)'$$

bulunur.

(2.2.9) kullanılarak son denklem $\langle \alpha(s), N(s) \rangle = 0$ olur. Bu da α nın bir rektifiye eğri olduğunu gösterir. Böylece teorem ispatlanır.

Sonraki teoremden rektifiye bir eğrinin parametrik denklemleri bulunacaktır.

Teorem 2.2.5. E^4 de $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ ile verilen bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun. $\rho(t)$ pozitif keyfî bir fonksiyon ve $y(t)$, $S^3(1)$ birim küresinde birim hızlı bir eğri olmak üzere α nın bir rektifiye eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\rho(t) = \frac{a}{\cos(t+t_0)}, \quad a \in \mathbb{R}_0, t_0 \in \mathbb{R} \quad (2.2.11)$$

olmasıdır [10].

İspat. E^4 de $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ ile verilen bir eğri α olsun. $\rho(t)$ keyfî bir fonksiyon ve $y(t)$, $S^3(1)$ de birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\alpha(t)$ nin t ye göre türevi alındığında,

$$\alpha'(t) = \rho'(t)y(t) + \rho(t)y'(t)$$

elde edilir. α nın birim teğet vektörü,

$$T(t) = \frac{\rho'(t)}{v(t)}y(t) + \frac{\rho(t)}{v(t)}y'(t) \quad (2.2.12)$$

şeklinde olup, α nın hızı $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ dir. t ye göre (2.2.12) denkleminin türevi alınarak,

$$T' = \left(\frac{\rho'}{v} \right)' y + \left(\frac{2\rho'}{v} - \frac{\rho\rho'(\rho+\rho'')}{v^3} \right) y' + \frac{\rho}{v} y'' \quad (2.2.13)$$

bulunur.

E^4 de $\langle Y, y \rangle = \langle Y, y' \rangle = \langle Y, y \times y' \rangle = 0$ denklemlerini sağlayan birim vektör alanı Y olsun. O zaman $\{y, y', y \times y', Y\}$ sistemi E^4 ün ortonormal bir çatısı olur. Buradan $y'', \{y, y', y \times y', Y\}$ çatısına göre,

$$y'' = \langle y'', y \rangle y + \langle y'', y' \rangle y' + \langle y'', y \times y' \rangle y \times y' + \langle y'', Y \rangle Y \quad (2.2.14)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\langle y, y \rangle = \langle y', y' \rangle = 1 \text{ olduğundan;}$$

$$\langle y'', y \rangle = -1 \text{ ve } \langle y'', y' \rangle = 0 \quad (2.2.15)$$

olur. (2.2.14) denkleminde (2.2.15) denklemleri göz önüne alındığında,

$$y'' = -y + \langle y'', y \times y' \rangle y \times y' + \langle y'', Y \rangle Y \quad (2.2.16)$$

şeklinde olur.

(2.2.16) eşitliği (2.2.13) da yerine yazılıp ve E^4 de keyfi birim hızlı eğriler için Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} k_1 v N = & \left(\left(\frac{\rho'}{v} \right)' - \frac{\rho}{v} \right) y + \left(\frac{2\rho'}{v} - \frac{\rho\rho'(\rho + \rho'')}{v^3} \right) y' + \frac{\langle y'', y \times y' \rangle}{v} \alpha \times y' \\ & + \left(\frac{\rho}{v} \right) \langle y'', Y \rangle Y \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

bulunur.

$\langle y, y \rangle = 1$ olduğundan $\langle y', y \rangle = 0$ ve $\langle y', \alpha \rangle = 0$ olur. Dahası $\langle \alpha, Y \rangle = 0$ bulunur. Ayrıca α , E^4 de bir rektifiye eğri ise gerek ve yeter şart $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olmasıdır. Ayrıca α ile (2.2.17) ün skaler çarpımını aldıktan sonra $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\rho'}{v} \right)' - \frac{\rho}{v} = 0 \quad (2.2.18)$$

olmasıdır.

(2.2.18) deki diferensiyel denklem,

$$\rho\rho' - 2\rho'^2 - \rho^2 = 0 \quad (2.2.19)$$

şeklinde yazılıp denklem için keyfi olmayan çözümler (2.2.11) de verilmiştir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım 2.2.1. $\kappa \neq 0$ olmak üzere E^3 de regüler bir $x(s)$ eğrisi için, $D = \tau.T + \kappa.B$ Darboux vektörü tarafından verilen eğriye $x(s)$ in merkezi denir. $x(s)$ in yer vektörü

$$x(s) = \lambda(s).T(s) + \mu(s).B(s)$$

şeklindedir [5].

Örnek 2.2.1. $\tau \neq 0$, $\kappa = \text{sabit} \neq 0$ olmak üzere E^3 de birim hızlı bir eğrinin merkezi, bir rektifiye eğridir.

D nin s ye göre diferensiyeli alınıp, (1.1.1) kullanılarak $D'=\tau'T$ bulunur. $D'=\tau'x'$ olup, uygun noktalarda D ve x in birim teğet vektörleri paraleldir. $x(s)$ eğrisi üzerinde $\{T,N,B\}$ çatısına göre elde edilen Serret-Frenet denklemlerinde ilk eşitlikten x ve D nin asli normal vektörleri uygun noktalarda paralel olur. Bundan dolayı D ve x in binormal vektör alanları da paralel olacağından Tanım 2.2.1 den x in merkezinin yer vektörü onun rektifiye düzleminde yatar. Sonuç olarak D bir rektifiye eğri olur [5].

Örnek 2.2.2. E^4 de $a \in IR_0$, $s_0 \in IR$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{2} \cos(s+s_0)} \right) (\sin(s), \cos(s), \sin(s), \cos(s))$$

eğrisi, $\rho(s)=a/\cos(s+s_0)$ ve $S^3(1)$ birim küresi üzerinde birim hızlı bir eğri $y(s)=(1/\sqrt{2})(\sin(s), \cos(s), \sin(s), \cos(s))$ olmak üzere verilen bu eğri $\alpha(s) = \rho(s)y(s)$ şeklinde yazılırsa teorem 2.2.5 den $\alpha(s)$, E^4 de yatan bir rektifiye eğri olur [10].

3. BÖLÜM

3.1. $Q^2 \subset E_1^3$ de Rektifiye Eğriler

Tanım 3.1.1. E_1^3 , 3- boyutlu pseudo- Öklidyen uzayı, $x, y \in E_1^3$ için

$$\tilde{G}(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i y_i - \sum_{j=3}^3 x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

metriği ile tanımlıdır. Bu metriğe pseudo-Riemannian metriği adı verilir [12].

Tanım 3.1.2. M , E_1^3 ün bir altmanifoldu olsun. Eğer E_1^3 ün $\tilde{G}$ pseudo-Riemannian metriği, M üzerinde bir pseudo-Riemannian G metriğine karşılık geliyorsa, o zaman M , E_1^3 ün bir timelike altmanifoldu olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.1.3. E_1^3 de seçilmiş bir nokta c olmak üzere pseudo-Riemannian lightlike koni uzayı,

$$Q_1^2(c) = \{x \in E_1^3 : \tilde{G}(x - c, x - c) = 0\}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradaki metrik ise,

$$\tilde{G}(x - c, x - c) = \langle x - c, x - c \rangle = (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 - (x_3 - c_3)^2$$

şeklinde ifade edilir. c noktasına $Q_1^2(c)$ uzayının merkezi adı verilir. $c=0$ olduğu zaman $Q_1^2(0)$ uzayı Q^2 ile gösterilir ve lightlike koni olarak adlandırılır [13].

Tanım 3.1.4. 3-boyutlu Minkowski uzayı E_1^3 ve E_1^3 de bir lightlike koni Q^2 olsun. E_1^3 de bir $\alpha \neq 0$ vektörü eğer $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, $\langle \alpha, \alpha \rangle < 0$ veya $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ şeklinde ise sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.1.5. E_1^3 de bir $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanı için

$$\langle e_3, e_3 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 0, \quad \langle e_2, e_3 \rangle = 1$$

$$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 0,$$

ifadeleri sağlanıyorsa bu çatıya asimptotik ortonormal çatı alanı denir.

Ayrıca E_1^3 de bir $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanı için,

$$\langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_3, e_3 \rangle = 1, \quad \langle e_2, e_3 \rangle = 0 \text{ ve } \langle e_1, e_2 \rangle = 0 = \langle e_3, e_1 \rangle \quad (3.1.1)$$

ifadeleri sağlanıyorsa bu çatıya bir pseudo ortonormal çatı alanı denir [13].

Tanım 3.1.6. E_1^3 de spacelike bir $x: I \rightarrow Q^2 \subset E_1^3$ eğrisini ele alalım. $x(s)$ birim hızlı bir eğri olmak üzere $x(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $x' = \alpha$ şeklinde olup,

$$\langle x, y \rangle = 1, \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = \langle x', y \rangle = 0$$

olacak biçimde bir y vektör alanı seçilerek $x(s)$ eğrisinin V^0 normal uzayı,

$$V^0 = \{span\{x, y\}\}^\perp, \quad x' = \alpha \in V^0, \quad span\{x, y, \alpha\} = E_1^3$$

şeklinde verilir.

$Q^2 \subset E_1^3$ de bir $x(s)$ eğrisi boyunca asimptotik ortonormal bir çatı $\{x, y, x'\}$ olsun.

