

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİE GRUPLARININ İZOMETRİLERİ

Gülden ALTAY

Tez Yöneticisi
Yrd. Doç. Dr. Essin TURHAN

YÜSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ

2008

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

LİE GRUPLARININ İZOMETRİLERİ

Gülden ALTAY

Bu tez ,..... tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği/ oyçokluğu ile başarılı/ başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Essin TURHAN

Üye: Prof. Dr. Vedat ASİL

Üye: Yrd. Doç. Dr. Essin TURHAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih vesayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Essin TURHAN 'a, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT 'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gülden ALTAY

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	II
SİMGELER LİSTESİ.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
1. BÖLÜM.....	1
Temel Tanımlar ve Teoremler.....	1
2. BÖLÜM.....	15
2. 1 Simetriler Grubu.....	15
2. 2 İrtibatlı Lie grupları.....	17
2.3 Homotopi Grubu Örnekleri ve Uygulamaları.....	29
2. 4 Lie Grupları Üzerinde Sol İnvaryant Metriğin Grup İzometrilere.....	30
3. BÖLÜM.....	44
3. 1 $Heis_3$ da Homojen Geodezikler.....	46
3. 2 $Heis_3$ Üzerinde Tanımlı Lorentz Metriklerin Tamlıkları.....	52
KAYNAKLAR.....	59

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.2.1. Lie grubunda öz irtibath birleşen	19
Şekil 2.2.2. Lie grubunda diskret altgrupların çarpımı	20
Şekil 2.2.3. Homotopik eğriler	24
Şekil 2.3.1. Singüler n-küb	30
Şekil 2.4.1. İzdüşüm dönüşümü	38

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{E}^n$:n-boyutlu Öklid Uzay

$Heis_3$: 3-boyutlu Heisenberg grup

$GL(n, \mathbb{R})$:Genel Lineer grup

$g(,)$: 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde tanımlanan Lorentz iç çarpımı.

∇ : Levi-Civita konneksiyonu

S : Şekil Operatörü

R : Eğrilik tensör alanı

ρ : Ricci eğrilik tensorü

r : Skalar eğrilik

ÖZET

LİE GRUPLARININ İZOMETRİLERİ

Gülden ALTAY

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008, sayfa 61

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; grup teorisi , manifoldlar ve Lie gruplar için kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; sonlu gruplar, simetri grupları ve bunların Lie gruplarıyla arasındaki bağıntılar araştırıldı. Sonra irtibatlı Lie grupları, homotopi grupları ve temel grup incelenerek Gauus-Bonnet teoremi uygulandı. Bu bölümde son olarak Lie grupları üzerinde sol invariant Riemann metriğin grup izometrilere verildi.

Üçüncü bölüm çalışmamızın orjinal kısmını ihtiva etmektedir. Bu bölümde; Lie gruplarının uygulama alanı olarak 3-boyutlu Heisenberg gruplar incelendi. Heisenberg gruplar üzerinde tanımlanan üç ayrı Lorentz metriğin genel özellikleri verilerek, bu metriklere göre 3-boyutlu Heisenberg gruplarda homojen geodeziklerin denklemleri oluşturuldu. Ayrıca bu metriklerin geodezik tamlıkları incelendi.

Anahtar Kelimeler: Sonlu grup, Lie grup, Heisenberg grup, Riemann metrik, Lorentz metrik, Homotopi.

ABSTRACT

ISOMETRIES OF LIE GROUPS

Gülden ALTAY

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2008, sayfa 61

This thesis consist of three chapters.

In the firs chapter;fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter is searched that finite groups, symetric groups and connections of this groups with Lie groups. After, it is studied that connected Lie groups, homotopy groups and fundamental group and apply Gauss Bonnet theorem. In this chapter latest it is studied that isometries of left invariant Riemann metric which is defined on Lie groups.

The third chapter contain original part of our study. In this chapter it is studied that three dimensional Heisenberg group which is application range of Lie groups. It is given that properties of Lorentz metrics which are defined on three dimensional Heisenberg group and it is find out that equations of homogeneous geodesics in three dimensional Heisenberg group. In this chapter latest it is stuied that geodesically completeness of these Lorentz metrics metrics.

Keywords: Finite group, Lie group, Heisenberg group, Riemann metric, Lorentz metric, Homotopy.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

TANIM 1.1: G , boştan farklı bir cümle ve $\cdot : G \times G \rightarrow G$ de bir ikili işlem olsun. Eğer bu ikili işlem

$$\forall a, b \in G \text{ için } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

özellikliğini sağlarsa G ye *yarı grup* denir, [1].

TANIM 1.2: G boştan farklı bir cümle olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y \end{aligned}$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(G, \cdot)$ ikilisine bir *grup* denir.

- (i) $\forall x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
- (ii) $\forall x \in G$ için $e \cdot x = x \cdot e = x$ olacak şekilde G de bir tek e birim elemanı vardır.
- (iii) $\forall x \in G$ için $x \cdot x' = x' \cdot x = e$ olacak şekilde G de bir tek x' inversi vardır, [2].

TANIM 1.3: $(G, \cdot)$ bir grup olsun. G grubu " $\cdot$ " işlemine göre değişimli ise, yani $\forall x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ sağlanıyorsa, G ye *değişimli grup* denir, [3].

TANIM 1.4: $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \neq \emptyset$, $H \subseteq G$ olsun. $(H, \cdot)$ bir grup ise bu gruba $(G, \cdot)$ grubunun bir altgrubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir, [2].

TANIM 1.5: $(G, \cdot)$ bir grup, $H < G$ olsun. $\forall x \in G, \forall h \in H$ için

$$xHx^{-1} \in H$$

önermesi doğru ise H altgrubuna G grubunun *normal altgrubu* denir ve $H \triangleleft G$ ile gösterilir, [3].

TANIM 1.6: $(G, \cdot)$ bir grup ve e , G grubunun " $\cdot$ " işlemine göre birim elemanı olsun. Grubun $\{e\}$ ve kendisinden başka normal alt grubu yoksa G grubuna *basit grup* denir, [4].

TANIM 1.7: $(G, \cdot)$ ve $(H, \circ)$ iki grup, $f : G \longrightarrow H$ fonksiyonu $\forall a, b \in G$ için $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ özelliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna G den H a bir *homomorfizm* denir, [2].

TANIM 1.8: $f : G \longrightarrow H$ homomorfizmi 1:1 ve örten ise bu homomorfizme *izomorfizm* denir, [5].

TANIM 1.9: $f : G \longrightarrow G$ izomorfizmine G nin *otomorfizmi* denir, [6].

TANIM 1.10: G grubunun keyfi ve sabit bir elemanı a olsun. a 'ya göre G 'nin

$$f_a : G \longrightarrow G$$

$f_a(x) = axa^{-1}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona G nin *iç otomorfizmi* denir, [6].

TANIM 1.11: X boş olmayan bir cümle ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet cümlesinin herhangi bir alt cümlesi olsun. Eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir, [7].

(i) $X, \emptyset \in \tau$

(ii) τ da alınan her sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani, I herhangi bir indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \tau$ için, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

(iii) τ da alınan her sonlu sayıda elemanlarının kesişimi τ ya aittir; yani, J sonlu indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in J} \in \tau$ için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$ dır.

TANIM 1.12: X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $p, q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları, sırası ile, U ve V olsun. Eğer U ve V yi $U \cap V = \emptyset$ olabilecek şekilde seçmek mümkün ise X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzay* denir, [8].

TANIM 1.13: X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için,

(i) f sürekli,

(ii) f^{-1} mevcut,

(iii) f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna X den Y ye bir *homeomorfizm* denir, [9].

TANIM 1.14: Bir $(G, \cdot)$ grubu ve bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (G, X, τ) üçlüsüne bir *topolojik grup* denir.

- (i) X in noktalarının cümlesi ile G nin elemanlarının cümlesi aynıdır.
- (ii)

$$\begin{aligned} \cdot : X \times X &\longrightarrow X \\ (a, b) &\longrightarrow a \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

işlemi süreklidir. Burada G ye topolojik uzayın *temel grubu* ve X e de topolojik uzayın *temel uzayı* denir, [8].

TANIM 1.15: M bir topolojik uzay olsun. Eğer

- a) M bir Hausdorff uzaydır,
 - b) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin açık alt cümlesine homeomorftur,
 - c) M sayılabilir çoklukta alt cümlelerle örtülebilir,
- önergeleri sağlanıyorsa M ye n -boyutlu *topolojik manifold* denir, [9].

TANIM 1.16: E^n 'nin iki alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\Psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu için;

- (i) $\Psi \in C^k(U, V)$,
- (ii) $\Psi^{-1} : V \longrightarrow U$, $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$, önergeleri sağlanıyorsa Ψ ye C^k sınıfından *diffeomorfizm* denir, [10].

TANIM 1.17: M bir topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından differensiyellenebilir yapı tanımlanırsa M ye C^k sınıfından *differensiyellenebilir manifold* denir, [10].

TANIM 1.18: $k \leq n$ olmak üzere, M bir k -manifold ve M' de bir n -manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için M' de bir U' ve M de bir U koordinat komşuluğu var ve

$$U = \{m \in U' \mid x'_{k+1}(m) = \dots = x'_n(m) = 0\}$$

ise M ye M' nin bir *alt manifoldu* denir, [10].

TANIM 1.19: $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot)$ olmak üzere V cümlesi F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve $\otimes$ işlemi

$$\begin{aligned}\otimes : V \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \alpha \otimes \beta\end{aligned}$$

olmak üzere

- (i) $\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall a \in F$ için $(a \odot \alpha) \otimes \beta = a \odot (\alpha \otimes \beta)$
- (ii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)$
- (iii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$ özellikleri sağlamıyorsa $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot, \otimes)$

yapısına *cebiri* denir.

Eğer $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için

- a) $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$ sağlamıyorsa V ye *birleşimli cebir*,
- b) $\gamma \otimes \beta = \beta \otimes \gamma$ sağlamıyorsa V ye *değişimli cebir*,
- c) $\gamma \otimes e = e \otimes \gamma = \gamma$ sağlamıyorsa V ye *birimli cebir* denir, [1].

TANIM 1.20: $T_M(p)$ tanjant vektörlerinin cümlesi olsun.

$$\oplus : T_M(p) \times T_M(p) \longrightarrow T_M(p)$$

ve

$$\otimes : T_M(p) \times \mathbb{R} \longrightarrow T_M(p)$$

olmak üzere $\{T_M(p), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki *tanjant uzayı* denir, [9].

TANIM 1.21: $V \subset E^n$ üzerindeki bir vektör alanı,

$$\pi : \bigcup_{P \in V} T_V(P) \longrightarrow V$$

olmak üzere

$$\pi \circ X = I : V \longrightarrow V$$

dönüşümü özdeşlik fonksiyonu olacak biçimde

$$X : V \longrightarrow \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

şeklinde bir fonksiyondur.

$\chi = \{X \mid X : E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P), \pi \circ X = I, \pi : \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) \longrightarrow E^n\}$, olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu χ vektör uzayına E^n üzerindeki *vektör alanlarının uzayı* denir, [8].

TANIM 1.22: Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa (M, G) ikilisine bir *Lie grubu* denir, [8].

(i) M nin noktaları G 'nin elemanları ile çakışır.

(ii)

$$\begin{aligned} \alpha_G : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow ab^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir, [6].

TANIM 1.23: V bir K cismi üzerinde vektör uzay ve $[,] : V \times V \longrightarrow V$ dönüşümü de

(i) Bilineer

(ii) $\forall x, y \in V$ için $[x, y] = -[y, x]$,

(iii) $\forall x, y, z \in V$ için $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ şeklinde verilsin. $[,]$

dönüşümüne V üstünde bir Lie (parantez) operatörü denir, [9].

TANIM 1.24: Karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde Lie operatörü ile tanımlanan lineer bir uzaya *Lie cebiri* denir, [11].

TANIM 1.25: G ve H birer Lie grup olmak üzere, eğer $\varphi : G \longrightarrow H$ dönüşümü hem C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir hem de temel grupların bir grup homomorfizmi ise φ ye bir *Lie grup homomorfizmi* denir, [8].

TANIM 1.26: g ve h Lie cebirleri olmak üzere, eğer $\Psi : g \longrightarrow h$ dönüşümü lineer ve $\forall X, Y \in g$ için $\Psi[X, Y] = [\Psi(X), \Psi(Y)]$ ise bir *Lie cebir homomorfizmidir*. Ψ dönüşümü $1 : 1$ ve üzerine ise o zaman Ψ 'ye *izomorfizm* denir, [8].

TANIM 1.27: M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

(i) Simetrik;

$\forall p \in M, X_p, Y_p \in \chi(M)$ için

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \langle Y_p, X_p \rangle$$

(ii) Bilineerlik;

$\forall p \in M, a, b \in \mathbb{R}, X_p, Y_p, W_p, Z_p \in \chi(M)$ için

$$\langle aX_p + bY_p, Z_p \rangle = a \langle X_p, Z_p \rangle + b \langle Y_p, Z_p \rangle$$

ve

$$\langle X_p, aW_p + bZ_p \rangle = a \langle X_p, W_p \rangle + b \langle X_p, Z_p \rangle$$

(iii) Pozitif tanımlılık;

a)

$$X_p \neq 0 \text{ için } \langle X_p, X_p \rangle > 0$$

b)

$$X_p = 0 \text{ ise } \langle X_p, X_p \rangle = 0$$

özellikleri sağlamıyorsa $\langle, \rangle$ ye M üzerinde *Riemann iç çarpımı* denir. M üzerinde bu Riemann iç çarpımının tanımlanmasıyla elde edilen $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine *Riemann manifoldu* denir, [9].

TANIM 1.28: M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası da $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonu

(i) Bilineer;

$\forall p \in M, a, b \in \mathbb{R}, X_p, Y_p, W_p, Z_p \in \chi(M)$ için

$$\langle aX_p + bY_p, Z_p \rangle = a \langle X_p, Z_p \rangle + b \langle Y_p, Z_p \rangle$$

ve

$$\langle X_p, aW_p + bZ_p \rangle = a \langle X_p, W_p \rangle + b \langle X_p, Z_p \rangle$$

(ii) Simetrik;

$\forall p \in M, X_p, Y_p \in \chi(M)$ için

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \langle Y_p, X_p \rangle$$

(iii)

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } \langle X, Y \rangle = 0 \implies Y = 0 \in \chi(M)$$

özelliklerini sağlıyor ise M ye *yarı-Riemann manifoldu* denir, [9].

