

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**DEĞİŞEN KATSAYILI BAZI DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN GRUP KORUMA
YÖNTEM (GPS) UYGULAMALARI**

Esra KARATAŞ AKGÜL

Doktora Tezi
Anabilim Dalı: Matematik
Birinci Danışman: Prof. Dr. Mustafa İNÇ
İkinci Danışman: Doç. Dr. Mir Sajjad HASHEMİ

Şubat-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KATSAYILI BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
GRUP KORUMA YÖNTEM (GPS) UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ
Esra KARATAŞ AKGÜL
(131121202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 10.01.2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 03.02.2017

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü.)

Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR (İ.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Zeliha SARIATEŞ KÖRPİNAR (MŞÜ)

ŞUBAT-2017

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım kıymetli danışman hocalarım Prof. Dr. Mustafa İNÇ ve Doç. Dr. Mir Sajjad Hashemi'ye çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, hep yanımda olan sevgili aileme, benden desteğini bir an bile esirgemeyen değerli eşim Doç. Dr. Ali AKGÜL'e ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

Ayrıca 2211 Yurt İçi Doktora bursu ile çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Yetiştirme Grubuna teşekkürlerimi sunarım.

Esra KARATAŞ AKGÜL

Elazığ-2017

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VIII
TABLolar LİSTESİ.....	X
SEMBOLLER LİSTESİ.....	XI
1. BÖLÜM.....	1
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM.....	3
2.1 Temel Kavramlar.....	3
2.2 Sonlu Fark Yöntemleri.....	7
2.2.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY).....	9
2.2.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY).....	10
2.2.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY).....	11
2.3 Kararlılık Analizleri.....	12
2.3.1 Fourier Seri ve (von Neumann) Yöntemi.....	13
2.3.2 Matris Yöntemi.....	16
3. BÖLÜM.....	18
GRUP KORUMA METODU.....	18
3.1 Genişletilmiş Dinamik Sistem.....	18
3.2 Koni ve Yörüngeler.....	20
3.3 Cayley Dönüşümü ile Grup Koruma Metodu.....	21

3.4 Lorentz Grubu ve Lie Cebirinin Bazı Özellikleri.....	23
3.5 Padé Yaklaşımları ile Grup Koruma Metodu.....	26
3.6 Bir Lie Cebir Formülü.....	27
3.7 Diferansiyel Denklemler Sistemi İçin GKM.....	28
4. BÖLÜM	29
LINEER TELEGRAF DENKLEMİ	29
4.1 Sabit Katsayılı Telegraph Denkleminin GKM ile Çözümü.....	30
4.1.1 Line Metodu	31
4.1.2 Grup Koruma Metodu	32
4.1.3 Kararlılık Analizi.....	33
4.1.4 Sayısal Sonuçlar.....	35
4.2 Değişken Katsayılı Telegraph Denkleminin GKM ile Çözümü	44
4.2.1 Line Metodu	44
4.2.2 Grup Koruma Metodu	46
4.2.3 Kararlılık Analizi.....	46
4.2.4 Sayısal Sonuçlar.....	48
4.3 Sonuç	51
5. BÖLÜM	52
BURGERS DENKLEMİ.....	52
5.1 Grup Koruma Metodu.....	53
5.2 Sayısal Sonuçlar.....	55
5.3 Sonuç	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ.....	71

ÖZET

Bu tez beş bölüm olarak düzenlendi. Birinci bölümde, Grup koruma metodunun tarihçesi ile ilgili ve literatürdeki yeri hakkında bilgiler verildi.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan sonlu fark yöntemleri ile birlikte bazı temel kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümde Grup koruma metodu açıklandı.

Dördüncü ve beşinci bölümler bu tezin orjinal kısımlarını oluşturmaktadır. Dördüncü bölümde, sabit ve değişken katsayılı lineer Telegraf denklemleri hakkında genel bilgiler verildikten sonra Telegraf denklemleri için daha önceden yapılan çalışmalardan bahsedildi. Daha sonra bu tür denklemlere Grup koruma metodu uygulandı ve elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi incelendi. Bu metod ile ele alınan altı model problem çözüldü. Elde edilen sayısal çözümler literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak tablolar halinde sunuldu.

Beşinci bölümde, Burgers denklemi hakkında genel bilgiler verildikten sonra bu denkleme Grup koruma metodu uygulandı. Bu metod ile iki model problem çözüldü. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak tablolar halinde verildi.

Anahtar Kelimeler : Grup Koruma Metodu, Sonlu Fark Yöntemleri, Telegraf Denklemi, Burgers Denklemi, Kararlılık Analizi.

SUMMARY

APPLICATIONS OF GROUP PRESERVING SCHEME FOR SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

This thesis is organized in five sections. In the first chapter, some general information about the group preserving scheme and its importance in the literature are given.

In the second chapter, some fundamental concepts of the finite difference methods which are going to be used in the thesis have been presented.

In the third chapter, Group preserving scheme has been investigated.

The fourth and fifth chapters of this thesis constitute its original parts. In the fourth chapter, after general information about the linear Telegraph equation with variable and constant coefficients have been given, the previous studies about the Telegraph equations have been mentioned. After that, Group preserving scheme is applied to these equations and the stability analysis of the approximation is given. Six model problems are solved by this method. The obtained results are compared with existing results in the literature, and they are given in the form of tables.

In the fifth chapter, after general information about the Burgers equation has been given, Group preserving scheme is applied to this equation. Two model problems are solved by this method. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, and they are given in the form of tables.

Key Words : Group Preserving Scheme, Finite Difference Methods, Telegraph Equation, Burgers Equation, Stability Analysis.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 Açık Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi	9
Şekil 2.2 Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi	10
Şekil 2.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi	11
Şekil 3.1 Bir kavramsal dönüm noktasını belirten vektör alanının Minkowski uzayında silinmiş koninin yapısı x uzayında gözlenebileceği gibi yörünge, X^0 eksenini boyunca sıfır konisinin içinde yörünge bir paralel projeksiyonudur	21
Şekil 4.1 Örnek 4.1.1 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	36
Şekil 4.2 Örnek 4.1.1 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	36
Şekil 4.3 Örnek 4.1.2 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	38
Şekil 4.4 Örnek 4.1.2 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	38
Şekil 4.5 Örnek 4.1.3 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	39
Şekil 4.6 Örnek 4.1.3 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	40
Şekil 4.7 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	42
Şekil 4.8 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	42
Şekil 4.9 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	43
Şekil 4.10 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	43
Şekil 4.11 Örnek 4.2.1 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	49

Şekil 4.12 Örnek 4.2.1 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	49
Şekil 4.13 Örnek 4.2.2 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	50
Şekil 4.14 Örnek 4.2.2 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	51
Şekil 5.1 Örnek 5.2.1 için tam ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması	56
Şekil 5.2 Örnek 5.2.1 için tam ve elde edilen sayısal çözümün $\nu = 0.01$, $\nu = 0.5$ ve $\nu = 1$ için karşılaştırılması	58
Şekil 5.3 Örnek 5.2.1 için mutlak hataların $\nu = 0.01$, $\nu = 0.5$ ve $\nu = 1$ için gösterilmesi.....	59
Şekil 5.4 Örnek 5.2.2 için tam ve elde edilen sayısal çözüm sayısal çözümün Ω_1 ve Ω_2 'de karşılaştırılması	61
Şekil 5.5 Örnek 5.2.2 için mutlak hataların Ω_1 ve Ω_2 'de gösterimi.	62

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1 Örnek 4.1.1 için $\tau = 0.001$ ve $h = 2\tau/50$ adımları ile hataların karşılaştırılması.....	37
Tablo 4.2 Örnek 4.1.4'ün Ω_2 tanım kümesi için $\tau = 0.001$ ve $N = 0.002$ adımları ile hataların karşılaştırılması.....	41
Tablo 5.1 Örnek 5.2.1 için belirli noktalarda mutlak hataların karşılaştırılması....	57
Tablo 5.2 Örnek 5.2.2 için Ω'_1 de belirli noktalarda mutlak hataların karşılaştırılması	63
Tablo 5.3 Örnek 5.2.2 için Ω'_2 de belirli noktalarda $t = 3.5$ için mutlak hataların karşılaştırılması.....	63

SEMBOLLER LİSTESİ

Δ	:	Delta
Σ	:	Toplam Sembolü
α	:	Alpha
β	:	Beta
δ	:	Delta
ε	:	Epsilon
η	:	Eta
λ	:	Lambda
τ	:	Tau
Γ	:	Gamma
γ	:	Gamma
ν	:	Nu
χ	:	Chi

KISALTMALAR

GKM (GPS)	:	Grup Koruma Metodu
ASFY	:	Açık Sonlu Fark Yöntemi
KSFY	:	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi
CNSFY	:	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi
RMS	:	Root Mean Square
PC	:	Predictor-Corrector

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Doğadaki biyolojik, jeolojik veya mekanik birçok olay fizik kuralları yardımıyla cebirsel, diferansiyel veya integral denklemleri olarak tanımlanabilir. Bunları inceleyen bilim adamlarının bu olayların matematiksel modellerini oluşturmak ve bu modellerin sayısal analizini yapmak gibi iki temel görevi vardır. Doğadaki olayların matematiksel modelini oluşturmak o alanda bir altyapıyı ve belirli matematiksel araçları gerektirir. Ayrıca modellenen problemlerin analitik çözümleri ve kapalı formdaki çözümleri bulunmaya çalışılır. Fakat her problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak çoğunlukla mümkün olmayabilir. Bu durumda ise denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak önem kazanır. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi artarak devam etmiştir.

Dinamik sistemler, fiziksel bilimlerde işlemleri modellemek için en önemli araçlardan biridir. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin farklı tiplerini analiz etmek için giderek artan bir ilgi vardır. Ancak dikkate alınan çoğu denklem için bilinen genel bir çözüm metodu yoktur. Bir bilgisayar yardımıyla elde edilen sayısal yaklaşım, sadece diferansiyel denklemlerin altında yatanı anlamamızda bize yardımcı olabilir. Geçmişte pek çok sayısal metod bu iş için önerilmiştir. Euler metodu, Runge Kutta metodu, Adams-Bashforth-Moulton ve Milne metodu en iyi bilinen metodlar arasındadır. Bütün bu metodlar, fark denklemleri ve dönüşümleri üretmek için diferansiyel denklem sistemini ayrıklaştırırlar. Bu metodlar kullanılarak aynı diferansiyel denklemlerden farklı dönüşümler elde edilebilir. Fakat dönüşümün dinamiklerinin diferansiyel denklemlerin dinamiklerine yakından uygun olması amaçlanır. Ancak karşılık gelen yaklaşımın, orjinal diferansiyel denklemlerin aynı asimptotik davranışa sahip olması önemlidir. Bazı çalışmalar en ciddi sorunların ayrıklaştırılmış dinamiklerde hayali sabit noktaların ve sözde sahte çözümler olduğunu göstermiştir [1, 2, 3, 4, 5].

Sayısal metodları geliştirmek için genişletilmiş Minkowski uzayda dinamikleri ve homojen koordinatları kullanan lineer olmayan diferansiyel denklemleri integre etmek için bir yöntem göz önüne alacağız. Geleneksel sayısal yöntemler arasındaki en önemli fark bu metodların alışılmış Öklid uzayında doğrudan formüle edilmesidir, bunların hiçbir

Minkowski uzayında ele alınmamıştır. Genişletilmiş Minkowski uzayında dönüşümün formüle edilmesi-nin faydalarından biri hayali sabit noktalar ve sahte çözümlerden kaçınmaktır. Daha da önemlisi grup koruma metodlarını geliştirmek için bize olanak sağlamasıdır. Bu konu son birkaç yıl içerisinde çok fazla dikkate alınmıştır [6]-[13].

Tezimizde grup koruma metodu ile sekiz farklı problem ele aldık. Bu problemlerin bu metod ile çözümü için grup koruma metodunu tanımlayıp problemlerin sayısal çözümlerini bulduk. Bu metodla elde edilen sonuçları literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırdık. Bulunan sonuçları tablolar ve şekillerle ifade ettik.

2. BÖLÜM

2.1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel kavramlar ve yöntemler hakkında bilgi verildi.

Tanım 2.1.1

Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [14].

Tanım 2.1.2

Bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir.

n. mertebeden en genel adi diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

biçiminde verilir [14].

Tanım 2.1.3

Bağımlı değişkenin iki yada daha çok bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir ve

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0$$

formunda verilir [14].

Tanım 2.1.4

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin kuvvetine denklemin derecesi denir.

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit yada bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla

$$P(x, y) z_x + Q(x, y) z_y + R(x, y) z = S(x, y),$$

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y).$$

şeklinde verilir [15].

Tanım 2.1.5

Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) *Sınır Şartları* : Kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli; α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{Dirichlet şartı} & : u|_{\Gamma} = g, \\ \text{Neumann şartı} & : \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g, \\ \text{Robin şartı} & : \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g \end{aligned}$$

şeklinde verilirler.

(ii) *Başlangıç Şartı* : Sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevin kombinasyonu şeklindedir [16].

Tanım 2.1.6

Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [17].

Tanım 2.1.7

Bağımsız değişkenler x ve t olmak üzere U , kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü ve u da kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin tam çözümü olsun.

(m, n) -inci düğüm noktasında bir kısmi diferansiyel denkleme yaklaşan fark denklemi, $F_{m,n}(u) = 0$ olarak, (m, n) -inci düğüm noktasında sonlu fark yaklaşımının lokal kesme hatası,

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U)$$

olarak tanımlanır.

Lokal kesme hatası sonlu fark yaklaşımından elde edilecek olan çözümün kısmi diferansiyel denklemin tam çözümüne ne derece iyi yaklaştığını veren bir ölçütüdür. Taylor seri açılımının kullanılmasıyla lokal kesme hatası, h ve k nın kuvvetleri ve (mh, nk) noktasında kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olan U 'nun kısmi türevleri cinsinden kolayca bulunabilir [18].

Tanım 2.1.8

$h, k \rightarrow 0$ olduğunda lokal kesme hatasının limit değeri sıfıra yaklaşıyorsa fark denklemi tutarlıdır denir. Başka bir ifadeyle

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} T_{m,n} = 0$$

ise fark denklemi tutarlıdır denir [18].

Tanım 2.1.9

Kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu fark yöntemleri ile çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan hesaplamaların hemen hemen her aşamasında hatalar ortaya çıkmaktadır. Ortaya çıkan bu hatalar nümerik hesaplamaların ilerleyen aşamalarında artan bir şekilde büyümüyorsa kullanılan sonlu fark yöntemi kararlıdır denir [18].

Tanım 2.1.10

Zaman ve konum sıfıra yaklaştığında problemin nümerik çözümü, tam çözüme yaklaşıyorsa kullanılan sonlu fark yöntemi yakınsaktır denir. Yani,

$$\lim_{m,n \rightarrow 0} u_{m,n} = U_{m,n}$$

ise fark denklemi yakınsaktır [18].

Tanım 2.1.11

u bir diferansiyel denklemin analitik çözümü, u_n ise bu denklemin yaklaşık çözümü olsun. $|u - u_n|$ farkına yaklaşımın mutlak hatası adı verilir [19].

Tanım 2.1.12

Bir rotasyon grubu ile yakından ilgili olan grup Lorentz grubu olarak adlandırılır ve $SO(1, 1) = SO(1, 1; \mathbb{R})$ şeklinde ifade edilir. Uzayda genel lineer dönüşüm x ve t aşağıdaki gibi yazılabilir [20]:

$$x' = a_{11}x + a_{12}t$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t$$

Tanım 2.1.13

M bir topolojik uzay olsun. Eğer

- a) M bir Hausdorff uzaydır,
- b) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin açık alt cümlesine homeomorftur,
- c) M sayılabilir çoklukta alt cümlelerle örtülebilir,

önergeleri sağlanıyorsa M ye n -boyutlu topolojik manifold denir [21].

Tanım 2.1.14

M bir topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından diferansiyellenebilir yapı tanımlanırsa M ye C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir [21].

Tanım 2.1.15

Bir M diferansiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa $(M; G)$ ikilisine bir Lie grubu denir [21].

- (i) M nin noktaları G 'nin elemanları ile çıkışır.
- (ii)

$$a_G : G \times G \rightarrow G$$

$$(a \cdot b) \rightarrow ab^{-1}$$

dönüşümü diferansiyellenebilirdir [21].

Tanım 2.1.16

Karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde Lie operatörü ile tanımlanan lineer bir uzaya Lie cebiri denir [21].

2.2 Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu fark yöntemleri, lineer ve lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Genel olarak bir sonlu fark yönteminin bir kısmi diferansiyel denkleme uygulanmasında aşağıdaki yol izlenir:

★ Problemin çözüm bölgesi geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (mesh, grid) noktaları üzerinden hesaplanır.

★ Diferansiyel denklemdaki türevler yerine Taylor serisi yardımı ile elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir.

★ Fark denklemlerinde ortaya çıkabilecek çözüm bölgesi içine düşmeyen hayali düğüm noktaları üzerindeki hayali değerleri yok etmek için problemin verilen sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımı ile kolayca çözülür.

x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon U olsun. Genel olarak sonlu fark yöntemlerinde x o t düzleminde $\Delta x (\equiv h)$ ve $\Delta t (\equiv k)$ kenar uzunluklu kafeslerin kesişim yerlerine mesh veya düğüm noktaları adı verilir. Örneğin $[0, l] \times [0, \infty)$ yarı açık bölgesi üzerinde, (x_m, t_n) ile ifade edilen bir düğüm noktası

$$x_m = m\Delta x = mh, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$t_n = n\Delta t = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak verilir. Temsili bir $P(mh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri için

$$U_p = U(mh, nk) = U_{m,n} = U_m^n$$

gösterimlerinden birisi kullanılır. Bu gösterimlerin kullanılması ve hataların ihmal edilmesiyle U fonksiyonunun 1. ve 2. mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları Taylor serisi yardımı ile

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}, \quad (2.8)$$

olarak bulunur [22]. (2.1), (2.2) ve (2.3) ile verilen, x 'e göre 1. mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki nokta ileri (forward), geri (backward) ve iki nokta merkezi (central) fark formülleri denir. Benzer şekilde (2.4) ve (2.5) ile verilen t 'ye göre 1. mertebeden türev yaklaşımlara sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (2.6), (2.7) ve (2.8) ile verilen x 'e göre 2. mertebeden türev yaklaşımlarına da sırasıyla üç nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir.

Verilen bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için çeşitli yöntemler kullanılır. Bunların başlıcaları

- ★ Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi
- ★ Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi
- ★ Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemidir.

Bu yöntemlerin bir uygulanmasını vermek için

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.9)$$

parabolik denklemini

$$U(0, t) = f_1(t), \quad t \geq 0$$

$$U(l, t) = f_2(t), \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç şartına bağlı olarak göz önüne alalım. Burada $f_1(t)$, $f_2(t)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sırasıyla t 'nin ve x 'in bilinen fonksiyonları ve l ise çözüm bölgesinin tahmini uzunluğunu göstermektedir.