Bu takdirde Tanım 3.1.6 dan,

$$\langle x, y \rangle = 1, \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = \langle x', y \rangle = 0, \langle \alpha, \alpha \rangle = 1$$

yazılır [13].

E_1^3 de rektifiye eğriler, α nın $\alpha^\perp$ ortogonal komplemanında yatan uzay eğrileri olarak tanımlanmıştır. Bu eğriler Q^2 uzayında x ve y vektör alanları tarafından gerilen düzlemde yatarlar. θ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere x eğrisinin $span\{x, y\}$ düzlemindeki yer vektörü,

$$x(s) = \theta(s)x + \mu(s)y \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanır.

$x(s): I \rightarrow Q^2 \subset E_1^3$, E_1^3 de keyfî birim hızlı bir eğri olsun. O halde E_1^3 deki metrik, $\forall x, y \in E_1^3$ için

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

şeklinde olup $\forall x \in E_1^3$ için x in normu,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}$$

şeklinde olur.

Q^2 de birim hızlı spacelike bir $x(s)$ eğrisi boyunca hareket eden asimptotik ortonormal bir çatı $\{x, y, \alpha\}$ olsun. $x(s)$ eğrisinin koni eğriliği κ olmak üzere Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} x' \\ \alpha' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & -1 \\ 0 & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ y \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

şeklinde olup açıkça,

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha \\
\alpha' &= \kappa x - y \\
y' &= -\kappa \alpha
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

şeklinde ifade edilebilir[14].

3.2. Q^2 de Rektifiye Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu bölümde ilk olarak E_1^3 de rektifiye eğriler, eğrilikler cinsinden karakterize edilecektir.

Teorem 3.2.1. Q^2 de birim hızlı ve eğriliği κ olan bir rektifiye eğri $x(s)$ olsun. Bu durumda $x(s)$ eğrisinin x ve y vektör alanlarının bileşenleri sırasıyla, $c \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\theta &= 1 + c\kappa \\
\mu &= c
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. Q^2 de birim hızlı bir eğri $x(s)$ olsun. $x(s)$ eğrisinin eğriliği κ , θ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere (3.1.2) bağıntısından

$$x(s) = \theta(s)x + \mu(s)y$$

eşitliği yazılır. Burada s ye göre türev alınıp (3.1.4) yardımıyla

$$\begin{aligned}
x' &= \theta'x + \theta x' + \mu'y + \mu y' \\
x' &= \theta'x + \theta \alpha + \mu'y + \mu(-\kappa \alpha) \\
\alpha &= \theta x + (\theta - \kappa \mu)\alpha + \mu'y
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadenin her iki yanı sırasıyla y , α ve x ile iç çarpıma tabi tutularak

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, y \rangle &= \theta = 0 \\
\langle \alpha, \alpha \rangle &= \theta - \kappa \mu = 1 \\
\langle \alpha, x \rangle &= \mu' = 0
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

eşitlikleri bulunur. Ayrıca buradan,

$$\begin{aligned}
\mu' &= 0 \Rightarrow \mu = c, c \in \mathbb{R} \\
\theta - \kappa \mu &= 1 \Rightarrow \theta = 1 + \kappa \mu = 1 + c\kappa
\end{aligned}$$

ifadelerinden,

$$\begin{aligned}
\theta &= 1 + c\kappa \\
\mu &= c
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. Q^2 de birim hızlı spacelike bir eğri $x(s)$ ve $x(s)$ in eğriliği $\kappa = \text{sabit}$ olsun. O halde $c \in IR_0^+$ için aşağıdaki ifadeler sağlanırsa, $x(s)$ bir rektifiye eğri olur. Tersine $x(s)$ bir rektifiye eğri ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $x(s)$ in uzaklık fonksiyonu $\rho^2 = 2c(1 + c\kappa)$ şeklinde olup ρ sabittir.

(2) Eğrinin x ve y vektör alanlarının bileşenleri sırasıyla

$$\langle x(s), x(s) \rangle = \mu = c \text{ ve } \langle x(s), y(s) \rangle = \theta = 1 + c\kappa$$

şeklindedir.

İspat. Q^2 de birim hızlı ve sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir rektifiye eğri $x(s)$ olsun. Bu nedenle $x(s)$ eğrisinin yer vektörü (3.1.2) denklemini sağlar. Ayrıca θ ve μ fonksiyonları (3.2.2) bağıntısını sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. O halde

$$\begin{aligned} \rho^2(s) &= \|x(s)\|^2 = \langle x(s), x(s) \rangle = \langle \theta(s)x + \mu(s)y, \theta(s)x + \mu(s)y \rangle \\ &= \theta^2(s)\langle x, x \rangle + 2\theta(s)\mu(s)\langle x, y \rangle + \mu^2(s)\langle y, y \rangle \\ &= 2\theta(s)\mu(s)\langle x, y \rangle \\ &= 2\theta(s)\mu(s).1 \\ &= 2\theta(s)\mu(s) \\ &= 2c(1 + c\kappa) \end{aligned}$$

$c \in IR_0^+$ için, ρ sabit olur.

Tersine $\rho^2(s) = \langle x(s), x(s) \rangle = 2c(1 + c\kappa)$ sağlansın. Buradan türev alınarak

$$\begin{aligned} 2\langle x'(s), x(s) \rangle &= (2c(1 + c\kappa))' \Rightarrow 2\langle x'(s), x(s) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\langle \alpha(s), x(s) \rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu son eşitlikte $2 \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), x(s) \rangle = 0$ bulunur. Bu da $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir. Böylece (1) ispatlanır.

(2) için, $x(s)$ bir rektifiye eğri ise (3.1.1) ve (3.2.2) den kolayca $\langle x(s), x(s) \rangle = \mu = c$ ve $\langle x(s), y(s) \rangle = \theta = 1 + c\kappa$ elde edilir.

Tersine $\langle x(s), x(s) \rangle = \mu = c$ ve $\langle x, y \rangle = \theta = 1 + c\kappa$ sağlansın. Bu takdirde $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterelim. $\langle x(s), x(s) \rangle = \mu = c$ eşitliğinde s ye göre türev alınır

$$\langle x(s), x(s) \rangle' = \mu' = c' \Rightarrow 2\langle \alpha(s), x(s) \rangle = 0$$

elde edilir. $2 \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha(s), x(s) \rangle = 0$ bulunur. Bu da $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.6 dan $\alpha \in \text{span}\{x, y\}^\perp$ için $\langle \alpha, y \rangle = 0$ ve $\kappa = \text{sabit}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle' &= \theta' = (1 + c\kappa)' \Rightarrow \langle \alpha, y \rangle + \langle x, -\kappa\alpha \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle \alpha, y \rangle - \kappa \langle x, \alpha \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \kappa \langle \alpha, x \rangle = 0
\end{aligned}$$

bulunur. $\kappa \neq 0$ olduğundan $\langle \alpha, x \rangle = 0$ bulunur. Bu da $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir. Böylece (2) nin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.3. $x(t) = \rho(t)z(t)$ ile verilen spacelike bir eğri $x: I \rightarrow Q^2 \subset E_1^3$ olsun. Burada $\rho(t)$ keyfi pozitif bir fonksiyon, $z(t)$ ise E_1^3 uzayı üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. O halde $x(t)$ nin bir rektifiye eğri olması için gerek ve yeter şart $z(t)$ bir rektifiye eğri ve

$$\rho(t) = \frac{-1}{\kappa(t)}$$

olmasıdır.

İspat. Q^2 de bir spacelike eğrisi $x(t) = \rho(t)z(t)$ şeklinde verilsin. $\rho(t)$ keyfi pozitif bir fonksiyon ve $z(t)$ E_1^3 uzayı üzerinde birim hızlı eğri olsun. $x(t)$ eğrisinin t ye göre türevi alınırsa,

$$x'(t) = \rho'(t)z(t) + \rho(t)z'(t)$$

eşitliği bulunur. Burada $x(t)$ in birim teğet vektör alanı, $\mathcal{G} = \sqrt{\langle \rho'z + \rho z', \rho'z + \rho z' \rangle}$ olmak üzere,

$$\alpha(t) = \frac{\rho'}{\mathcal{G}} z(t) + \frac{\rho}{\mathcal{G}} z'(t) \quad (3.2.3)$$

şeklinde yazılır. (3.2.3) de t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\alpha' = \left(\frac{\rho'}{\mathcal{G}}\right)' z + \left(\frac{\rho'}{\mathcal{G}} + \left(\frac{\rho}{\mathcal{G}}\right)'\right) z' + \frac{\rho}{\mathcal{G}} z'' \quad (3.2.4)$$

eşitliği elde edilir.

$x(t)$ bir rektifiye eğri olsun o zaman $\langle x(t), \alpha(t) \rangle = 0$ olur. $x(t) = \rho(t)z(t)$ ifadesi göz önüne alınırsa $\langle \rho(t)z(t), \alpha(t) \rangle = 0$ olur ve dolayısıyla da $\rho(t) \langle z(t), \alpha(t) \rangle = 0$ bulunur. Bu da $\langle z(t), \alpha(t) \rangle = 0$ olmasını gerektirir. Bu son eşitliği (3.2.3) eşitliğinin her iki tarafını z ile çarparak elde edelim. Bu takdirde

$$\langle \alpha, z \rangle = \frac{\rho'}{\mathcal{G}} \langle z, z \rangle + \frac{\rho}{\mathcal{G}} \langle z', z \rangle$$

elde edilen bu son eşitlikte $\langle z, \alpha \rangle = 0$ olması $\langle z, z \rangle = 0$ ve $\langle z', z \rangle = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla da $\langle z', z \rangle = 0$ ifadesi $z(t)$ eğrisinin bir rektifiye eğri olduğunu gösterir.