TANIM 1.29: M bir C^∞ -manifold olmak üzere,

$$\langle, \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilinear, nondejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir.

Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun *indeksi* denir ve v ile gösterilir, [20].

TANIM 1.30: boy $M = n$ olmak üzere $(M, \langle, \rangle)$ çifti bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $v = 1$ ise $(M, \langle, \rangle)$ çiftine bir *Lorentz manifoldu* denir, [20].

TANIM 1.31: M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde bir $p \in M$ noktası için

$$\begin{aligned} g: M &\longrightarrow \mathcal{L}(T_M(p) \times T_M(p), \mathbb{R}) \\ p &\longrightarrow g_p \end{aligned}$$

şeklinde simetrik, pozitif tanımlı bir bilinear form tanımlanmış ise g ye M üzerinde *Riemann metriği* denir.

Eğer bir M manifoldunun $\forall p \in M$ noktasında bir U komşuluğu üzerinde g formu C^r sınıfından ise g Riemann metriği C^r sınıfındandır denir, [8].

TANIM 1.32: $(G, \cdot)$ bir grup olsun. Eğer;

(i) G üzerinde bir g metriği için $\forall a, x, y \in G$ olmak üzere $g(ax, ay) = g(x, y)$ sağlanıyorsa g metriğine *sol invarianttır* denir.

(ii) G üzerinde g metriği için $\forall a, x, y \in G$ olmak üzere $g(xa, ya) = g(x, y)$ sağlanıyorsa g metriğine *sağ invarianttır* denir.

(iii) G üzerinde g metriği hem sağ invariant hem de sol invariant ise g metriğine *biinvarianttır* denir, [6].

TANIM 1.33: a) G bir Lie grup olmak üzere belli bir $g_0 \in G$ noktasında

$$\ell_{(g_0)} : G \longrightarrow G$$

dönüşümü $\forall g \in G$ için $\ell_{(g_0)}(g) = g_0g$ şeklinde tanımlanır ve *sol öteleme* adımı alır, [8].

b) G bir Lie grup olsun. Belli bir $g_0 \in G$ için

$$r_{(g_0)} : G \longrightarrow G$$

dönüşümü $\forall g \in G$ için $r_{(g_0)}(g) = gg_0$ şeklinde tanımlanır ve G üzerinde *sağ öteleme* adımı alır, [8].

TANIM 1.34: a) G bir Lie grup olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\ell_{(g_0)} : G \longrightarrow G$$

dönüşümünde $\ell_{g_0}(g_1) = g_2$ olsun. $T(g_1)$ ve $T(g_2)$ sırasıyla $g_1, g_2 \in G$ noktalarındaki tanjant vektörlerin uzayını göstermek üzere,

$$\ell_{(g_0)*} : T(g_1) \longrightarrow T(g_2)$$

dönüşümüne G üzerinde $T(g_1)$ den $T(g_2)$ ye bir *sol grup paralelizmi* denir, [8].

b) G bir Lie grup olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$r_{(g_0)} : G \longrightarrow G$$

dönüşümünde $r_{(g_0)}(g_1) = g_2$ olsun. $T(g_1)$ ve $T(g_2)$ sırasıyla $g_1, g_2 \in G$ noktalarındaki tanjant vektörlerin uzayını göstermek üzere,

$$r_{(g_0)*} : T(g_1) \longrightarrow T(g_2)$$

dönüşümüne G üzerinde $T(g_1)$ den $T(g_2)$ ye bir *sağ grup paralelizmi* denir, [8].

TANIM 1.35: G bir matris Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı X olsun. Eğer $\forall g_0, g_1 \in G$ için

$$\ell_{(g_0)*} X(g_1) = X(g_0 g_1)$$

yani $\forall g \in G$ için $\ell_{(g_0)*} \circ X = X \circ \ell(g)$ ise X vektör alanına bir *sol invaryant vektör alanı* denir.

Benzer olarak $\forall g_0, g_1 \in G$ için

$$r_{(g_0)*} X(g_1) = X(g_1 g_0)$$

yani $\forall g \in G$ için $r_{(g_0)*} \circ X = X \circ r(g)$ ise X vektör alanına bir *sağ invaryant vektör alanı* denir, [8].

TANIM 1.36: M bir Hausdorff topolojik uzay ve G bir topolojik grup olsun.

$$G \times M \longrightarrow M$$

$$(g, p) \longrightarrow g \cdot p$$

örten dönüşümünde

(i) $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $p \in M$ için

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot p = g_1 \cdot (g_2 \cdot p)$$

(ii) e, G grubunun birimi olmak üzere

$$e \cdot p = p$$

şartları sağlanıyorsa G, M üzerine *etki ediyor* denir, [6].

TANIM 1.37: $\forall p, q \in M$ için $g.p = q$ olacak şekilde $g \in G$ mevcut ise G, M üzerinde *geçişli etki ediyor* denir, [6].

TANIM 1.38:

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longrightarrow g.p \end{aligned}$$

dönüşümü sürekli ise G, M üzerinde *sürekli etki ediyor* denir, [6].

TANIM 1.39: Eğer G, M üzerinde sürekli etki ediyor ise G ye *topolojik öteleme grubu* denir, [6].

TANIM 1.40: $\forall p \in M$ için $a.p = p$, $a = e$ yi sağlıyorsa G ye *efektiftir* denir, [6].

TANIM 1.41: p, M de sabit bir nokta olsun. $G(p) = \{g \in G \mid g.p = p\}$ grubuna, G nin p noktasındaki *izotropi grubu* denir, [6].

TANIM 1.42: p, M de sabit bir nokta olsun. $G_p = \{g.p \in M \mid g \in G\}$ cümlesine G nin *yörüngesi* denir, [6].

TANIM 1.43: M bir topolojik manifold ve $A, B \in M$ olsun. $\alpha : I \longrightarrow M$ sürekli dönüşümüne M de A dan B ye bir *eğri* denir. Burada $\alpha(0) = A$ ve $\alpha(1) = B$ dir, [6].



a) Eğer $\alpha(0) = A = \alpha(1)$ ise A ve B noktaları arasındaki eğriye *kapalı eğri* denir, [14].

b) Eğer $\alpha(0) = A = \alpha(1)$ ve α dönüşümü 0 ile 1 noktaları hariç birebir ise, α dönüşümüne *basit kapalı eğri* (Jordan eğrisi) denir, [14].

c) $\alpha : I \longrightarrow M$ dönüşümü sabit dönüşüm ise $\alpha([0, 1])$ eğrisine (X, τ) uzayında *sabit eğri* denir, [14].

d) $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisinin hız vektörü T , manifoldun konneksiyonu D olmak üzere manifold içinde $D_T T = 0$ özelliğini sağlayan eğriye *geodezik* denir, [12].

TANIM 1.44: H, G grubunun bir alt cümlesi olsun. Eğer H da alınan her iki eleman sürekli bir eğri ile birleştirilebilirse H a *irtibatlıdır* denir, [15].

TANIM 1.45: Bir Lie grubunun bütün irtibatlı alt cümleleri tarafından kapsanan elemanına Lie grubunun *bileşeni (komponenti)* denir, [15].

TANIM 1.46: α ve β, M de x_0 dan x_1 e eğri olsun. Eğer

$$\begin{aligned} h : I \times I &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longrightarrow h(t, s) \end{aligned}$$

fonksiyonu için

(i) $\forall s \in I$ için $h(0, s) = x_0$ ve $h(1, s) = x_1$

(ii) $\forall t \in I$ için $h(t, 0) = \alpha(t)$ ve $h(t, 1) = \beta(t)$ özellikleri sağlanıyorsa h fonksiyonuna *homotopi*, α ve β eğrilerine *homotopiktir* denir, [6].

TANIM 1.47: $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri, $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ nin bir alt vektör uzayı olsun. $X \in \mathfrak{b}, Y \in \mathfrak{g}$ olmak üzere $[X, Y] \in \mathfrak{b}$ sağlanıyorsa $\mathfrak{b}$ ye $\mathfrak{g}$ nin *ideali* denir, [16].

TANIM 1.48: $\mathfrak{g}$, karakteristiği 0 olan bir Lie cebiri olsun. $\dot{I}z$, bir vektör uzay endomorfizminin izi olmak üzere $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ üzerinde

$$B(X, Y) = \dot{I}z(adX, adY)$$

bilineer formuna $\mathfrak{g}$ nin *Killing formu* denir, [13].

TANIM 1.49: V bir vektör uzay ve

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longrightarrow f(x, y) \end{aligned}$$

bilineer form olsun. Eğer

$$f(x, y) = 0, \forall y \in V \text{ için } x = 0$$

sağlanıyorsa f e *dejenere olmayan form* adı verilir, [13].

TANIM 1.50: $\mathfrak{g}$ karakteristiği 0 olan bir Lie cebiri olsun. Eğer $\mathfrak{g}$ nin B Killing formu dejenere değilse $\mathfrak{g}$ Lie cebiri *yarı basittir* denir, [13].

TANIM 1.51: G bir Lie grup olsun. Eğer G nin elemanları kapalı ve sınırlı bir aralıkta ise G ye *kompakt Lie grup* denir.

TANIM 1.52: G bir Lie grup ve $\tilde{X} \in L(G)$, $X \in T(G, e)$ nin yerine kullanılan vektör alanı olsun.

$$f_{\tilde{X}} : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

$\dot{f}_{\tilde{X}}(t) = \tilde{X}(f(t))$ olacak şekilde tek bir analitik homomorfizm olsun. Böylece *üstel dönüşüm*

$$\begin{aligned} \exp : L(G) &\longrightarrow G \\ \tilde{X} &\longrightarrow f_{\tilde{X}}(1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır, [6].

TANIM 1.53: G bir Lie grubu olsun.

$$\alpha : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$$

Lie grup homomorfizmine G nin *1-parametrelili alt grubu* denir, [17].

TANIM 1.54: E^n nin bir hiperyüzeyi M , M nin birim normal vektör alanı N ve E^n nin Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde *şekil operatörü* denir, [9].

TANIM 1.55: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow \det S(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(P)$ değerine de *Gauss eğriliği* denir, [9].

TANIM 1.56: G bir Lie grup olsun. $G^{(1)} = (G, G)$ ve $G^{(k+1)} = (G^{(k)}, G^{(k)})$ olmak üzere normal alt gruplardan oluşan

$$G \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \dots$$

serisini gözönüne alalım. Eğer $G^{(n)} = \{e\}$ olacak şekilde bir n sayısı varsa G ye *n-adımda çözülebilirdir* denir, [6].

TANIM 1.57: $\mathfrak{g}$ sonlu boyutlu bir Lie cebiri ve $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$ ve $\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}\mathfrak{g}^{(k)}]$ olsun. $\mathfrak{g}$ için Jacobi özdeşliğinden

$$\mathfrak{g} \triangleright \mathfrak{g}^{(1)} \triangleright \mathfrak{g}^{(2)} \triangleright \dots$$

elde ederiz. Eğer $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ olacak şekilde bir n sayısı varsa $\mathfrak{g}$ ye *n-adımda çözülebilirdir* denir, [6].

TEOREM 1.1 (Lagrange Teoremi): G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun. G sonlu n mertebeli bir grup ise H nın mertebesi G nin mertebesini böler, [1].

İSPAT: Kabul edelim ki H nın mertebesi m olsun. H nın G deki bütün sol kosetlerini göz önüne alalım. Bu kosetler ayrıktır ve H ile aynı sayıda yani m tane elemana sahiptir. Böylece eğer r tane sol koset var ise o takdirde G nin her bir elemanı sadece bir tek sol kosette bulunacağından $n = mr$ yazılabilir.

TANIM 1.58: $\mathbb{E}_1^n$ ve $\mathbb{E}_2^n$ sırası ile $\mathbb{R}_1^n$ ve $\mathbb{R}_2^n$ n - boyutlu iç çarpım uzaylarıyla birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : \mathbb{E}_1^n \longrightarrow \mathbb{E}_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

bağıntısı sağlanacak şekilde bir

$$\Psi : \mathbb{R}_1^n \longrightarrow \mathbb{R}_2^n$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye *izometri* denir, [8].

2. BÖLÜM

2.1 Simetriler Grubu

TANIM 2.1.1: G cümlesinin elemanlarının sayısı sonlu bir n ise $(G, \cdot)$ grubuna *sonlu grup* (veya n . mertebeden bir grup) denir ve $|G|$ ile gösterilir. Mertebesi sonsuz gruplara *sonsuz (free) grup* denir. Sonlu gruptaki eleman sayısına *grubun mertebesi* denir ve $|G|$ ile gösterilir, [1].

TANIM 2.1.2: Bir G cümlesi verilsin.

$$f : G \longrightarrow G$$

$1 : 1$ ve örten fonksiyonuna G nin bir *permütasyonu* denir, [1].

TANIM 2.1.3: $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_2 & a_3 & . & . & . & a_1 \end{pmatrix}$$

permütasyonuna S cümlesinin *dairesel (devir) permütasyonu* denir, [3].

TEOREM 2.1.1: S boş olmayan bir cümle, S_n de, S nin bütün permütasyonlarının cümlesi olsun. S_n cümlesi permütasyonların çarpımı işlemine göre bir gruptur,[3].

İSPAT: i) Kapalılık Özelliği:

$\forall \sigma, \tau \in S_n$ için $\sigma\tau \in S_n$ dir. Gerçekten; σ ve $\tau \in S_n$ olduğundan her ikisi de $1 : 1$ fonksiyonlardır. İki birebir fonksiyonun bileşkesi $1 : 1$ olduğundan $\sigma\tau \in S_n$ dir.

ii) Birleşme özelliği.

$\forall \sigma, \tau, \mu \in S_n$ ve $a \in S$ için

$$(\sigma\tau)\mu = \sigma(\tau\mu)$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} a[(\sigma\tau)\mu] &= [a(\sigma\tau)\mu] = [(a\sigma)\tau]\mu \\ &= (a\sigma)(\tau\mu) = a[\sigma(\tau\mu)] \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $(\sigma\tau)\mu = \sigma(\tau\mu)$ dir.

iii) Birim eleman:

$\forall a \in S$ için $a\rho_0 = a$ olacak şekilde $\rho_0 \in S_n$ birim permütasyonu vardır.

iv) İnvers eleman:

$\forall \sigma \in S_n$ elemanı için $\sigma, 1 : 1$ ve örten olduğundan σ^{-1} de $1 : 1$ ve örtendir.