2.2.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY)

(2.9) denklemindeki $\frac{\partial U}{\partial t}$ ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevleri yerine

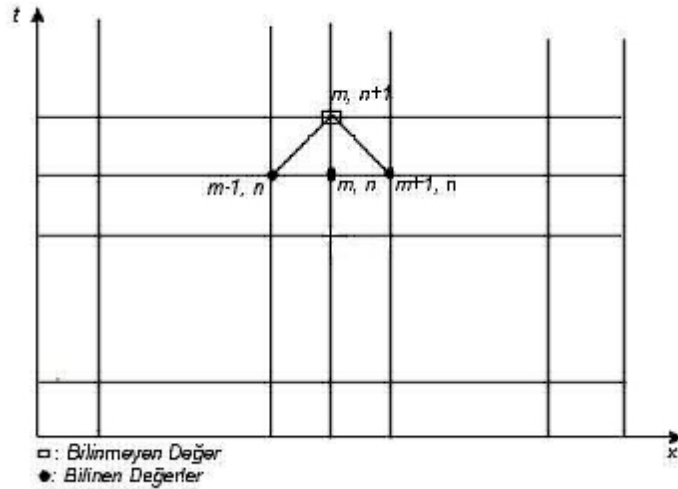
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2)$$

yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad m = 1, \dots, M - 1, \quad n = 0, \dots, N \quad (2.10)$$

olur. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup hatanın mertebesi $O(k) + O(h^2)$ 'dir. Eğer t_m zaman adımında U_m^n değerleri verilirse t_{m+1} zaman adımında U_m^{n+1} değerleri (2.10) denkleminde kolayca bulunur. Bu yöntemin şematik gösterimi Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1 Açık Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi [22].

2.2.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY)

Bu yöntemde (2.9) ile verilen ısı iletim denklemindeki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yerine (n+1)-inci zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

merkezi fark formülü ve $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k)$$

ileri fark formülü hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n \quad m = 1, \dots, M-1, \quad n = 0, \dots, N \quad (2.11)$$

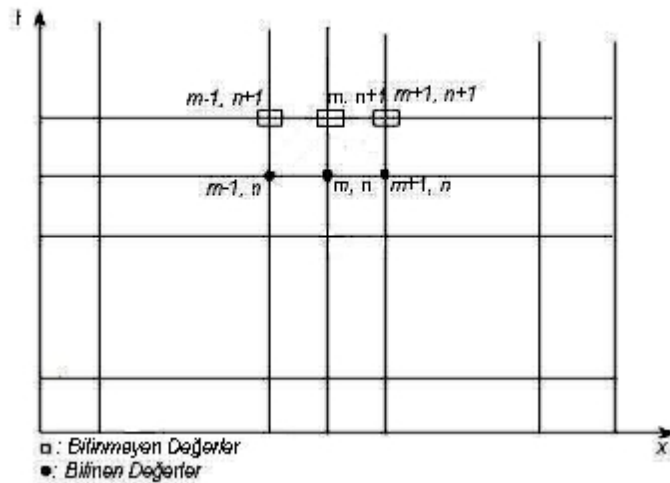
şeklinde ifade edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup hatanın mertebesi $O(k) + O(h^2)$ 'dir. $m = 1$ ve $m = M-1$ deki

$$U_0^n = f_1, \quad (2.12)$$

ve

$$U_M^n = f_2, \quad (2.13)$$

sınır şartları göz önünde bulundurulursa bu yöntem her bir zaman adımında $(M-1)$ -bilinmeyenli $(M-1)$ -tane denklemden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünü gerektirir.



Şekil 2.2 Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi [22].

2.2.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)

Bu yöntem John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından önerilen modifiye edilmiş bir kapalı yöntemdir. Bu yöntem sırasıyla (2.10) ve (2.11) denklemleriyle verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının sağ taraflarının avarajlarının alınmasıyla elde edilmiştir. O halde (2.9) ile verilen ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right\}$$

dır. Bu denklem $m = 1, \dots, M-1$ ve $n = 0, \dots, N$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n$$

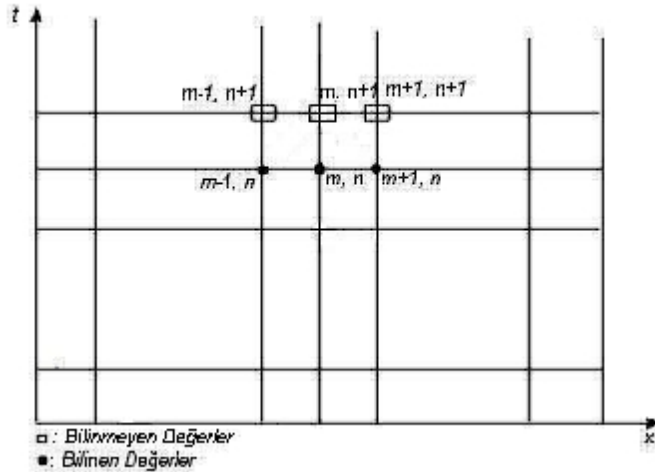
olarak yazılabilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup hatanın mertebesi $O(k^2) + O(h^2)$ 'dir. $m = 0$ ve $m = M$ deki

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1, \quad (2.14)$$

ve

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2, \quad (2.15)$$

sınır şartları göz önünde bulundurulursa bu yöntem her bir zaman adımında $(M-1)$ -bilinmeyenli $(M-1)$ -tane denklemden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünü gerektirir.



Şekil 2.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi [22].

Genel olarak sonlu fark yaklaşımındaki temel fikir, istenilen $U(x, t)$ değerleri düğüm noktalar üzerinde olacak şekilde problemin çözüm bölgesinin N tane alt aralığa bölünmesidir. Burada her bir $\Delta t (\equiv k) = 1/M$ zaman adımında, bu aralıkların uzunlukları genellikle $\Delta x (\equiv h) = l/N$ olacak şekilde eşit alınır. (2.9) diferansiyel denkleminde türevler yerine (2.1) - (2.8) ile verilen uygun fark formüllerinin yazılmasıyla, denklem için sonlu fark yaklaşımları elde edilir.

Bu bilgilerden sonra (2.9) denklemini için ağırlıklı averaj yaklaşımı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir: $\lambda \in [0, 1]$ ve $r = k / h^2$ olmak üzere (2.9) denkleminde $\partial U / \partial t$ için (2.4) ile verilen ileri fark yaklaşımı ve $\partial^2 U / \partial x^2$ için

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{1}{h^2} \{ \lambda (U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) + (1 - \lambda) (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \}$$

fark yaklaşımının yazılması ile

$$\begin{aligned} & -\lambda r U_{m-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda r) U_m^{n+1} - \lambda r U_{m+1}^{n+1} \\ & = r(1 - \lambda) U_{m-1}^n + (1 - 2r(1 - \lambda)) U_m^n + r(1 - \lambda) U_{m+1}^n \end{aligned} \quad (2.16)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada $m = 1, 2, \dots, N - 1$ 'dir. Bu yaklaşıma ağırlıklı averaj yaklaşımı denir ve bu yaklaşım $\lambda = 0$, $\lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla standart açık yöntem, Crank-Nicolson yöntemi ve kapalı yöntem olarak bilinir [22].

2.3 Kararlılık Analizleri

Bir diferansiyel denklemin sonlu fark yöntemleri çözümünde kararlılık analizi önemli rol oynar. Diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün diferansiyel denklemin tam çözümüne yakınsaması için gerekli olan şartlara kararlılık şartları ve bunların bulunması işlemine de kararlılık analizi denir.

Bir sonlu fark denkleminin (x_m, t_n) düğüm noktasındaki analitik çözümü U_m^n ve nümerik çözümü u_m^n olmak üzere kararlılık analizi

$$U_m^n - u_m^n (\equiv Z_m^n) \quad (2.17)$$

hata değerinin n artarken m değerleri için sınırlı kalması esasına dayanır [23]. Lineer sonlu fark yaklaşımlarının kararlılık analizinin incelenmesinde genellikle Fourier seri ve matris yöntemleri kullanılır.

2.3.1 Fourier Seri ve (von Neumann) Yöntemi

Fourier seri yöntemi sadece diferansiyel denklemin kararlılığını hata yayılımı için inceler. Burada T sonlu, $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ olduğunda $0 \leq t \leq T = Nk$ zaman aralığında $U(x,t)$ için lineer iki zaman seviyeli fark denkleminin kararlılığı konusu incelenecektir. Fourier serisi veya Neumann metodu, $t = 0$ düğüm noktası boyunca sonlu Fourier serisine göre başlangıç değerini ifade eder. Böylece kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan "değişkenlerine ayırma" yöntemine benzer olarak $t = 0$ için Fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon göz önüne alınır.

Her ne kadar Fourier serileri sinüs ve kosinüs fonksiyonlarına göre ifade edilebiliyorsa da cebirsel olarak üstel biçimde yazılması daha uygundur. Yani,

$$\sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

veya

$$\sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

ifadeleri yerine bu denklemlere denk olan

$$\sum A_n e^{in\pi x/l}$$

üstel ifadesi yazılabilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ ve l , x aralığının uzunluğudur.

Buna göre

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi mh/l} = A_n e^{i\beta_n mh},$$

yazılabilir. Burada $\beta_n = n\pi/Mh$ ve $Mh = l$ olarak alınmıştır. $t = 0$ pivot noktasındaki başlangıç değeri $U(mh, 0) = U_m^0$, $m = 0(1)M$ şeklinde olan $(M + 1)$ -tane denklem, $A_0, A_1, \dots, A_n$, $(N + 1)$ -tane bilinmeyen sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Bu ise başlangıç düğüm değerlerinin kompleks üstel formda açıklanabildiğini gösterir. Buna göre göz önüne alınan lineer fark denkleminin $e^{i\beta_n mh}$ gibi yalnız bir başlangıç değerinden elde edilmesi mümkündür. Çünkü lineer fark denklemleri bağımsız çözümlerin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

t değerinin artışına göre üstel dağılıma bakmak için

$$U_m^n = e^{i\beta_n x} e^{\alpha t} = e^{i\beta_n mh} e^{\alpha nk} = e^{i\beta_n mh} \xi^n$$

ifadesi göz önüne alınır. Burada α genellikle kompleks bir sabit olmak üzere $\xi = e^{\alpha k}$ olarak kullanılır ve ξ genellikle güçlendirme faktörü (amplification factor) olarak adlandırılır. Sonlu fark denkleminin kararlılığı için $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ olduğunda her $n \leq N$ için ve başlangıç şartını sağlayan tüm β_n değerleri için $|U_m^n|$ kalıntısı sabit olmalıdır. Bu ifade Lax-Richtmyer tanımı olarak bilinir. Sonlu fark denkleminin tam çözümü zamana bağlı olarak üstel biçimde artmıyor ise kararlılık için yeter ve gerek şart

$$|\xi| \leq 1$$

dir. Bununla birlikte $|U_m^n|$ zamana bağlı olarak artıyor ise kararlılık için yeter ve gerek şart K pozitif sayısı h, k ve β değerlerinden bağımsız olmak üzere

$$|\xi| \leq 1 + Kk = 1 + O(k)$$

olmasıdır.

Bu yöntem yalnızca sabit katsayılı lineer denklemler için uygulanır ve l periyodlu periyodik başlangıç değerli problemler için geçerlidir.

Üç veya daha fazla zaman seviyeli ya da iki veya daha fazla bağımlı değişken içeren fark denklemleri için von Neumann şartları gereklidir; ancak yeterli olmayabilir.

* von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi

(2.9) ile verilen ısı iletim denkleminin (2.16) ile verilen ağırlık averaj yaklaşımında

$$U_m^n = e^{i\beta_n m h} \xi^n$$

eşitliği yerine konulup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi(-\lambda r e^{-i\beta_n h} + (1 + 2\lambda r) - \lambda r e^{i\beta_n h}) = r(1 - \lambda)e^{-i\beta_n h} + (1 - 2r(1 - \lambda)) + r(1 - \lambda)e^{i\beta_n h}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Euler formülünün kullanılmasıyla ξ güçlendirme çarpanı

$$\xi = \frac{1 - 4r(1 - \lambda) \sin^2(\beta_n h/2)}{1 + 4r\lambda \sin^2(\beta_n h/2)} \quad (2.18)$$

olarak elde edilir.

*** Açık Sonlu Fark Yaklaşımının von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi**

(2.16) ağırlıklı averaj yaklaşımı $\lambda = 0$ için (2.10) ile verilen açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. $\lambda = 0$ olduğunda (2.18) ile verilen ξ değeri

$$\xi = 1 - 4r \sin^2(\beta_n h/2)$$

dir. Yöntemin kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. O halde

$$|\xi| = |-4r \sin^2(\beta_n h/2) + 1| \leq 1$$

veya

$$-2 \leq -4r \sin^2(\beta_n h/2) \leq 0$$

olmalıdır. Bu eşitliğin sağ parçasından $r > 0$, sol parçasından ise

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2(\beta_n h/2)} \leq \frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece açık sonlu fark yaklaşımı ancak

$$0 < r \leq \frac{1}{2}$$

olduğunda kararlıdır.

*** Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi**

(2.16) ağırlıklı averaj yaklaşımı $\lambda = 1$ için (2.11) ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. $\lambda = 1$ olduğunda (2.18) ile verilen ε değerinin

$$\xi = \frac{1}{1 + 4r \sin^2(\beta_n h/2)}$$

olduğu görülür. Yöntemin kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ yani

$$|\xi| = \left| \frac{1}{1 + 4r \sin^2(\beta_n h/2)} \right| \leq 1$$

olmalıdır. Bu durumda tüm β değerleri için $|\xi| \leq 1$ dir. Böylece kapalı yöntem şartsız kararlıdır.

* Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi

(2.16) ağırlıklı avaraaj yaklaşımı $\lambda = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. $\lambda = \frac{1}{2}$ olduğunda (2.18) ile verilen ξ değerinin

$$\xi = \frac{1 - 2r \sin^2(\beta_n h/2)}{1 + 2r \sin^2(\beta_n h/2)}$$

olduğu görülür. Yöntemin kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. Tüm β_n değerleri için $|\xi| \leq 1$ eşitsizliği sağlandığından, Crank-Nicolson yöntemi şartsız kararlıdır.

2.3.2 Matris Yöntemi

Sonlu fark yaklaşımlarının kararlılığının incelenmesinde kullanılan bir diğer yöntem de matris yöntemidir. Kısaca matris yöntemi, verilen sınır şartlarına bağlı denklemin sonlu fark yaklaşımına karşılık gelen matrisin özdeğerlerindeki hata dağılımını inceler.

Birbiri ardına gelen iki zaman adımında bir sonlu fark yaklaşımı, A ve B karesel matrisler olmak üzere, matris formunda

$$AU^{n+1} = BU^n \tag{2.19}$$

olarak gösterilebilir. (2.19) matris gösteriminde her bir zaman adımı için $A = I$ olması durumu, açık sonlu fark yaklaşımına denk gelir. Aksi durumda yani $A \neq I$ olduğunda (2.19) denklemi, $C = A^{-1}B$ ($\det(A) \neq 0$) olmak üzere, açık biçimde

$$U^{n+1} = CU^n$$

olarak yazılabilir. Bu ifadede (2.17) hata tanımı kullanılırsa

$$Z^{n+1} = CZ^n$$

eşitliği bulunur. Böylece bu denklem başlangıç hatasına bağlı olarak

$$Z^{n+1} = C^{n+1}Z^0$$

biçiminde yazılabilir. Buradan açıkça $\|Z^{n+1}\| \leq \|C^{n+1}\| \|Z^0\|$ dır. (2.19) ile tanımlanan yaklaşım $\|Z^{n+1}\|$ normunun sınırlı olması durumunda kararlı olacaktır. $\|Z^{n+1}\|$ normunun sınırlı olması K parametresinin, h ve k dan bağımsız bir sabit sayı olmak üzere

$$\|C^{n+1}\| \leq K$$

olması ile mümkündür. Zaman adımıdan bağımsız herhangi bir C matrisi için $\rho(C)$ ile gösterilen ve C matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerine eşit olan spektral yarıçap matrisin normu ile yakından ilgilidir ve $n \neq 0$ olmak üzere bu ilişki

$$\rho(C^{n+1}) \leq \|C^{n+1}\| \leq \|C\|^{n+1}$$

dir [23]. Bu durumda (2.19) üzerine temellenen hesaplamada hata dağılımını kontrol etmek için aşağıdaki iki durumu göz ardı etmemek gerekir [23].

★ Kararlılık için gerekli şart spektral yarıçapın $\rho(C) \leq 1$ olması $n \rightarrow \infty$ için hata vektöründe $Z^n \rightarrow 0$ olduğunu garantiler. Ancak n 'nin sonlu olması durumunda Z^n 'nin büyüklüğü için birşey söylenemez.

★ Kararlılık için yeterli şart $\|C\| \leq 1$ eşitsizliğini sağlamasıdır. Bu ise n artarken hataların azaldığını garantiler [24].

3. BÖLÜM

GRUP KORUMA METODU

3.1 Genişletilmiş Dinamik Sistem

Lineer olmayan

$$\dot{x} = f(x, t, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

dinamik sistemi x ; n -boyutlu belirli vektör, t ; zaman değişkeni, μ ; m -boyutlu fiziksel parametre vektörü ve $f \in \mathbb{R}^n$; x, t, μ 'nün vektör değerli bir fonksiyonu olmak üzere M^{n+1} Minkowski uzayı çerçevesinde araştırıldı. $(\cdot)$ t 'ye göre türevi temsil etmektedir. Böylece, $x \neq 0$ için $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$, x 'in Öklid normu olmak üzere

$$n := \frac{x}{\|x\|}, \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlansın. (3.1) ve (3.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\dot{n} = \frac{f(x, t)}{\|x\|} - \left(\frac{f(x, t)}{\|x\|} \cdot n \right) n. \quad (3.3)$$

elde edilir. $x(t_i)$, t_i başlangıç zamanında x 'in başlangıç değeri ve $f(x, t) \cdot x \neq 0$ olduğu varsayılarak

$$X^0(t) := \|x(t_i)\| \exp \left[\int_{t_i}^t \left(\frac{f(x(\xi), \xi)}{\|x(\xi)\|} \cdot n(\xi) \right) d\xi \right], \quad (3.4)$$

biçiminde yazılsın. (3.3) ve (3.4) eşitlikleri birlikte

$$\dot{X} = AX, \quad (3.5)$$

denklemini oluşturur. Burada

$$X = \begin{bmatrix} X^s \\ X^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^0 n \\ X^0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

homojen koordinatlar kullanıldı.

$$A := \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \frac{f(x, t)}{\|x\|} \\ \frac{f^T(x, t)}{\|x\|} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

düzenli orthochronous Lorentz grup $SO_0(n, 1)$ 'in bir Lie cebiri olsun.

$$g = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

Minkowski metriği olmak üzere

$$A^T g + g A = 0,$$

eşitliği sağlanır. Burada n 'inci dereceden I_n birim matrisi ve T üst simgesi transpozunu temsil etmektedir.

$$\frac{d}{dt} \|x\| = \frac{d}{dt} \sqrt{x \cdot x} = \dot{x} \cdot n = f(x, t) \cdot n = \|x\| \frac{\dot{X}^0}{X^0},$$

ifadesinden

$$\frac{\frac{d}{dt} \|x\|}{\|x\|} = \frac{\dot{X}^0}{X^0}$$

elde edilir. İntegral alınır ve (3.4) ile $X^0(t_i) = \|x(t_i)\|$ kullanılırsa

$$X^0 = \|x\|,$$

elde edilir. Böylece

$$X = \begin{bmatrix} X^s \\ X^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^0 n \\ X^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \|x\| \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

olur ve (3.5)'teki sistem

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \|x\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \frac{f(x, t)}{\|x\|} \\ \frac{f^T(x, t)}{\|x\|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \|x\| \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

sistemine dönüşür.

(3.10)'dan elde edilen ilk denklemin (3.1) orjinal denkleminin aynısı olduğu açıktır, fakat (3.10)'dan elde edilen ikinci denklem genişletilmiş lineer olmayan sistem için bir Minkowski yapısını veren yeni bir formülü bize tanıtır. (3.1) orjinal problemi yapılan bu işlemlerle (3.5) (veya (3.10)) denklemi ile yeni bir problem olarak karşımıza çıkar.