Bu durumda $z(t)$ eğrisi için,

$$\langle z, z \rangle = \langle k, k \rangle = \langle z', k \rangle = 0, \langle z, k \rangle = 1 \quad (3.2.5)$$

özelliklerini sağlayacak şekilde bir çatı $\{z, k, z' = \beta\}$ olsun.

(3.2.5) den faydalanarak z'' ifadesini yazalım.

$$z'' = \langle z'', z \rangle z + \langle z'', k \rangle k + \langle z'', z' \rangle z' \quad (3.2.6)$$

ifadesi ile (3.2.5) ve Frenet denklemlerinden $\langle z, z \rangle = 0, \langle z', z \rangle = 0$ bulunur. Ayrıca

$$\langle z', z' \rangle = 1 = \langle \beta, \beta \rangle,$$

$$\langle z'', z \rangle = -1, \langle z'', z' \rangle = 0,$$

$$\langle z'', k \rangle = \langle \beta', k \rangle = \langle \kappa z - k, k \rangle = \kappa \langle z, k \rangle = \kappa$$

elde edilen bu iç çarpımlar (3.2.6) da kullanılırsa,

$$z'' = -z + \kappa k \quad (3.2.7)$$

şeklinde olur.

(3.2.7) ifadesi (3.2.4) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \left(\frac{\rho'}{g} \right)' z + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) z' + \frac{\rho}{g} (-z + \kappa k) \\ \alpha' &= \left(\left(\frac{\rho'}{g} \right)' - \frac{\rho}{g} \right) z + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) z' + \frac{\rho}{g} \kappa k \\ \kappa x - y &= \left(\left(\frac{\rho'}{g} \right)' - \frac{\rho}{g} \right) z + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) z' + \frac{\rho}{g} \kappa k \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.2.8) ifadesinin her iki yanı x ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\kappa \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle = \left(\left(\frac{\rho'}{g} \right)' - \frac{\rho}{g} \right) \langle z, x \rangle + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) \langle z', x \rangle + \frac{\rho}{g} \kappa \langle k, x \rangle \quad (3.2.9)$$

eşitliği bulunur. (3.2.9) daki iç çarpımlar,

$$\langle z, x \rangle = \langle z, \rho z \rangle = \rho \langle z, z \rangle = \rho \cdot 0 = 0$$

$$\langle z', x \rangle = \langle z', \rho z \rangle = \rho \langle z', z \rangle = \rho \cdot 0 = 0$$

$$\langle k, x \rangle = \langle k, \rho z \rangle = \rho \langle k, z \rangle = \rho \cdot 1 = \rho$$

$$\langle x, x \rangle = 0, \langle x, y \rangle = 1$$

şeklinde olup bunlar (3.2.9) da yerine yazılırsa,

$$-1 = \frac{\rho}{g} \kappa \rho$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $\mathcal{G} = \sqrt{\langle \rho'z + \rho z', \rho'z + \rho z' \rangle}$ ifadesinden

$$\mathcal{G} = \sqrt{(\rho')^2 \langle z, z \rangle + 2\rho\rho' \langle z', z \rangle + \rho^2 \langle z', z' \rangle} \quad (3.2.10)$$

eşitliği yazılarak

$$\langle z, z \rangle = 0, \langle z, z' \rangle = 0, \langle z', z' \rangle = 1$$

ifadeleri (3.2.10) da göz önüne alınırsa

$$\mathcal{G} = \rho$$

bulunur. Böylece

$$-1 = \frac{\rho}{\rho} \kappa \rho \Rightarrow \frac{-1}{\kappa(t)} = \rho(t)$$

bulunur.

Tersine $\frac{-1}{\kappa(t)} = \rho(t)$ ve $z(t)$ bir rektifiye eğri olsun. $z(t)$ bir rektifiye eğri olduğundan

$\langle z, z' \rangle = 0$ şartı sağlanır. Bu durumda $x(t) = \rho(t)z(t)$ olmak üzere $\langle x, \alpha \rangle = 0$ olduğunu

göstermeliyiz. $x' = \alpha = \frac{-z'}{\kappa}$ eşitliğinden $\langle x, \alpha \rangle = \langle -\frac{z}{\kappa}, -\frac{z'}{\kappa} \rangle = \frac{1}{\kappa^2} \langle z, z' \rangle = 0$ olur ki

$x(t)$ bir rektifiye eğri olur. Böylece ispat tamamlanır.

4. BÖLÜM

4.1. $Q^3 \subset E_1^4$ de Rektifiye Eğriler

Tanım 4.1.1. E_1^4 , 4-boyutlu pseudo-Öklidyen uzayı, $x, y \in E_1^4$ için

$$\tilde{G}(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i - \sum_{j=4}^4 x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

metriği ile tanımlıdır ve bu metriğe pseudo-Riemannian metriği adı verilir [12].

Tanım 4.1.2. M , E_1^4 ün bir altmanifoldu olsun. Eğer E_1^4 ün $\tilde{G}$ pseudo-Riemannian metriği, M üzerinde bir pseudo-Riemannian G metriğine karşılık geliyorsa o zaman M , E_1^4 ün bir timelike altmanifoldu olarak adlandırılır [12].

Tanım 4.1.3. E_1^4 de seçilmiş bir nokta c olmak üzere pseudo-Riemannian lightlike koni uzayı,

$$Q_1^3(c) = \{x \in E_1^4 : \tilde{G}(x - c, x - c) = 0\}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradaki metrik ise,

$$\tilde{G}(x - c, x - c) = \langle x - c, x - c \rangle = (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 - (x_4 - c_4)^2$$

şeklinde ifade edilir. c ye $Q_1^3(c)$ uzayının merkezi adı verilir. $c=0$ olduğu zaman $Q_1^3(0)$ uzayı Q^3 ile gösterilir ve lightlike koni uzayı olarak adlandırılır [13].

Tanım 4.1.4. 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 ve E_1^4 de lightlike koni Q^3 olsun. E_1^4 de bir $\alpha \neq 0$ vektörü eğer $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, $\langle \alpha, \alpha \rangle < 0$ veya $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ şeklinde ise sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike olarak adlandırılır [13].

Tanım 4.1.5. E_1^4 de bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı için,

$$\langle e_3, e_3 \rangle = \langle e_4, e_4 \rangle = 0, \langle e_4, e_3 \rangle = 1$$

$$\langle e_4, e_i \rangle = \langle e_3, e_i \rangle = 0, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

ifadeleri sağlanıyorsa bu çatıya asimptotik ortonormal çatı alanı denir.

Ayrıca E_1^4 de bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı için,

$$\langle e_3, e_3 \rangle = -\langle e_4, e_4 \rangle = 1, \langle e_4, e_3 \rangle = 0$$

$$\langle e_3, e_i \rangle = \langle e_4, e_i \rangle = 0, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

ifadeleri sağlanıyorsa bu çatıya pseudo-Riemannian çatı alanı denir [13].

Tanım 4.1.6. E_1^4 de spacelike bir eğri $x: I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4$ olmak üzere $\forall t \in I$ için x, x', x'', x''' vektör alanları lineer bağımsız ve $x, x', x'', x''', x^{(4)}$ vektör alanları lineer bağımlı ise x eğrisine bir Frenet eğrisi denir[13].

$x(s)$ eğrisinin s yay uzunluğu, $ds^2 = \langle dx(t), dx(t) \rangle$ ile tanımlıdır. Bu halde x eğrisi ise $x(s) = x(t(s))$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.7. $x(s)$ eğrisinin spacelike birim teğet vektör alanı $x'(s)$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = 1, \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = \langle x', y \rangle = 0$$

olacak biçimde bir y vektör alanı seçilerek $x(s)$ eğrisinin V^1 spacelike normal uzayı,

$$V^1 = \{span\{x, y, x'\}\}^\perp, \beta \in V^1, span\{x, y, \alpha = x', V^1\} = E_1^4$$

şeklinde verilir [13].

$Q^3 \subset E_1^4$ de bir $x(s)$ eğrisi boyunca bir asimptotik ortonormal çatı $\{x, y, \alpha, \beta\}$ olsun.

Bu taktirde Tanım 4.1.5 den,

$$\begin{aligned} \langle \beta, x \rangle &= 0, \langle \beta, y \rangle = 0, \langle y, y \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0, \langle y, y \rangle = 0, \langle x', y \rangle = 0 \\ \langle x, y \rangle &= 1, \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 1 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade edilir[13].

E_1^4 de rektifiye eğriler, α nın $\alpha^\perp$ ortogonal komplemanında yatan uzay eğrileri olarak tanımlanmıştır. Bu eğriler Q^3 uzayında x, y, β vektör alanları tarafından gerilen düzlemde yatarlar. θ, μ, γ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $x(s)$ eğrisinin $span\{x, \beta, y\}$ düzlemindeki yer vektörü

$$x(s) = \theta(s)x + \mu(s)\beta + \gamma(s)y \quad (4.1.2)$$

şeklinde ifade edilir.