$\forall a \in S$ için

$$a\rho_0 = a = a'\sigma = (a'\sigma)\sigma^{-1} = a'(\sigma\sigma^{-1})$$

olduğundan $\forall \sigma \in S_n$ için

$$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \rho_0$$

olacak şekilde bir $\sigma^{-1} \in S_n$ vardır. Böylece $(S_n, .)$ bir gruptur.

TEOREM 2.1.2: S_n, S nin bütün permütasyonlarının grubu olsun ve G grubu bir S cümlesi üzerine etki etsin. Bu etki ile

$$\Omega : G \longrightarrow S_n$$

homomorfizmi elde edilir, [6].

İSPAT: $g \in G$ ise $\tau_g : S \longrightarrow S$ dir. $\forall x \in S$ için $x = g(g^{-1}x)$ olduğundan τ_g

$$x \longrightarrow gx$$

örtendir. $x, y \in S$ olmak üzere $gx = gy, x = g^{-1}(gx) = g^{-1}(gy) = y$ yi sağlar. Bu ise τ_g

nin 1 : 1 olduğunu gösterir. Şimdi $\forall g, g' \in G$ için

$$\tau_{gg'} = \tau_g \tau_{g'} : S \longrightarrow S$$

olduğunu gösterelim.

$$\tau_{gg'} : S \longrightarrow S$$

$$x \longrightarrow (gg')x$$

$$\tau_{gg'} = (gg')x = g(x)g'(x) = \tau_g \tau_{g'}$$

dir. Böylece $\Omega : G \rightarrow S_n$ bir homomorfizmdir.

$$g \rightarrow \tau_g$$

2.2 İrtibatlı Lie Grupları

TANIM 2.2.1: (M, τ) topolojik uzayı ve $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ olmak üzere herhangi $A, B \subset M$ alt cümleleri verilsin. A^t ve B^t sırasıyla A ve B cümlelerinin tümleyenleri olmak üzere, eğer

$$A^t \cap B \neq \emptyset \vee A \cap B^t \neq \emptyset$$

ise A ve B cümlelerine *irtibatlı cümleler* denir. Eğer

$$A^t \cap B = \emptyset \wedge A \cap B^t = \emptyset$$

ise A ve B cümlelerine *irtibatlı olmayan cümleler* denir, [14].

TANIM 2.2.2: (M, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer M cümlesi boştan farklı, irtibatlı olmayan iki alt cümlelerin birleşimine eşit ise, (M, τ) uzayına *irtibatlı olmayan uzay* veya *irtibatsız uzay* denir. Eğer M cümlesi boştan farklı, irtibatlı iki cümlelerin birleşimine eşit ise, (M, τ) uzayına *irtibatlı uzay* denir, [14].

TEOREM 2.2.1: (M, τ) topolojik uzayı verilsin. Bu taktirde aşağıdaki özellikler denktir, [14].

(i) (M, τ) uzayı irtibatlı değildir.

- (ii) M cümlesi, irtibatlı olmayan ve boş olmayan iki alt cümlelerin birleşimine eşittir.
- (iii) M cümlesi, boş olmayan ve ayrık iki açık alt cümlelerin birleşimine eşittir.
- (iv) M cümlesi, boş olmayan ve ayrık iki kapalı alt cümlelerin birleşimine eşittir.
- (v) (M, τ) uzayının, boş olmayan, hem açık hem de kapalı olan öz bir alt cümlesi vardır.

İSPAT: (i) $\implies$ (ii): (M, τ) bağlantısız olsun. Öyleyse

$$A^t \cap B = \emptyset$$

$$A \cap B^t = \emptyset$$

olup A ve B irtibatsız cümlelerdir ve $M = A \cup B$ irtibatsızdır.

(ii) $\implies$ (iii): $M = A \cup B$ olacak şekilde boştan farklı, irtibatlı olmayan A ve B alt cümleleri verilsin. $A \cup B = M \in \tau$ olup, $A \cup B$ açık olduğundan A ve B cümleleri de açıktır. M irtibatsız ve $A^t \cap B = \emptyset = A \cap B^t$ olduğundan, $A \cap B = \emptyset$ olur. O halde M cümlesi, boştan farklı, ayrık, açık iki alt cümlelerin birleşimine eşittir.

(iii) $\implies$ (iv): X cümlesi, boştan farklı, ayrık, açık A ve B gibi iki alt cümlelerin birleşimine eşit olsun. $M = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan, $A = M - B$ ve $B = M - A$ olur. Dolayısıyla A ve B cümleleri aynı zamanda kapalı cümlelerdir. Böylece M cümlesi, boştan farklı, ayrık, kapalı iki alt cümlelerin birleşimine de eşittir.

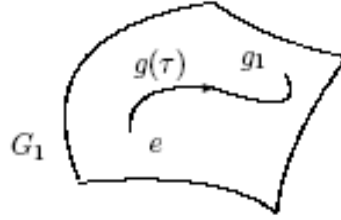
(iv) $\implies$ (v): M cümlesi, boştan farklı, ayrık, kapalı A ve B alt cümlelerinin birleşimine eşit olsun. $M = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan, $A = M - B$ olup, A cümlesi hem açık hem de kapalıdır ve boştan farklı bir öz cümledir.

(v) $\implies$ (i): $A \subset M$ alt cümlesi, boş olmayan hem açık hem kapalı öz bir alt cümle olsun. Bu durumda $B = M - A$ cümlesi de hem açık hem kapalı öz bir alt cümledir. $A \cup B = M$ olur. Böylece $A^t \cap B = A \cap B^t = A \cap B = \emptyset$ elde edilir. O halde (M, τ) uzayı bağlantılı değildir.

SONUÇ 2.2.1: (M, τ) topolojik uzayı verilsin. Bu taktirde aşağıdaki özellikler denktir:

- (i) (M, τ) uzayı irtibatlıdır.
- (ii) M cümlesi, irtibatlı ve boş olmayan iki alt cümlelerin birleşimine eşittir.
- (iii) M cümlesi, boş olmayan ve ayrık olmayan iki açık alt cümlelerin birleşimine eşittir.
- (iv) M cümlesi, boş olmayan ve ayrık olmayan iki kapalı alt cümlelerin birleşimine eşittir.
- (v) (M, τ) uzayının, boş olmayan, hem açık hem de kapalı olan alt cümleleri, sadece X ve $\emptyset$ cümleleridir, [14].

TANIM 2.2.3: G Lie grubunun birim elemanını kapsayan G_1 birleşine *öz irtibatlı birleşen* denir, şekil 2.2.1, [15].

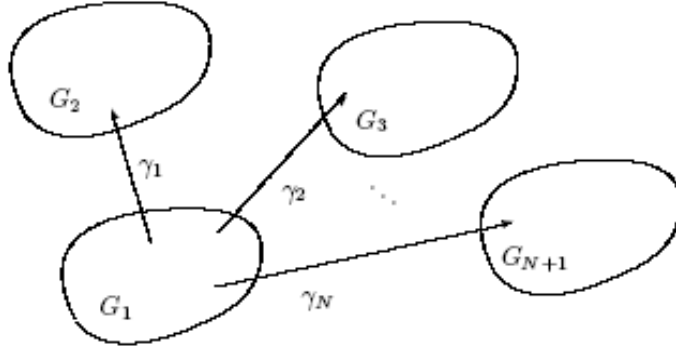


Şekil 2.2.1

TANIM 2.2.4: Bir G Lie grubu, bir çok irtibatlı G_i birleşenlerinden oluşur. Bu G_i bileşenleri genellikle kendi aralarında irtibatsızdır. Her bir G_i irtibatlı birleşeni, Γ diskret alt grubunun bazı γ_i diskret ötelemeleri tarafından G_1 alt grubu ile elde edilir. Bu yüzden bir Lie grup, G_1 ile diskret alt gruplarının çarpımı,

$$G = G_1 \times \Gamma$$

olarak tanımlanır, şekil 2.2.2,



Şekil 2.2.2

ÖRNEK 2.2.1: $G = GL(n, \mathbb{R})$ nin bir Lie grup olduğunu gösterip irtibatlılığını inceleyelim. $G = GL(n, \mathbb{R})$ olsun. $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere x_{ij} matris elemanlarını düşünelim. $x = x_{ij} \in GL(n, \mathbb{R})$ nin bir elemanını $\mathbb{R}^{n^2}$ de bir nokta olarak düşünebiliriz. Çünkü

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{n^2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \det x \end{aligned}$$

dönüşümü süreklidir ve $\varphi^{-1}(0)$, $\mathbb{R}^{n^2}$ de kapalıdır. Bu sebeple $GL(n, \mathbb{R})$ de $(\varphi^{-1}(0))'$ tümleyeni, $\mathbb{R}^{n^2}$ 'nin analitik açık bir alt manifoldunun açık bir alt cümlesidir. $z = xy^{-1}$ elemanının z_{ij} koordinatları, x_{ls} ve y_{tu} nun rasyonel fonksiyonları olarak tanımlanabilir. bu rasyonel fonksiyonların paydaları $GL(n, \mathbb{R})$ de sıfırdan farklıdır. Böylece $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ dönüşümü analitiktir ve sonuç olarak $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie gruptur. $G = GL(n, \mathbb{R})$ irtibatlı değildir. Eğer irtibatlı olsaydı, $\det$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $\det G = \mathbb{R} - \{0\}$ irtibatlı olurdu, bu ise bir çelişkidir.

Şimdi $SL(2, \mathbb{C})$ yi düşünelim. $T \in SL(2, \mathbb{C})$ olmak üzere

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

olsun. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ olup $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sağlanır. Ayrıca T nin inversi

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

dir. Eğer $T \in SU(2)$ ise

$$T^{-1} = T^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

dir. Bu yüzden $\delta = \bar{\alpha}$ ve $\gamma = -\bar{\beta}$ dir. Buradan

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

olup, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ dir. Bu sebeple $SU(2), \mathbb{C}^2$ de S^3 birim küresine izomorftur. Özellikle $SU(2)$ basit irtibatlıdır, [22].

TEOREM 2.2.2: $SO(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{R})$ nin daldırılmış bir manifoldudur, [23].

İSPAT: $SO(n, \mathbb{R})$ ve $GL(n, \mathbb{R})$ birer C^∞ manifoldlardır.

$$\begin{aligned} f : SO(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\longrightarrow f(A) \end{aligned}$$

olup, $SO(n, \mathbb{R})$ ve $GL(n, \mathbb{R})$ birer Lie gruplardır. Bu sebeple bütün elemanları differensiyellenebilirdir. Buna göre f fonksiyonu C^∞ dur. $so(n, \mathbb{R}) = \{a \in gl(n, \mathbb{R}) \mid a + a^t = 0\}$ olup,

$$f_* : so(n, \mathbb{R}) \longrightarrow gl(n, \mathbb{R})$$

dir. Bu ise f_* fonksiyonuna karşılık gelen jakobiye matrisinin $so(n, \mathbb{R})$ nin bütün elemanları için regüler olduğunu gösterir. Böylece f in bir immersiyon (daldırma) olduğu gösterilmiş olur. Şimdi ise f nin 1-boyutlu daldırma olduğunu gösterelim: F fonksiyonu 1 : 1 dir. Gerçekten $\forall A, B \in SO(n, \mathbb{R})$ için $A \neq B \implies f(A) \neq f(B)$ dir. Böylece f , 1-boyutlu daldırmadır. Bu da ispatı tamamlar.

SONUÇ 2.2.1: $SO(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ nin daldırılmış bir manifoldu ve bir altgrubu olduğundan $SO(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir kapalı Lie altgrubudur.

TANIM 2.2.5: X ve Y iki topolojik uzay olsun. f ve $g : X \longrightarrow Y$ dönüşümler olsunlar. $\exists F : X \times J \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü $\forall x \in X$ için

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{ve} \quad F(x, 1) = g(x)$$

olsun. Bu taktirde f, g ye *homotoptur* denir ve $f \sim g$ ile gösterilir, [24].

TANIM 2.2.6: $X_0 \subset X$ olsun. f ve $g : X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümler ise $\forall x_0 \in X$ için $f(x_0) = g(x_0)$ dır. $\exists F : X \times J \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümünde $\forall x \in X$ için $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ olmak üzere $\forall x_0 \in X_0$ için $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$ ise o zaman f, X_0 a nazaran g ye homotoptur denir, [24].

TANIM 2.2.7: M bir topolojik uzay, y_0 sabit bir nokta olmak üzere $\alpha : I_n \rightarrow M$ ve $\beta : I_n \rightarrow M$ sürekli dönüşümleri için, $\alpha(I_n) = \beta(I_n) = y_0$ olsun.

$$F(I_n \times J) = F(\dot{x}, t) = F(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t), \dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in I_n$$

olmak üzere

$F : I_n \times J \rightarrow M, F(x, 0) = \alpha$ ve $F(x, 1) = \beta \in F = F(x, t)$ ve $F(I_n \times J) = y_0$ ise $\alpha \sim \beta$ dir. Burada F e α dan β ya *homotopi* denir, [24].

TEOREM 2.2.3: $\alpha, \beta, \gamma, \delta : I_n \rightarrow M$ sürekli dönüşümler olmak üzere

$$\alpha(I_n) = \beta(I_n) = \gamma(I_n) = \delta(I_n) = y_0$$

ve $\alpha \stackrel{F}{\sim} \gamma, \beta \stackrel{G}{\sim} \delta$ olsun. Bu durumda $\alpha\beta \stackrel{H}{\sim} \gamma\delta$ 'dır, [24].