$\mathbb{R}^n$ 'de n -boyutlu orjinal (3.1) dinamik sistemi, M^{n+1} 'de (3.5) (veya (3.10)) $n+1$ -boyutlu genişletilmiş bir dinamik sistemi içine doğal bir şekilde gömülebilir. Yeni sistemin boyutu

bir yükselmesine rağmen elde edilen yeni sistem grup koruma sayısal metodunun kurulmasında daha avantajlıdır. Formüle edilen A özel yapısına sahip bu yeni form için yeni görüşler kazanılabilir ve dinamik sistem için sonuçlar elde edilebilir.

Son zamanlarda simetrilere sahip dinamik sistemlerin nümerik çözümlerinin üretilmesinde çözümün niteliğinin gelişmesiyle ilgili birçok konu bulunmaktadır. Bununla ilgili Simo ve Wong [6], Lewis ve Simo [7], Crouch ve Grossman [8], Diele [9], Munthe-Kaas [10], Owren ve Marthinsen [11], Celledoni ve Iserles [12] birkaç çalışma yapmıştır.

Gelecek bölümde (3.5) (veya (3.10)) sistemine dayanan doğal bir koni yapısı verilecektir. Daha sonra Pade yaklaşımları ve Cayley dönüşümü ile koni yapısını koruyan grup koruma metodu geliştirilecektir.

3.2 Koni ve Yörüngeler

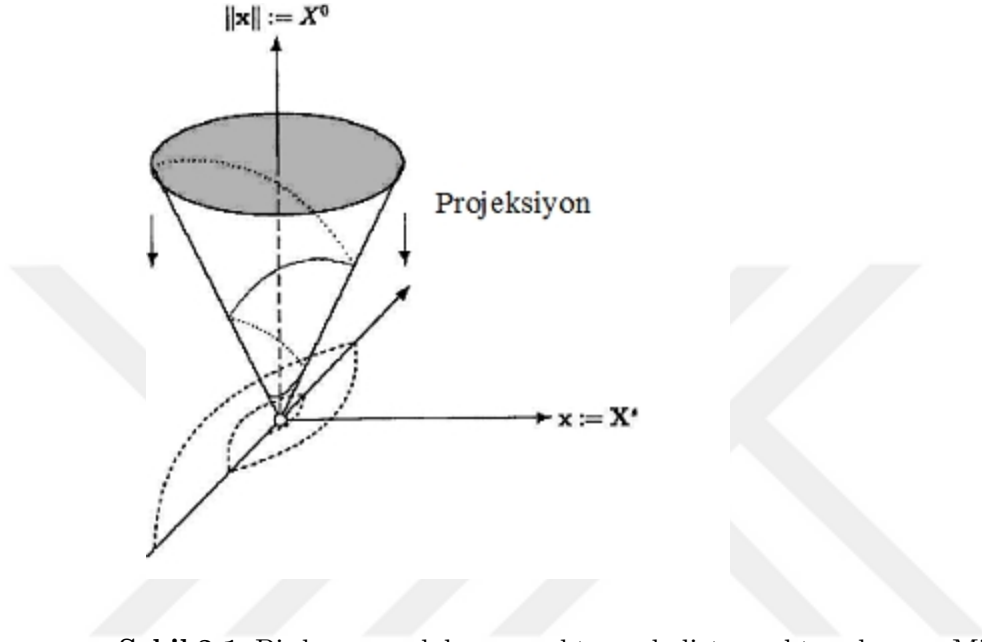
(3.6) tanımıyla sıfır konisini Minkowski uzayına yerleştirmek ve $X = 0$ noktasını silmek oldukça doğaldır:

$$X^T g X = 0, \quad (3.11)$$

(3.9) denkleminde $(x, \|x\|)$ terimlerinde

$$X^T g X = x \cdot x - \|x\|^2 = \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$$

şeklinde yazılır. Şimdiye kadar koni, (3.5) (veya (3.10)) dinamik sistemine dayattığımız en doğal kısıtlamadır. Şekil 3.1’de koni şartı gösterilmiştir. Belirli x uzayında gözlenebilen (3.1) sisteminin yörüngesi X^0 —ekseni boyunca (3.5) sisteminin yörüngesinin projeksiyonuna paraleldir.



Şekil 3.1 Bir kavramsal dönüm noktasını belirten vektör alanının Minkowski uzayında silinmiş koninin yapısı x uzayında gözlenebileceği gibi yörünge, X^0 eksenini boyunca sıfır konisinin içinde yörüngenin bir paralel projeksiyonudur.

(3.5) ve (3.6) denklemlerinden

$$\dot{X}^T g \dot{X} = \|f(x, t)\|^2 - \left(\frac{f(x, t) \cdot x}{\|x\|}\right)^2 \geq 0$$

yazılır. Buradan

$$(dX)^2 := dX^T g dX \geq 0$$

olur. dX ile dX^0 'ı karıştırmamak için dikkatli olmamız gerekir. İlki dX artış yolunun Minkowski uzunluğu, sonraki dX 'in geçici bileşenidir.

3.3 Cayley Dönüşümü ile Grup Koruma Metodu

(3.5) sistemi için bahsedildiği gibi (3.11) koni olma şartı sayısal metotları kurmada tam olarak gerçekleştirilmelidir. Koni olma şartının korunmasındaki kriterde en önemli faktör uygun sayısal metodu seçmek olmaktadır.

İlk olarak (3.5) sistemi için zaman merkezli bir metod düşünelim:

$$X(l+1) = X(l) + \tau A(l)[X(l+1) + X(l)]$$

olup burada $X(l)$, t_l ayrık zamanında X 'in değerini verir, τ ise zaman artımının yarısı, yani $\tau := \Delta t/2 = (t_{l+1} - t_l)/2$, ve daha kesin bir şekilde $A(l)$, $A(X(l), t_l)$ 'dir. Yukarıdaki sonuç $X(l)$ ve $X(l+1)$ arasında bir Cayley dönüşümü olarak bilinir. Böylece

$$X(l+1) = G(l)X(l) := [I_{n+1} + \tau A(l)]X(l) \quad (3.12)$$

olur. $A(l) \in so(n, 1)$ ($SO_0(n, 1)$ 'in Lie cebiri), oluşturulan dönüşüm için bir Lorentz artırımını olarak bilinir. Daha da önemlisi Cayley dönüşümü $\tau \in \mathbb{R}^+$ ve $\tau < \|x\| / \|f\|$ için $A(l)$ 'den $SO_0(n, 1)$ 'in bir elementine olan dönüşümdür. Özellikleri

$$\begin{aligned} G^T g G &= g, \\ \det(G) &= 1, \\ G_0^0 &> 0, \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada G_0^0 , G 'nin 00. elemanına karşılık gelen bileşenidir. A Lie cebiri için (3.12) denklemi (3.6) da yerine yazılırsa;

$$G(l) = \begin{bmatrix} I_n + \frac{2\tau^2 f(l)f^T(l)}{\|x(l)\|^2 - \tau^2 \|f(l)\|^2} & \frac{2\tau \|x(l)\|f(l)}{\|x(l)\|^2 - \tau^2 \|f(l)\|^2} \\ \frac{2\tau \|x(l)\|f^T(l)}{\|x(l)\|^2 - \tau^2 \|f(l)\|^2} & \frac{\|x(l)\|^2}{\|x(l)\|^2 - \tau^2 \|f(l)\|^2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $f(l)$, $f(x(l), t_l)$ 'yi belirtir. x ve $\|x\|$ terimlerinde ayrıklaştırılmış dönüşümler

$$\begin{aligned} x(l+1) &= x(l) + \frac{2\tau^2 f(l) \cdot x(l) + 2\tau \|x(l)\|^2}{\|x(l)\|^2 - \tau^2 \|f(l)\|^2} f(l), \\ \|x(l+1)\| &= \frac{2\tau f(l) \cdot x(l) \|x(l)\| + \|x(l)\| (\|x(l)\|^2 + \tau^2 \|f(l)\|^2)}{\|x(l)\|^2 - \tau^2 \|f(l)\|^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde verilir. Üstteki iki denklem kullanılırsa

$$x(l+1) \cdot x(l+1) - \|x(l+1)\|^2 = x(l) \cdot x(l) - \|x(l)\|^2 = 0,$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Pratik sayısal hesaplamalarda sadece (3.13) denkleminde ihtiyaç duyulur. Euler metodunun karşılaştırılmasına bağlı olarak

$$x(l+1) = x(l) + 2\tau f(l),$$

eşitliği, uyarlanabilir zaman-adımlı bir sayısal metodla görülebilir. Burada

$$\eta(l) := 2\tau \frac{\|x(l)\|^2 + \tau f(l) \cdot x(l)}{\|x(l)\|^2 - \tau^2 \|f(l)\|^2} > 0$$

olmak üzere ve $1/\tau$, Lipschitz sabitinden daha büyük olduğu zaman (3.1) sistemi için Lipschitz şartının direk bir sonucu olan $\tau < \|x(l)\| / \|f(l)\|$ eşitsizliğinden

$$x(l+1) = x(l) + \eta(l)f(l)$$

bulunur. (3.13) dönüşümü orjinal diferansiyel denklemlerin özelliklerini ve sabit noktayı korur. Üstteki şart altında

$$x(l+1) = x(l) \Leftrightarrow f(l) = 0$$

olur. Bu şu anlama gelmektedir: x noktası (3.1) sisteminin bir denge noktası iken $x(l)$, (3.13) ayrıklaştırılmış dönüşümün sabit noktası olur.

Şimdi sabit noktanın özelliklerini araştıralım. (3.13) dönüşümünün Jakobiyesi

$$\wp := \frac{\partial x(l+1)}{\partial x(l)} = I_n + f(l)\left(\frac{\partial \eta(l)}{\partial x(l)}\right)^T + \eta(l)\frac{\partial f(l)}{\partial x(l)}$$

dir. Sabit nokta $f(l) = 0$ 'da

$$\wp = I_n + \eta(l)\frac{\partial f(l)}{\partial x(l)}$$

eşitliği elde edilir.

Vurgulamak gerekirken metodumuz sıradan metodlardan oldukça farklıdır. Cayley dönüşümleri yukarıda kullanıldığı gibi Lie cebirinden Lie grubuna bir dönüşümdür ve üstel dönüşüme ikinci dereceden bir yaklaşımdır.

3.4 Lorentz Grubunun Bazı Özellikleri ve Onun Lie Cebiri

(3.7) ve (3.8) denklemlerinden A Lie cebirinin aşağıdaki özellikleri sağladığını kontrol etmek kolaydır.

Özellik 3.4.1

$$A^T g + gA = 0 \text{ veya } Ag + gA^T = 0 \text{ dır.}$$

İlk eşitliğin her iki tarafı g ile çarpılıp $g^2 = I_{n+1}$, ifadesi göz önünde bulundurulursa ikinci eşitlik elde edilir. Bu eşitlikler A (veya A^T)'nın ortogonal Lorentz grubuna özgü Lie cebirinin bir elemanı olduğunu gösterir. Her G için aşağıdaki özellikler yazılabilir [25].

Özellik 3.4.2

$G^T g G = g$ veya $G g G^T = g$ 'dir [25].

Özellik 3.4.3

$\det(G) = 1$ 'dir [25].

Özellik 3.4.4

$G_0^0 \geq 1$ 'dir [25].

$G^T g G = g$, olduğunu ispat etmek için $g^2 = I_{n+1}$, ve $g^T = g$, ifadelerini kullanılıp özellik 3.4.2'nin ilk eşitliği sol taraftan g ile çarpılırsa

$$(Gg)^T g G = I_{n+1},$$

elde edilir. Bu gG 'nin tersinin $(Gg)^T$ olduğunu gösterir. Böylece

$$gG(Gg)^T = I_{n+1},$$

olur. Şimdi üstteki denklem sol taraftan g ile çarpılır ve $g^2 = I_{n+1}$, ile $g^T = g$, ifadeleri tekrar kullanılırsa $G^T g G = g$ eşitliği elde edilir.

n verilen sistemde pozitif bir tam sayı olmak üzere $A \in so(n, 1)$ ve $G \in SO_0(n, 1)$ ortogonal Lorentz grubuna özgü Lie cebirinin elemanları olarak verilsin. O halde aşağıdaki özellikleri ispatlayabiliriz.

Özellik 3.4.5

$G \in SO_0(n, 1)$ ise $G^{-1} = gG^T g$ 'dir [25].

Özellik 3.4.2'den $g^{-1} = g$ olduğundan dolayı bu özellik açıktır.

Özellik 3.4.6

$MgM^T = NgN^T$ ise $M^{-1}N \in SO_0(n, 1)$ 'dir [25].

Özellik 3.4.2'nin ikinci eşitliğinde G yerine $M^{-1}N$ yazıldığında üstteki eşitlik sağlanır.

Özellik 3.4.7

$A \in so(n, 1)$ ise $e^{TA} \in SO_0(n, 1)$ 'dir [25].

Özellik 3.4.8

$A \in so(n, 1)$ ve $\det(I_{n+1}) \neq 0$, ise $Cay(A) := (I_{n+1} - A)^{-1}(I_{n+1} + A) \in SO_0(n, 1)$ 'dir [25].

Özellik 3.4.2'nin ikinci eşitliğinde G yerine $(I_{n+1} - A)^{-1}(I_{n+1} + A)$ yazıldığında

$$(I_{n+1} + A)g(I_{n+1} + A^T) = (I_{n+1} - A)g(I_{n+1} - A^T)$$

olur ve özellik 3.4.1 de kullanıldığında üstteki eşitlik ispat edilmiş olur.

Özellik 3.4.9

$A \in so(n, 1)$ ise $(A^{2m})^T g = gA^{2m}$ 'dir [25].

$m = 1$ için,

$$(A^2)^T g = gA^2,$$

olur. Özellik 3.4.1'in ilk eşitliğinde her iki tarafa A^T uygulandığında ve aynı eşitlik kullanıldığında üstteki eşitlik kolaylıkla ispatlanır. Benzer şekilde $m = 1$ için,

$$(A^{2k})^T g = gA^{2k},$$

yazılır. Üstteki eşitliğin her iki tarafına A^T uygulanıp ve özellik 3.4.1'in ilk eşitliği kullanılırsa,

$$(A^{2k+1})^T g = -gA^{2k+1},$$

elde edilir. Tekrar her iki tarafa A^T uygulanırsa ve özellik 3.4.1'in ilk eşitliği kullanılırsa,

$$(A^{2k+2})^T g = gA^{2k+2},$$

olarak yazılır. Bununla birlikte özellik ispat edilmiş olur.

Özellik 3.4.10

$A \in so(n, 1)$ ise $(A^{2m+1})^T g = -gA^{2m+1}$ 'dir [25].

İspatı özellik 3.4.9'un ispatı ile aynıdır.

Özellik 3.4.11

$f_e(x)$ bir çift polinom ve $A \in so(n, 1)$ ise $f_e(A^T)g = gf_e(A)$ 'dir [25].

$f_e(x)$ polinom fonksiyonunun her elemanı özellik 3.4.11'deki eşitliği sağlar. O halde $f_e(x)$ 'in bütün elemanlarının toplamı da aynı eşitliğe uyar ve ispat gerçekleşir.

Özellik 3.4.12

$f_0(x)$ bir tek polinom ve $A \in so(n, 1)$ ise $f_0(A^T)g = -gf_0(A)$ 'dir.

Benzer bir şekilde $f_0(x)$ polinom fonksiyonunun her elemanı özellik 3.4.12'deki eşitliğe uyar. O halde $f_0(x)$ 'in bütün elemanlarının toplamı da aynı eşitliğe uyar ve ispat gerçekleşir.

Özellik 3.4.13

$A \in so(n, 1)$ ve $G \in SO_0(n, 1)$ ise $G^{-1}AG := A' \in so(n, 1)$ 'dir [25].

Özellik 3.4.1 ve özellik 3.4.2'deki ilk eşitliklere sağ taraftan g uygulanıp ve $g^2 = I_{n+1}$, ifadesi göz önünde bulundurulursa;

$$gAg = -A^T,$$

$$gGg = G^{-T},$$

olur. Üstteki iki eşitlik kullanılırsa;

$$gA'g = gG^{-1}AGg = g^{-1}Gg^{-1}AggGg = (gGg)^{-1}gAAggGg = -(G^{-1}AG)^T = -(A')^T$$

elde edilir. Tekrar sağ taraftan g uygulanıp ve $g^2 = I_{n+1}$, olduğu düşünülürse;

$$(A')^Tg + gA' = 0,$$

olarak yazılır. Bu da $A' \in so(n, 1)$ olduğunu gösterir.

A^T aynı zamanda $so(n, 1)$ 'in elemanı olduğundan A için verilen özellikler A^T için de geçerlidir.

3.5 Padé yaklaşımları ile Grup Koruma Metodları

Üstel fonksiyonların Padé yaklaşımlarını kullanarak daha hassas sayısal sonuç veren metodlar geliştirilebilir. Temel olarak $\exp(x)$ fonksiyonuna yaklaşım iki polinom fonksiyonunun bir oranına uygularsak :

$$\exp(x) \approx p_{lm}(x) := n_{lm}(x)/d_{lm}(x),$$

$$n_{lm}(x) := \sum_{k=0}^m \frac{(l+m-k)!m!}{(l+m)!(m-k)!k!} x^k,$$

$$d_{lm}(x) := \frac{(l+m-k)!l!}{(l+m)!(l-k)!k!} (-x)^k$$

bulunur.

3.6 Bir Lie Cebir Formülü

Grup Koruma Metodu (GKM) düşünülen sistemin iç simetri grubunu korur. Lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin simetri grubunu önceden bilmememize rağmen, Liu [25] onları sadece belirli değişkenler değil aynı zamanda belirli değişkenli vektörlerin büyüklüğünün oluşumlarını ele alan genişletilmiş dinamik sistemler içine gömmüştür. Şöyleki,

$$u' = f(t, u), \quad u \in R^k, \quad t \in R, \quad (3.14)$$

k -boyutlu bir adi diferansiyel sistemi için, $\mathbb{R}^k$ 'da orjinal k -boyutlu dinamik sistemine, M^{k+1} 'de

$$X' = AX,$$

$k+1$ -boyutlu genişletilmiş bir dinamik sistemi matematiksel olarak eşit bir şekilde oluşturulabilir. Yeni sistemin boyutu yükselmesine rağmen Lipschitz şartı

$$\|f(y, u) - f(y, v)\| \leq \mathcal{L}\|u - v\|, \quad \forall (y, u), (y, v) \in D, \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır. Burada D , $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ 'nın bir alanı ve $\mathcal{L}$, Lipschitz sabiti olarak bilinir. Buradan

$$X_{n+1} = G(n)X_n, \quad (3.16)$$

yazılır ve X_n , y_n 'de ayrık olan X 'in sayısal değerini verir ve $G(n) \in SO_0(k, 1)$, y_n 'de grup değeridir.