$x: I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4$, E_1^4 de keyfi birim hızlı bir eğri olsun. O halde E_1^4 deki metrik, $x, y \in E_1^4$ için

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

şeklinde olup $\forall x \in E_1^4$ için x in normu,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Q^3 de birim hızlı spacelike bir $x(s)$ eğrisi boyunca hareket eden asimptotik ortonormal çatı $\{x, \alpha, \beta, y\}$ olsun. $x(s)$ eğrisinin koni eğrilik fonksiyonları κ ve τ olmak üzere Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} x' \\ \alpha' \\ \beta' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & -1 \\ \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \beta \\ y \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

şeklinde olup açıkça,

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \\ \alpha' &= \kappa x - y \\ \beta' &= \tau x \\ y' &= -\kappa \alpha - \tau \beta \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir [14].

4.2. Q^3 de Rektifiye Eğrilerin Karakterizasyonları

Q^3 de birim hızlı spacelike bir eğri $x(s)$ olsun. $x(s)$ eğrisinin κ , τ koni eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı ve θ , μ , γ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere (4.1.2) bağıntısından

$$x(s) = \theta(s)x + \mu(s)\beta + \gamma(s)y$$

şeklinde yazılır. Burada s ye göre türev alındığında,

$$\begin{aligned} x' &= \theta'x + \theta\alpha' + \mu'\beta + \mu\beta' + \gamma'y + \gamma y' \\ x' &= \theta'x + \theta\alpha + \mu'\beta + \mu\tau x + \gamma'y + \gamma(-\kappa\alpha - \tau\beta) \\ \alpha &= (\theta' + \mu\tau)x + \gamma'y + (\theta - \gamma\kappa)\alpha + (\mu' - \tau\gamma)\beta \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

eşitliği elde edilir. (4.2.1) in her iki yanını, sırasıyla, y , x , α , β ile iç çarpıma tabi tutularak,

$$\begin{aligned} \theta' + \mu\tau &= 0 \\ \gamma' &= 0 \\ \theta - \gamma\kappa &= 1 \\ \mu' - \tau\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \gamma' &= 0 \Rightarrow \gamma = c, c \in \mathbb{R} \\ \theta - \gamma\kappa &= 1 \Rightarrow \theta = 1 + c\kappa \\ \theta' + \mu\tau &= 0 \Rightarrow \mu = \frac{-1}{\tau} \theta' = \frac{-1}{\tau} (1 + c\kappa)' \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak;

$$\gamma = c, c \in IR$$

$$\mu = \frac{-1}{\tau}(c\kappa + 1)' \quad (4.2.3)$$

$$\theta = c\kappa + 1$$

eşitlikleri bulunur.

Böylece bir $x(s)$ eğrisinin θ, γ, μ diferensiyellenebilir fonksiyonları κ ve τ eğrilikleri cinsinden ifade edilmiş olur.

(4.2.2) de $\mu' - \tau \cdot \gamma = 0$ denklemi ile (4.2.3) deki ifadeler kullanılarak,

$$\left(\frac{1}{\tau}(c\kappa + 1)' \right)' - c\tau = 0 \quad (4.2.4)$$

eşitliği elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $x: I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4$ eğrisi (4.2.4) deki denklemi sağlayan ve Q^3 de $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde,

$$Y = x(s) - \theta(s)x - \mu(s)\beta - \gamma(s)y$$

ile verilen bir Y vektörü için (4.1.4) ve (4.2.3) bağıntıları kullanılarak $Y' = 0$ bulunur. Bu Y nin sabit bir vektör olduğunu dolayısıyla da $x(s)$ in bir rektifiye eğrisine eşdeğer tutulduğunu ifade eder.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı verilmiş olur.

Teorem 4.2.1. Q^3 de sıfırdan farklı κ ve τ eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike bir eğri $x(s)$ olsun. $x(s)$ bir rektifiye eğrisine eşdeğerdir gerek ve yeter şart için

$$\left(\frac{1}{\tau}(c\kappa + 1)' \right)' - c\tau = 0, c \in IR_0^+ \quad (4.2.5)$$

olmasıdır.

Ayrıca, Q^3 de sıfırdan farklı ve sabit κ ve τ eğriliklerine sahip birim hızlı bir $x(s)$ eğrisi için (4.2.5) eşitliği bir çelişki oluşturur.

Bu durumda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.2.2. Sıfırdan farklı ve sabit κ ve τ eğriliklerine sahip ve Q^3 de tam olarak yatan bir rektifiye eğri yoktur.

Fakat eğrilik fonksiyonlarının biri sabit ise aşağıdaki durumları düşünebiliriz.

i) $\kappa(s) \neq \text{sabit}$, $\tau = \text{sabit}$ ise (4.2.5) den

$$\left(\frac{1}{\tau} (c\kappa + 1) \right)' - c\tau = 0$$

ifadesinden,

$$\left(\frac{1}{\tau} (c\kappa(s) + 1) \right)' - c\tau = 0 \Rightarrow c\kappa''(s) - c\tau^2 = 0$$

$$\Rightarrow \kappa''(s) - \tau^2 = 0$$

$$\Rightarrow \kappa'(s) = \tau^2 s + d$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = \frac{\tau^2}{2} s^2 + ds + e$$

elde edilir. Burada $c, d, e \in IR_0^+$ dir.

ii) $\kappa = \text{sabit}$, $\tau(s) \neq \text{sabit}$ ise (4.2.5) den,

$$\left(\frac{1}{\tau} (c\kappa + 1) \right)' - c\tau = 0$$

ifadesinden, $c \in IR_0^+$ ve $\kappa = \text{sabit}$ olmak üzere $\kappa' = 0$ olduğundan $c\tau = 0$ eşitliği elde edilir ki buradan $c = 0$ veya $\tau = 0$ bulunur. Ayrıca $\tau \neq 0$ olduğundan $c = 0$ bulunur. Bu da $c \in IR_0^+$ olmasıyla çelişir. Bu da κ nın sabit olmaması dolayısıyla da τ nun sabit olması demektir.

Sonuç 4.2.1. Q^3 de alınan sıfırdan farklı κ, τ eğriliklerine sahip herhangi spacelike bir $x(s)$ eğrisinin torsiyonu sabittir.

Teorem 4.2.3. Q^3 de birim hızlı ve sıfırdan farklı κ, τ eğriliklerine sahip spacelike bir eğri $x(s)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanıyorsa, $x(s)$ bir rektifiye eğrisine eşdeğer tutulabilir.

i) $\kappa(s) \neq \text{sabit}$, $\tau = \text{sabit}$ ise $\kappa(s) = \frac{\tau^2}{2} s^2 + ds + e$; $d, e \in IR_0^+$

ii) $\tau(s) \neq \text{sabit}$, $\kappa = \text{sabit}$ ise $\tau = 0$ çelişkisi elde edilir ki $\tau = \text{sabit}$ olmak zorundadır.

Teorem 4.2.4. Q^3 de birim hızlı spacelike bir eğri $x(s)$ olsun. $x(s)$ eğrisinin eğrilikleri κ , $\tau \neq 0$ ve $c \in IR_0^+$ olmak üzere $x(s)$ eğrisi için aşağıdaki ifadeler sağlanıyorsa $x(s)$ bir rektifiye eğri olur.

1) $x(s)$ eğrisinin d uzaklık fonksiyonu sabittir,

2) $x(s)$ eğrisinin yer vektörünün β , x , ve y vektör alanlarının bileşenleri sırasıyla,

$$\langle x, \beta \rangle = \mu = \frac{1}{\tau}(c\kappa + 1)', \quad \langle x, y \rangle = \theta = c\kappa + 1 \quad \text{ve} \quad \langle x(s), x(s) \rangle = \gamma = c$$

şeklindedir.

3) $x(s)$ eğrisinin x^N normal bileşeninin normu $\|x^N(s)\| = \mu = -c\tau - \frac{dc}{\tau}$ şeklindedir.

Tersine (1), (2), (3) sağlanırsa $x(s)$ bir rektifiye eğri olur.

İspat. Q^3 de birim hızlı ve sıfırdan farklı κ , $\tau \neq 0$ eğriliklerine sahip bir rektifiye eğri $x(s)$ olsun. O zaman $x(s)$ eğrisinin yer vektörü (4.1.2) denklemini sağlar. Ayrıca θ , μ , γ fonksiyonları (4.2.3) denklemini sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} d^2(s) &= \|x(s)\|^2 = \langle x(s), x(s) \rangle = \langle \theta(s)x + \mu(s)\beta + \gamma(s)y, \theta(s)x + \mu(s)\beta + \gamma(s)y \rangle \\ &= \theta^2(s)\langle x, x \rangle + \theta(s)\mu(s)\langle x, \beta \rangle + \theta(s)\gamma(s)\langle x, y \rangle \\ &\quad + \mu(s)\theta(s)\langle x, \beta \rangle + \mu^2(s)\langle \beta, \beta \rangle + \mu(s)\gamma(s)\langle y, \beta \rangle \\ &\quad + \gamma(s)\theta(s)\langle y, x \rangle + \mu(s)\gamma(s)\langle y, \beta \rangle + \gamma^2(s)\langle y, y \rangle \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $\{x, \alpha, \beta, y\}$ Frenet çatısı, Q^3 de

$$\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = \langle x', y \rangle = 0, \quad \langle x, y \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 1, \quad \langle y, \beta \rangle = \langle x, \beta \rangle = 0$$