İSPAT: $\alpha \stackrel{F}{\sim} \gamma \implies$

$$F(x_1, \dots, x_n, 0) = \alpha(x_1, \dots, x_n)$$

$$F(x_1, \dots, x_n, 1) = \gamma(x_1, \dots, x_n)$$

$$F(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) = y_0, \dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in I_n$$

$\exists F : I_n \times J \rightarrow M$ olur. Benzer şekilde $\beta \stackrel{G}{\sim} \delta \implies$

$$G(x_1, \dots, x_n, 0) = \beta(x_1, \dots, x_n)$$

$$G(x_1, \dots, x_n, 1) = \delta(x_1, \dots, x_n)$$

$$G(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) = y_0$$

$\exists G : I_n \times J \rightarrow M$ elde edilir. Son olarak $H : I_n \times J \rightarrow M$ aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$H(x_1, \dots, x_n, t) = \begin{cases} F(2x_1, \dots, x_n, t) & 0 \leq x_1 \leq 1/2 \\ G(2x_1 - 1, \dots, x_n, t) & 1/2 \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

H sürekli olduğundan

$$H(x_1, \dots, x_n, 0) = \begin{cases} F(2x_1, \dots, x_n, 0) = \alpha(2x_1, \dots, x_n) & 0 \leq x_1 \leq 1/2 \\ G(2x_1 - 1, \dots, x_n, 0) = \beta(2x_1 - 1, \dots, x_n) & 1/2 \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

dir. Yani $H(x_1, \dots, x_n, 0) = \alpha\beta$ dır. Aynı şekilde $H(x_1, \dots, x_n, 1) = \gamma\delta$ dır. Diğer taraftan $H(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) = y_0$ dır. $\alpha(I_n) = y_0$ şartını sağlayan bütün $\alpha : I_n \rightarrow M$ sürekli dönüşümleri düşünelim. $\sim$ bağıntısı, α dönüşümlerini denklik sınıflarına ayırır, [24].

TANIM 2.2.8: Teorem 2.2.3 de tanımlanan $H(x_1, \dots, x_n, 0) = \alpha\beta$ çarpma işlemi ile $\pi_n(M, y_0) = \{\alpha \mid \alpha : I_n \longrightarrow M \text{ sürekli dönüşüm}\}$ cümlesi bir grup yapısı oluşturur. Bu gruba *homotopi grubu* denir, [24].

TANIM 2 2.9: M bir (Hausdorff) topolojik uzay, α ve β da M de x_0 dan x_1 e iki eğri olsunlar. Bu durumda

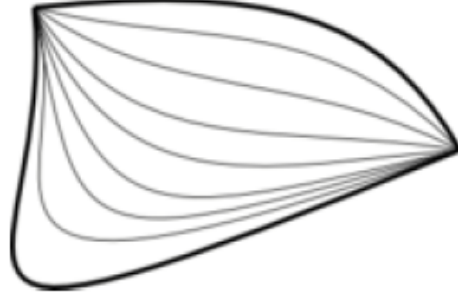
$$\begin{aligned} h : I \times I &\xrightarrow{\text{sürekli}} M \\ (t, s) &\longrightarrow h(t, s) \end{aligned}$$

dönüşümü

$$(i) \forall s \in I \text{ için } h(0, s) = x_0 \text{ ve } h(1, s) = x_1$$

$$(ii) \forall t \in I \text{ için } h(t, 0) = \alpha(t) \text{ ve } h(t, 1) = \beta(t)$$

şartlarını sağlarsa α ve β eğrileri *homotopiktir* denir. h fonksiyonuna da α dan β ya eğriler için *homotopi (denklik)* denir, şekil 2.2.3, [6].



Şekil 2.2.3: Homotopik eğriler

ÖNERME 2.2.1: Eğrilerin homotopi bağıntısı bir denklik bağıntısıdır, [6].

İSPAT: (a) Yansıma:

$$\begin{aligned} h : I \times I &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longrightarrow h(t, s) \end{aligned}$$

$\forall s \in I$ için $h(0, s) = x_0$ ve $h(1, s) = x_1$

$\forall t \in I$ için $h(t, 0) = \alpha(t)$ ve $h(t, 1) = \alpha(t)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(t) \\ \implies h(t, 0) &= h(t, 1) \\ \implies h(t, 1) &= h(t, 0) \\ \implies \alpha(t) &= \alpha(t) \end{aligned}$$

$\alpha \sim \alpha$ bulunur.

(b) Simetri:

$$\begin{aligned} \alpha \sim \beta &\implies h(0, s) = x_0, h(1, s) = x_1 \\ h(t, 0) &= \alpha(t), h(t, 1) = \beta(t) \end{aligned}$$

olup $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ aynı noktayı gösterirler. Bu durumda

$$\alpha(t) = \beta(t)$$

dir. Bu ise

$$\alpha(t) = \beta(t) \implies \beta(t) = \alpha(t)$$

olup $\beta(t)$ ile $\alpha(t)$ yine aynı noktayı göstereceklerdir. Böylece $\beta \sim \alpha$ elde edilir.

(c) Geçişme:

$$\alpha \sim \beta \implies h(t, 0) = \alpha(t) , h(t, 1) = \beta(t)$$

olup

$$\alpha(t) = \beta(t)$$

dir.

$$\beta \sim \gamma \implies h(t, 0) = \beta(t) , h(t, 1) = \gamma(t)$$

olup

$$\beta(t) = \gamma(t)$$

dir. Böylece

$$\alpha(t) = \gamma(t)$$

olup $\alpha \sim \gamma$ sağlanır.

Bu ise ispatı tamamlar.

Eğriler arasındaki homotopi bir denklik bağıntısı olduğundan, x_0 ve x_1 , α nın bitiş noktalarıdır ve $[\alpha]$, α nın denklik sınıfını gösterir. Böylece $[\alpha]$, α nın bütün homotopik eğrilerini ifade eder. Yani

$$[\alpha] = \{\beta \mid \alpha \sim \beta, h : I \times I \xrightarrow{\text{sürekli}} M\}$$

dir.

ÖNERME 2.2.2: α , x_0 dan x_1 e, β da x_1 den x_2 ye birer eğri olsunlar.

(i) iki eğrinin çarpımı da bir eğridir.

(ii) α eğrisinin başlangıç noktası ile α^{-1} eğrisinin bitiş noktası çakışıktır.

İSPAT: (i) α ve β nın çarpımı $\alpha\beta : I \longrightarrow M$ olmak üzere

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olup $t = 0$ için

$$\alpha(2.0) = \alpha(0) = x_0$$

$t = \frac{1}{2}$ için

$$\alpha\left(2.\frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = x_1$$

ve

$$\beta(2t-1) = \beta(0) = x_1$$

$t = 1$ için

$$\beta(2.1-1) = \beta(1) = x_2$$

dir. Bu ise iki eğrinin çarpımının da bir eğri olduğunu gösterir.

(ii) α nın tersi α^{-1} , x_1 den x_0 e bir eğri olup

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$$

dır. Yani

$$\alpha : \begin{matrix} I \\ x_0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} M \\ \alpha(x_0)=x_1 \end{matrix}$$

ise

$$\alpha^{-1} : \begin{matrix} M \\ \alpha(x_0)=x_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} I \\ \alpha^{-1}(x_1)=\alpha^{-1}(\alpha x_0)=x_0 \end{matrix}$$

olur. Dolayısıyla $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ şeklinde tanımlıdır. α ve α^{-1} , M de aynı nokta cümlelerini belirtir. Ancak eğriler ters yönlerde tanımlanmışlardır. Bu nedenle α nın bitim noktası, α^{-1} in başlangıç noktası olup α 'nın başlangıç noktası α^{-1} in bitiş noktası ile çakışır, [24].

ÖNERME 2.2.3: α_0, α_1 x_0 dan x_1 e,, β_0, β_1 x_1 den x_2 ye eğriler olmak üzere , $\alpha_0 \sim \alpha_1$ ve $\beta_0 \sim \beta_1$ olsun. Her homotopi sınıfı inverse sahiptir.

İSPAT: (i) ” $\sim$ ” bağıntısı denklik bağıntısı olup yansıma özelliği sağlanır. $\alpha_0^{-1} \sim \alpha_1^{-1}$ dir.

(ii) $\alpha_0\beta_0$ tanımlı ise $\alpha_1\beta_1$ de tanımlıdır. Böylece $\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$, eğrilerin çarpımının ve tersinin denklik sınıfları:

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta] \quad \text{ve} \quad [\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$$

olur. Böylece $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\alpha\alpha^{-1}] = [e]$ dir. Bu da ispatı tamamlar, [24].

TEOREM 2.2.5: M bir topolojik uzay olsun. Başlangıç ve bitiş noktası $x_0 \in M$ olan kapalı eğrilerin denklik sınıfı da $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$, $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ olsun. Bu durumda $[e_{x_0}]$ birim elemanı olmak üzere bir grup yapısı vardır. Bu gruba *temel grup* denir ve $\pi_1(M, x_0)$ ile gösterilir. Bu yapı

$$\pi_1(M, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha(x_0), x_0 \in I\}$$

şeklindedir, [6].

İSPAT: Temel grubun grup yapısını gösterelim:

$$\begin{aligned} \cdot : \pi_1(M, x_0) \times \pi_1(M, x_0) &\longrightarrow \pi_1(M, x_0) \\ ([\alpha] \quad , \quad [\beta]) &\longrightarrow [\alpha] \cdot [\beta] \end{aligned}$$

olmak üzere ;

(i) **Kapalılık:** $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ olup, α nın denklik sınıflarının β nın denklik sınıflarıyla çarpımı, iki eğrinin çarpımının denklik sınıfına eşit olup kapalılık özelliği sağlanır.

(ii) **Birleşimlilik:** $\forall \alpha, \beta, \gamma$ eğrileri için

$$\begin{aligned} [\alpha]([\beta][\gamma]) &= [\alpha]([\beta\gamma]) \\ &= [\alpha(\beta\gamma)] \\ &= [(\alpha\beta)\gamma] \\ &= [\alpha\beta][\gamma] \\ &= ([\alpha][\beta])[\gamma] \end{aligned}$$

olu. Birleşimlilik özelliği sağlanır.

(iii) **Birim eleman:** $[e_{x_0}] [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] [e_{x_1}]$ olup birim elemanı vardır.

(iv) **invers eleman:** $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ şeklinde invers eleman tanımlanır.

Böylece $(\pi_1(M, x_0), \cdot)$ yapısının bir grup olduğu gösterilmiş olur.

ÖNERME 2.2.4: Temel grup bir Lie gruptur.

İSPAT:

$$\pi_1(M, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha(x_0), x_0 \in I\}$$

Bir temel grup olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \alpha_G : \pi_1(M, x_0) \times \pi_1(M, x_0) &\longrightarrow \pi_1(M, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\longrightarrow [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. α_G nin differensiyellenebilir olduğunu gösterelim: α nın denklik sınıfı tanımından

$$[\alpha] = \{\beta \mid \alpha \sim \beta, h : I \times I \xrightarrow{\text{sürekli}} M\}$$

dır. Bir fonksiyonun differensiyellenebilmesi için, o fonksiyonun her bileşenin differensiyellenebilir olması gerekir. Burada h bileşik fonksiyonu olup

$$\begin{aligned} h : I \times I &\xrightarrow{\text{sürekli}} M \\ (t, s) &\longrightarrow h(t, s) \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $\pi_1(M, x_0)$ bir topolojik gruptur ve t, s birer parametre olduğundan h differensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $[\alpha][\beta]^{-1} = [\alpha][\beta^{-1}] = [\alpha\beta^{-1}]$ dan α_G differensiyellenebilirdir. Bu da ispatı tamamlar.

TANIM 2.2.10: Eğer M irtibatlı ise $x_0, x_1 \in M$ noktaları için $\pi_1(M, x_0)$ ve $\pi_1(M, x_1)$ izomorfik gruplardır. Bu sebeple temel grup başlangıç noktası ile birlikte gösterilir ve $\pi_1(M, x_0)$ yerine $\pi_1(M)$ yazılır. $\pi_1(M)$, M 'nin temel grubudur, eğer $f : M \rightarrow N$ topolojik uzaylar arasında bir homeomorfizm ise

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(M, x_0) &\longrightarrow \pi_1(N, f(x_0)) \\ [\alpha] &\longrightarrow [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

dönüşümüne *temel grupların bir izomorfizmi* denir, [6].

2.3 Homotopi Grubu Örnekleri ve Uygulamaları

TANIM 2.3.1: E reel sayılar ekseninde $[0, 1]$ kapalı aralığının kendisiyle n -katlı kartezyen çarpımı $[0, 1]^n$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda

$$C : [0, 1]^n \xrightarrow{\text{sürekli}} A \subset E^n$$

fonksiyonuna A da bir singüler n -küb denir, [18].

TANIM 2.3.2: $A \subset E^n$ de singüler n -küblerin formal olarak toplamı ve skalar ile çarpımı ile elde edilen linner birleşime A da bir n -zincir denir, [18].

TANIM 2.3.3: M bir yüzey ve

$$C : [0, 1]^2 \rightarrow M \subset E^3$$

bir singüler 2-zincir olsun. C nin sınırladığı bölge A ise A nın C ye göre Euler karakteristiği

$$\chi_C(A) = V - E + F$$

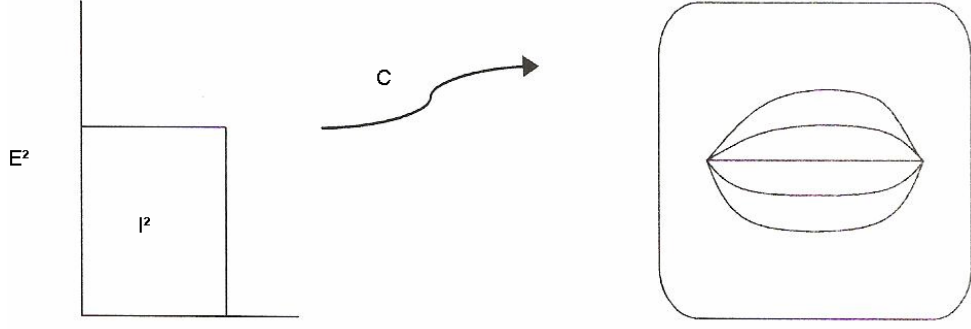
olarak tanımlanan bir tam sayıdır. Burada V , E ve F , sırası ile, C nin köşelerinin, ayrıtlarının ve yüzlerinin sayısını göstermektedir, [18].

TEOREM 2.3.1(Gauss-Bonnet Teoremi): M kompakt, irtibatlı ve yönlendirilmiş bir 2-Riemann manifoldu olsun. M nin Riemann (Gauss) eğrilik fonksiyonu K ve Euler Karakteristiği $\chi(M)$ ise

$$\int_M K = 2\pi \cdot \chi(M)$$

dir, [18].

ÖRNEK 2.3.1: Homotopik eğrilerin tanımından, bu eğrilerin birer singüler n -küb oldukları görebilir. Böylece homotopik eğriler için Euler karakteristiği hesaplanabilir ve Gauss Bonnet teoremi uygulanabilir. α ve β homotopik iki eğrimiz olsun.