3.7 Diferansiyel Denklem Sistemi İçin GKM

Lie grubu, uygun ortochronous Lorentz grubu olarak bilinen $A \in so(k, 1)$ 'den ortaya çıkmıştır. $A(n)$ 'in üstel bir dönüşümü

$$\exp[\Delta y A(\eta)] = \begin{bmatrix} I_k + \frac{(\alpha_n - 1)}{\|f_n\|^2} f_n f_n^T & \frac{\beta_n f_n}{\|f_n\|} \\ \frac{\beta_n f_n^T}{\|f_n\|} & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

şeklindeki kapalı forma uyar. Burada

$$\alpha_n = \cosh\left(\frac{\Delta y \|f_n\|}{\|u_n\|}\right),$$

$$\beta_n = \sinh\left(\frac{\Delta y \|f_n\|}{\|u_n\|}\right),$$

dir. Notasyonu korumak için $f_n = f(t_n, u_n)$ olsun. (3.16) denkleminde $G(n)$ yerine $\exp[\Delta y A(n)]$ yazıldığında

$$u_{n+1} = u_n + \frac{(\alpha_n - 1)f_n \cdot u_n + \beta_n \|u_n\| \|f_n\|}{\|f_n\|^2} f_n = u_n + \eta_n f_n, \quad (3.18)$$

olarak elde edilir. $f_n \cdot u_n \geq -\|f_n\| \|u_n\|$ ifadesi göz önüne alınırsa

$$\eta_n \geq [1 - \exp(-\frac{\Delta y \|f_n\|}{\|u_n\|})] \frac{\|u_n\|}{\|f_n\|} > 0, \quad \forall \Delta y > 0, \quad (3.19)$$

olur [26].

4. BÖLÜM

LİNEER TELEGRAF DENKLEMİ

α ve β bilinen sabit sayılar, t zaman ve x uzaklık olmak üzere ikinci dereceden lineer hiperbolik

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u - u_{xx} = g(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (4.1)$$

telegraf denklemini

$$\text{Başlangıç şartları : } \begin{cases} u(x, 0) = \phi_1(x), \\ u_t(x, 0) = \phi_2(x), \end{cases} \quad a \leq x \leq b, \quad (4.2)$$

$$\text{Dirichlet sınır şartları : } \begin{cases} u(a, t) = \Psi_1(t), \\ u(b, t) = \Psi_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

şartları ile birlikte göz önüne alalım. $\alpha > 0$ ve $\beta = 0$ için (4.1) denklemi sönümlü bir dalga denklemini ifade eder ve $\alpha > \beta > 0$ için telegraf denklemi olarak adlandırılır. Hiperbolik diferansiyel denklemler atomik fizikteki temel denklemleri esas alır. Özellikle hiperbolik telegraf denklemi, matematiksel olarak modellenen bazı fiziksel sistemlere büyük ölçüde uygulanan hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerde önemli bir rol oynar [27, 28, 29].

Son yıllarda ikinci dereceden hiperbolik denklemlerin sayısal çözümleri için literatürde kararlı metodlar geliştirilmiş ve bu metodlar büyük ilgi uyandırmıştır [30]. Mohanty [31, 32] iki ve üç boyutlu uzayda lineer hiperbolik denklemler için üç seviyeli şartsız alternatif yönlü metodlar geliştirmiştir. Bunlar yönlendirilmiş gelişigüzel hareketler oluşturur ve parabolik kısmi diferansiyel denklemler için uygun bir şekilde modellenmiştir. Özellikle deneysel sonuçlar [33, 34] telegraf denklemlerinin ısı denklemlerinden daha iyi modellendiğini göstermektedir. Son yıllarda Neumann sınır şartlarıyla lineer olmayan telegraf denkleminin zaman sınırlı çözümlerinin varoluşu düşünülmektedir [35]. Bu yaklaşım bazı Lyapunov fonksiyonellerinin kullanımıyla Galerkin metoduna dayalıdır.

Bir boyutlu lineer hiperbolik denkleminin sayısal çözümü pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. Şartsız kararlı fark metodları sunulmuştur [30, 36, 37]. Zamanla sonsuz fark ayrışımı ve spline enterpolasyona dayalı üç seviyeli fark şeması önerilmiştir [36]. [37]'deki metod aynı zamanda üç seviyeli kapalı fark metodu buna rağmen [30]'da sunulan sayısal

metod açık fark metodudur. Saadamatı'nın [38], (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü için Chebyshev tau metodunu kullanmasına karşın Dehghan [39], Chebyshev cardinal fonksiyonlarını kullanmıştır. Hesaplama molekülüne bağlı geleneksel büyük sayıda birleşik noktalarla biri standart üst seviyeden metodları uyguladığında sınırların yakınındaki zorluklar hayali noktalar olarak ortaya çıkmaktadır. Bununla birlikte genel olarak hayali noktalar kullanmaya ihtiyaç duyulmayan ikinci dereceli metodlar bu denklemleri çözmek için popüler metodlardır. Dehghan ve Shokri [40, 41] sıralı noktaları ve thin-plate-spline radial tabanlı fonksiyonları kullanarak bir ve iki boyutlu hiperbolik denklemlerin nümerik metodlarını oluşturmuşlardır. Telegraf denklemlerinin çözümü için Rothe-Wavelet metodunun bir uygulaması önerilmiştir. El-Azab ve El-Ghamel [42], telegraf denkleminin ayrıştırılması için farklı durumlarda dalgaların hafif bir şekilde nasıl kullanılabileceğini tarif etmişlerdir. Sayısal metodlar, radial tabanlı fonksiyon metodu [43], karesel B-spline sıralama metodu [44] ve Diferansiyel Quadrature metodu [45] gibi teknikler kullanılarak (4.1) denkleminin çözümleri geliştirilmiştir. Ayrıca İnç ve diğerleri [19, 46] tarafından da çekirdek üreten Hilbert uzay metodu ile bu denklemlerin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

4.1 Sabit Katsayılı Telegraf Denkleminin GKM ile Çözümü

(4.1) denkleminde

$$v(x, t) = u_t(x, t),$$

dönüşümünü kullanırsak (4.1)-(4.3) ile verilen problem

$$\begin{cases} u_t = v; \\ v_t = -2\alpha v - \beta^2 u + u_{xx} + g; \end{cases} \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (4.4)$$

$$\text{Başlangıç şartları : } \begin{cases} u(x, 0) = \phi_1(x), \\ v(x, 0) = \phi_2(x), \end{cases} \quad a \leq x \leq b, \quad (4.5)$$

$$\text{Dirichlet sınır şartları : } \begin{cases} u(a, t) = \Psi_1(t), \\ u(b, t) = \Psi_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir.

4.1.1 Line Metodu

Line sayısal metodu verilen kısmi diferansiyel denklem sistemi için bağımsız değişkenlerden birinin ayrıştırılmasına dayanır. Yarı ayrıklaştırma metodu sayısal olarak integre edilen bir çift adi diferansiyel denklem sisteminde sonuç verir. $x_m = a + mh$, $m = 0, \dots, N$, olmak üzere $[a, b]$ aralığında seçilen $h = \frac{b-a}{N}$ adım aralığı ile $\{x_m\}_{m=0}^N$ eşit aralıklı bir düğüm alalım. Şimdi ayrıklaştırma uygulandırsa;

$$u_{xx} \cong \frac{u(x_{m+1}, t) - 2u(x_m, t) + u(x_{m-1}, t))}{h^2}.$$

olur. Üstteki denklem kullanılır ve $u_m(t) = u(x_m, t)$, $v_m(t) = v(x_m, t)$, $g_m(t) = g(x_m, t)$, $m = 0, \dots, N$ olarak alınırsa, adi diferansiyel denklem sistemi

$$u_m(0) = \phi_1(x_m), \quad v_m(0) = \phi_2(x_m), \quad m = 1, \dots, N-1 \quad (4.7)$$

başlangıç şartları ve

$$u_0(t) = \Psi_1(t), \quad u_N(t) = \Psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.8)$$

sınır şartları ile

$$\begin{cases} u'_m(t) = v_m(t), \\ v'_m(t) = -2\alpha v_m(t) - \beta^2 u_m(t) + \frac{u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t))}{h^2} + g_m(t); \end{cases} \quad m = 1, \dots, N-1 \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. (4.7) başlangıç şartları ve (4.8) sınır şartları ile verilen (4.9) sisteminin çözümlerini elde edebilmek için sayısal olarak integre edilen $u_m(t)$ ve $v_m(t)$, $m = 1, \dots, N-1$, değişkenler için $2N-2$ çift lineer adi diferansiyel denklem vardır. Notasyonlar kullanılarak

$$\begin{aligned} u'_m(t) \big|_{t=n\tau} &\simeq \frac{u_m((n+1)\tau) - u_m(n\tau)}{\tau}, \\ v'_m(t) \big|_{t=n\tau} &\simeq \frac{v_m((n+1)\tau) - v_m(n\tau)}{\tau}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

olduğunu varsayalım. Böylece

$$u_m^n = u(mh, n\tau), \quad (4.11)$$

$$v_m^n = v(mh, n\tau), \quad (4.12)$$

ve kararlılık indeksi $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$ olsun. Bu durumda (4.9) denklem sistemi $m = 1, \dots, N-1$, $n = 0, 1, \dots, M$, $M = \frac{T}{\tau}$, olmak üzere

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n + \tau v_m^n \\ v_m^{n+1} = v_m^n - 2\alpha\tau v_m^n - \beta^2\tau u_m^n + \gamma(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \tau g_m^n. \end{cases} \quad (4.13)$$

biçiminde tamamen ayrıklaştırılabilir.

4.1.2 Grup Koruma Metodu

Bir önceki kısımda Euler tipi bir açık metod tanıtıldı. Şimdi açık metodu geliştirmeye çalışacağız. Grup koruma metodu uygulanan (4.9) ile verilen eşitlikler $m = 1, \dots, N-1$, $n = 0, 1, \dots, M$, olmak üzere

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n + \tau\eta_n v_m^n \\ v_m^{n+1} = v_m^n - 2\alpha\tau\eta_n v_m^n - \beta^2\tau\eta_n u_m^n + \gamma\eta_n(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \tau\eta_n g_m^n \\ u_0^{1,n} = u_N^{1,n} = 0 \end{cases}, \quad (4.14)$$

biçiminde yazılır.

(4.9) denklem sisteminin matris formunu ifade etmek için

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_{N-1}(t), v_1(t), \dots, v_{N-1}(t))^T, \quad (4.15)$$

ve

$$f(t, u) = (v_1(t), \dots, v_{N-1}(t), s_1(t), \dots, s_{N-1}(t))^T, \quad (4.16)$$

$$s_m(t) = -2\alpha v_m(t) - \beta^2 u_m(t) + \frac{u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t)}{h^2} + g_m(t), \quad m = 1, \dots, N-1,$$

ile belirtilir. O halde (3.1)'den (3.25)'e kadar yapılan uygulamalar kullanılarak bir boyutlu hiperbolik telegraf denkleminin grup koruma metodu ile çözümleri elde edilir.

4.1.3 Kararlılık Analizi

Telegraf denklemi için GKM'nin Neumann metoduyla kararlılık analizini araştırmak amacıyla bu denklemin $g(x, y) = 0$, homojen durumunu göz önüne almak yeterlidir. Homojen telegraf denkleminin GKM formu

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \eta_n v_m^n, \quad (4.17)$$

$$v_m^{n+1} = (1 - 2\alpha\tau\eta_n)v_m^n - \eta_n(\beta^2\tau + 2\gamma)u_m^n + \gamma\eta_n(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n), \quad (4.18)$$

biçimindedir. Sistem iki denklem ve iki değişken içermektedir. Bununla birlikte q ilave bir faktör, $i = \sqrt{-1}$, ϕ bir reel sayı, p ve w harmonik büyüklükler olmak üzere çözüm,

$$u_m^n = pq^n e^{im\phi} \quad v_m^n = wq^n e^{im\phi} \quad (4.19)$$

olarak yazılır. Uygulanan metodun kararlılığını göstermek için $|q| \leq 1$, olduğunu ispatlamak yeterlidir. (4.19) ve (4.17) eşitliklerinden

$$\Rightarrow pq^{n+1}e^{im\phi} = pq^n e^{im\phi} + \tau \eta_n wq^n e^{im\phi} \Rightarrow (q - 1)p - \tau \eta_n w = 0 \quad (4.20)$$

elde edilir. Üstelik (4.18) eşitliği

$$wq^{n+1}e^{im\phi} = (1 - 2\alpha\tau\eta_n)wq^n e^{im\phi} - \eta_n(\beta^2\tau + 2\gamma)pq^n e^{im\phi} + \eta_n\gamma pq^n (e^{i(m+1)\phi} + e^{i(m-1)\phi})$$

eşitliğine dönüştür ve

$$(q - 1 + 2\alpha\tau\eta_n)w + \eta_n(\beta^2\tau + 4\gamma \sin^2(\frac{\phi}{2}))p = 0, \quad (4.21)$$

olur. (4.20) eşitliği (4.21)'de yerine yazılırsa;

$$(q - 1 + 2\alpha\tau\eta_n) + (\beta^2\tau + 4\gamma \sin^2(\frac{\phi}{2}))\frac{\tau\eta_n^2}{q - 1} = 0,$$

$(q - 1)$ 'in bir polinomu olarak düşünülebilir ve

$$(q - 1)^2 + 2\alpha\tau\eta_n(q - 1) + \tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma \sin^2(\frac{\phi}{2})) = 0,$$

yazılır. Bu denklemin çözümü

$$q - 1 = \frac{-2\alpha\tau\eta_n \pm \sqrt{4\alpha^2\tau^2\eta_n^2 - 4\tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma \sin^2(\frac{\phi}{2}))}}{2} = 0,$$

olarak bulunur. Buradan

$$q = 1 - \alpha\tau\eta_n \pm \sqrt{\alpha^2\tau^2\eta_n^2 - \tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma\sin^2(\frac{\phi}{2}))},$$

ve $q \leq 1$ kararlılık şartı ile

$$\left| 1 - \alpha\tau\eta_n \pm \sqrt{\alpha^2\tau^2\eta_n^2 - \tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma\sin^2(\frac{\phi}{2}))} \right| \leq 1,$$

veya diğer bir şekilde

$$\pm \sqrt{\alpha^2\tau^2\eta_n^2 - \tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma\sin^2(\frac{\phi}{2}))} \leq \alpha\tau\eta_n,$$

olarak yazılır. GKM'de $f_n \cdot u_n \leq \|f_n\| \|u_n\|$ olduğundan

$$\eta_n \geq [1 - \exp(-\frac{\tau\|f_n\|}{\|u_n\|})] \frac{\|u_n\|}{\|f_n\|} > 0, \quad \forall \tau < 0, \quad (4.22)$$

elde edilir. $\alpha > 0$ olmak üzere

$$-\sqrt{\alpha^2\tau^2\eta_n^2 - \tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma\sin^2(\frac{\phi}{2}))} \leq \alpha\tau\eta_n,$$

ve

$$\sqrt{\alpha^2\tau^2\eta_n^2 - \tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma\sin^2(\frac{\phi}{2}))} \leq \alpha\tau\eta_n,$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha^2\tau^2\eta_n^2 - \tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma\sin^2(\frac{\phi}{2})) \leq \alpha^2\tau^2\eta_n^2,$$

olur. Son eşitlikten ise

$$\tau\eta_n^2(\beta^2\tau + 4\gamma\sin^2(\frac{\phi}{2})) \geq 0,$$

yazılabilir. Burada $\gamma = \frac{\tau}{h^2} > 0$ ve $0 \leq \sin^2(\frac{\phi}{2}) \leq 1$ olduğundan ifade önemsizdir. Böylece telegraf denklemi için uygulanan grup koruma metodunun uygulanması ile elde edilen akış şeması şartsız kararlıdır.

4.1.4 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, telegraf denklemini çözmek için kullandığımız metodun etkinliğini araştırdık. Bütün sayısal hesaplamalar $N = 50$ ve $\tau = 0.001$ adımlarına göre Matlab programında yapılmıştır. Amacımız grup koruma metodunun etkinliğini ve çözümün güvenilir olduğunu göstermektir. Bunun için L_∞ -hata normu

$$L_\infty = \|e u - {}^a u\|_\infty = \max_i |e u_i - {}^a u_i|, \quad (4.23)$$

ve $e u_i^j$ ile ${}^a u_i^j$ sırasıyla (x_i, t_j) ayrık noktalarda tam ve yaklaşık çözümler olmak üzere root mean square (RMS) hatası

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (e u_i^j - {}^a u_i^j)^2}{M \times N}}, \quad (4.24)$$

kullanılacaktır.

Örnek 4.1.1

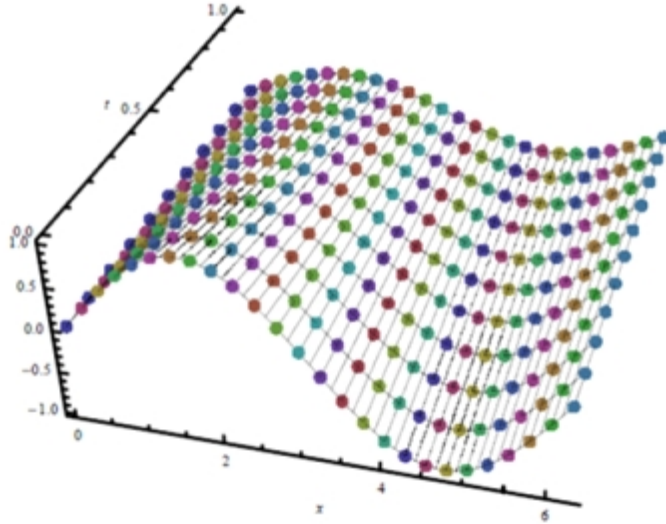
$\alpha = 4$, $\beta = 2$ ve $g(x, t) = (2 - 2\alpha + \beta^2)e^{-t}\sin(x)$ için (4.1) telegraf denklemini ele alalım. Başlangıç şartları

$$\phi_1(x) = \sin(x), \quad \phi_2(x) = -\sin(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad (4.25)$$

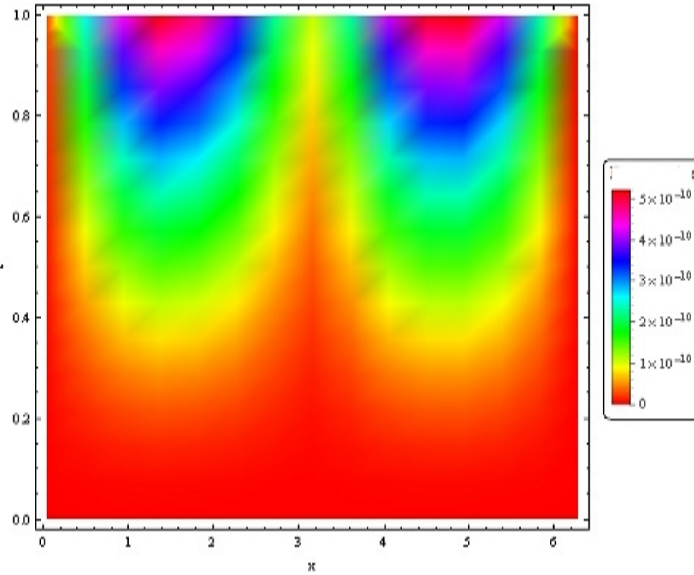
ve sınır şartları

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (4.26)$$

olsun.



Şekil 4.1 Örnek 4.1.1 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.2 Örnek 4.1.1 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.

Bu denklemin tam çözümü

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(x). \quad (4.27)$$

şeklindedir [41].

Metod	Zaman	L_∞	RMS hatası
GKM	0.5	$1.83e - 10$	$1.04e - 10$
GKM	1.0	$5.14e - 10$	$8.65e - 10$
Sharifi ve Rashidinia [49]	0.5	$9.99e - 6$	$7.16e - 6$
Sharifi ve Rashidinia [49]	1.0	$5.19e - 6$	$7.17e - 6$
Dehghan ve Shokri [42]	0.5	$8.37e - 6$	$6.32e - 6$
Dehghan ve Shokri [42]	1.0	$1.57e - 5$	$1.15e - 5$
Mittal [48]	0.5	$1.86e - 6$	—
Mittal [48]	1.0	$3.49e - 6$	—

Tablo 4.1 Örnek 4.1.1 için $\tau = 0.001$ ve $h = 2\tau/50$ adımları ile hataların karşılaştırılması.