özelliklerini sağladığından yukarıdaki eşitlik,

$$\begin{aligned} d^2(s) &= \|x(s)\|^2 = \theta^2\langle x, x \rangle + 2\theta\mu\langle x, \beta \rangle + 2\theta\gamma\langle x, y \rangle + \mu^2\langle \beta, \beta \rangle + 2\mu\gamma\langle y, \beta \rangle + \gamma^2\langle y, y \rangle \\ &= \mu^2(s) + 2\theta(s)\gamma \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

şeklinde olur. (4.2.3) de $\gamma = c, c \in IR_0^+$ olduğundan (4.2.6) ifadesi

$$d^2(s) = \|x(s)\|^2 = \mu^2(s) + 2c\theta(s) \tag{4.2.7}$$

şeklinde olur. Ayrıca (4.2.2) de son eşitliğin her iki yanını sırasıyla μ ve 2 ile çarpılırsa

$$\mu(s)\mu'(s) - \tau\gamma(s)\mu(s) = 0 \Rightarrow \mu(s)\mu'(s) = \tau\gamma(s)\mu(s)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2\mu(s)\mu'(s) = 2\tau.\mu(s).c, (\gamma = c) \\
&\Rightarrow \int 2\mu(s)\mu'(s)ds = \int 2\tau.\mu(s).c.ds \\
&\Rightarrow \mu^2(s) = 2c \int \tau.\mu(s)ds + l^2, l^2 \in IR_0^+
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

ifadesi elde edilir. (4.2.2) de $\theta'(s) + \mu(s).\tau = 0$ eşitliğinden elde edilen $\theta'(s) = -\mu(s).\tau$ ifadesi (4.2.8) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mu^2(s) = -2c \int \theta'(s)ds + l^2 \\
&\Rightarrow \mu^2(s) = -2c\theta(s) + l^2
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra (4.2.9) ifadesi (4.2.7) da kullanılarak,

$$\begin{aligned}
d^2(x(s)) &= \mu^2(s) + 2\theta(s)\gamma(s) \Rightarrow d^2(x(s)) = \mu^2(s) + 2\gamma\theta, \gamma = c \\
&\Rightarrow d^2(x(s)) = \mu^2(s) + 2c\theta \\
&\Rightarrow d^2(x(s)) = -2c\theta + l^2 + 2c\theta \\
&\Rightarrow d^2(x(s)) = l^2 \\
&\Rightarrow d(x(s)) = l
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $l \in IR_0^+$ için, d=sabit olur.

Tersine, kabul edelim ki (1) sağlansın. O halde $d^2(x(s)) = \langle x(s), x(s) \rangle = l^2 = \text{sabit}$ olur ve bu ifadede s ye göre türev alınırsa

$$\langle x(s), x(s) \rangle' = (l^2)' \Rightarrow 2\langle x(s), \alpha(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Burada $\langle x(s), \alpha(s) \rangle = 0$ olur. Bu da $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir. Böylece (1) ispatlanır.

(2) için, $x(s)$ bir rektifiye eğri olduğundan (4.1.2) ve (4.2.3) bağıntılarından istenilen elde edilir.

Tersine, (2) sağlansın, yani $\langle x(s), \beta(s) \rangle = \mu(s) = \frac{1}{\tau}(c\kappa(s) + 1)'$ olduğunu kabul edelim. $\langle x(s), y(s) \rangle = \theta(s) = c\kappa(s) + 1$ ve $\langle x(s), x(s) \rangle = \gamma = c$ olduğu kabul edilerek $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
&\langle x(s), \beta(s) \rangle = \mu(s) \text{ ise s ye göre türev alınıp, } \forall s \in I \text{ için (4.2.1) den} \\
&\langle x, \beta \rangle' = \mu' \Rightarrow \langle x', \beta \rangle + \langle x, \beta' \rangle = \mu' = \tau\gamma = \tau c, \quad (\gamma = c, \langle \alpha, \beta \rangle = 0) \\
&\Rightarrow \tau \langle x, x \rangle = \tau c,
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

(4.2.10) da s ye göre tekrar türev alınırsa, ayrıca Teorem 4.2.3 den bir $x(s)$ rektifiye eğrisi için $\tau = \text{sabit}$ ve $c \in IR_0^+$ durumunda $\gamma = c$ olduğundan, $(\tau c)' = 0$ olur ve,

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\tau \langle x, x \rangle)' &= (\tau c)' \\ \Rightarrow \tau \cdot 2 \langle x, \alpha \rangle &= 0\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte $\tau \neq 0$ için $\langle x, \alpha \rangle = 0$ olur ki bu da $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir.

$\langle x(s), y(s) \rangle = \theta(s)$ ise s ye göre türev alınıp, $\forall s \in I$ için (4.2.2) den

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle' &= \theta' \Rightarrow \langle \alpha, y \rangle + \langle x, -\kappa \alpha - \tau \beta \rangle = \theta' = -\mu \tau \\ \Rightarrow \langle \alpha, y \rangle - \kappa \langle x, \alpha \rangle - \tau \langle x, \beta \rangle &= -\tau \langle x, \beta \rangle, (\mu = \langle x, \beta \rangle, \langle \alpha, y \rangle = 0) \\ \Rightarrow \kappa \langle x, \alpha \rangle &= 0\end{aligned}$$

eşitliğinde $\kappa \neq 0$ olduğundan $\langle x, \alpha \rangle = 0$ olur. Bu da $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir.

$\langle x(s), x(s) \rangle = \gamma(s)$ ise s ye göre türev alınıp, $\forall s \in I$ için (4.2.1) den $\langle x(s), \alpha(s) \rangle = 0$ bulunur. Bu da $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir. Böylece (2) ispatlanır.

(3) için, $x(s)$ bir rektifiye eğri olduğundan (4.1.2) den $x(s) = \theta(s)x + \mu(s)\beta + \gamma(s)y$ yazılabilir. Buradan $x^N(s) = \mu(s)\beta + \gamma(s)y$ kabul edilerek $x(s) = \theta(s)x + x^N(s)$ eşitliği elde edilir. Ayrıca çatıdan $\langle \beta, \beta \rangle = 1$, $\langle \beta, y \rangle = 0$, $\langle y, y \rangle = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\|x^N(s)\|^2 &= \langle x^N(s), x^N(s) \rangle = \langle \mu(s)\beta + \gamma(s)y, \mu(s)\beta + \gamma(s)y \rangle \\ &= \mu^2(s)\langle \beta, \beta \rangle + 2\mu(s)\gamma(s)\langle \beta, y \rangle + \gamma^2(s)\langle y, y \rangle \\ &= \mu^2(s)\end{aligned}$$

olur ki buradan $\|x^N(s)\| = \mu = \frac{-1}{\tau}(c\kappa + 1)'$ elde edilir. Teorem 4.2.3 den

$$\kappa(s) = \frac{\tau^2}{2}s^2 + ds + e \text{ için } \|x^N(s)\| = \mu = -c\tau s - \frac{dc}{\tau} \text{ elde edilir.}$$

Tersine $\|x^N(s)\| = \mu = -c\tau s - \frac{dc}{\tau}$ olsun. Ayrıca $\mu = \langle x, \beta \rangle$ olmak üzere $\mu' = -c\tau$

olduğundan $\mu'' = 0$ olur. $\mu = \langle x, \beta \rangle$ eşitliğinin türevi alınır,

$$\langle x, \beta \rangle' = \mu' \Rightarrow \langle x', \beta \rangle + \langle x, \beta' \rangle = -c\tau$$

eşitliği elde edilir. Burada tekrar türev alınır

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\langle \alpha, \beta \rangle + \langle x, \tau \rangle)' &= (-c\tau)' \\ \Rightarrow \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle + 2\tau \langle x, \alpha \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle \kappa x - y, \beta \rangle + \langle \alpha, \tau \rangle + 2\tau \langle x, \alpha \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \kappa \langle x, \beta \rangle - \langle y, \beta \rangle + 3\tau \langle x, \alpha \rangle &= 0\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca, çatı tanımından $\beta \in V = \text{span}\{x, \alpha, y\}^\perp$ için $\langle \beta, y \rangle = 0$, $\langle x, \beta \rangle = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 - 0 + 3\tau \langle x, \alpha \rangle &= 0 \\ \Rightarrow 3\tau \langle x, \alpha \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Son eşitlikte $\tau \neq 0$ olduğundan $\langle x, \alpha \rangle = 0$ olur ki buda $x(s)$ in bir rektifiye eğri olduğunu gösterir. Böylece (3) ispatlanır.

Teorem 4.2.5. $x : I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4$ ile verilen spacelike bir eğri $x(t) = \rho(t)z(t)$ olsun. Burada $\rho(t)$ keyfi pozitif bir fonksiyon, $z(t)$ ise E_1^4 uzayı üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. $x(t)$ bir rektifiye eğridir gerek ve yeter şart $z(t)$ bir rektifiye eğri ve

$$\rho(t) = \frac{-1}{\kappa(t)}$$

olmasıdır.