Şekil 2.3.1

Şekil (2.3.1) de görüldüğü gibi homotopik eğriler için $V = 4$, $E = 4$ ve $F = 1$ dir. Böylece Euler karakteristiği

$$\begin{aligned}\chi_C(A) &= V - E + F \\ &= 4 - 4 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Bu da homotopik eğrilerin Gauss-Bonnet teoremine uygulandığını gösterir..

Gauss-Bonnet Teoremi homotopik eğrilere uygulanırsa, toplam Gauss eğriliği:

$$\begin{aligned}\int_M K &= 2\pi.1 \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

bulunur.

2.4 Lie Grup Üzerinde Sol İnvaryant Metriğin Grup İzometrilere

G , irtibatlı bir Lie grup ve $g \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned}L_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow gx\end{aligned}$$

sol öteleme,

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow xg^{-1} \end{aligned}$$

sağ öteleme olsun. G nin bütün sol ötelemelerinin cümlesi

$$\begin{aligned} L(G) = \{L_g \mid L_g : G &\longrightarrow G\}, \\ x &\longrightarrow gx \end{aligned}$$

G nin ötelemeler grubudur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} R(G) = \{R_g \mid R_g : G &\longrightarrow G\} \\ x &\longrightarrow xg^{-1} \end{aligned}$$

cümlesi G nin bir Lie ötelemeler grubudur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow L(G) \\ g &\longrightarrow L_g \end{aligned}$$

dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu gösterelim;

1) φ homomorfizmdir:

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow L(G) \\ g &\longrightarrow L_g \end{aligned}$$

olmak üzere $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow L(G) \\ g_1g_2 &\longrightarrow L_{g_1g_2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} L_{g_1g_2} : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow (g_1g_2)x \end{aligned}$$

olur. $(g_1 g_2) x = (g_1 x) (g_2 x) = L g_1 L g_2$ olup, $L g_1 g_2 = L g_1 L g_2$ 'dir. Böylece φ bir homomorfizmdir.

2) φ 1 : 1 dir: Bunun için

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \implies g_1 = g_2$$

olduğunu gösterelim. $\forall g_1 \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow L(G) \\ g_1 &\longrightarrow L_{g_1} \end{aligned}$$

olup burada

$$\begin{aligned} L g_1 : G &\longrightarrow L(G) \\ x &\longrightarrow g_1 x \end{aligned}$$

dir. Yine $\forall g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow L(G) \\ g_2 &\longrightarrow L_{g_2} \end{aligned}$$

olup, burada

$$\begin{aligned} L g_2 : G &\longrightarrow L(G) \\ x &\longrightarrow g_2 x \end{aligned}$$

'dir. $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ olduğu için $L g_1 = L g_2$ olur. Bu da $g_1 x = g_2 x$ olması demektir $\forall x \in G$ için bu eşitlik doğru olduğundan $g_1 = g_2$ elde edilir.

3) φ Örtendir: $\forall g_1 \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow L(G) \\ g_1 &\longrightarrow L_{g_1} \end{aligned}$$

dönüşümü için $L_g x = gx$ olacak şekilde her zaman bir $g \in G$ mevcuttur.

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow L(G) \\ g &\longrightarrow L_g\end{aligned}$$

dönüşümü yukarıda verilen üç özelliği sağladığı için bir izomorfizmdir.

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ bir Riemann metriği olsun. Bu metrik sol invarianttır. Gerçekten;

$$ds^2 = g(x, y, z) = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

olmak üzere. $a \in G$ için

$$\begin{aligned}g(a+x, a+y, a+z) &= d^2(a+x) + d^2(a+y) + d^2(a+z) \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= g(x, y, z)\end{aligned}$$

olur. Bu da metriğin sol invariant olduğunu gösterir.

TANIM 2.4.1: $I(G, ds^2) = \{\varphi \mid \varphi : G \longrightarrow L(G)\}$ cümlesi ds^2 nin bütün izometrilere grubu olsun. $L(G) \subset I(G, ds^2)$ dir. Eğer $I(G, ds^2), R(G)$ cümlesini de kapsarsa, ds^2 metriğine *biinvarianttır* denir, [5].

TANIM 2.4.2: G , irtibatlı, kompakt ve yarı basit bir Lie grup, ds^2 de biinvariant ise $I_0(G, ds^2)$ birim elemanı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$I_0(G, ds^2) = \{\varphi \mid \varphi(g) = L_g : G \longrightarrow G, L_g(e) = ge = g, e \in G\},$$

ve benzer olarak

$$I_0(G, ds^2) = \{\varphi \mid \varphi(g) = R_g : G \longrightarrow G, R_g(e) = eg^{-1} = g^{-1}, e \in G\}$$

dir. Dolayısıyla $L(G)R(G)$ cümlesi

$$L(G)R(G) = \{f \mid f = L_g \circ R_g, g \in G, L_g : G \longrightarrow G, R_g : G \longrightarrow G\}$$

şeklinde elde edilir., [5]. Bu durumda aşağıdaki teoremler verilebilir.

TEOREM 2.4.1: G , kompakt, irtibatlı, basit bir Lie grubu ve ds^2 de G üzerinde sol invariant bir Riemann metriği olsun. $I_0(G, ds^2) \subset L(G)R(G)$ dir. Böylece, $I_0(G, ds^2)$ de her bir f izometrisi için $f = L_x \circ R_y$ olacak şekilde G de x ve y elemanları mevcuttur, [5].

İSPAT: $I_0(G, ds^2)$, Tanım 2.4.2 gereğince $L(G)R(G)$ de kapsanır. Böylece $I_0(G, ds^2)$ de tanımlı her bir f izometrisi için öyle $x, y \in G$ vardır ki $f = L_x \circ R_y$ dir.

TEOREM 2.4.2: G , kompakt, irtibatlı bir Lie grubu ve ds^2 de G üzerinde sol invariant bir Riemann metriği olsun. Bu durumda

(i) $I_0(G, ds^2) \subset L(G)R(G)$ ise $L(G) \triangleleft I_0(G, ds^2)$ 'dir.

(ii) $I_0(G, ds^2) \subset L(G)R(G)$ dir $\iff I_0(G, ds^2)$ 'nin e deki izotropi grubu G nin iç otomorfizmler grubunda kapsanır, [5].

İSPAT: i) G , kompakt, irtibatlı bir Lie grubu ve ds^2 de G üzerinde sol invariant bir Riemann metriği olsun.. G kompakt olduğundan, $I_0(G, ds^2)$ de kompakttır. Çünkü $\varphi : G \longrightarrow L(G)$ izometrisi mevcuttur. H , G nin e elemanında $I_0(G, ds^2)$ nin izotropi alt grubu olsun. Burada

$$H = \{\varphi \mid \varphi \circ e = \varphi, \text{ } e \text{ birim dönüşüm}\}$$

şeklindedir. Böylece H , $I_0(G, ds^2)$ nin kompakt alt grubu olup

$$I_0(G, ds^2) = L(G)H, \quad L(G) \cap H = \{\text{birim}\} \quad (2.4.1)$$

dir. Bu ise $I_0(G, ds^2)$ nin $L(G) \times H$ manifolduna diffeomorfik olmasını sağlar. Böylece H irtibatlı olur.

$I_0(G, ds^2)$, $L(G)R(G)$ de kapsanır. ds^2 biinvariant olup sağ ve sol ötelemeler yer değiştirebildiğinden $L(G) \triangleleft I_0(G, ds^2)$ dir.

ii) $H \subset L(G)R(G)$ de kapsandığından H 'ın her bir elemanı $L_x \circ R_x$ formuna sahiptir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (L_x \circ R_x)(h) &= L_x(R_x(h)) \\ &= L_x(hx^{-1}) \\ &= xhx^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan H, G nin iç otomorfizmler grubunda kapsanır.

Tersine; H m, G nin iç otomorfizmler grubunda kapsandığını kabul edelim. Eğer $f \in I_0(G, ds^2)$ ise (2.4.1) eşitliğinden $f = L_x \circ h$ olacak şekilde $x \in G$ ve $h \in H$ vardır. Kabulümüzden $h = L_y \circ R_y$ olacak şekilde $y \in G$ mevcuttur.

$$(L_x \circ L_y)(g) = L_x(L_y(g)) = L_x(yg) = x(yg) = (xy)g = L_{xy}(g)$$

olup $\forall y \in G$ için sağlandığından $L_x \circ L_y = L_{xy}$ dir. Bu sebeple $f = L_{xy} \circ R_y$ dir. Böylece $I_0(G, ds^2) \subset L(G)R(G)$ dir.

TEOREM 2.4.3: G ; kompakt, irtibatlı bir Lie grubu, ds^2 de sol invaryant Riemann metriği ve $L(G) \triangleleft I_0(G, ds^2)$ olsun. $I_0(G, ds^2)$ nin $L(G)R(G)$ 'de kapsanması için G nin yarı basit olması gerek koşuldur, [5].

İSPAT: G yarı basit ve $L(G) \triangleleft I_0(G, ds^2)$ olsun. $h \in H, x \in G$ olmak üzere

$$h \circ L_x \circ h^{-1} = h(L_x h^{-1}) = h x h^{-1}$$

olup $L(G)$ de sağlanır. Burada öyle bir $y \in G$ vardır ki

$$h \circ L_x = L_y \circ h$$

dir. Çünkü $h \circ L_x \circ h^{-1}, L(G)$ de kapsandığından $y \in G$ için $h \circ L_x \circ h^{-1} = L_y$ dir. Her iki tarafı sağdan h ile işleme tabi tutarsak;

$$\begin{aligned} & (h \circ L_x \circ h^{-1}) \circ h = L_y \circ h \\ \implies & (h \circ L_x) \circ (h^{-1} \circ h) = L_y \circ h \\ \implies & (h \circ L_x) \circ e = L_y \circ h \\ \implies & (h \circ L_x) = L_y \circ h \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

olur. Bu özellik $\forall z \in G$ için $h(xz) = yh(z)$ şeklinde gösterilebilir. Gerçekten (2.4.2) den

$$\begin{aligned} & (h \circ L_x) \circ z = (L_y \circ h) \circ z \\ \implies & h(L_x z) = (L_y h) z \\ \implies & h(xz) = yh(z) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

bulunur. (2.4.3) de z yerine e alınırsa

$$h(xe) = yh(e) \quad (2.4.4)$$

olup, H izotropi grubu olduğundan $h(e) = e$ elde edilir. Böylece (2.4.4) ifadesi

$$h(x) = y$$

olur. (2.4.3) den

$$h(xz) = h(x)h(z)$$

bulunur. Bu ise H in her bir elemanının G nin bir otomorfizmi olduğunu gösterir. Yani H izotropi grubu, G nin otomorfizm grubunda kapsanır. Bu da ispatı tamamlar:

SONUÇ 2.4.1: G , kompakt, yarı basittir ve irtibatlı bir Lie grubu ve ds^2 de G 'de bir sol invariant Riemann metriği olsun. $I_0(G, ds^2)$, $L(G)R(G)$ 'de kapsanır $\iff L(G) \triangleleft I_0(G, ds^2)$, [5].

Sonlu bir $\mathfrak{g}$ Lie cebiri, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_s$, G de basit idealler olmak üzere $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$ direkt toplamına eşittir. s , $\mathfrak{g}$ nin bütün basit ideallerinin sayısını gösterebilir. $\mathfrak{g}$ Lie cebiri ile verilen irtibatlı, yarı basit Lie grubu için $s(G) = |G| = |\mathfrak{g}| = s(\mathfrak{g})$ 'dir. Bunun sebebi; $\mathfrak{g}$ sonlu olduğundan $\mathfrak{g}$ ye karşılık gelen G Lie grubu da sonludur. Dolayısıyla G nin her bir elemanına bir ideal denk gelir.

Kompakt, irtibatlı ve $\{e\}$ den farklı G Lie grubu yarı basittir. $\implies \pi_1(G)$ temel grubu sonludur. Bunun tersi de doğrudur. Eğer G , kompakt, irtibatlı, basit bir Lie grup ise G nin 3-boyutlu homotopi grubu $\pi_3(G)$, $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorfiktir. Bu sebeple G kompakt, irtibatlı ve yarı basit bir Lie grup ise $s = s(G) = |G|$ için $\pi_3(G) = \mathbb{Z}^s$ olur.

YARDIMCI TEOREM 2.4.1: K , kompakt, irtibatlı bir Lie grubu olsun. G ve H , K nin kapalı altgrupları ve $K = GH$ ve $G \cap H = \{e\}$ olsun.

- (i) G ve H irtibatlıdır.
- (ii) K yarı basittir $\iff G$ ve H 'in ikisi de yarı basittir.
- (iii) K , G ve H yarı basit ise $|K| = |G| + |H|$, [5].

İSPAT: (i) Kabulümüzden G ile H kompakt ve $K, G \times H$ 'a diffeomorfik olduğundan G ve H irtibatlıdır.

(ii) K , kompakt, irtibatlı bir Lie grup olduğundan

$$\pi_i(K) \cong \pi_i(G) + \pi_i(H), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.4.5)$$

'dır. $\pi_i(K)$ sonludur. Dolayısıyla $\pi_i(G)$ ve $\pi_i(H)$ sonludur. Tersi de doğrudur. Öyleyse G ve H yarı basittir.

(iii) K, G ve H yarı basit ise $\pi_3(K) = \mathbb{Z}^k$, $\pi_3(G) = \mathbb{Z}^g$ ve $\pi_3(H) = \mathbb{Z}^h$ dir. (2.4.5) 'den $k = g \oplus h$ olur. Çünkü $k = |K|$, $g = |G|$ ve $h = |H|$ dir.

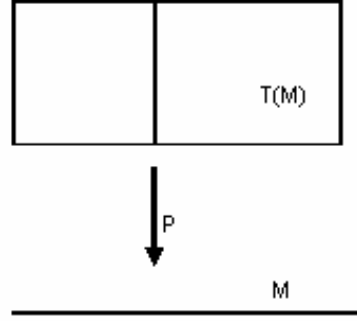
ÖNERME 2.4.2: Eğer k , kompakt ve yarı basit, g, h alt cebirlerinin direkt toplamı da $k = g \oplus h$ ise, k kompakt, yarı basittir ve $|k| = |g| + |h|$ dir, [5].