Tablo 4.1, örnek 4.1.1 için $\tau = 0.001$ ve $h = \frac{2\pi}{50}$ adımlarına karşılık gelen L_∞ ve RMS hatalarını göstermektedir. Hata değerleri karşılaştırıldığında [41, 47, 48] bahsedilen metodlardaki $\tau = 0.0001$ ve $h = 0.02$ adımlarından daha büyük adımlar kullanmamıza rağmen bizim metodun daha güvenilir olduğu ortaya çıkmaktadır. Şekil 4.1, GKM ile elde edilen yaklaşık çözümlerdeki noktaların analitik çözümlerdeki noktalarla tam olarak denk düştüğünü göstermektedir. Şekil 4.2, mutlak hataya karşın kullandığımız metodun sonuçlarının daha memnun edici ve güvenilir olduğunu belirtmektedir.

Örnek 4.1.2

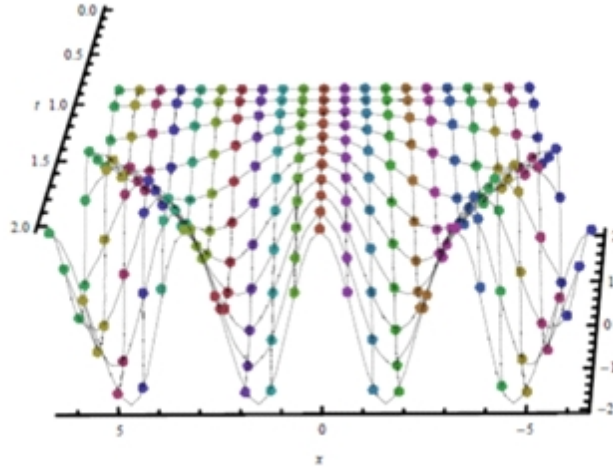
Bu örnekte $\alpha = 3$, $\beta = 2$ ve $g(x, t) = (2\alpha + \beta^2 t - tx^3 + t^3) \cos(xt) - 2x(1 + \alpha t) \sin(xt)$ için telegraf denklemini ele alalım. Başlangıç şartları

$$\phi_1(x) = 0, \quad \phi_2(x) = 1, \quad x \in [-2\pi, 2\pi], \quad (4.28)$$

ve sınır şartları

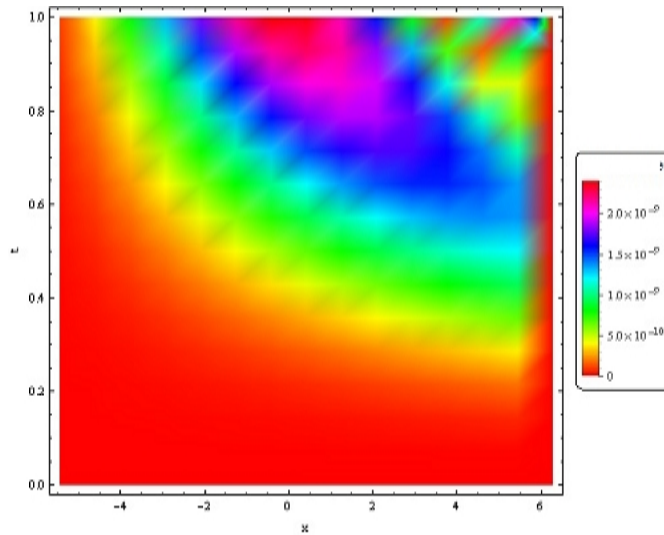
$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = t \cos(2\pi t), \quad t \in [0, 2], \quad (4.29)$$

olsun.



Şekil 4.3 Örnek 4.1.2 için tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması

$\tau = 0.001$ ve $N = 50$.



Şekil 4.4 Örnek 4.1.2 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.

Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = t \cos(xt). \quad (4.30)$$

şeklindedir.

Çözümün analitik ve tahmin edilen noktalarının zaman uzay grafiği şekil 4.3'te gösterilmiştir. Bu örnek için mutlak hataya karşın şekil 4.4'te bu tip problemlerde kullandığımız metodun etkinliği ve güvenilirliği gösterilmiştir.

Örnek 4.1.3

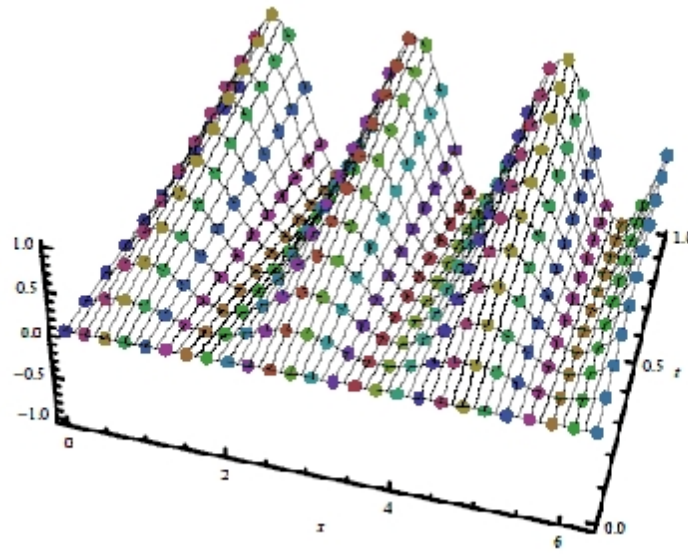
Şimdi $\alpha = 3$, $\beta = 0.5$ ve homojen olmayan kısım $g(x, t) = (2\alpha + \beta^2 t + 9t) \sin(3x)$ için telegraf denklemini ele alalım. Başlangıç şartları

$$\phi_1(x) = 0, \quad \phi_2(x) = \sin(3x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad (4.31)$$

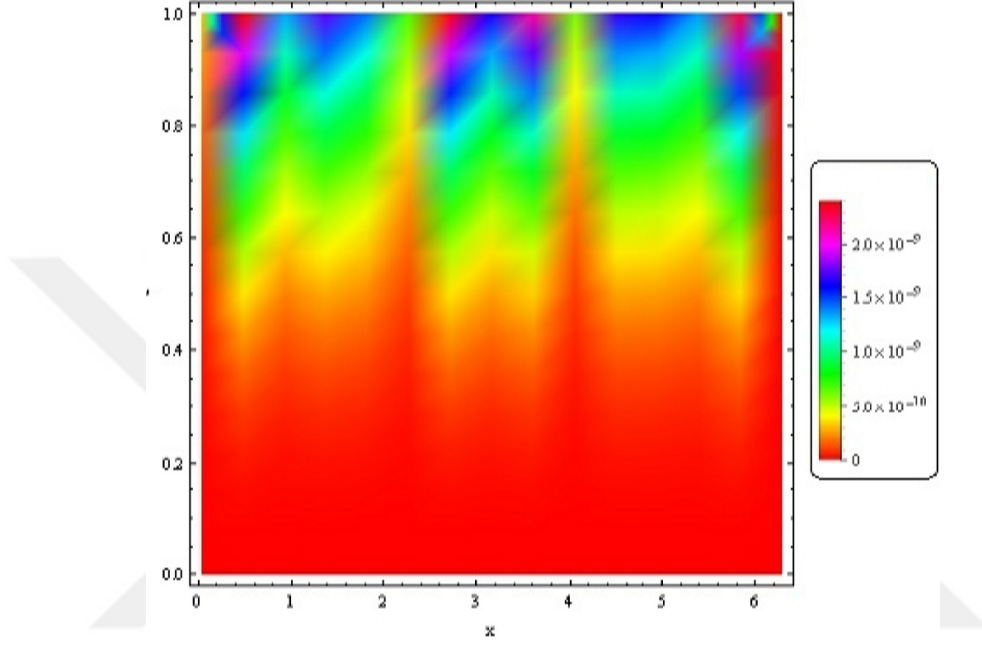
ve sınır şartları

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (4.32)$$

olsun.



Şekil 4.5 Örnek 4.1.3 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.6 Örnek 4.1.3 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.

Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = t \sin(3x). \quad (4.33)$$

biçimindedir. Önceki örneklerle benzer şekilde, şekil 4.5'te tam ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması ve şekil 4.6'da ise bulunan mutlak hata verilmiştir.

Örnek 4.1.4

Çalışmamızda son olarak telegraf denklemini $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $g(x, t) = (2 - 2t + t^2)(x - x^2)e^{-t} + 2t^2e^{-t}$ için iki farklı $\Omega_1 = \{(x, t) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq t \leq 3\}$ ve $\Omega_2 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 4\}$ tanım kümesinde göz önüne alalım. Ω_1 'de başlangıç ve sınır şartları

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = 0, \quad x \in [1, 4], \quad (4.34)$$

$$\Psi_1(t) = 0, \quad \Psi_2(t) = -12t^2e^{-t}, \quad t \in [0, 3]. \quad (4.35)$$

biçiminde verilsin. Ω_2 bölgesinde ise başlangıç ve Dirichlet sınır şartları homojen

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4.36)$$

$$\Psi_1(t) = 0, \quad \Psi_2(t) = 0, \quad t \in [0, 4]. \quad (4.37)$$

olsun. Ω_2 tanım kümesinde kullandığımız metod ile [47, 48, 50] metodları karşılaştırılıp sonuçlar tablo 4.2’de verilmiştir. Bu problemin analitik çözümü ise

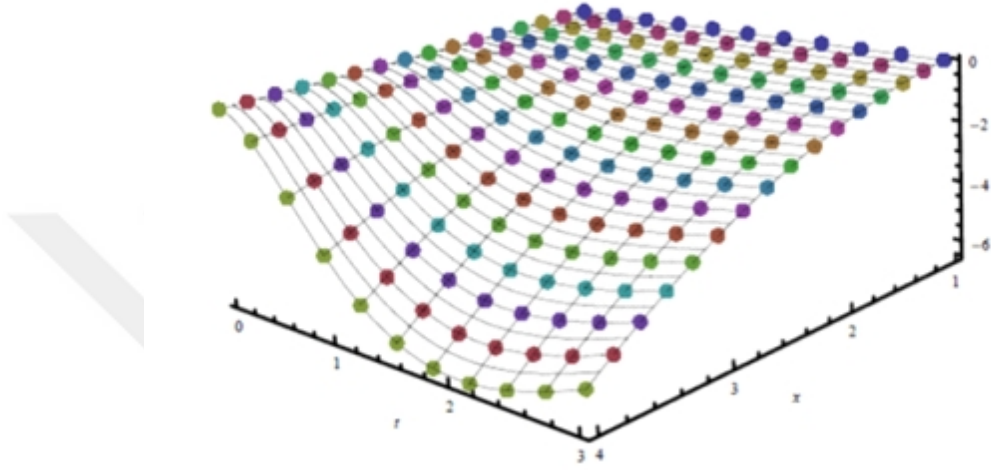
$$u(x, t) = (x - x^2)t^2e^{-t}. \quad (4.38)$$

şeklindedir [40]. Kullandığımız metodun uygulanabilirliği ve etkinliği bu tabloda görülebilir.

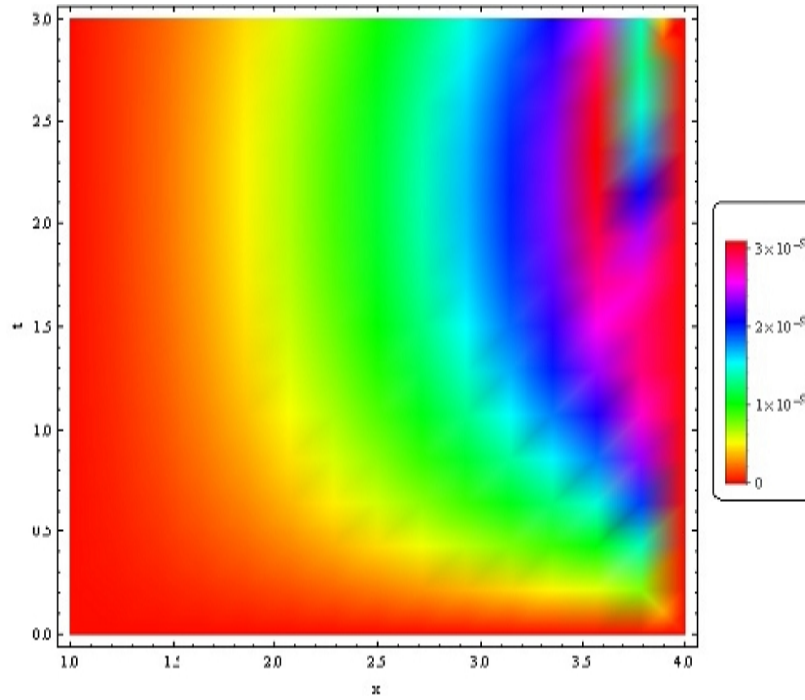
Örnek 4.1.4 için elde edilen analitik ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması Ω_1 bölgesi için şekil 4.7’de, Ω_2 bölgesi için de şekil 4.9 ile verilmiştir. Ayrıca Ω_1 ve Ω_2 bölgeleri için mutlak hatalar sırası ile şekil 4.8 ve 4.10 ile sunulmuştur.

Metod	Zaman	L_∞	RMS hatası
GKM	1.0	$1.32e - 10$	$6.91e - 11$
GKM	2.0	$4.63e - 10$	$9.80e - 11$
GKM	3.0	$7.54e - 10$	$6.55e - 10$
Sharifi ve Rashidinia [49]	1.0	$1.67e - 7$	$1.68e - 8$
Sharifi ve Rashidinia [49]	2.0	$4.72e - 7$	$4.74e - 8$
Dehghan ve Shokri [42]	1.0	$1.85e - 5$	$1.43e - 8$
Dehghan ve Shokri [42]	2.0	$1.07e - 5$	$8.04e - 6$
Dehghan ve Shokri [42]	3.0	$1.82e - 5$	$1.29e - 5$
Mittal [48]	1.0	$5.92e - 5$	—
Mittal [48]	2.0	$1.79e - 5$	—
Mittal [48]	3.0	$1.43e - 5$	—

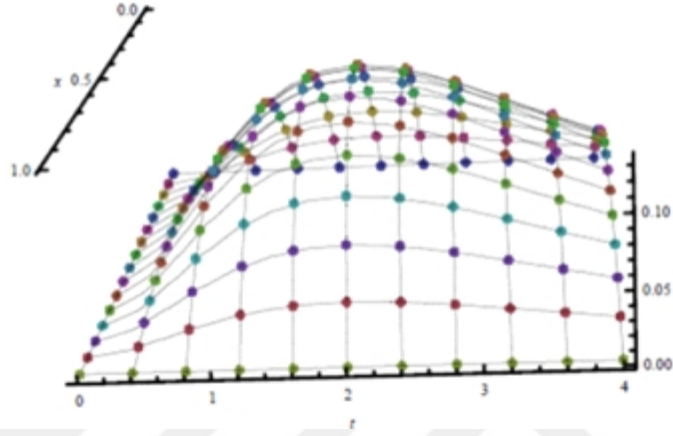
Tablo 4.2 Örnek 4.1.4’ün Ω_2 tanım kümesi için $\tau = 0.001$ ve $N = 0.002$ adımları ile hataların karşılaştırılması.



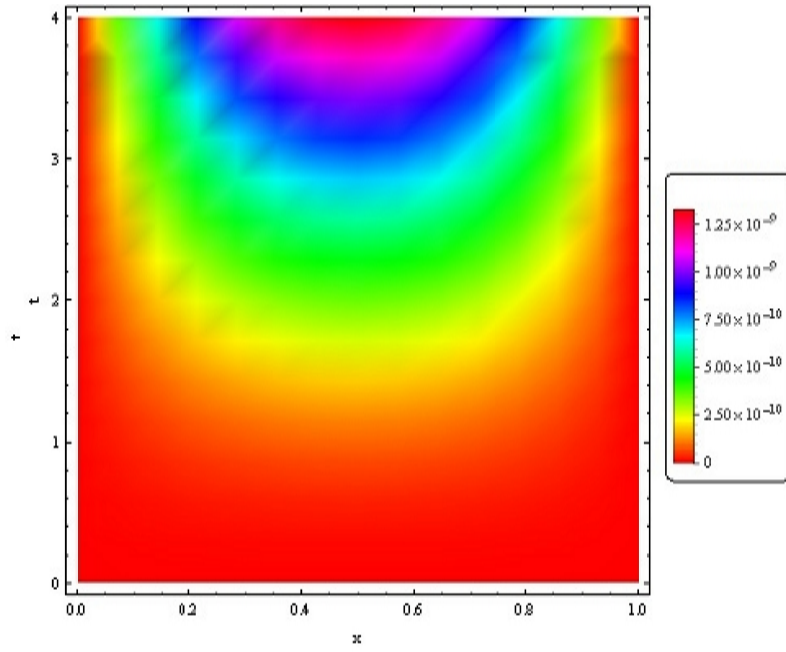
Şekil 4.7 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.8 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.9 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.10 Örnek 4.1.4 için $\tau = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.

4.2 Değişken Katsayılı Telegraf Denkleminin GKM ile Çözümü

İkinci mertebeden lineer hiperbolik

$$u_{tt} + 2\alpha(x, t)u_t + \beta(x, t)u - \chi(x, t)u_{xx} = g(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (4.39)$$

telegraf denklemini

$$\text{Başlangıç şartları : } \begin{cases} u(x, 0) = \phi_1(x), \\ u_t(x, 0) = \phi_2(x), \end{cases} \quad a \leq x \leq b, \quad (4.40)$$

$$\text{Dirichlet sınır şartları : } \begin{cases} u(a, t) = \Psi_1(t), \\ u(b, t) = \Psi_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.41)$$

şartları ile birlikte ele alalım.

(4.39) denkleminde

$$v(x, t) = u_t(x, t)$$

dönüşümünü kullanırsak (4.39)-(4.41) problemi

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = -2\alpha(x, t)v - \beta(x, t)u + \chi(x, t)u_{xx} + g \end{cases} \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (4.42)$$

$$\text{Başlangıç şartları : } \begin{cases} u(x, 0) = \phi_1(x), \\ v(x, 0) = \phi_2(x), \end{cases} \quad a \leq x \leq b,$$

$$\text{Dirichlet sınır şartları : } \begin{cases} u(a, t) = \Psi_1(t), \\ u(b, t) = \Psi_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T,$$

şeklindeki sisteme dönüştür.