İspat. Q^3 de bir x eğrisi $x(t) = \rho(t)z(t)$ şeklinde verilsin. $\rho(t)$, keyfi pozitif bir fonksiyon, $z(t)$ ise E_1^4 uzayı üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. $x(t)$ eğrisinin t ye göre türevi alınarak,

$$x'(t) = \rho'(t)z(t) + \rho(t)z'(t)$$

ifadesi bulunur. Burada $x(t)$ in teğet vektör alanı, $\mathcal{G} = \sqrt{\langle \rho'z + \rho z', \rho'z + \rho z' \rangle}$ olmak üzere,

$$\alpha(t) = \frac{\rho'}{\mathcal{G}} z(t) + \frac{\rho}{\mathcal{G}} z'(t) \quad (4.2.11)$$

şeklinde yazılır. Son ifadede t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\alpha' = \left(\frac{\rho'}{\mathcal{G}}\right)' z + \left(\frac{\rho'}{\mathcal{G}} + \left(\frac{\rho}{\mathcal{G}}\right)'\right) z' + \frac{\rho}{\mathcal{G}} z'' \quad (4.2.12)$$

eşitliği elde edilir.

$x(t)$ bir rektifiye eğri olduğundan $\langle x(t), \alpha(t) \rangle = 0$ olmalıdır. $x(t) = \rho(t)z(t)$ ifadesi göz önüne alınarak $\langle \rho(t)z(t), \alpha(t) \rangle = 0$ ve dolayısıyla da $\rho(t)\langle z(t), \alpha(t) \rangle = 0$ bulunur. Bu da $\langle z(t), \alpha(t) \rangle = 0$ olmasını gerektirir. Bu son eşitliği, (4.2.11) in her iki tarafını $z(t)$ ile iç çarpıma tabi tutarak elde edelim. Bu takdirde

$$\langle \alpha, z \rangle = \frac{\rho'}{\mathcal{G}} \langle z, z \rangle + \frac{\rho}{\mathcal{G}} \langle z', z \rangle$$

eşitliğinde $\langle z, \alpha \rangle = 0$ olması $\langle z, z \rangle = 0$ ve $\langle z', z \rangle = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla da $\langle z', z \rangle = 0$ ifadesi $z(s)$ eğrisinin bir rektifiye eğri olduğunu gösterir. Bu halde $z(t)$ eğrisi için

E_1^4 de asimptotik ortonormal bir çatı $\{z, k, z', \beta_2\}$ ve $z' = \beta_1$ olduğu kabul edilerek ayrıca,

$$\langle z, z \rangle = \langle k, k \rangle = \langle z', k \rangle = 0, \langle z, k \rangle = 1, \langle z, \beta_2 \rangle = \langle k, \beta_2 \rangle = 0 \quad (4.2.13)$$

özelliklerinden faydalananak z'' ifadesi bu çatı cinsinden yazıldığında

$$z'' = \langle z'', z \rangle z + \langle z'', k \rangle k + \langle z'', z' \rangle z' + \langle z'', \beta_2 \rangle \beta_2 \quad (4.2.14)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (4.2.13) ve Frenet denklemlerinden $\langle z, z \rangle = 0, \langle z', z \rangle = 0$ bulunur. Dolayısıyla da $\langle z', z' \rangle = 1 = \langle \beta_2, \beta_2 \rangle$ ve $\langle z'', z \rangle = -1, \langle z'', z' \rangle = 0$ bulunarak,

$$\langle z'', \beta_2 \rangle = \langle \beta_1', \beta_2 \rangle = \langle \kappa z - k, \beta_2 \rangle = 0,$$

$$\langle z'', k \rangle = \langle \beta_1', k \rangle = \langle \kappa z - k, k \rangle = \kappa \langle z, k \rangle = \kappa$$

değerleri (4.2.14) de yerine yazılırsa,

$$z'' = -z + \kappa k \quad (4.2.15)$$

eşitliği elde edilir.

(4.2.15) ifadesi (4.2.12) da göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \left(\frac{\rho'}{g} \right)' z + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) z' + \frac{\rho}{g} (-z + \kappa k) \\ \alpha' &= \left(\left(\frac{\rho'}{g} \right)' - \frac{\rho}{g} \right) z + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) z' + \frac{\rho}{g} \kappa k \\ \kappa x - y &= \left(\left(\frac{\rho'}{g} \right)' - \frac{\rho}{g} \right) z + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) z' + \frac{\rho}{g} \kappa k \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (4.2.16) ifadesinin her iki yanı x ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\kappa \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle = \left(\left(\frac{\rho'}{g} \right)' - \frac{\rho}{g} \right) \langle z, x \rangle + \left(\frac{\rho'}{g} + \left(\frac{\rho}{g} \right)' \right) \langle z', x \rangle + \frac{\rho}{g} \kappa \langle k, x \rangle \quad (4.2.17)$$

eşitliği bulunur. (4.2.17) deki iç çarpımlar,

$$\langle z, x \rangle = \langle z, \rho x \rangle = \rho \langle z, z \rangle = \rho \cdot 0 = 0$$

$$\langle z', x \rangle = \langle z', \rho x \rangle = \rho \langle z', z \rangle = \rho \cdot 0 = 0$$

$$\langle k, x \rangle = \langle k, \rho x \rangle = \rho \langle k, z \rangle = \rho \cdot 1 = \rho$$

$$\langle x, x \rangle = 0, \langle x, y \rangle = 1$$

şeklinde ifade edilip bunlar (4.2.17) de yerine yazılırsa,

$$-1 = \frac{\rho}{g} \kappa \rho$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, $\mathcal{G} = \sqrt{\langle \rho'z + \rho z', \rho'z + \rho z' \rangle}$ ifadesi

$$\mathcal{G} = \sqrt{(\rho')^2 \langle z, z \rangle + 2\rho\rho' \langle z', z \rangle + \rho^2 \langle z', z' \rangle} \quad (4.2.18)$$

şeklinde yazılabileceğinden ve

$$\langle z, z \rangle = 0, \langle z, z' \rangle = 0, \langle z', z' \rangle = 1$$

İfadeleri (4.2.18) de göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{G} = \rho$$

bulunur. Böylece

$$-1 = \frac{\rho}{\rho} \kappa \rho \Rightarrow \frac{-1}{\kappa(t)} = \rho(t)$$

bulunur.

Tersine $\frac{-1}{\kappa(t)} = \rho(t)$ ve $z(t)$ bir rektifiye eğri olsun. $z(t)$ bir rektifiye eğri olduğundan

$\langle z, z' \rangle = 0$ şartı sağlanır. Bu durumda $x(t) = \rho(t)z(t)$ olmak üzere $\langle x, \alpha \rangle = 0$ olduğunu

göstermeliyiz. $x' = \alpha = \frac{-z'}{\kappa}$ eşitliğinden $\langle x, \alpha \rangle = \langle -\frac{z}{\kappa}, -\frac{z'}{\kappa} \rangle = \frac{1}{\kappa^2} \langle z, z' \rangle = 0$ olur ki

$x(t)$ bir rektifiye eğri olur. Böylece ispat tamamlanır.

5. BÖLÜM

5.1. Tzitzeica Tipinde Rektifiye Eğriler

Tanım 5.1.1. [16] Bir eğrinin torsiyonu(τ) ile orjinden oskulator düzlemine olan uzaklığının(d) karesine oranı sabit ise o eğriye bir Tzitzeica eğrisi denir. Yani eğrinin keyfi bir noktasında $\frac{\tau}{d^2} = \text{sabit}$ olmalıdır.

Teorem 5.1.1. [14] Q^3 de yay parametrelili spacelike bir eğri, herhangi $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları için;

$$x : I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4$$

$$s \rightarrow x(s) = \rho(s)(2f(s), 2g(s), 1 - f^2(s) - g^2(s), 1 + f^2(s) + g^2(s))$$

şeklindedir. Burada $\rho(s)$, $4\rho^2(s)(f_s^2(s) + g_s^2(s)) = 1$ şeklinde tanımlıdır.

İspat. [14] Q^3 de yay parametrelili spacelike bir eğri $x(s)$ olsun. Metrik tanımından $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ifadesi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \quad (5.1.1)$$

şeklinde yazılır. (5.1.1) eşitliğinden

$$x_1^2 - (ix_2)^2 = -(x_3^2 - x_4^2) \quad (5.1.2)$$

yazılabilir. Ayrıca (5.1.2) den

$$\frac{x_1 + ix_2}{x_3 + x_4} = -\frac{x_3 - x_4}{x_1 - ix_2} \quad \text{veya} \quad \frac{x_1 + ix_2}{x_3 - x_4} = -\frac{x_3 + x_4}{x_1 - ix_2} \quad (5.1.3)$$

ifadeleri yazılarak bir $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4$ eğrisi için,

$$\frac{x_1 + ix_2}{x_3 + x_4} = -\frac{x_3 - x_4}{x_1 - ix_2} = f(s) + ig(s) \quad (5.1.4)$$

ve

$$x_3 + x_4 = 2\rho(s) \quad (5.1.5)$$

eşitlikleri kabul edildiğinde;

$$\frac{x_1 + ix_2}{x_3 - x_4} = -\frac{x_3 + x_4}{x_1 - ix_2} = -\frac{1}{f(s) - ig(s)} \quad (5.1.6)$$

ifadesi bulunur.