İSPAT: K, k Lie cebiri ile verilen basit irtibatlı bir Lie grup olsun. G ve H da, g ve h Lie cebirleri ile verilen K nın irtibatlı Lie altgrupları olsun. Buradan G ve H kompakt ve yarı basittir. $GH = K$ ve $G \cap H = \{e\}$ olduğundan K kompakttır. Yardımcı teorem 2.4.1 den K nın yarı basit ve $|K| = |G| + |H|$ olduğu görülür.

TANIM 2.4.3: M bir manifold ve $T(M)$ bir Hausdorff uzay olmak üzere

$$\begin{aligned} P: T(M) &\longrightarrow M \\ (p, Y) &\longrightarrow p \end{aligned}$$

dönüşümüne *izdüşüm dönüşümü* denir, [6].



Şekil 2.4.1: İzdüşüm dönüşümü

TEOREM 2.4.4: K , kompakt, irtibatlı Lie grup olsun. G ve H da K nın irtibatlı kapalı altgrupları olsun. Buna göre;

- (i) G grubu basittir,
 - (ii) $K = GH$ ve $G \cap H = \{e\}$,
 - (iii) H , K nın $\{e\}$ haricinde hiç bir normal altgrubunu kapsamaz.
- özellikleri sağlanıyor ise G , K nın normal alt grubudur, [5].

İSPAT: $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$, K , G ve H nın Lie cebirleri olsunlar. Hipotezden bu Lie cebirleri kompakttır. (i) özelliği sağlandığından dolayı G basittir. (ii) den $\mathfrak{k}$ Lie cebiri $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ Lie cebirlerinin direkt toplamıdır. Yani $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Ayrıca $G \cap H = \{e\}$ olduğundan Lie gruplarına karşılık gelen Lie cebirleri için $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ olur. (iii) den, H , $\{e\}$ nin haricinde K nın hiç bir normal altgrubunu içermediğinden H 'a karşılık gelen $\mathfrak{h}$ Lie cebiri $\{0\}$ nın haricinde $\mathfrak{k}$ nın hiç bir idealini içermez.

G nin K nın normal alt grubu olduğunu ispatlamak için $\mathfrak{g}$ nin $\mathfrak{k}$ da bir ideali olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten eğer $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ nın bir ideali ise $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{k}$ olmak üzere $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ dir. $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$ olduğundan $XY = YX$ olup G , K 'nın bir normal alt grubu olur.

" $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ da bir basit ideal ise, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ da kendi kendisinin bir idealidir."

Gerçekten $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k}$ da $\mathfrak{g}$ yi kapsayan basit bir ideal ise K nın irtibatlı, G' 'nün yerini tutan, $\mathfrak{g}'$ Lie cebiri kompakt ve basittir. G , G' 'nün kapalı bir normal alt grubudur ve

$H' = H \cap G'$ kompakttır. (ii) den $G' = GH'$ ve $G \cap H' = \{e\}$ dir. Eğer G, G' nün öz altgrubu ise H' de G' nün öz altgrubudur. Çünkü $G = \{e\}$ dir. Yardımcı teorem 2.4.1 'den dolayı H' yarı basit ve irtibatlıdır ve $|G'| = |G| + |H'|$ 'dür. $\mathbf{g}'$ basit ideal olduğundan $|\mathbf{g}'| = 1$ dir. $|\mathbf{g}'| = |G'|$ olduğundan $|G'| = 1$ dir. Buradan $|G'| = |G| + |H'|$ olduğundan $|H'| = 0$ bulunur. Bu sebeple G, G' nün öz altgrubu değildir. Yani $G = G'$ olur. Böylece $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$ ve $\mathbf{g}, \mathbf{k}$ nın bir idealidir.

Şimdi $\mathbf{g}$ nin $\mathbf{k}$ da herhangi bir basit ideal tarafından kapsanmadığını kabul edelim. $\mathbf{k}$, kompakt bir Lie cebiri olsun., $\mathbf{k}$ nın merkezi $\mathbf{k}_0$ ve $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m$, $\mathbf{k}$ da basit idealler olmak üzere $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{k}_n$ direkt toplamı olsun. Böylece $\mathbf{g}$ nin, $\mathbf{k}$ da en az bir basit ideal tarafından kapsandığı gösterilmiş olur. Bu ise $\mathbf{g}$ nin $\mathbf{k}$ da herhangi bir basit ideal tarafından kapsanmamasıyla çelişir.

$P_i : \mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}_i$ izdüşüm dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1 : \mathbf{k} &\longrightarrow \mathbf{k}_1 \\ r &\longrightarrow r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 : \mathbf{k} &\longrightarrow \mathbf{k}_2 \\ r &\longrightarrow r_2 \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n : \mathbf{k} &\longrightarrow \mathbf{k}_n \\ r &\longrightarrow r_n \end{aligned}$$

yazılır. P_i ler birer Lie cebir homomorfizmi olduğundan $\mathbf{g} \cap P_i^{-1}(0)$, $\mathbf{g}$ de bir idealdir. Bu sebeple $\mathbf{g} \cap P_i^{-1}(0) = \{0\}$ yada $\mathbf{g} \cap P_i^{-1}(0) = \mathbf{g}$ dir. $\mathbf{g} \neq \{0\}$ olduğundan $\mathbf{g} \cap P_i^{-1}(0) = \{0\}$ olacak şekilde bir i sayısı vardır. $\mathbf{g} \cap P_i^{-1}(0) = \{0\}$ ise $i \neq 0$ için $P_i(\mathbf{g})$, $\mathbf{g}$ ye izomorftir.

Gerçekten, $i = 0$ ise $P_0(\mathbf{g})$, $\mathbf{k}$ nın $\mathbf{k}_0$ merkezinde kapsanır. Böylece $\pi_0(\mathbf{g})$ değişimli olur ki bu da $\mathbf{g}$ nin basit olması ile çelişir. i lerin değiştirilmesi ile, $\mathbf{g} \cap P_1^{-1}(0) = \{0\}$ olsun. $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}_1$, $\mathbf{g}$ de bir ideal olduğundan $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}_1 = \{0\}$ yada $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}_1 = \mathbf{g}$ dir. Eğer $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}_1 = \mathbf{g}$

ise $\mathbf{g} \subset \mathbf{k}_1$ olur. Bu ise $\mathbf{g}$ nin $\mathbf{k}$ da herhangi bir basit ideal tarafından kapsanmamasıyla çelişir. Bu sebeple $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}_1 = \{0\}$ dır. $\pi_1(\mathbf{g}) \subset \mathbf{k}_1$ olduğundan

$$\mathbf{g} \cap \mathbf{P}_1(\mathbf{g}) = \{0\} \quad (2.4.6)$$

elde edilir.

$\mathbf{P}_1 : \mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}_1$ izdüşüm dönüşümü olduğundan π_1 in $\mathbf{k}_1$ deki karşılığı $\mathbf{k}_1$ in birimidir. Diğer taraftan (2.4.6) dan ve $\mathbf{g} \subset \mathbf{k}_1$ olduğundan

$$[\mathbf{g}, \mathbf{P}_1(\mathbf{g})] \subset [\mathbf{g}, \mathbf{k}_1] \subset \mathbf{k}_1$$

yazılır. Böylece

$$[\mathbf{g}, \mathbf{P}_1(\mathbf{g})] = \mathbf{P}_1[\mathbf{g}, \pi_1(\mathbf{g})] = [\mathbf{P}_1(\mathbf{g}), \mathbf{P}_1(\mathbf{g})] \subset \mathbf{P}_1(\mathbf{g}) \quad (2.4.7)$$

bulunur.

$$\mathbf{k}' = \mathbf{g} + \pi_1(\mathbf{g}) \quad (2.4.8)$$

olsun. (2.4.8) 'den, $\mathbf{k}'$ nün $\mathbf{k}$ alt cebiri olduğu görülür ve $\mathbf{P}_1(\mathbf{g}), \mathbf{k}'$ 'nün basit idealidir. $\mathbf{g}, \mathbf{k}$ da bir ideal ise (2.4.7) den $[\mathbf{g}, \mathbf{P}_1(\mathbf{g})] = \{0\}$ elde edilir. (2.4.8) den $[\mathbf{g}, \mathbf{P}_1(\mathbf{g})] = [\mathbf{P}_1(\mathbf{g}), \mathbf{P}_1(\mathbf{g})]$ dir. Böylece $\mathbf{P}_1(\mathbf{g})$ değişimlidir. Bu $\mathbf{P}_1(\mathbf{g}) \cong \mathbf{g}$ olması ile çelişir. Bu sebeple $\mathbf{g}, \mathbf{k}'$ nün bir ideali değildir.

Önerme 2.4.2 den $\mathbf{k}'$, kompakt, yarı basit ve $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{g}| + |\mathbf{P}_1(\mathbf{g})| = 2$ 'dir. $\mathbf{k}'_1 = \pi_1(\mathbf{g})$ olsun. Buradan $\mathbf{k}'$ de

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 \quad (2.4.9)$$

direkt toplamı olacak şekilde başka bir $\mathbf{k}'_2$ basit ideali vardır.

(2.4.9) ile (2.4.8) karşılaştırılırsa

$$\text{boy } \mathbf{g} = \text{boy } \mathbf{k}'_1 = \text{boy } \mathbf{k}'_2$$

elde edilir. $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}'_2, \mathbf{g}$ nin bir ideali olduğundan $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}'_2 = \{0\}$ veya $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}'_2 = \mathbf{g}$ dir. Eğer $\mathbf{g} \cap \mathbf{k}'_2 = \mathbf{g}$ ise

$$\text{boy } \mathbf{k}'_2 = \text{boy } \mathbf{g}$$

olduğundan $\mathbf{g}=\mathbf{k}'_2$ olur. Bu ise $\mathbf{g}$ nin $\mathbf{k}'$ de bir ideal olmamasıyla çelişir. Bu sebeple

$$\mathbf{k}'_2 \cap \mathbf{g} = \{0\} \quad (2.4.10)$$

bulunur. $\mathbf{h}'=\mathbf{k}'\cap\mathbf{h}$ olsun. Buradan

$$\mathbf{k}' = \mathbf{g} + \mathbf{h}' \quad (2.4.11)$$

direkt toplamıdır ve (2.4.11) ile (2.4.8) ün karşılaştırılması ile $\text{boy } \mathbf{h}' = \text{boy } \mathbf{g}$ elde edilir.

K' , $\mathbf{k}'$ ye karşılık gelen, K nın bir Lie altgrubu olsun. $H' = K' \cap H$ olsun. K' , kompakt ve semisimple olduğundan, H' kompakttır. Diğer taraftan $K' = GH'$ ve $G \cap H' = \{e\}$ yazılır. Yardımcı teorem 2.4.1 den H' irtibatlı ve yarı basittir. Ayrıca

$$|H'| = |K'| - |G| = 2 - 1 = 1$$

olduğundan H' basittir. (iii) den K , $K/H = K'/H'$ de efektif hareket ettiğinden, K' de K'/H' de efektif hareket eder. Buradan H' , K' de $\{e\}$ haricinde hiç bir normal altgrubunda kapsanmaz ve $\mathbf{h}'$, $\mathbf{k}'$ 'nün $\{0\}$ haricinde hiç bir idealini içermez.

f_i ($i = 1, 2$), (2.4.9) direkt toplamına karşılık gelen $\mathbf{k}'$ 'den $\mathbf{k}'_i$ ye izdüşüm olsun. f'_i , $\mathbf{g}$ üzerinde f_i nin kısıtlaması, f''_i , $\mathbf{h}'$ üzerine f_i 'nin kısıtlanmışısı olsun. (2.4.6) ile (2.4.10) 'den

$$f'^{-1}_1(0) = \mathbf{g} \cap \mathbf{k}'_2 = \{0\}$$

$$f'^{-1}_2(0) = \mathbf{g} \cap \mathbf{k}'_1 = \{0\}$$

bulunur. Bu sebeple f'_i , $\mathbf{g}$ den $\mathbf{k}'_i$ ye bir izomorfizmdir.

$\mathbf{h}'$ basit olduğundan $f''^{-1}_1(0) = \mathbf{h}' \cap \mathbf{k}'_2 = \{0\}$ dır yada $\mathbf{h}' \cap \mathbf{k}'_2 = \mathbf{h}'$ dır . Buradan $\mathbf{h}'=\mathbf{k}'_2$ elde edilir. $\mathbf{h}'$, $\mathbf{k}'$ nün $\{0\}$ haricinde hiç bir normal altgrubunu kapsamaz. Bu sebeple $f''^{-1}_1(0) = \{0\}$ yazılır. Benzer şekilde $f''_2(0) = \{0\}$ bulunur. Bu sebeple f''_i , $\mathbf{h}'$ den $\mathbf{k}'_i$ ye izomorfizmdir.

$h = f'^{-1}_2 \circ f''_2 \circ f'^{-1}_1 \circ f'_1$ olsun. Burada h , $\mathbf{g}$ nin bir otomorfizmidir. Kompakt, yarı basit Lie cebirinin otomorfizmi sıfır olmayan sabit vektör içermediğinden, $\mathbf{g}$ de $h(X) = X$ olacak şekilde sıfır olmayan X vektörü vardır. $Y = f'^{-1}_1 \circ f'_1(X)$ olsun. Buradan $Y \in \mathbf{h}'$

ve $f_1''(Y) = f_1'(X)$ yani $f_1(X) = f_1(Y)$ 'dir. Diğer taraftan, $f_2'^{-1} \circ f_2''(Y) = h(X) = X$ olduğundan $f_2''(Y) = f_2'(X)$ olur. Yani $f_2(X) = f_2(Y)$ dir. Böylece

$$X = f_1(X) + f_2(X) = f_1(Y) + f_2(Y) = Y$$

elde edilir. Dolayısıyla $X = Y \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}' = \{0\}$ olur. Bu $X \neq 0$ olması ile çelişir. bu çelişki $\mathfrak{g}$ nin $\mathfrak{k}$ da hiç bir basit ideal tarafından kapsanmaması kabulünden kaynaklanmaktadır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

ÖNERME 2.4.3: Teorem 2.4.4 ifadesi, Teorem 2.4.1 nin ifadesine denktir, [5].

İSPAT: Teorem 2.4.4 (ii) den K/H homojen uzayı tanımlanabilir. Yani $M = K/H$ olsun. Böylece $K \times M \longrightarrow M$ dönüşümüne göre K, M üzerinde sürekli etki

$$(g, xH) \longrightarrow (gx)H$$

eder ve $\tau(g) : M \longrightarrow M$ bir homeomorfizmdir. Böylece K, M üzerinde geçişli etki

$$xH \longrightarrow gxH$$

eder. Buna göre $M = K/H$ bir homojen uzaydır. Bu özelliğin sağlanmasıyla K nın G üzerinde efektif etki ettiği görülür.