4.2.1 Line Metodu

Line sayısal metodu verilen kısmi diferansiyel denklem sistemi için bağımsız değişkenlerden birinin ayrıştırılmasına dayanır. Yarı ayrıklaştırma metodu sayısal olarak integre edilen bir çift adi diferansiyel denklem sisteminde sonuç verir. $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, N$,

olmak üzere $[a, b]$ aralığında seçilen $h = \frac{b-a}{N}$ adım aralığı ile $\{x_k\}_{k=0}^N$ eşit aralıklı bir düğüm alalım. Şimdi ayrıklaştırma uygulanırsa;

$$u_{xx} \simeq \frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t))}{h^2}.$$

olur. Üstteki eşitlik kullanılır ve $u_k(t) = u(x_k, t)$, $v_k(t) = v(x_k, t)$, $g_k(t) = g(x_k, t)$, $\alpha_k(t) = \alpha(x_k, t)$, $\beta_k(t) = \beta(x_k, t)$, $\chi_k(t) = \chi(x_k, t)$ $k = 0, \dots, N$ olarak alınırsa, adi diferansiyel denklem sistemi

$$u_k(0) = \phi_1(x_k), \quad v_k(0) = \phi_2(x_k), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (4.43)$$

başlangıç şartları ve

$$u_0(t) = \Psi_1(t), \quad u_N(t) = \Psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.44)$$

sınır şartları ile

$$\begin{cases} u'_k(t) = v_k(t), \\ v'_k(t) = -2\alpha_k(t)v_k(t) - \beta_k(t)u_k(t) + \chi_k(t)\frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t))}{h^2} + g_k(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (4.45)$$

şeklinde yazılır. (4.43) başlangıç şartları ve (4.44) sınır şartları ile verilen (4.45) sisteminin çözümlerini elde edebilmek için sayısal olarak integre edilen $u_k(t)$ ve $v_k(t)$, $k = 1, \dots, N-1$, değişkenler için $2N-2$ çift lineer adi diferansiyel denklem vardır. Notasyonlar kullanılarak

$$u'_k(t) \big|_{t=j\Delta t} \simeq \frac{u_k((j+1)\Delta t) - u_k(j\Delta t)}{\Delta t}, \quad (4.46)$$

$$v'_k(t) \big|_{t=j\Delta t} \simeq \frac{v_k((j+1)\Delta t) - v_k(j\Delta t)}{\Delta t}, \quad (4.47)$$

olduğunu varsayalım. Böylece

$$u_k^j = u(kh, j\Delta t), \quad (4.48)$$

$$v_k^j = v(kh, j\Delta t), \quad (4.49)$$

ve kararlılık indeksi $\gamma = \frac{\Delta t}{h^2}$ olsun. O halde (4.48) denklem sistemini $k = 1, \dots, N-1$, $j = 0, 1, \dots, M$, $M = \frac{T}{\Delta t}$, olmak üzere

$$\begin{cases} u_k^{j+1} = u_k^j + \Delta t v_k^j \\ v_k^{j+1} = v_k^j - 2\alpha_k^j \Delta t v_k^j - \beta_k^j \Delta t u_k^j + \gamma \chi_k^j (u_{k+1}^j - 2u_k^j + u_{k-1}^j) + \Delta t g_k^j. \end{cases} \quad (4.50)$$

biçiminde tamamen ayrıklaştırılabilir.

4.2.2 Grup Koruma Metodu

Bir önceki kısımda Euler tipi bir açık metod tanıtıldı. Şimdi açık metodu geliştirmeye çalışacağız. Grup koruma metodu uygulanan (4.45) ile verilen eşitlikler $k = 1, \dots, N-1$, $j = 0, 1, \dots, M$, olmak üzere

$$\begin{cases} u_k^{j+1} = u_k^j + \Delta t \eta_j v_k^j \\ v_k^{j+1} = v_k^j + \eta_j (-2\alpha_k^j \Delta t v_k^j - \beta_k^j \Delta t u_k^j + \gamma \chi_k^j (u_{k+1}^j - 2u_k^j + u_{k-1}^j) + \Delta t g_k^j) \\ u_0^{1,j} = u_N^{1,j} = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

biçiminde yazılır. Açıkçası, her n için $\eta_j = 1$ ise (4.51), (4.50) olarak yazılabilir.

(4.45) denklem sisteminin matris formunu ifade etmek için

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_{N-1}(t), v_1(t), \dots, v_{N-1}(t))^T, \quad (4.52)$$

ve

$$f(t, u) = (v_1(t), \dots, v_{N-1}(t), s_1(t), \dots, s_{N-1}(t))^T, \quad (4.53)$$

$$s_k(t) = -2\alpha_k(t)v_k(t) - \beta_k(t)u_k(t) + \chi_k(t) \frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2} + g_k(t), \quad k = 1, \dots, N-1,$$

olur. O halde (3.1)'den (3.25)'e kadar yapılan uygulamalar kullanılarak bir boyutlu hiperbolik telegraf denkleminin grup koruma metodu ile çözümleri elde edilir.

4.2.3 Kararlılık Analizi

Telegraf denklemi için GKM'nin Neumann metoduyla kararlılık analizini araştırmak amacıyla bu denklemin $g(x, y) = 0$, homojen durumunu göz önüne almak yeterlidir. Homojen telegraf denkleminin GKM formu

$$u_k^{j+1} = u_k^j + \Delta t \eta_j v_k^j, \quad (4.54)$$

$$v_k^{j+1} = v_k^j + \eta_j [-2\alpha_k^j \Delta t v_k^j - \beta_k^j \Delta t u_k^j + \gamma \chi_k^j (u_{k+1}^j - 2u_k^j + u_{k-1}^j)], \quad (4.55)$$

biçimindedir. Sistem iki denklem ve iki değişken içermektedir. Bununla birlikte q ilave bir faktör, $i = \sqrt{-1}$, ϕ bir reel sayı, p ve w harmonik büyüklükler olmak üzere çözüm,

$$u_k^j = p q^j e^{ik\phi} \quad v_k^j = w q^j e^{ik\phi} \quad (4.56)$$

olarak yazılır. Uygulanan akış şemasının kararlılığını göstermek için $|q| \leq 1$, olduğunu ispatlamak yeterlidir. (4.54) ve (4.56) eşitliklerinden

$$\Rightarrow pq^{j+1}e^{ik\phi} = pq^je^{ik\phi} + \Delta t \eta_j w q^j e^{ik\phi} \Rightarrow (q-1)p - \Delta t \eta_j w = 0 \quad (4.57)$$

elde edilir. Üstelik (4.55) eşitliği

$$wq^{j+1}e^{ik\phi} = wq^je^{ik\phi} + \eta_j [-2\alpha_k^j \Delta t w q^j e^{ik\phi} - \beta_k^j \Delta t p q^j e^{ik\phi} + \gamma \chi_k^j p q^j e^{ik\phi} (e^{i\phi} - 2 + e^{-i\phi})]$$

eşitliğine dönüşür ve

$$(q-1 + 2\alpha_k^j \Delta t \eta_j)w + \eta_j (\beta_k^j \Delta t + 4\gamma \chi_k^j \sin^2(\frac{\phi}{2}))p = 0, \quad (4.58)$$

olur. (4.57) eşitliği (4.58)'de yerine yazılırsa;

$$(q-1 + 2\alpha_k^j \Delta t \eta_j) + (\beta_k^j \Delta t + 4\gamma \chi_k^j \sin^2(\frac{\phi}{2})) \frac{\Delta t \eta_j^2}{q-1} = 0,$$

$(q-1)$ 'in bir polinomu olarak düşünülebilir ve

$$(q-1)^2 + 2\alpha_k^j \Delta t \eta_j (q-1) + \Delta t^2 \eta_j^2 (\beta_k^j + \frac{4\gamma \chi_k^j}{\Delta t} \sin^2(\frac{\phi}{2})) = 0,$$

yazılır. Bu denklemin çözümü

$$q-1 = \frac{-2\alpha_k^j \Delta t \eta_j \pm 2\Delta t \eta_j (\alpha_k^{j2} - \beta_k^j - \frac{4\gamma \chi_k^j}{\Delta t} \sin^2(\frac{\phi}{2}))^{1/2}}{2} = 0,$$

olarak bulunur. Buradan

$$q = 1 - \alpha_k^j \Delta t \eta_j \pm \Delta t \eta_j (\alpha_k^{j2} - \beta_k^j - \frac{4\gamma \chi_k^j}{\Delta t} \sin^2(\frac{\phi}{2}))^{1/2},$$

ve $q \leq 1$ kararlılık şartı ile

$$1 - \alpha_k^j \Delta t \eta_j \pm \Delta t \eta_j (\alpha_k^{j2} - \beta_k^j - \frac{4\gamma \chi_k^j}{\Delta t} \sin^2(\frac{\phi}{2}))^{1/2} \leq 1,$$

veya diğer bir şekilde

$$\pm \Delta t \eta_j (\alpha_k^{j2} - \beta_k^j - \frac{4\gamma \chi_k^j}{\Delta t} \sin^2(\frac{\phi}{2}))^{1/2} \leq \alpha_k^j \Delta t \eta_j,$$

olarak yazılır. GKM'de $f_n \cdot u_n \leq \|f_n\| \|u_n\|$ olduğundan

$$\eta_j \geq [1 - \exp(-\frac{\Delta t \|f_j\|}{\|u_j\|})] \frac{\|u_j\|}{\|f_j\|} > 0, \quad \forall \Delta t > 0,$$

yazılabilir. Buradan

$$\alpha_k^{j2} - \beta_k^j - \frac{4\gamma\chi_k^j}{\Delta t} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \leq \alpha_k^{j2},$$

ve

$$\Delta t \beta_k^j + 4\gamma\chi_k^j \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \geq 0,$$

olur. Böylece

$$\Delta t \geq \frac{4\gamma\chi_k^j}{\beta_k^j} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

elde edilir. Burada $\gamma = \frac{\Delta t}{h^2} > 0$ ve $0 \leq \sin^2(\frac{\phi}{2}) \leq 1$ olduğundan ifade önemsizdir. Böylece telegraf denklemi için uygulanan grup koruma metodu

- ★ $\beta_k^j < 0$ ve $\chi_k^j < 0$ ise şartsız kararlı,
- ★ $\beta_k^j > 0$ ve $\chi_k^j > 0$ ise şartsız kararlı,
- ★ $\beta_k^j < 0$ ve $\chi_k^j > 0$ ise şartlı kararlı,
- ★ $\beta_k^j > 0$ ve $\chi_k^j < 0$ ise şartlı kararlı bir methodtur.

4.2.4 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde değişken katsayılı telegraf denklemi için GKM'nin etkili bir metod olduğunu göstermek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim :

Örnek 4.2.1

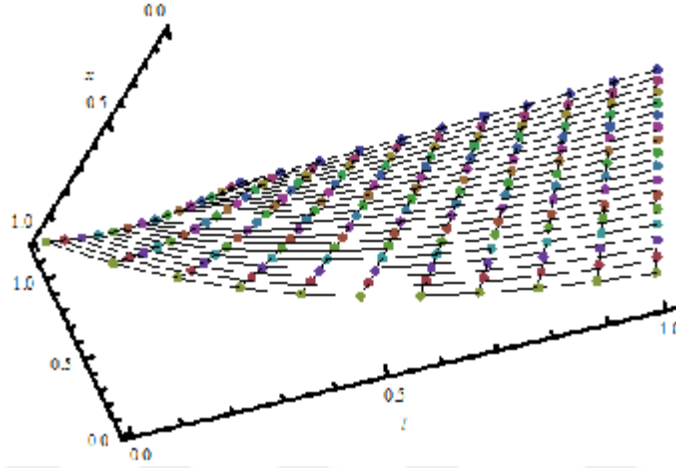
$\alpha(x, t) = 2e^{x+t}$, $\beta(x, t) = \sin^2(x + t)$, $\chi(x, t) = 1 + x^2$ ve $g(x, t) = (4 - x^2 - \cos^2(x + t) - 8e^{x+t}) e^{-2t} \sinh(x)$ için telegraf denklemini ele alalım. Başlangıç şartları

$$\phi_1(x) = \sinh(x), \quad \phi_2(x) = -2 \sinh(x), \quad x \in [0, 1],$$

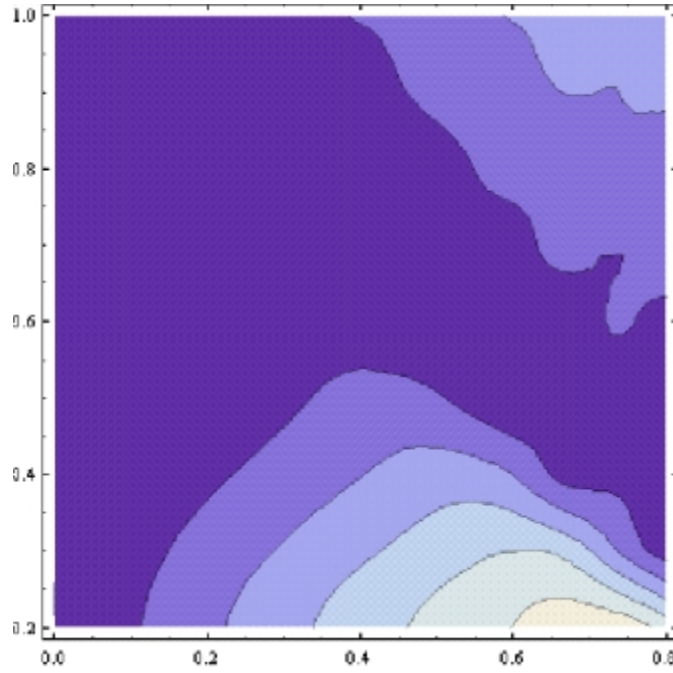
ve sınır şartları

$$\Psi_1(t) = 0, \quad \Psi_2(t) = e^{-2t} \sinh(1), \quad t \in [0, 1],$$

olsun.



Şekil 4.11 Örnek 4.2.1 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması



Şekil 4.12 Örnek 4.2.1 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.

Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = e^{-2t} \sinh(x), \quad (4.59)$$

şeklindedir [19]. Çözümün analitik ve tahmin edilen noktalarının zaman uzay grafiği şekil 4.11’de gösterilmiştir. Şekil 4.12’de ise elde edilen yaklaşık çözüme karşılık gelen mutlak hatanın grafiği sunulmuştur.

Örnek 4.2.2

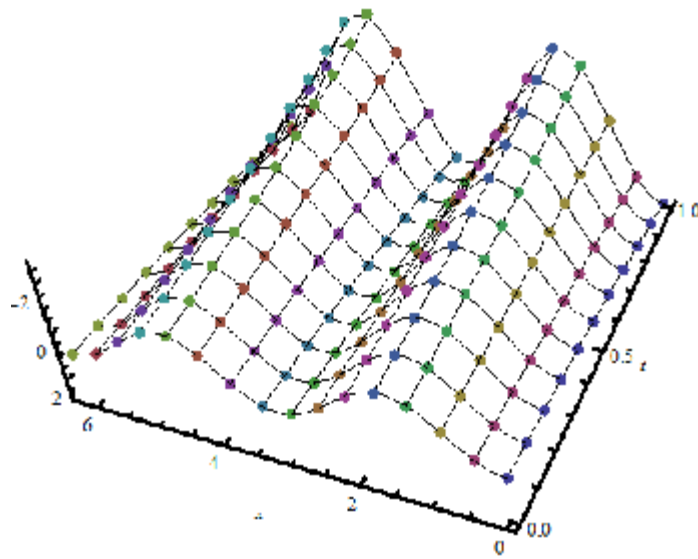
Şimdi $\alpha(x, t) = x + t$, $\beta(x, t) = x - t$, $\chi(x, t) = x^2$ ve homojen olmayan kısım $g(x, t) = (1 + 3x + t + 4x^2)e^t \cos(2x)$ için telegraf denklemini ele alalım. Başlangıç şartları

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = \cos(2x), \quad x \in [0, 2\pi],$$

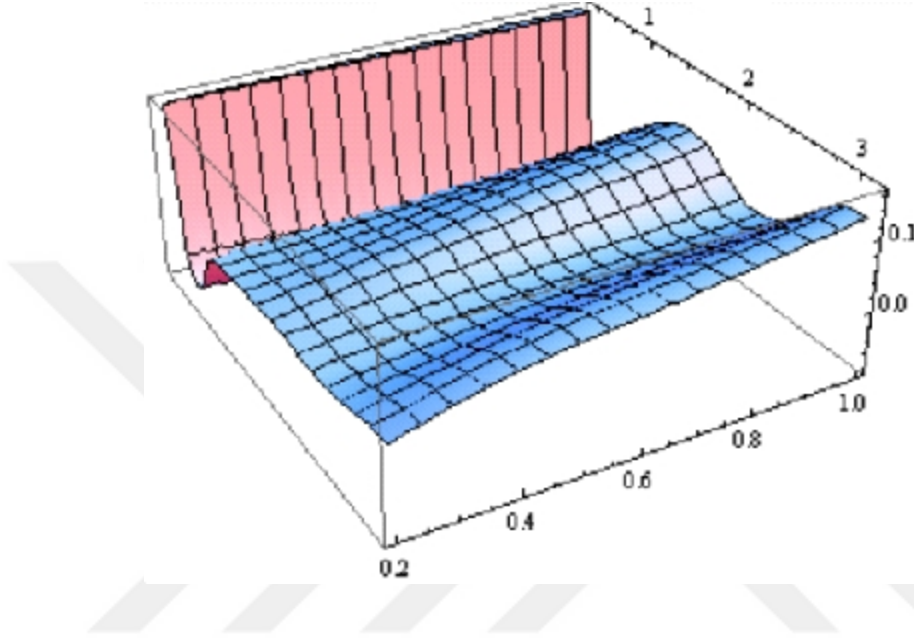
ve sınır şartları

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = e^t, \quad t \in [0, 1],$$

olsun.



Şekil 4.13 Örnek 4.2.2 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen nümerik çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.14 Örnek 4.2.2 için $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ alınarak tam çözüm ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.

Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = e^t \cos(2x), \quad (4.60)$$

biçimindedir. Şekil 4.13 ve 4.14 analitik ve yaklaşık çözümü göstermektedir.

4.3 Sonuç

GKM'nin uygulandığı değişken ve sabit katsayılı lineer Telegraf denklemlerinde yarı ayrıklaştırma denklemin geometrik yapısını korur. Bu koruma özelliği hayali çözümlerin yokluğunda minimum hatalar ile doğru çözümler içerir. Bu metodla maksimum hatalar en çok 3×10^{-9} olarak bulunmasına rağmen bilinen diğer yöntemlerde bizim kullandığımız adımlardan daha sık adımlar kullanılarak 10^{-7} civarında hatalar bulunmuştur. Kullandığımız metodun kararlılık analizi Van Neumann analiz metodu ile gösterilmiştir.

5. BÖLÜM

BURGERS DENKLEMİ

Bir boyutlu yarı-lineer parabolik

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

kısmi diferansiyel denklemini

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad a < x < b, \quad (5.2)$$

başlangıç şartları ve

$$u(a, t) = f(t) \text{ and } u(b, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (5.3)$$

sınır şartları ile ele alalım. Burada $v > 0$ kinematik akışmazlık katsayısı, ϕ , f ve g verilen değişkenlerin fonksiyonlarıdır. (5.1) denklemi ilk olarak kararlı çözümlerini bulan Bateman [51] tarafından ele alındı. Daha sonra Burgers [52] bu denklemin matematiksel modelleme için kullanılabileceğini belirtmiştir. Burgers denklemi birçok başlangıç şartlı Hopf-Cole dönüşümü ile tamamen çözülebilir ve çözümler fourier seri açılımları olarak verilebilir [53, 54]. Farklı başlangıç fonksiyonları için, sayısal bir çözücünün performansını test etmekte Burgers denklemini göz önüne almak doğaldır.

Bir boyutlu Burgers denkleminin tam çözümleri Benton and Platzman [55] tarafından araştırılmıştır. Burgers denklemini sayısal olarak çözmek için Varoğlu ve Finn [56] kalan ağırlık formülüne dayalı yeni bir sonsuz element metodunu, Evans ve Abdullah [57] alternatif grup açık metodlarını, Kakuda ve Tosaka [58] genelleştirilmiş sınır element yaklaşımını, Ali ve diğerleri [59] toplama formülüne dayalı bir kübik B-spline sonsuz element metodunu, Nguyen ve Rynen [60] en küçük kareler yaklaşımına dayalı lineer bir uzay-zaman sonsuz element tekniğini, Mittal ve Singhal [61, 62] Runge-Kutta-Chebyshev metoduyla çözülebilen linner olmayan denklem sistemini elde etmek için lineer olmayan sonlu bir teknik kullanmışlardır. Özis and Özdeş [63] bir dizi çözüm formunda yaklaşımı üretmek için direk varyasyonel metodu kullanmışlar. Kutluay ve diğerleri [64] yeterli hassaslıkta sayısal sonuçlar elde etmek için Burgers tipi problemlere tam açık sonlu fark metodunu önermişlerdir. Daha sonra, Abd-el-Malek ve El-Mansi [65] başlangıç ve sınır şartlı Burgers denkleminin çözümünü hesaplamak için grup teorik metodlarını kullanmışlardır.