Dolayısıyla da (5.1.4), (5.1.5), (5.1.6) dan

$$\begin{aligned}x_1 + ix_2 &= 2\rho(s)(f(s) + ig(s)) \\x_1 - ix_2 &= 2\rho(s)(f(s) - ig(s)) \\x_3 + x_4 &= 2\rho(s) \\-x_3 + x_4 &= 2\rho(s)(f^2(s) + g^2(s))\end{aligned}\tag{5.1.7}$$

eşitlikleri bulunur. Böylece gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}x_1 &= 2\rho(s)f(s) \\x_2 &= 2\rho(s)g(s) \\x_3 &= \rho(s)(1 - f^2(s) - g^2(s)) \\x_4 &= \rho(s)(1 + f^2(s) + g^2(s))\end{aligned}\tag{5.1.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla da $x(s)$ eğrisi

$$x(s) = \rho(s)(2f(s), 2g(s), 1 - f^2(s) - g^2(s), 1 + f^2(s) + g^2(s))\tag{5.1.9}$$

şeklinde olur.

$\forall s \in I$ için (5.1.9) dan,

$$x_s = \rho_s(2f, 2g, 1 - f^2 - g^2, 1 + f^2 + g^2) + 2\rho(f_s, g_s, -ff_s - gg_s, ff_s + gg_s)$$

yazılır. Ayrıca $x(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan $\rho(s)$ ifadesi

$$4\rho^2(s)(f_s^2(s) + g_s^2(s)) = 1\tag{5.1.10}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 5.1.2. [14] Teorem 5.1.1 deki $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları, yay parametrelili bir $x(s) : I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4$ koni eğrisinin yapı fonksiyonlarıdır.

(5.1.10) dan $\rho(s)$ ifadesi

$$\rho(s) = \frac{1}{2\sqrt{f_s^2(s) + g_s^2(s)}}\tag{5.1.11}$$

şeklinde elde edilir. Gerekli dönüşümler yardımıyla

$$\begin{aligned}2f_s(s) &= \rho^{-1}(s) \sin \varphi(s) \\2g_s(s) &= \rho^{-1}(s) \cos \varphi(s)\end{aligned}\tag{5.1.12}$$

ifadeleri bulunup buradan,

$$\tan \varphi(s) = \frac{f_s(s)}{g_s(s)}\tag{5.1.13}$$

yazılarak $\varphi_s(s)$ fonksiyonu,

$$\varphi_s(s) = \left(1 + \frac{f_s^2(s)}{g_s^2(s)}\right)^{-1} \left(\frac{f_s(s)}{g_s(s)}\right)_s$$

şeklinde olur. Eğrinin κ ve τ eğrilik fonksiyonları için gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= -\frac{1}{2}\rho^{-2}(s)\rho_s^2(s) - \frac{1}{2}\varphi_s^2(s) + \rho^{-1}(s)\rho_{ss}(s) \\ \tau(s) &= \rho^{-1}(s)\rho_s(s)\varphi_s(s) + \varphi_{ss}(s)\end{aligned}\tag{5.1.14}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.1.2. Q^3 de s yay parametreli spacelike bir rektifiye eğri $x(s)$ olsun. O zaman sıfırdan farklı herhangi $f(s), g(s) \neq \text{sabit}$ yapı fonksiyonları için eğer;

$f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları kompleks değerli ise Q^3 de bir $x(s)$ rektifiye eğrisi,

$$x(s) = 2\rho(s)(f(s), g(s), 1, 0)$$

şeklinde olur.

$f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları reel değerli ise Q^3 de bir $x(s)$ rektifiye eğrisi,

$$x(s) = 2\rho(s)(f(s), g(s), 1 - a\sqrt{f_s^2(s) + g_s^2(s)}, a\sqrt{f_s^2(s) + g_s^2(s)}), a \in IR_0$$

şeklinde yazılır. Burada $\rho(s)$ ifadesi için $\varphi(s)$ değeri

i) $\rho \neq \text{sabit}$ ise

$$\varphi(s) = \frac{A}{2\rho^2(s)} \left\{ \left(\int \rho(s) ds \right)^2 + \frac{B}{\rho^2(s)} \right\}$$

ii) $\rho = \text{sabit}$ ise

$$\varphi(s) = \frac{A}{2}s^2 + Bs + C, \quad A, B, C \in IR$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $x(s)$ eğrisinin κ ve τ eğrilikleri $\forall s \in I$ için,

$$\begin{aligned}\tau &= \|x''''\|^2 - \frac{1}{4}\|x''\|^4 \\ \kappa &= -\frac{1}{2}\|x''\|^2\end{aligned}\tag{5.1.15}$$

şeklinde verilir.

İspat. Q^3 de bir eğri

$$x: I \rightarrow Q^3 \subset E_1^4,$$

$$s \rightarrow x(s) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \rho(s)(2f(s), 2g(s), 1 - f^2(s) - g^2(s), 1 + f^2(s) + g^2(s))$$

şeklinde olsun.

$x(s)$ eğrisinin bir rektifiye eğri olması için $\langle x(s), \alpha(s) = x'(s) \rangle = 0$ şartı sağlanmalı.

O halde $\forall s \in I$ için,

$$\langle (2\rho f, 2\rho g, \rho - \rho f^2 - \rho g^2, \rho + \rho f^2 + \rho g^2), (2\rho_s f + 2\rho f_s, 2\rho_s g + 2\rho g_s, \rho_s - \rho_s f^2 - \rho_s g^2 - 2\rho f f_s - 2\rho g g_s, \rho_s + \rho_s f^2 + \rho_s g^2 + 2\rho f f_s + 2\rho g g_s) \rangle = 0$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} & 4\rho\rho_s f^2 + 4\rho^2 f f_s + 4\rho\rho_s g^2 + 4\rho^2 g g_s + \rho\rho_s - \rho\rho_s f^2 - \rho\rho_s g^2 - 2\rho^2 f f_s \\ & - 2\rho^2 g g_s - \rho\rho_s f^2 + \rho\rho_s f^4 + \rho\rho_s f^2 g^2 + 2\rho^2 f^3 f_s + 2\rho^2 g g_s f^2 - \rho\rho_s g^2 \\ & + \rho\rho_s g^2 f^2 + \rho\rho_s g^4 + 2\rho^2 f f_s g^2 + 2\rho^2 g^3 g_s + \rho\rho_s + \rho\rho_s f^2 + \rho\rho_s g^2 \\ & + 2\rho^2 f f_s + 2\rho^2 g g_s + \rho\rho_s f^2 + \rho\rho_s f^4 + \rho\rho_s f^2 g^2 + 2\rho^2 f^3 f_s + 2\rho^2 g g_s f^2 \\ & + \rho\rho_s g^2 + \rho\rho_s g^2 f^2 + \rho\rho_s g^4 + 2\rho^2 f f_s g^2 + 2\rho^2 g^3 g_s = 0 \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapıp, (5.1.16)ifadesi düzenlenirse ve

$$\rho_s(4\rho f^2 + 4\rho g^2 + 2\rho + 2f^2 g^2 + 2\rho f^4 + 2\rho g^4) + f_s(4\rho^2 f^3 + 4\rho^2 f g^2 + 4\rho^2 f) + g_s(4\rho^2 g^3 + 4\rho^2 g f^2 + 4\rho^2 g) = 0$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} & \rho_s(2\rho(f^2 + g^2 + 1)^2) + f_s(4\rho^2 f(f^2 + g^2 + 1)) + g_s(4\rho^2 g(f^2 + g^2 + 1)) = 0 \\ & 2\rho\rho_s(f^2 + g^2 + 1)^2 + (f^2 + g^2 + 1)(2\rho^2(2f f_s + 2g g_s)) = 0 \\ & (\rho^2)'(f^2 + g^2 + 1)^2 + (\rho^2)((f^2 + g^2 + 1)^2)' = 0 \\ & (\rho^2(f^2 + g^2 + 1)^2)' = 0 \\ & ((\rho(f^2 + g^2 + 1))^2)' = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $(\rho(f^2 + g^2 + 1))^2 = \text{sabit}$ veya $(\rho(f^2 + g^2 + 1))^2 = 0$ olmalıdır.

$\rho(f^2 + g^2 + 1) = 0$ olması $\rho = 0$ veya $(f^2 + g^2 + 1) = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda $\rho = 0$ olması (5.1.11) ile çelişir. Buradan söyleyebiliriz ki $\rho \neq 0$ olmalıdır. O halde $f^2 + g^2 + 1 = 0$ olmalıdır. Bu ise reel değerli $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları için mümkün değildir. O halde;

$f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları kompleks değerli ise $\mathbb{Q}^3$ de bir $x(s)$ rektifiye eğrisi,

$$x(s) = \rho(s)(2f(s), 2g(s), 1 - f^2(s) - g^2(s), 1 + f^2(s) + g^2(s)) = 2\rho(s)(f(s), g(s), 1, 0)$$

şeklinde olur.

$(\rho(f^2 + g^2 + 1))^2 = \text{sabit}$ ise $\rho = \text{sabit}$ ve $f^2 + g^2 + 1 = \text{sabit}$ olmalı. Ayrıca, $f(s), g(s) \neq \text{sabit}$ olduğundan $f^2 + g^2 + 1 \neq \text{sabit}$ olmalıdır. Bu nedenle $\rho \neq \text{sabit}$ olur. Buradan $(\rho(f^2 + g^2 + 1))^2 = \text{sabit} = a^2$ olduğunu kabul edelim bu durumda ρ ,

$\rho(s) = \frac{a}{f^2 + g^2 + 1}$ şeklinde olur. Ayrıca ρ fonksiyonu $\rho(s) = \frac{1}{2\sqrt{f_s^2(s) + g_s^2(s)}}$

olduğundan $(f^2 + g^2 + 1) = 2a\sqrt{f_s^2 + g_s^2}$ yazılır. Bu halde $x(s)$ rektifiye eğrisi

$$x(s) = 2\rho(s)(f(s), g(s), 1 - a\sqrt{f_s^2 + g_s^2}, a\sqrt{f_s^2 + g_s^2})$$

şeklinde olur.