Teorem 2.4.4 (iii) ile G 'nin her bir elemanı G üzerinde sol öteleme ile hareket eder. Çünkü H, K nın $\{e\}$ haricinde hiç bir normal altgrubunu içermez. K, G üzerine efektif etki ettiğinden $\forall p \in G$ için $a.p = p$ ise $a = e$ olacaktır. Böylece G nin her bir elemanı için $e.p = p$ olup sol öteleme sağlanır.

H kompakt olduğundan, öyle bir ds^2 Riemann metriği vardır ki K nın etkisi altında G de değişmez kahr. Buradan $K \subset I_0(G, ds^2)$ ve ds^2, G üzerinde sol invaryant Riemann metriğidir. Eğer Teorem 2.4.1 sağlanırsa $I_0(G, ds^2) \subset L(G) R(G)$ olur. Çünkü G basittir. Teorem 2.4.4 de ise $I_0(G, ds^2), L(G) R(G)$ de kapsanırsa $L(G) \triangleleft I_0(G, ds^2)$ olduğu belirtilmiştir. Böylece G, K nın normal alt grubudur.

TEOREM 2.4.5: $SO(3)$ üzerinde iki sol invaryant metriğin izometrik olması için gerek ve yeter koşul aynı karakteristik değerlere sahip olmalarıdır.

İSPAT: g_{L_1} ve g_{L_2} birer sol invaryant metrikler olmak üzere,

$$\varphi : (SO(3), g_{L_1}) \longrightarrow (SO(3), g_{L_2})$$

bir izometri olsun. Genelliği bozmadan $\varphi(I) = I$ olduğunu kabul edelim.

$$d\varphi_I : so(3) \longrightarrow so(3)$$

dönüşümü g_{L_1} nin karakteristik vektörlerini, g_{L_2} nin karakteristik vektörlerine götürsün. $d\varphi_I$ uzunluğu koruduğundan, bu iki metriğin karakteristik değerleri aynıdır.

Tersine: g_{L_1} ve g_2 , $SO(3)$ üzerinde $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ farklı karakteristik vektörleri ile verilen iki metrik olsun. İki metriğin karakteristik değerleri aynı olsun. E ve F bazları aynı yönlendirmeye sahiptir. Böylece $x \in SO(3)$ olmak üzere

$$Ad_x : so(3) \longrightarrow so(3)$$

dönüşümü E bazını F bazına götürecektir. Buradan

$$\varphi : (SO(3), g_{L_1}) \longrightarrow (SO(3), g_{L_2})$$

dönüşümü bir izometridir. Bu da ispatı tamamlar.

3. BÖLÜM

LİE GRUPLARININ UYGULAMALARI

Bu bölümde, aşağıda tanımlanan Lorentz metriklerinin tamlıkları incelenecek ve bu metriklere göre 3-boyutlu Heisenberg gruplarda homojen geodezikler hesaplanacaktır. 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde üç farklı şekilde Lorentz metrik ifade edilebilir. Yani

$$\begin{aligned} g_1 &= -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2, \\ g_2 &= dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2, \\ g_3 &= dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

'dir, [25].

TEOREM 3.1: (3.1.1) de tanımlanan g_1 , g_2 ve g_3 Lorentz metrikleri sol invaryant metriklerdir.

İSPAT: (i) (3.1.1) in birinci eşitliği $\forall a \in Heis_3$ için

$$\begin{aligned} g_1(a+x, a+y, a+z) &= -d^2(a+x) + d^2(a+y) + d^2y(a+x) + \\ &\quad 2(a+x)d(a+y)d(a+z) + d^2(a+z) \\ &= -dx^2 + dy^2 + xd^2y + 2xdydz + d^2z \\ &= -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2 = g_1(x, y, z) \end{aligned}$$

olur. Bu da g_1 metriğinin sol invaryant olmasını gösterir.

(ii) (3.1.1) in ikinci eşitliği $\forall a \in Heis_3$ için

$$\begin{aligned} g_2(a+x, a+y, a+z) &= d^2(a+x) + d^2(a+y) - d^2(a+y)(a+x) - \\ &\quad 2(a+x)d(a+y)d(a+z) - d^2(a+z) \\ &= -dx^2 + dy^2 - xd^2y - 2xdydz - d^2z \\ &= -dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2 = g_2(x, y, z) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise g_2 metriğinin sol invaryant olması demektir.

(iii) (3.1.1) in üçüncü eşitliği $\forall a \in Heis_3$ için

$$\begin{aligned}
g_3(a+x, a+y, a+z) &= d^2(a+x) + (a+x)^2 d^2(a+y) + d^2(a+z) + \\
&\quad 2(a+x) d(a+y) d(a+z) - [(1-(a+x)) d^2(a+y) - \\
&\quad 2(1-(a+x)) d(a+y) d(a+z) + d^2(a+z)] \\
&= dx^2 + x^2 dy^2 + 2xdydz - [(1-x) dy^2 - 2(1-x) dydz + dz^2] \\
&= dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x) dy - dz)^2 = g_3(x, y, z)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise g_3 metriğinin sol invaryant olduğunu gösterir.

TEOREM 3.2: 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde tanımlanan

$$g_3 = dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x) dy - dz)^2$$

Lorentz metriği düzlemseldir, [26].

İSPAT: $Heis_3$ üzerinde bazları

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + (1-x) \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}$$

olarak seçelim. Bazlara göre

$$g_3(e_1, e_1) = g_3(e_2, e_2) = -g_3(e_3, e_3) = 1.$$

'dir. Bu bazlara göre

$$\nabla_{e_2} = 0, \quad \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_3} e_1 = e_2 - e_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_3 = -e_1$$

ve

$$[e_2, e_3] = 0, \quad [e_3, e_1] = e_2 - e_3, \quad [e_2, e_1] = e_2 - e_3$$

elde edilir. g_3 metriğinin düzlemsel olduğunu göstermek için

$$R(e_1, e_3) = R(e_1, e_2) = R(e_2, e_3) = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Eğrilik tensörü için

$$R(x, y) = \nabla_{[x, y]} - \nabla_x \nabla_y + \nabla_y \nabla_x$$

eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_3) &= \nabla_{[e_1, e_3]} - \nabla_{e_1} \nabla_{e_3} + \nabla_{e_3} \nabla_{e_1} \\
&= \nabla_{e_3 - e_2} - 0 + 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2) &= \nabla_{[e_1, e_2]} - \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} + \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} \\
&= \nabla_{e_3 - e_2} - 0 + 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_2, e_3) &= \nabla_{[e_2, e_3]} - \nabla_{e_2} \nabla_{e_3} + \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} \\
&= 0 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_3} + \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece g_3 metriği düzlemseldir.

3.1 $Heis_3$ Grubunda Homojen Geodezikler

TANIM 3.1.1: H bir diferensiyellenebilir manifold ve K bir Lie grup olsun. Eğer

i) $\forall k_1, k_2 \in K$ ve $\forall p \in H$ için

$$(k_1 k_2) \cdot p = k_1 \cdot (k_2 \cdot p),$$

ii) $\forall p \in H$ ve K nın birim elemanı e olmak üzere

$$\begin{aligned}
\cdot : K \times H &\longrightarrow H \\
(k, p) &\longrightarrow k \cdot p
\end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa H ya bir K -manifold denir. Bu fonksiyona da K nın H üzerine bir diferensiyellenebilir etkisi adı verilir, [19].

TANIM 3.1.2: H bir K -manifold olsun. Bir $p \in H$ için H nın

$$K \cdot p = \{k \cdot p \mid k \in K\}$$

alt cümlesine p deki K -yörünge denir. Tüm K -yörüngelerin cümlesine de yörünge uzayı adı verilir, [19].

THEOREM 3.1.1: g metriği g_1, g_2, g_3 metriklerinden biri olmak üzere $(Heis_3, g)$ 3-boyutlu Heisenberg grubu verilmiş olsun. O zaman (H_3, g) bir geodezik yörünge manifoldudur.

İSPAT: $\mathfrak{h}_3$ 3-boyutlu Heisenberg grubun Lie cebirini göstereyim. 3- boyutlu Heisenberg grup bir homojen uzay olduğundan $Heis_3 = M/K$ ve buradan $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{k}$ direkt toplamı yazılabilir. $\mathfrak{k}$, bütün self-adjoint A endomorfizmlerinin cümlesine izomorf olsun. $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazını seçelim. a, b, c reel sabitler olmak üzere

$$A(e_1) = be_2 + ce_3, \quad A(e_2) = -be_1 + ae_3, \quad A(e_3) = ce_1 + ae_2 \quad (3.1.2)$$

yazılabilir. Üç metrik için de $\mathfrak{k}$ cümlesini oluşturarak, homojen geodeziklerin denklemlerini bulmak ispatı tamamlar.

i)

$$g_1 = -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2$$

Lorentz metriği için homojen geodezikleri hesaplayalım. $\mathfrak{h}_3$ cebiri için

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x}$$

bazı mevcuttur. Bu baz için Lie operatörü

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = 0, \quad [e_1, e_2] = 0.$$

olur. Böylece

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2$$

genel halinden

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \quad (3.1.3)$$

elde edilir. Böylece Ricci eğrilik tensorü ρ yu hesaplayabiliriz:

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i$$

ifadesinde (3.1.3) gözönüne alınırsa

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_3 = \frac{1}{2} \quad (3.1.4)$$

bulunur. ρ Ricci Eğrilik Tensörü

$$\rho_1 = 2\mu_2\mu_3, \quad \rho_2 = 2\mu_1\mu_3, \quad \rho_3 = 2\mu_1\mu_2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2} \\ \rho_2 &= -\frac{1}{2} \\ \rho_3 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, ve $\mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3$ olup $b = c = 0$ elde edilir. A endomorfizmini için (3.1.2) den

$$A(e_1) = ae_2 + be_3, \quad A(e_2) = -ae_1 + ce_3, \quad A(e_3) = -be_1 - ce_2$$

elde edilir. Buradan

$$A(e_1) = 0, \quad A(e_2) = e_3, \quad A(e_3) = -e_2.$$

olur.

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + a_1A(e_1)$$

vektörünün geodezik olması için gerek ve yeter şart, $\zeta \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{cases} 0 = \zeta x_1 \\ x_3(x_1 + a_1) = \zeta x_2 \\ x_2(x_1 - a_1) = \zeta x_3 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

olmasıdır. Gerçekten

$$g_1([X, Y]_{\mathbf{h}_3}, X_{\mathbf{h}_3}) = \zeta g_1(X_{\mathbf{h}_3}, Y) \quad , \quad Y = e_i$$

yazılır. Burada sırasıyla $Y = e_1$ alınırsa

$$0 = \zeta x_1,$$

$Y = e_2$ alınırsa

$$x_3(x_1 + a_1) = \zeta x_2,$$

$Y = e_3$ alınırsa

$$x_2(x_1 - a_1) = \zeta x_3$$

elde edilir. Eğer $\zeta = 0$ ise, (3.1.5) den $x_2 = x_3 = 0$ yada $a_1 = x$ dir. $\zeta \neq 0$ için, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ dir. Sonuç olarak $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ vektörünün $\mathbf{h}_3$ de bir geodezik olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_1A_1$$

olmasıdır. Böylece $Heis_3$ deki bütün geodezikler homojen geodezikler olup $(Heis_3, g_1)$ bir geodezik yörünge manifoldudur.

ii)

$$g_2 = dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2$$

metriği için homojen geodezikleri hesaplayalım. $\mathbf{h}_3$ cebiri için

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

bazı mevcuttur.

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Bu baz için Lie operatörü

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_1, e_3] = 0.$$

dir. Böylece

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2$$

genel halinden

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1$$

elde edilir. Buradan Ricci tensor ρ (i) dekine benzer şekilde hesaplanabilir:

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i.$$

olduğundan

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_3 = -\frac{1}{2}$$

ve

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 2\mu_2\mu_3 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 2\mu_1\mu_3 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_3 &= 2\mu_1\mu_2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ ve $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$ 'dir. Böylece $a = c = 0$ dir. (3.1.1) den

$$A(e_1) = ae_2 + be_3, \quad A(e_2) = -ae_1 + ce_3, \quad A(e_3) = -be_1 - ce_2$$

ve

$$A(e_1) = e_2, \quad A(e_2) = -e_1, \quad A(e_3) = 0.$$

elde edilir.

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + a_3A(e_3)$$

vektörünün geodezik olması için gerek ve yetre koşul

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(x_3 + a_3) = \zeta x_1 \\ -x_1(x_3 - a_3) = \zeta x_2 \\ 0 = \zeta x_3 \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

olmasıdır. Gerçekten; (i) deki işlemler g_2 metriği için tekrar edilirse

$$g_2([X, Y]_{\mathbf{h}_3}, X_{\mathbf{h}_3}) = \zeta g_2(X_{\mathbf{h}_3}, Y) \quad , \quad Y = e_i$$

formülünden (3.1.6) elde edilir. Eğer $\zeta = 0$ ise, (3.1.6) dan $x_1 = x_2 = 0$ yada $a_3 = -x$ bulunur. $\zeta \neq 0$ için, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ dır. Sonuç olarak $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ vektörünün $\mathbf{h}_3$ de geodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_3A_3$$

olur. Böylece $Heis_3$ deki bütün geodezikler homojen geodezikler olup $(Heis_3, g_2)$ bir geodezik yörünge manifoldudur.

iii)

$$g_3 = dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2$$

metriği için homojen geodezikleri hesaplayalım. $\mathbf{h}_3$ cebiri için

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + (1-x) \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}$$

bazı mevcuttur. Bu baz için

$$[e_2, e_3] = 0, \quad [e_1, e_2] = e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - e_2.$$

bulunur.

$$[e_1, e_2] = (2\varepsilon - \lambda_2) e_3 - e_2, \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$[e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2 + e_3$$

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1$$

olup, $\varepsilon = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$ dir. Böylece

$$a = 0, \quad c = -b \neq 0$$

olup (3.1.1) göz önüne alınırsa

$$Ae_1 = e_2 - e_3, \quad Ae_2 = -e_1, \quad Ae_3 = -e_1$$

elde edilir.