5.1 Grup Koruma Metodu

Bu bölümde, (5.2) ve (5.3) başlangıç ve sınır şartları ile verilen (5.1) Burgers denklemini grup koruma metodunu uygulayalım. $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, olmak üzere $[a, b]$ aralığında seçilen $h = \frac{b-a}{N}$ adım aralığı ile $\{x_i\}_{i=0}^N$ eşit aralıklı bir düğüm alalım. Şimdi yarı ayrıklaştırma uygulanırsa;

$$\begin{aligned} u_{xx} &\cong \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{h^2}, \\ u_x &\cong \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t))}{h}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

bulunur. Üstteki eşitlikler kullanılır ve $u_i(t) = u(x_i, t)$, $i = 0, \dots, N$ olarak alınır

$$\begin{aligned} u_{xx} &\cong \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t))}{h^2}, \\ u_x &\cong \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t))}{h}, \end{aligned}$$

aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi

$$u'_i(t) + u_i(t) \left[\frac{u_{i+1}(t) - u_i(t))}{h} \right] - v \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t))}{h^2}, \quad (5.5)$$

başlangıç ve sınır şartlarıyla birlikte

$$u_i(0) = \phi(x_i) \quad i = 0, \dots, N, \quad (5.6)$$

$$u_0(t) = f(t), \quad u_N(t) = g(t), \quad (5.7)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= -u_1(t) \left[\frac{u_2(t) - u_1(t))}{h} \right] + v \frac{u_2(t) - 2u_1(t) + u_0(t))}{h^2}, \\ u'_2(t) &= -u_2(t) \left[\frac{u_3(t) - u_2(t))}{h} \right] + v \frac{u_3(t) - 2u_2(t) + u_1(t))}{h^2}, \\ &\vdots \\ u'_{N-1}(t) &= -u_{N-1}(t) \left[\frac{u_N(t) - u_{N-1}(t))}{h} \right] + v \frac{u_N(t) - 2u_{N-1}(t) + u_{N-2}(t))}{h^2}, \end{aligned}$$

elde edilir. Sistemin matris formunu ifade etmek için

$$u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}$$

yazalım. Varsayalım ki;

$$u_i'(t) = \frac{u_i(j+1, \Delta t) - u_i(j, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = -u_i^j \left(\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} \right) + v \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\Delta t}{h} u_i^j (u_{i+1}^j - u_i^j) + \frac{\Delta t}{h^2} v (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)$$

$$u_0^j = f(t_j) \quad u_N^j = g(t_j) \quad u_i^0 = \varphi(x_i) \quad (5.8)$$

$$u_{j+1} = \begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} \quad u_j = \begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{N-1}^j \end{bmatrix}$$

ve $\delta = \frac{\Delta t}{h^2}$ kararlılık indeksi olsun. O zaman sistemin tamamen ayrıklaştırılmış hali:

$$f_j = \begin{bmatrix} u_1^j - \frac{\Delta t}{h} u_1^j (u_2^j - u_1^j) + \delta v (u_2^j - 2u_1^j + u_0^j) \\ u_2^j - \frac{\Delta t}{h} u_2^j (u_3^j - u_2^j) + \delta v (u_3^j - 2u_2^j + u_1^j) \\ \vdots \\ u_{N-1}^j - \frac{\Delta t}{h} u_{N-1}^j (u_N^j - u_{N-1}^j) + \delta v (u_N^j - 2u_{N-1}^j + u_{N-2}^j) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

olmak üzere

$$U_{j+1} = U_j + \eta_j f_j$$

$$U_{j+1} = AU_j$$

şeklinde dir. Sistemin matris formunu açık olarak yazarsak

$$\begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ \vdots \\ U_{N-1}^j \end{bmatrix} + \eta_j \begin{bmatrix} u_1^j - \frac{\Delta t}{h} u_1^j (u_2^j - u_1^j) + \delta v (u_2^j - 2u_1^j + u_0^j) \\ u_2^j - \frac{\Delta t}{h} u_2^j (u_3^j - u_2^j) + \delta v (u_3^j - 2u_2^j + u_1^j) \\ \vdots \\ u_{N-1}^j - \frac{\Delta t}{h} u_{N-1}^j (u_N^j - u_{N-1}^j) + \delta v (u_N^j - 2u_{N-1}^j + u_{N-2}^j) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^j + \eta_j [u_1^j - \frac{\Delta t}{h} u_1^j (u_2^j - u_1^j) + \delta v (u_2^j - 2u_1^j + u_0^j)] \\ u_2^j + \eta_j [u_2^j - \frac{\Delta t}{h} u_2^j (u_3^j - u_2^j) + \delta v (u_3^j - 2u_2^j + u_1^j)] \\ \vdots \\ u_{N-1}^j + \eta_j [u_{N-1}^j - \frac{\Delta t}{h} u_{N-1}^j (u_N^j - u_{N-1}^j) + \delta v (u_N^j - 2u_{N-1}^j + u_{N-2}^j)] \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

denklemleri elde edilir. Böylece (5.11) sisteminden hareketle Burgers denkleminin yaklaşık çözümü grup koruma metodu ile hesaplanabilir.

5.2 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde Burgers denklemi için GKM'nin gücünü ve etkinliğini göstermek için iki model problem ele alındı.

Örnek 5.2.1

(5.1) denklemini

$$u(x, 0) = \frac{2v\pi \sin(\pi x)}{a + \cos(\pi x)}, \quad x \in [0, 1], \quad (5.12)$$

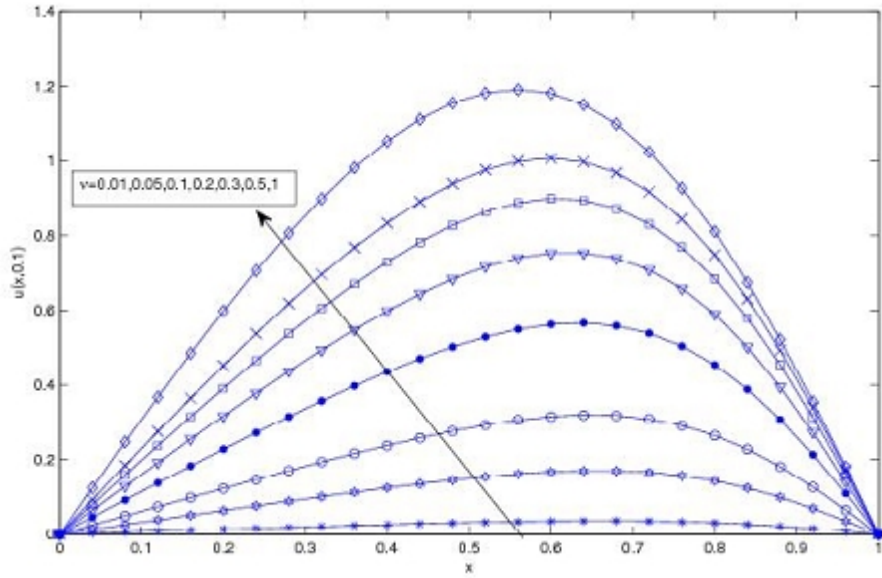
başlangıç şartı ve

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (5.13)$$

sınır şartları ile ele alalım. Bu örnekte $T = 0.1$ ve $a = 2$ olarak seçildi. ν 'nin farklı değerleri için tam ve yaklaşık çözümler $T = 0.1$ için iki boyutlu olarak şekil 5.1 de gösterildi. Görüldüğü gibi analitik ve yaklaşık çözüm çok uyumludur. Bu denklem için tam çözüm

$$u(x, t) = \frac{2\nu\pi e^{\pi^2\nu t} \sin(\pi x)}{a + e^{\pi^2\nu t} \cos(\pi x)}.$$

biçimindedir [67]. Şekil 5.3'te sunulan mutlak hatalar, GKM'nin son derece doğru bir metod olduğunu kanıtlar. Bu metod ile elde edilen yaklaşık çözümler diğer metodlarla karşılaştırıldığında kullandığımız metodun daha güvenilir olduğunu ispatlar.

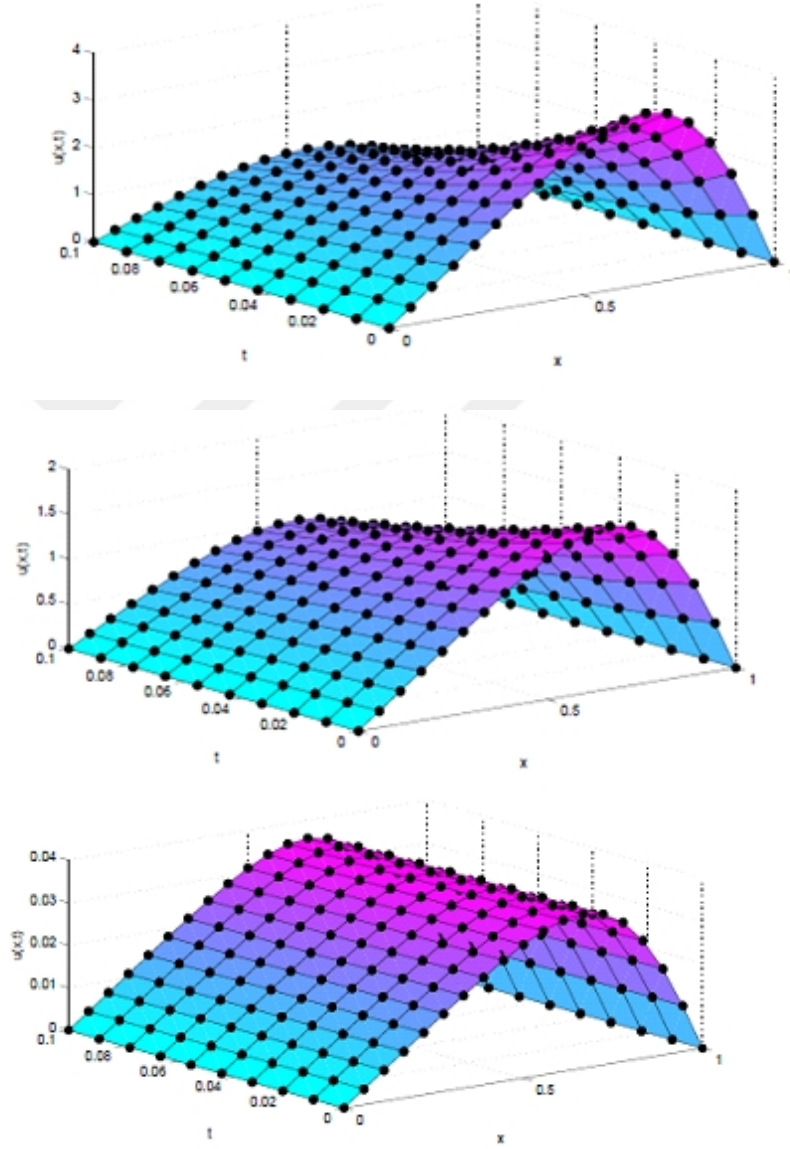


Şekil 5.1 Örnek 5.2.1 için tam ve elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması.

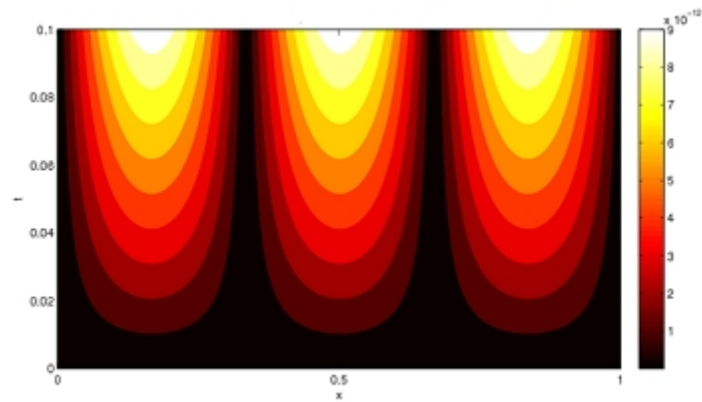
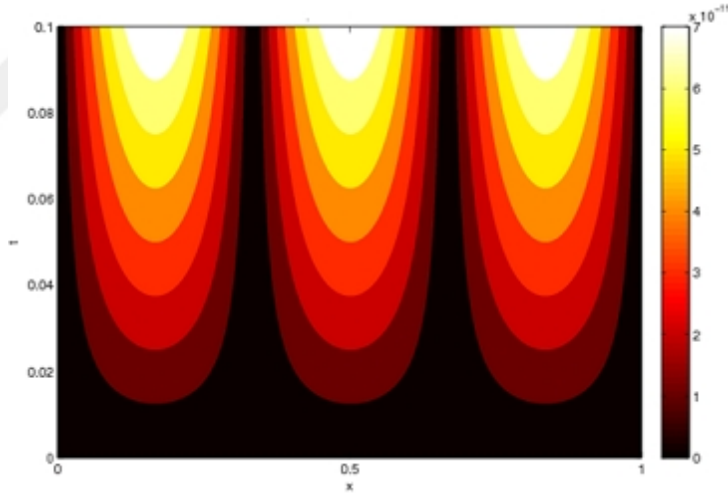
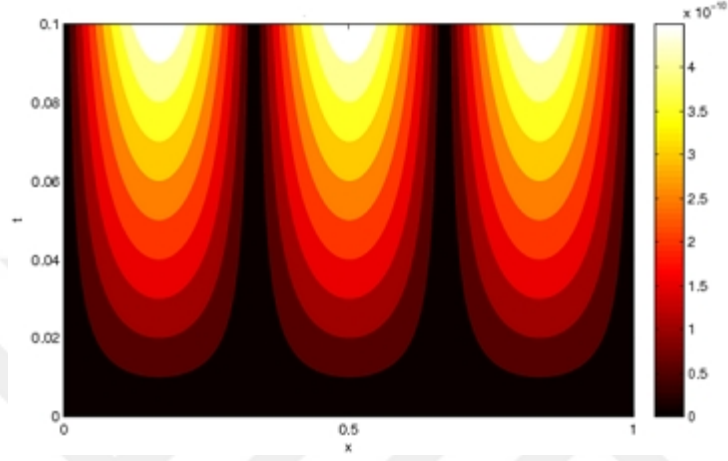
Şekil 5.2'de, sırasıyla $\nu = 0.01$, $\nu = 0.5$ ve $\nu = 1$ değerleri için elde edilen analitik ve yaklaşık çözümlerin üç boyutlu görüntüleri verilmiştir. Bu şekilde görüldüğü gibi GKM ile bulunan yaklaşık çözüm ile analitik çözüm çakışmıştır. Bu ise metodun ne kadar güvenilir olduğunu ve iyi sonuç verdiğini gösterir.

x	[68]	GKM
0.1	$9.01E - 09$	$3.59E - 10$
0.2	$9.62E - 09$	$4.49E - 10$
0.3	$9.99E - 05$	$3.01E - 10$
0.4	$3.12E - 08$	$4.95E - 11$
0.5	$4.14E - 08$	$5.01E - 10$
0.6	$2.94E - 08$	$5.02E - 11$
0.7	$5.29E - 08$	$2.99E - 10$
0.8	$5.11E - 07$	$4.50E - 10$
0.9	$1.97E - 06$	$3.61E - 10$

Tablo 5.1 Örnek 5.2.1 için belirli noktalarda mutlak hataların karşılaştırılması.



Şekil 5.2 Örnek 5.2.1 için tam ve elde edilen sayısal çözümün $\nu = 0.01$, $\nu = 0.5$ ve $\nu = 1$ için karşılaştırılması.



Şekil 5.3 Örnek 5.2.1 için mutlak hataların $\nu = 0.01$, $\nu = 0.5$ ve $\nu = 1$ için gösterilmesi.

Örnek 5.2.2

(5.1) denklemini

$$\Omega_1 = \{(x, t) : x \in [0, 8], \quad t \in [1, 4]\}, \quad \Omega_2 = \{(x, t) : x \in [0, 1.2], \quad t \in [1, 4]\}, \quad (5.14)$$

bölgeleri üzerinde başlangıç şartı

$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{4\nu}(x^2 - \frac{1}{4})}}, \quad \alpha > 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

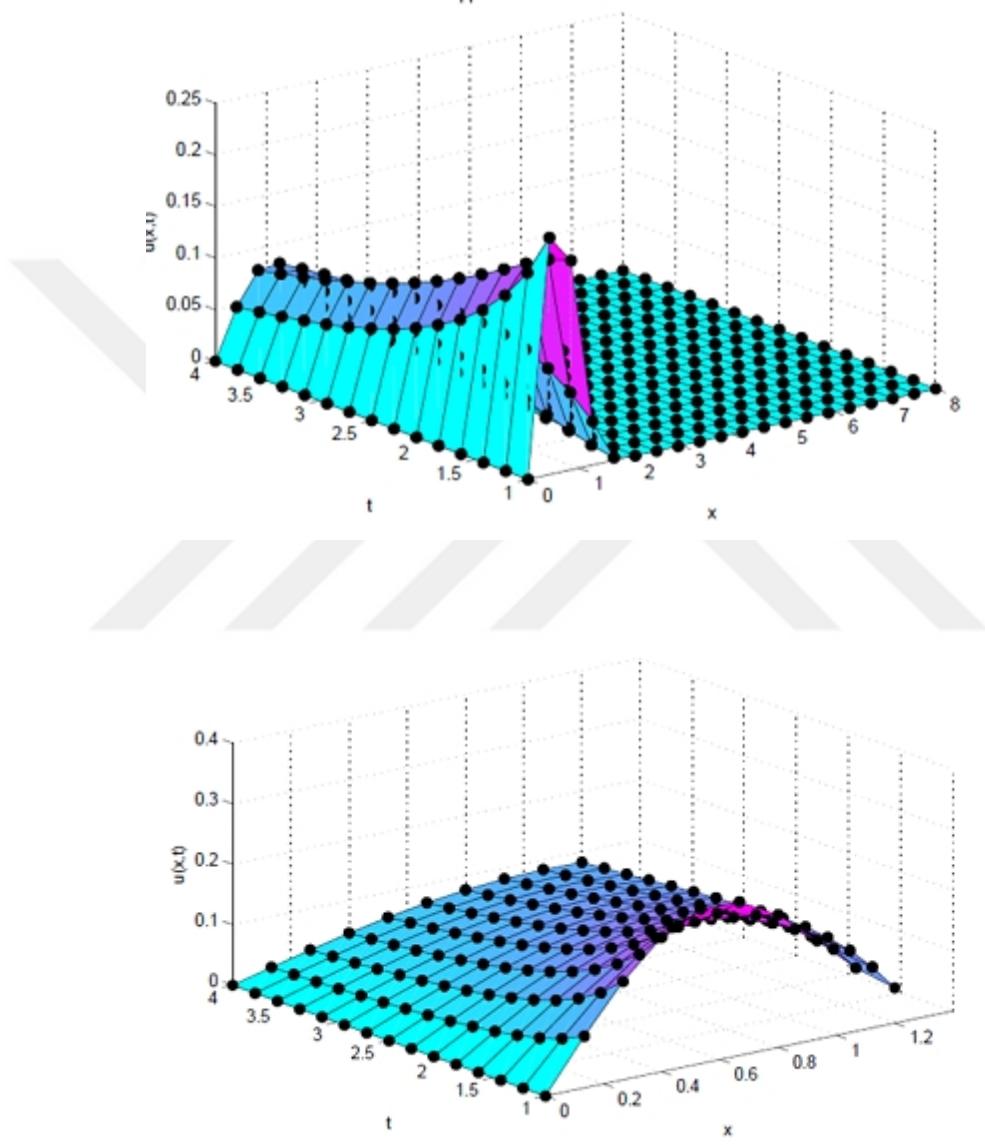
ve sınır şartı

$$u(x, t) \big|_{x \in \partial\Omega_1 \vee x \in \partial\Omega_2} = 0 \quad (5.15)$$

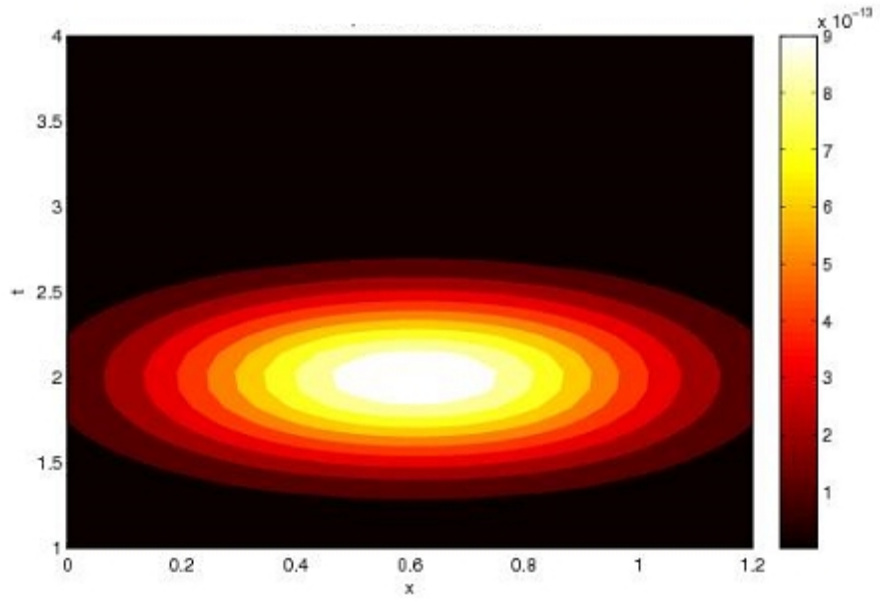
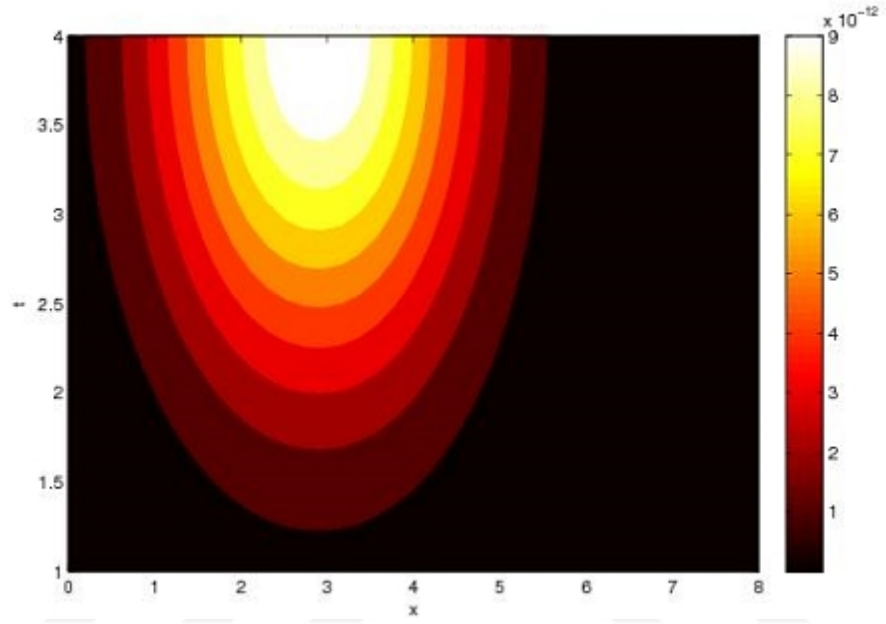
ile birlikte göz önüne alalım. Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} e^{\frac{x^2}{4\nu t}}}, \quad t_0 = e^{\frac{1}{8\nu}} \quad (5.16)$$

şeklindedir [66]. Şekil 5.4 sırasıyla Ω_1 ve Ω_2 bölgelerinde elde edilen yaklaşık ve analitik çözümler gösterilmiştir. Şekil 5.5'te ise yine sırasıyla bu bölgelerde elde edilen mutlak hatalar verilmiştir. Tablo 5.2 ve tablo 5.3 Ω_1 ve Ω_2 üzerinde literatürdeki metodlarla kullandığımız metodun karşılaştırmasını verir.



Şekil 5.4 Örnek 5.2.2 için tam ve elde edilen sayısal çözümün Ω_1 ve Ω_2 'de karşılaştırılması.



Şekil 5.5 Örnek 5.2.2 için mutlak hataların Ω_1 ve Ω_2 'de gösterilmesi.

	$t = 2$	$t = 2$	$t = 4$	$t = 4$
x	[68]	GKM	[68]	GKM
1.0	$4.95E - 07$	$9.91E - 13$	$1.41E - 06$	$4.31E - 12$
2.0	$8.80E - 07$	$2.03E - 12$	$2.24E - 07$	$7.01E - 12$
3.0	$4.96E - 08$	$3.52E - 12$	$8.96E - 08$	$9.02E - 12$
4.0	$1.00E - 10$	$2.05E - 12$	$1.59E - 08$	$7.12E - 12$
5.0	—	$9.89E - 13$	$6.00E - 10$	$3.98E - 12$

Tablo 5.2 Örnek 5.2.2 için Ω'_1 de belirli noktalarda mutlak hataların karşılaştırılması.

x	[69]	[70]	[71]	GKM
0.2	—	$3.98E - 05$	—	$2.83E - 14$
0.4	$1.00E - 07$	$3.17E - 04$	$1.00E - 07$	$3.23E - 14$
0.6	$1.50E - 06$	$1.45E - 03$	$2.00E - 07$	$9.01E - 15$
0.8	$6.90E - 06$	$2.66E - 03$	$1.00E - 07$	$7.67E - 14$

Tablo 5.3 Örnek 5.2.2 için Ω'_2 de belirli noktalarda $t = 3.5$ için mutlak hataların karşılaştırılması.

5.3 Sonuç

GKM, adi ve kısmi diferansiyel denklem çeşitlerini incelemek için etkili bir methodur. Lineer olmayan Burgers denklemi birinci dereceden bir diferansiyel denklem sisteme dönüştürülerek bu denkleme GKM uygulandı. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle gösterilerek uygulanan methodun güçlü bir method olduğu ortaya çıkarılmıştır. Tablo 5.1’de PC-metodu ile GKM karşılaştırıldı. Tablodan da görüldüğü gibi GKM daha hassas sonuçlar vermektedir. Tablo 5.2’de x ve t ’nin belirli değerleri için yaklaşık çözümler elde edildi. Bu çözümler PC-metodu ile elde edilen çözümler ile karşılaştırıldı. Tablo 5.3’te ise elde edilen sonuçlar modife olmuş kübik B-splines collocation metodu, çekirdek üreten method ve modife olmuş kübik B-spline diferansiyel kare metodu ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı. GKM’nin daha etkili bir method olduğu ispatlandı.

KAYNAKLAR

- [1] **Iserles, A., Peplow, A.T., Stuart, A.M.**, 1991. A unified approach to spurious solutions introduced by time discretisation. Part I: basic theory, SIAM J. Numer. Anal. **28**, 1723-1751.
- [2] **Iserles, A., Stuart, A.M.**, 1992. Unified approach to spurious solutions introduced by time discretisation. Part II: BDF-like methods, IMA J. Numer. Anal. **12**, 487-502.
- [3] **Humphries, A.R.**, 1993. Spurious solutions of numerical methods for initial value problems, IMA J. Numer. Anal. **13**, 263-290.
- [4] **Cartwright, J.H.E. Piro, O.**, 1992. The dynamics of Runge-Kutta methods, Int. J. Bifur. Chaos **2**, 427-449.
- [5] **Stein, O.**, 1997. Bifurcations of hyperbolic fixed points for explicit Runge-Kutta methods, IMA J. Numer. Anal. **17**, 151-175.
- [6] **Simo, J.C., Wong, K.K.**, 1991. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, Int. J. Numer. Methods Eng. **31**, 19-52.
- [7] **Lewis, D., Simo, J.C.**, 1994. Conserving algorithms for the dynamics of Hamiltonian systems on Lie groups, J. Nonlinear Sci. **4**, 253-299.
- [8] **Crouch, P.E., Grossman, R.**, 1993. Numerical integration of ordinary differential equations on manifolds, J. Nonlinear Sci. **3**, 1-33.
- [9] **Diele, F., Lopez, L., Peluso, R.**, 1998. The Cayley transform in the numerical solution of unitary differential systems, Adv. Comput. Math. **8**, 317-334.
- [10] **Munthe-Kaas, H.**, 1993. High-order Runge-Kutta methods on manifolds, Appl. Numer. Math. **29**, 115-127.

- [11] **Owren, B., Marthinsen, A.**, 1999. Runge-Kutta methods adapted to manifolds and based on rigid frames, BIT **39**, 116-142.
- [12] **Celledoni, E., Iserles, A.**, 2000. Approximating the matrix exponential from a Lie algebra to a Lie group, Math. Comp. to appear.
- [13] **Hong, H.-K., Liu, C.-S.**, 1999. Lorentz group SO (5,1) for perfect elastoplasticity with large deformation and a consistency numerical scheme, Int. J. Non-Linear Mech. **34**. 1113-1130.
- [14] **Debnath, L.**, 1998. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser.
- [15] **Koca K.**, 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [16] **Myint-U, T., Debnath, L.**, 2006. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser..
- [17] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.**, 1957. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Presses, Rochester, N. Y.
- [18] **Seydaoğlu, M.**, 2010. Parçalanmış 1- boyutlu Burgers denkleminin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek lisans tezi.
- [19] **Inc, M., Akgül, A., and Kilicman, A.**, 2013. Numerical solutions of the second-order one-dimensional telegraph equation based on reproducing kernel Hilbert space method. Abstr. Appl. Anal., Volume, Article ID 768963, 13 pages.
- [20] **Lachello, F.**, 2006. Lie Algebras and Applications, Lect. Notes Phys. **708** DOI 10.1007/b11785361.
- [21] **Altay, Gülden.**, 2008. Lie Gruplarının İzometrilere, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora tezi.
- [22] **Smith, G. D.**, 1987. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, 3rd E dn, Clarendon Press, Oxford.

- [23] **Mitchell, A. R., and Griffiths, D. F.**, 1990. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations, John Wiley Sons Ltd.
- [24] **Ucar, Y.**, 2005. 1-boyutlu Burgers tipi denklemlerin sonlu fark çözümleri, Yüksek lisans tezi.
- [25] **Liu, C.S.**, 2001. Cone of non-linear dynamical system and group preserving schemes. International Journal of Non-Linear Mechanics **36**, 1047-1068.
- [26] **Abbasbandy, S., Hashemi, M.S.**, 2011. Group preserving scheme for the Cauchy problem of the Laplace equation. Engineering Analysis with Boundary Elements **35**, 1003-1009.
- [27] **Jordan, P. M., Puri, A.**, 1999. Digital signal propagation in dispersive media. J. Appl. Phys. **85** (3) 1273–82.
- [28] **Banasiak, J., Mika, R.**, 1998. Singularly perturbed telegraph equations with applications in the random walk theory. J. Appl. Math. Stoch. Anal. **11** (1) 9–28.
- [29] **Weston, V. H., He, S.**, 1993. Wave splitting of the telegraph equation in R^3 and its application to inverse scattering. Inv Probl. (9) 789–812.
- [30] **Gao, F., and Chi, C.**, 2007. Unconditionally stable difference schemes for a one-space-dimensional linear hyperbolic equation, Appl. Math. Comput. **187**, 1272–1276.
- [31] **Mohanty, R. K., and Jain, M. K.**, 2001. An unconditionally stable alternating direction implicit scheme for the two space dimensional linear hyperbolic equation, Numer. Meth. Partial Differ. Eq. **17**, 684–688.
- [32] **Mohanty, R. K., Jain, M. K., and Arora, U.**, 2002. An unconditionally stable ADI method for the linear hyperbolic equation in three space dimensions, Int J Comput Math **79**, 133–142.
- [33] **Eckstein, E. C., Goldstein, J. A., and Leggas, M.**, 1999. The mathematics of suspensions: kac walks and asymptotic analyticity, Electron J Differ Equat Conf **3**, 39–50.

- [34] **Eckstein, E. C., Leggas, M., Ma, B., and Goldstein, J. A.,** 2000. Linking theory and measurements of tracer particle position in suspension flows, *Proc ASME FEDSM* **251**, 1–8.
- [35] **Alonso, J. M., Mawhin, J., and Ortega, R.,** 1999. Bounded solutions of second order semilinear evolution equations and applications to the telegraph equation, *J Math Pures Appl* **78**, 49–63.
- [36] **Liu, H. W., Liu, L. B.,** 2009. An unconditionally stable spline difference scheme of $O(k^2 + h^4)$ for solving the second order 1D linear hyperbolic equation, *Math. Comput. Model* **49**, 1985-1993.
- [37] **Mohanty, R. K.,** 2004. An unconditionally stable difference scheme for the one space dimensional linear hyperbolic equation, *Appl. Math. Lett.* **17**, 101-105.
- [38] **Saadatmati, A., Dehghan, M.,** 2010. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev tau method, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **26** (1), 239-252.
- [39] **Dehghan, M., Lakestani, M.,** 2009. The use of Chebyshev cardinal functions for solution of second-order one dimensional telegraph equation, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **25** (4), 931-938.
- [40] **Dehghan, M., Shokri, A.,** 2008. A numerical method for solving the hyperbolic equation, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **24**, 1080-93.
- [41] **Dehghan, M., Shokri, A.,** 2009. A meshless method for numerical solution of a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **25** 494-506.
- [42] **El-Azab, M. S., El-Ghamel M.** 2007. A numerical algorithm for the solution of telegraph equations. *Appl. Math. Comput.* **190**, 757-64.
- [43] **Esmailbeigi, M., Hosseini, M.M., Mohyud-Din, S.T.,** 2011. A new approach of the radial basis functions method for telegraph equations, *Int.J. Phys. Sci.* **6** (6), 1517-1527.

- [44] **Dostri, M., Nazemi, A.**, 2012. Quartic B-spline collocation method for solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation J. Inf. Comput. Sci. **7 (2)**, 083-090.
- [45] **Jiwari, R., Pandit, S., Mittal, R.C.**, 2012. A differential quadrature algorithm for the numerical solution of the second order one dimensional hyperbolic telegraph equation, Int. J. Nonlinear Sci. **13 (2)**, 259-266.
- [46] **Inc, M., Akgül, A., and Kilicman, A.**, 2012. Explicit solution of telegraph equation based on reproducing kernel method. J.Funct. Space Appl. **23**.
- [47] **Mittal, R.C., Bhatia, R.**, 2013. Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method, Appl. Math. Comput. **220**, 496-506.
- [48] **Sharifi, S., Rashidinia, J.**, 2016. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method, Appl. Math. Comput. **281**, 28-38.
- [49] **Pandit, S., Kumar, M., Tiwari, S.**, 2015. Numerical simulation of second-order hyperbolic telegraph type equations with variable coefficients, Comput. Phys. Commun. **187**, 83-90.
- [50] **Dehghan, M., Ghesmati, A.**, 2010. Solution of the second-order one-dimensional hyperbolic telegraph equation by using the dual reciprocity boundary integral equation (DRBIE) method, Eng. Anal. Bound. Elem. **34**, 51-59.
- [51] **Bateman, H.**, 1915. Some recent researches on the motion of fluids, Monthly Weather Rev. **43**, 163-170.
- [52] **Burger, J. M.**, 1948. A Mathematical Model illustrating the Theory of Turbulence, Adv. in Appl. Mech. I, Academic Press, New York, pp. 171-199.
- [53] **Hopf, E.**, 1950. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math. **3**, 201-230.
- [54] **Cole, J. D.**, 1951. On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart. Appl. Math. **9**, 225-236.

- [55] **Benton, E., Platzman, G. W.**, 1972. A table of solutions of the one-dimensional Burgers equations, *Quart. Appl. Math.* **30**, 195-212.
- [56] **Varoğlu, E., Finn, W. D. L.**, 1980. Space time finite elements incorporating for the Burgers equations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **16**, 171-184.
- [57] **Evans, D. J., Abdullah, A. R.**, 1984. The group explicit method for the solution of Burgers equation, *Computing* **32**, 239-253.
- [58] **Kakuda, K., Tosaka, N.**, 1990. The generalized boundary element approach to Burgers equation, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **29**, 245-261.
- [59] **Ali, A. H. A., Gardner, G. A., Gardner, L. R. T.**, 1992. A collocation solution for Burgers equation using cubic B-spline finite elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **100**, 325-337.
- [60] **Nguyen, H., Reyney, J.**, 1982. A space-time finite element approach to Burger equation, in: C. Taylor, E. Hinton, D. R. J. Owen, E. Onate (Eds.), *Numerical Methods for Non-Linear Problems*, Vol. 2, Pineridge Publisher, Swansea, pp. 718-728.
- [61] **Mittal, R. C., Singhal, P.**, 1993. Numerical solution of Burgers equation, *Comm. Numer. Methods Engrg.* **9**, 397-406.
- [62] **Mittal, R. C., Singhal, P.**, 1996. Numerical solution of periodic Burgers equation, *Indian J. Pure Appl. Math.* **27 (7)**, 689-700.
- [63] **Öziş, T., Özdeş, A.**, 1996. A direct variational methods applied to Burgers equation, *J. Comput. Appl. Math.* 163-175.
- [64] **Kutluay, S., Bahadır, A. R., Özdeş, A.**, 1999. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *J. Comput. Appl. Math.* **103** 251-261.
- [65] **Abd-el-Malek, M. B., El-Mansi, S. M. A.**, 2000. Group theoretic methods applied to Burgers equation, *J. Comput. Appl. Math.* **115**, 1-12.

- [66] **Asaithamb, A.**, 2010. Numerical solution of the burgers' equation by automatic differentiation, Appl. Math. Comput **216**, 2700–2708.
- [67] **Woo, W.L.**, 2006. An exact solution for burger's equation, Commun. Numer. Methods Eng. **22**, 797–798.
- [68] **Zhang, P.-G., Wang, J.-P.**, 2012. Predictor corrector compact finite difference scheme for Burgers equation, Appl. Math. Comput. **219**. 892–898.,
- [69] **Mittal, R.C., Jain, R.K.**, 2012. Numerical solutions of nonlinear Burgers equation with modified cubic B-splines collocation method, Appl. Math. Comput. **218**, 7839–7855.
- [70] **Xie, S. S., Heo, S., Kim, S., Woo, G., Yi, S.**, 2008. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation using reproducing kernel function, J. Comput. Appl. Math. **214**, 417-434.
- [71] **Arora, G., Singh, B.K.**, 2013. Numerical solution of Burgers equation with modified cubic B-spline differential quadrature method, Appl. Math. Comput. **224**, 166-177.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2007 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım, bir yıl sonra Fırat Üniversitesi Matematik bölümüne yatay geçiş yaptım. 2011 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2013 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora başladım ve eylül ayında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Gelibolu Piri Reis Meslek Yüksekokulu, Muhasebe ve Vergi Uygulamaları programında öğretim görevliliğini kazandım. Halen öğretim görevlisi olarak görev yapmaktayım.