Burada ρ nun sabit ve sabit olmama durumuna göre eğrinin torsiyonunu inceleyelim.

i) $\rho \neq \text{sabit}$ ise;

$\tau = \text{sabit} = A$ olduğu kabul edilip $\varphi(s)$ ifadesini bulalım. (5.1.14) de $\tau(s) = \rho^{-1}(s)\rho_s(s)\varphi_s(s) + \varphi_{ss}(s)$ denkleminde $\varphi_s = w$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\varphi_{ss} = w_s$ olur. Böylece

$$w_s + \frac{\rho_s}{\rho} w = \tau = A$$

Langrange diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümüyle;

$$w(s) = \frac{A}{\rho(s)} \int \rho(s) ds$$

$$\varphi(s) = \frac{A}{2\rho^2(s)} \left\{ \left(\int \rho(s) ds \right)^2 + \frac{B}{\rho^2(s)} \right\} \quad (5.1.17)$$

denklemleri elde edilir.

ii) $\rho = \text{sabit}$ ise;

$\tau = \text{sabit} = A$ olduğu kabul edilip $\varphi(s)$ ifadesini bulalım. $\rho = \text{sabit}$ olduğundan $\rho_s = 0$ olur. Böylece (5.1.14) denklemi $\varphi_{ss} = A$ şeklinde olur. Bu diferensiyel denklem çözülerek,

$$\varphi(s) = \frac{A}{2} s^2 + Bs + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad (5.1.18)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.4) denkleminde;

$$x' = \alpha$$

$$x'' = \alpha' = \beta = \kappa x - y$$

$$x''' = \alpha'' = \beta' = y = \tau x$$

$$x'''' = \alpha''' = \beta'' = y' = -\kappa \alpha - \tau \beta$$

yazılarak

$$\|\beta\|^2 = \langle \kappa x - y, \kappa x - y \rangle = \kappa^2 \langle x, x \rangle - \kappa \langle x, y \rangle - \kappa \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = -2\kappa$$

$$\|\beta\|^2 = \|x''\|^2 = -2\kappa \Rightarrow \kappa = -\frac{1}{2}\|x''\|^2$$

$$\begin{aligned} \|y'\|^2 &= \langle -\kappa\alpha - \tau\beta, -\kappa\alpha - \tau\beta \rangle = \kappa^2 \langle \alpha, \alpha \rangle - 2\kappa\tau \langle \alpha, \beta \rangle + \tau^2 \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \kappa^2 + \tau^2 \end{aligned}$$

$$\|y'\|^2 = \|x''''\|^2 = \kappa^2 + \tau^2 \Rightarrow \tau^2 = \|x''''\|^2 - \kappa^2$$

$$\Rightarrow \tau = \sqrt{\|x''''\|^2 - \frac{1}{4}\|x''\|^4}$$

bulunur.

Teorem 5.1.3. Q^3 de birim hızlı bir rektifiye eğri $x(s)$ olsun. Eğer $x(s)$, $\rho = \text{sabit}$ şartı ile bir Tzitzeica eğrisi ise $a, b, c \in \mathbb{R}$ için,

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = as^2 + bs + c$$

ifadesi sağlanır.

İspat. Q^3 de birim hızlı bir $x(s)$ rektifiye eğrisi için $\rho = \text{sabit}$ olup, $\rho_s = 0$ olduğundan $\rho_{ss} = 0$ olur. $x(s)$ bir Tzitzeica eğrisi olduğundan $\tau = \text{sabit}$ olmalıdır. Ayrıca teorem 5.1.2 den $A, B, C \in \mathbb{R}$ için $\varphi(s) = \frac{A}{2}s^2 + Bs + C$ sağlanmalı. Buradan $\varphi_s = As + B$ olur.

Böylece $x(s)$ in eğriliği, $\forall s \in I$ için (5.1.14) den

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{2}\rho^{-2}\rho_s^2 - \frac{1}{2}\varphi_s^2 + \rho^{-1}\rho_{ss} \Rightarrow \kappa(s) = -\frac{1}{2}\rho^{-2}.0 - \frac{1}{2}(As + B)^2 + \rho^{-1}.0 \\ &\Rightarrow \kappa(s) = -\frac{1}{2}(A^2s^2 + 2ABs + B^2) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $x(s)$ eğrisinin torsiyonu ise $\rho_s = 0$, $\varphi_{ss} = A$ olmak üzere,

$$\tau = \rho^{-1}\rho_s\varphi_s + \varphi_{ss} = \rho^{-1}.0.2As + A = \text{sabit}$$

şeklinde bulunur. Buradan, $-\frac{A}{2} = a$, $-B = b$, $-\frac{B^2}{2A} = c \in \mathbb{R}_0$ için, $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)}$ ifadesi

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{-\frac{1}{2}A^2s^2 - ABs - \frac{B^2}{2}}{A} = -\frac{A}{2}s^2 - Bs - \frac{B^2}{2A} = as^2 + bs + c$$

şeklinde bulunur.

Örnek 5.1.1. $\mathbb{Q}^3$ de $f(s) = i \cos(ws)$, $g(s) = i \sin(ws)$ için $\rho(s) = \frac{1}{2iw}$, $w \in IR_0$ olmak

üzere $x_1(s)$ rektifiye eğrisi $x_1(s) = \frac{1}{iw}(i \cos(ws), i \sin(ws), 1, 0)$ şeklindedir. Bir diğer

örnek ise $f(s) = \tan(ws)$, $g(s) = \frac{i}{\cos(ws)}$ için $\rho(s) = \frac{\cos(ws)}{2w}$, $w \in IR_0$ olmak üzere bir

$x_2(s)$ rektifiye eğrisi $x_2(s) = \frac{\cos(ws)}{w}(\tan(ws), \frac{i}{\cos(ws)}, 1, 0)$ şeklindedir.

$f(s) = \sin(ws)$, $g(s) = \cos(ws)$ için $\rho(s) = \frac{1}{2w}$, $w, a \in IR_0$ olmak üzere

$x_3(s) = \frac{1}{w}(\sin(ws), \cos(ws), 1 - aw, aw)$ rektifiye eğrisi de bir diğer örnek olarak

verilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Hacısalıhoğlu, H. Hilmi**, 1998, Diferansiyel Geometri I. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi. Ankara.
- [2] **Hacısalıhoğlu, H. Hilmi**, 1994, Diferansiyel Geometri II. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi. Ankara.
- [3] **Hacısalıhoğlu, H. Hilmi**, 2003, Diferansiyel Geometri III. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi. Ankara.
- [4] **Chen, B. Y.**, 2003, When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane? Amer. Math. Monthly, **Vol. 110**, No.2, 147-152.
- [5] **Chen, B. Y., Dillen, F.**, 2005, Rectifying curves as centrodes and extremal curves, Bull. Inst. Math. Academia, Sinica, **33**, No.2, 277-90.
- [6] **İlarslan, K., Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M.**, 2003, Some Characterizations of Rectifying Curves in the Minkowski 3-space, Novi Sad J. Math. **Vol. 33**, No.2, 23-32.
- [7] **Ahmad, T. Ali, Onder, Mehmet A.**, 2012, Some Characterizations of Space- Like Rectifying Curves in the Minkowski Space-Time, Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences, **Vol.12**, Issue. 1, 2249-4626.
- [8] **Öztekin, H., Öğrenmiş, A. O.**, 2012, Normal Rectifying Curves in Pseudo-Galilean G_3^1 and their Characterizations J. Math. Comput. Sci. 2, No. 1, 91-100.
- [9] **Gluck, H.**, 1966, Higher curvatures of curves in Euclidean space, Amer. Math. Monthly, **Vol.73**, 699-704.
- [10] **İlarslan, K., Nesovic, E.**, 2008, Some Characterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space E^4 , Turk J. Math. **32**, 21-30.
- [11] **B. O'Neil**, 1983, Semi-Rimeannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York.
- [12] **Duggal K. L., Bejancu, A.**, 1998, Lightlike Submanifolds of Semi- Rimeannian manifolds and Applications, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [13] **Liu, H.**, 2004, Curves in the Lightlike Cone, Beitrage zur Algebra and Geometrie Contributions to Algebra and Geometry, **Vol.25**, No.1, 291-303.
- [14] **Liu, H. and Mong, Qingxian M.**, 2011, Representation Formulas of Curves in a Two and Three dimensional Lightlike Cone, Results. Math. **59**, 437-451.
- [15] **Kulahcı, M., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2007, Curves of $Aw(k)$ -type in 3-dimensional Null Cone, Physics Letters, A371, 275-277.

[16] Craşmareanu, M., 2002, Cylindrical Tzitzeica Curves Implies Forced Harmonic Oscillators, Balkan Journal of Geometry and its Applications, **7**(1), 37-42.

[17] Bila, N., 2012, Symmetry reductions for the Tzitzeica Curves equation, Math. And Computer Science Walking Papers.

ÖZGEÇMİŞ

1989 Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2011 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Bununla birlikte 2011 yılında Fırat Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Pedagojik Formasyon eğitimimi tamamladım.