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + a_1A(e_1)$$

geodeziktir gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} (x_2 + x_3)^2 = \zeta x_1 \\ -x_1(x_2 + x_3) = \zeta x_2 \\ x_1(x_2 - x_3) = -\zeta x_3 \end{cases} \quad (3.1.7)$$

olmasıdır. Eğer $\zeta = 0$ ise, (3.1.7) ten $x_1 = x_2 + x_3 = 0$ dir. $\zeta \neq 0$ ise, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ elde edilir. Bu nedenle geodezik vektörler

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 - (x_2 + x_3) A_3.$$

olarak verilebilir. Böylece $Heis_3$ deki bütün geodezikler homojen geodezikler olup $(Heis_3, g_3)$ bir geodezik yörünge manifoldudur.

3.2 $Heis_3$ Üzerinde Tanımlı Lorentz Metriklerin Tamlıkları

YARDIMCI TEOREM 3.2.1: Bir G Lie grup ve $\mathfrak{g}$ de bu Lie grubunun Lie cebiri olsun. ad^* , ad dönüşümünün adjoint (ek) dönüşümü olmak üzere

$$\dot{x} = ad_x x \quad (3.2.1)$$

denkleminin çözümü, $\mathfrak{g}$ nin geodezikleridir, [27].

İSPAT: ∇ , metrikle birleşen Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \text{ için } \nabla_X Y = \frac{1}{2} \{[X, Y] - ad_X^* Y - ad_Y^* X\}$$

şeklindedir. Buradan $Y = X$ alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X X &= \frac{1}{2} \{2ad_X^* X\} \\ &= ad_X^* X \end{aligned}$$

bulunur. Bu da istendir.

TEOREM 3.2.1: $\mathfrak{g}$ Lie cebiri 2-adımda çözülebilir olsun. Böylece $\mathfrak{g}$ nin değişimli, tümleyen boyutlu bir ideali vardır. Bu ideali $\mathfrak{u}$ ile gösterelim. G üzerinde bir sol-invariant

Lorentz metriğe karşılık gelen iç çarpım $\langle ., . \rangle$ ile verilsin. $\langle ., . \rangle \mid \mathbf{u}$ dejenere değilse, $e_0 \notin \mathbf{u}$ olmak üzere, $\langle e_0, \mathbf{u} \rangle = 0$ dir ve $\mathbf{g} = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbf{u}$ direkt toplamı yazılabilir. Böylece

$$S = \frac{1}{2} (ad_{e_0} + ad_{e_0}^*)$$

ve

$$L_{c(t)}^{-1} \dot{c}(t) = x_0 e_0 + x$$

olmak üzere (3.2.1) denklemleri, $\dot{x}_0$ ve $\dot{x}$ için sırası ile,

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -\frac{\langle [e_0, x], x \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} = -\frac{\langle Sx, x \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} \\ \dot{x} = x_0 (ad_{e_0}^* x). \end{cases}$$

elde edilir. Burada S şekil opeartörünü göstermektedir. Burada

$$\begin{array}{ccc} L(X) : & \mathbf{g} & \longrightarrow \mathbf{g} \\ & Y & \longrightarrow XY \end{array}$$

olmak üzere $L(X) = ad(X)$ dir. Ayrıca ad^* , ad dönüşümünün adjoint (ek) dönüşümüdür, [27].

İSPAT:

$$\begin{aligned} L_{c(t)}^{-1} \dot{c}(t) = x_0 e_0 + x &\implies \dot{c}(t) = L_{c(t)}^* x_0 e_0 + L_{c(t)}^* x \\ &= (x_0 e_0) L_{c(t)} + x L_{c(t)} \end{aligned}$$

'olur.

$$\begin{aligned} \langle Sx, x \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} (ad_{e_0} + ad_{e_0}^*) x, x \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle ad_{e_0} x, x \rangle + \langle ad_{e_0}^* x, x \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle [e_0, x], x \rangle + \langle [e_0, x], x \rangle) \\ &= \langle [e_0, x], x \rangle \end{aligned}$$

bulunur. $x_0 e_0 + x$ eğrisi bir geodezik olduğundan

$$\nabla_{(x_0 e_0 + x)} (x_0 e_0 + x) = \nabla_{x_0 e_0} x_0 e_0 + \nabla_x X = 0.$$

Böylece

$$\nabla_{x_0} x_0 e_0 + \nabla_{e_0} e_0 x_0 = -\nabla_x X \quad (3.2.2)$$

elde edilir. $\nabla_{e_0} e_0 = 0$ olduğundan (3.2.2) de göz önüne alınırsa

$$\dot{x}_0 e_0 = -\dot{x}$$

olur.

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}_0 e_0, e_0 \rangle &= -\langle \dot{x}, e_0 \rangle \\ &= -\langle [e_0, x], x \rangle \\ \implies \dot{x}_0 \langle e_0, e_0 \rangle &= -\langle [e_0, x], x \rangle \\ \implies \dot{x}_0 &= -\frac{\langle [e_0, x], x \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} \end{aligned}$$

bulunur. $\langle [e_0, x], x \rangle = \langle Sx, x \rangle$ olduğundan

$$\dot{x}_0 = -\frac{\langle [e_0, x], x \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} = -\frac{\langle Sx, x \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle}$$

elde edilir. Şimdi $\dot{x}$ ile $\dot{x}_0$ arasındaki bağıntıyı gösterelim.

$$\langle \nabla_x x, e_0 \rangle = \langle Sx, x \rangle$$

, [28], olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x x, e_0 \rangle &= \langle [e_0, x], x \rangle \\ &= \langle ade_0, x \rangle \\ &= \langle I, ad_{e_0}^* x \rangle \\ \implies \langle \dot{x}, e_0 \rangle &= \langle I, ad_{e_0}^* x \rangle \end{aligned}$$

dir. Her iki tarafı x_0 ile çarparsak

$$\langle x_0 e_0, \dot{x} \rangle = \langle x_0, ad_{e_0}^* x \rangle$$

elde edilir. Bu ifade $\forall x_0 e_0$ için doğru olduğundan

$$\dot{x} = \langle x_0, ad_{e_0}^* x \rangle$$

dir. Böylece

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -\frac{\langle [e_0, x], x \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} = -\frac{\langle Sx, x \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} \\ \dot{x} = x_0 (ad_{e_0}^* x). \end{cases}$$

elde edilir.

TEOREM 3.2.2: g metriği, 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde tanımlanan bir Lorentz metrik olsun. g metriği geodezik olarak tamdır.

İSPAT: 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde (3.1.1) de tanımlanan üç tane Lorentz metriği vardır. Buna göre;

$$\begin{aligned} g_1 &= -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2, \\ g_2 &= dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2 \quad \text{ve} \\ g_3 &= dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2 \end{aligned}$$

i) g metriği

$$g_1 = -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2$$

olsun. $Heis_3$ üzerindeki bazıları da

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x}$$

olarak seçelim. Bunlara göre

$$g_1(e_1, e_1) = g_1(e_2, e_2) = -g_1(e_3, e_3) = 1.$$

olur. $\{e_2, e_3\}$ bazı üzerinde

$$\nabla_X X = ad_X^* X$$

olduğundan

$$ad_{e_2}^* e_1 = -e_3, \quad ad_{e_3}^* e_1 = -e_2$$

bulunur. $\mathbf{u}$ ideali e_1 tarafından gerilir ve null değildir. Böylece $e_2, e_3 \notin \mathbf{u}$ olmak üzere

$$g_1(e_1, \mathbf{u})|_{\mathbf{u}} = 0, \quad g_1(e_2, \mathbf{u})|_{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{ve} \quad \mathbf{h}_3 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbf{u}.$$

elde edilir. Buna göre $\{e_1, e_2, e_3\}$ sisteminin $\mathbf{h}_3$ için bir ortogonal baz olduğu söylenebilir.

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = 0, \quad [e_2, e_1] = 0.$$

olmak üzere

$$ad^* e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eğer $L_{c(t)}^{-1} c'(t) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ alınırsa, (3.2.1) denklemleri

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 x_2.$$

olur. Böylece g_1 metriği tamdır.

ii) g metriği

$$g_2 = dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2$$

olsun. $Heis_3$ üzerindeki bazları

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olarak seçelim. Bu bazlara göre

$$g_2(e_1, e_1) = g_2(e_2, e_2) = -g_2(e_3, e_3) = 1.$$

$\{e_1, e_2\}$ bazı üzerinde

$$\nabla_X X = ad_X^* X$$

olduğundan

$$ad_{e_1}^* e_3 = -e_2, \quad ad_{e_2}^* e_3 = -e_1$$

elde edilir. $\mathbf{u}$ ideali e_3 tarafından gerilir ve null değildir. Böylece $e_1, e_2 \notin \mathbf{u}$ olmak üzere

$$g_2(e_1, \mathbf{u}) \big|_{\mathbf{u}} = 0, \quad g_2(e_2, \mathbf{u}) \big|_{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{h}_3 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbf{u}.$$

bulunur.

Buna göre $\{e_1, e_2, e_3\}$ sisteminin $\mathbf{h}_3$ için bir ortogonal baz olduğunu söylenebilir ve

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_3, e_1] = 0, \quad [e_2, e_1] = 0.$$

olmak üzere

$$ad^* e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eğer $L_{c(t)^*}^{-1} c'(t) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, alınırsa (3.2.1) denklemleri

$$\dot{x}_1 = x_1 x_3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 x_3$$

$$\dot{x}_3 = 0.$$

bulunur. Böylece g_2 metriği tamdır.

iii) g metriği

$$g_3 = dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2$$

olsun $Heis_3$ üzerindeki bazları da

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + (1-x) \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}$$

olarak seçelim. Bu bazlara göre

$$g_3(e_1, e_1) = g_3(e_2, e_2) = -g_3(e_3, e_3) = 1.$$

$\mathbf{u}$ ideali $e_2 - e_3$ tarafından gerilir ve nulldur. Böylece

$$\left\{ x = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_2), \quad z = e_1 \right\}$$

yeni baz sistemini seçebiliriz. Bu bazlarla,

$$[y, z] = 2x$$

olmak üzere

$$g_3(x, y) \big|_{\mathbf{u}} = 1 \text{ ve } g_3(z, z) \big|_{\mathbf{u}} = 1$$

elde edilir. Böylece

$$ad_y^* y = z, \quad ad_z^* y = -x$$

olduğu göz önüne alınırsa, adjoint dönüşümün tanımından

$$ad^* x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Eğer $L_{c(t)^*}^{-1} c'(t) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, alınırsa (3.2.1) denklemleri

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_3$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 x_2.$$

elde edilir. Böylece g_3 metriği tamdır. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

1. Akkaş, S., Hacısalihoğlu H., H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A., 1988, “Soyut Matematik”, Ankara.
2. Warner, W.,F., 1971, “Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups”, Universty of Pennsylvania, London.
3. Çallıalp, F., "Soyut Cebir-I", 1981, H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi.
4. Hungerford, T.,W., 1974, “Algebra”, Universty of Washington.
5. Takushiro, O., Tsunero, T., 1976, “The Group of Isometries a Left Invariant Riemann Metricon a Lie group”, Osaka University, Toyonaka, Japan.
6. Sagle, A.,A., Walde, R.,E., 1973, “Introduction to Lie Groups and Lie Algebras”, Academic Pres.
7. Aslım, G., 1988, “Genel Topoloji”, Ege Üniversitesi, Bornova-İzmir.
8. Hacısalihoğlu, H.,H., 1980, “Yüksek Diferensiyel geometriye Giriş”, İstanbul.
9. Hacısalihoğlu, H.,H., 1983, “Diferensiyel geometri”, Gazi Üniversitesi, Ankara.
10. Hacısalihoğlu, H.,H., 2002, “Lineer Cebir”, Cilt 1, 7.Baskı.
11. Milicic, D., “Lectures on Lie Groups”, Utah Univ., USA.
12. Sabuncuoğlu, A., 2004, “Diferensiyel geometri”, Ankara.
13. Helgason, S., 1962, “Differential Geometry and Symmetric Spaces”, Academic Pres.
14. Yüksel, Ş., 1975, “Genel Topoloji”, Seçuk Üniversitesi.
15. Avramidi, I., 2000, “Notes on Lie Groups”, New Mexico Tech.
16. Chevalley, M., 1946, “Theory of Lie Groups”, Princeton Universty Pres, Princeton.
17. Kolar, I., MichorI, P., W., Slovak, J., 1993, “Natural Operayions in Differential Geometry”, Springer-Verlag.
18. Hacısalihoğlu, H.,H., 2003, “Diferensiyel geometri”, Cilt 3.
19. O’Neill, B., 1983, "Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity" Academic Press, Inc., New Yotk.

20. Öztekin, H., 2002, "Lorentz Uzayında Genelleştirilmiş Null Scrollar" Doktora Tezi Matematik Ana Bilim Dalı, Elazığ.
21. Bilhan, M., Güloğlu, İ., Koç, C., "Soyut Cebir" Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi.
22. Barut, A., O., Raczka, R., 1977, "Theory of Group Representations and Applications", Polish Scientific Publishers.
23. Bryant L. ,R., 1991, "An Introduction to Lie Group and Symplectic Geometry".
24. Uluçay, C., 1978, "Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri", Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara
25. Rahmani, S 1991, "Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois", North-Holland Physics Publishing.
26. Rahmani, N., Rahmani, S., 2006, "Lorentzian Geometry of the Heisenberg group", Geometriae Dedicata.
27. Milnor, J., 1976, "Curvatures of left invariant metrics on Lie groups" Advances in mathematics.
28. Guediri, M. 1996, "On completeness of left invariant Lorentz metrics on solvable Lie groups.", Revista Mathematica.
29. Guediri, M. 2003 "Lorentz geometry of 2-step nilpotent Lie groups", Geometriae dedicata.
30. Guediri, M. 2002, "On the nonexistence of closed timelike geodesics in flat Lorentz 2-step Nilmanifolds.", Transactions of the American mathematical society.
31. Calvaruso, G., Mainosci, R. A., 2006, "Homogeneous Geodesics of Three-Dimensional Unimodular Lorentzian Lie Groups" Mediterranean Journal of Mathematics, 467-481.
32. Mainosci, R. A., 2002, "Homogeneous Geodesics in a Three-Dimensional Lie Group", Comment. Math. Univ. Carolinae 43,2, 261-270.
33. Cordero, A., L., Parker, E., P., 2000, "Pseudoriemannian 2-step Nilpotent Lie groups".

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamaladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2005 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım.