

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN
YARI TERS PROBLEMLER

Yüksek Lisans Tezi

Tüba YALÇIN

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

TEMMUZ - 2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN YARI TERS PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Tüba YALÇIN

091121104

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Haziran 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Temmuz 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F. Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F. Ü)

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F. Ü)

TEMMUZ - 2011

ÖNSÖZ

Yurtiçi Yüksek Lisans burs desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkürü borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, tez konusunun belirlenilmesi, yazılması ve sonuçlandırılması sürecinde bütün fedakârlık ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü) hocama sonsuz şükranlarımı sunarım.

Tüba YALÇIN

ELAZIĞ - 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	III
SUMMARY.....	IV
SEMBOLLER LİSTESİ.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	9
2.1. Diferensiyel Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar	9
3. SONLU ARALIKTA STURM-LIOUVİLLE DENKLEMİ İÇİN YARI	
TERS PROBLEMLER	17
3.1. Yarı Ters Problemin Tanımlanması.....	17
4. İSOSPEKTRAL PROBLEM	41
4.1. Klasik Sturm-Liouville Denkleminin Tanımlanması	41
4.2. Gelfand-Levitan İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği	43
4.3. Klasik Sturm-Liouville Denklemi için İsospektral Problem.....	52
4.4. h ve H ın Bulunması için Alternatif Yöntem	55
4.5. $h_0 = h_0(\mu_0, \mu_1, \dots)$ için Formül	61
4.6. (4.40)-(4.41) Dönüşümünün $h + H < 2h_0$ Yarı Düzleminde Örtlen Olması ..	64
4.7. Dirichlet Sınır Koşulları.....	70
4.8. Dirac Sistemi için Gelfand-Levitan İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı	
ve Tekliği.....	71
4.9. Dirac Sistemi için İsospektral Problem	76
KAYNAKLAR	82
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde; Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerinin spektral teorisinin(düz ve ters problemler) tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde ve sunulan tezde sık kullanılan bazı temel tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde; sonlu aralıkta Sturm-Liouville denklemi için yarı ters problemler verilmiştir.

Dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümde klasik Sturm-Liouville denklemi için isospektral problem verilirken Dirac sistemi için isospektral problem incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Denklemi, Yarı Ters Problem, Gelfand-Levitan İntegral Denklemi, Dönüşüm Operatörü, İsospektral Problem, Dirac Sistemi.

SUMMARY

Half-Inverse Problems For Differential Operators

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter the history of spectral theory a Sturm-Liouville and Dirac operators were given.

In the second chapter some fundamental definitions, often used in spectral theory of differential operators, were given.

In the third chapter half-Inverse problems on the finite interval for Sturm-Liouville equation were given.

In the fourth chapter original works have been done. In this chapter, isospectrality problem for Classical Sturm-Liouville equation were given and isospectrality problem were researched for Dirac systems.

Key Words: Sturm-Liouville Equation, Half-Inverse Problem, Gelfand-Levitan Integral Equation, Transmutation Operator, Isospectrality Problem, Dirac Systems.

SEMBOLLER LİSTESİ

$L^2[a.b]$: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

α_n^2 : Normlaştırıcı sayılar

λ : Özdeğer

$y(x, \lambda)$: Özvektör fonksiyonu

$q(x)$: Potansiyel fonksiyonu

O : Sınırlı değerler

o : Sonsuz küçük değerler

$\rho(\lambda)$: Spektral fonksiyonu

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisinde regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları(bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan(veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferensiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Riesz, J. von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerleri dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferensiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak,

V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferensiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferensiyel operatörler için ters problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak(veya yapısını kurmak) mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır.
3. Bu veriler göre operatörlerin tanımlanması(kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan [2] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada Sturm-Liouville operatörleri için ters probleme ait aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 1: $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (2)$$

problemini özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) = 0$ dir.

Bu sonuca ilk önce dikkati çeken İsveç matematikçisi G. Borg [4] olmuştur. Borg, genel durumda Sturm-Liouville operatörünün bir spektrumla tanımlanmadığını göstermiştir. Ayrıca farklı sınır şartları sağlanacak şekilde iki spektruma göre Sturm-Liouville operatörünün birebir olarak tanımlandığını göstermiştir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2: $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ ler (1) diferensiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (3)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (4)$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ ler ise (1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1y(0) = 0 \quad (h_1 \neq h) \quad (5)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $(n = 0, 1, \dots)$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve sonlu h, H ve H_1 sayılarını tek olarak belirtir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson [32], [33] ispatlamıştır. Buna ilaveten Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda saçılma fazının potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions [7], [8] ve B. M. Levitan [34] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [49] kendi çalışmalarında göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferensiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemi ile ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichnok [58] ve V. A. Marchenko [41] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1) diferensiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \varphi'(0, \lambda) = h \quad (6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu taktirde

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \quad (7)$$

verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun Sturm-Liouville tipinde bir diferensiyel operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Marchenko-

nun çalışmaları ile hemen hemen aynı anda M. G. Krein [29], [30] çalışmalarında, Sturm-Liouville tipindeki bir diferensiyel operatörü $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $(n = 0, 1, \dots)$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerek ve yeter koşul $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerden kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

Spektral analizin ters problemler teorisinde temel çalışma I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [14] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşullar tanımlanmış olup Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için önemli bir yöntem verilmiştir.

Sturm-Liouville operatörleri için ters problemin iki spektruma göre tam çözümü 1964 yılında B. M. Levitan ve M. G. Gasymov [35] tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşullar tanımlanmıştır.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [50], H. E. Moses [43] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0, \infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. S. Gasymov ve B. M. Levitan [12] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ $[0, \infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B \frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \quad (8)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \quad (9)$$

$$(y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \quad H_1 \neq H) \quad (9')$$

sınır problemi ele alınmıştır. Bu taktirde $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$, (8) denkleminin

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1 \quad (10)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$), (8), (9) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x) \in L^2(0, \infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f^\top(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = 0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty f^\top(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (11)$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir:

Teorem 3:

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} (1 - \cos \lambda x) / \lambda \\ -(\sin \lambda x) / \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \cos \lambda y) / \lambda & -(\sin \lambda y) / \lambda \end{pmatrix} d\sigma(\lambda)$$

olmak üzere $y \leq x$ için $K(x, y)$ matris fonksiyonu

$$F(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, s) F(s, y) ds = 0 \quad (12)$$

denklemini sağlar.

Teorem 4: $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x) \in L^2(0, \infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g^\top(x) s(x, \lambda) dx \quad , \quad s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{1}{\pi}\lambda, \quad c(x, \lambda) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \lambda x) / \lambda \\ -(\sin \lambda x) / \lambda \end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^{\top}(y, \lambda) d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli $f''(x, y) \equiv F(x, y)$ türeveler sahiptir.

Bu taktirde her sabit $x \geq 0$ için (12) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan tek $K(x, y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 5: $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (8), (9) sınır probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. Eğer $g(x) \in L^2(0, \infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^{\top}(x) s(x, \lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^{\top}(y, \lambda) d\left\{\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\right\}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x, 0) = F_{21}(x, 0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x, y) \equiv F(x, y)$ türeveler sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasy-mov ve T. T. Dzhabiev [13] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 6: $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (8), (9) ve (8), (9') problemlerinin özdeğerleri ise

$$a_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (13)$$

dir. Burada $\prime$ simgesi sonsuz çarpımda $k = n$ teriminin mevcut olmadığını gösterir.

Teorem 7: $p(x)$ ve $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve k -ıncı mer-
tebeden türevleri $L^2(0, \pi)$ de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile
(8), (9) ve (8), (9') problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının çaprazlaşması yani.

$$\dots, < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \dots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \dots$$

2. $\alpha \neq \beta$, $0 \leq \beta$, $\alpha \leq \pi$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_{n,k}|^2$ serileri yakınsak olmak
üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{k,n}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülerize izin hesa-
planması, periyodik ve antiperiyodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiy-
onlarının asimptotiği, $2n$ mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi,
kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [53, 54, 51, 15, 1, 25, 11, 60,
40, 52, 16, 9, 47, 42] çalışmalarında incelenmiştir.

Daha sonraki yıllarda H. Hochstadt [17], B. M. Levitan [38] ve E. S. Penahov [48]
, Ü. İç [23] kısmen çakışmayan iki spektruma göre farklı yöntemlerle Sturm-Liouville ve
Dirac operatörleri için ters problemi incelemişlerdir.

Yarı ters problemler konusu ilk olarak H. Hochstadt, B. Lieberman [19] daha sonra
L. Sakhnovich [55], [56] E. S. Penahov, H. Koyunbakan [27], [28] ve birçok Çinli matem-
atikçi tarafından incelenmiştir.

İsospektral problemle ilgili olarak Trubowitz [6, 20, 21], daha sonra Max Jodeit
ve Levitan [24] integral denklemi ve dönüşüm operatörüne dayalı yeni bir yöntemle
isospektral problemi incelemiştir.

Bu çalışmada sonlu aralıkta Sturm-Liouville denklemi için yarı ters problemler, Sturm-Liouville denklemi ve Dirac sistemi için isospektral problem incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Diferensiyel Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar

2.1.1. Tanım (İç Çarpım Uzayı, Hilbert Uzayı): K , $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun. $\langle, \rangle: X \times X \rightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse $\langle, \rangle$ ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle, \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

- 1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\alpha \in K$,
- 3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- 4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $x, y, z \in X$

Ayrıca

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

metriğine göre tam iç çarpım uzayına ise Hilbert uzayı denir [31].

2.1.2. Tanım ($L^2[a, b]$ Uzayı): $a \leq x \leq b$ olmak üzere

$$L^2[a, b] = \left\{ f(x) : \int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty \right\}.$$

Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlıdır [31].

2.1.3. Tanım (Sınır şartları): Sınırlı bir D bölgesinde, fiziksel bir olayın matematiksel davranışı kontrol etmek isteniyorsa, D bölgesinin sınırında, genellikle bağımlı değişkene bağlı bazı şartlar yüklenmesi gerekir. Verilen bu sınır değerlerine diferensiyel denklem için sınır şartları denir. Sınır şartları 3'e ayrılır [61].

1) Dirichlet sınır şartı: Bu durumda u fonksiyonu sınırlı bir D bölgesinin sınırı üzerinde tanımlıdır. $D = (0, L)$ bölgesinde Dirichlet sınır şartları; $u(0) = \alpha$, $u(L) = \beta$ şeklinde tanımlanır. Burada α, β sabittir. Bir dikdörtgensel bölgede $0 < x < L_1$ ve

$0 < y < L_2$ olmak üzere Dirichlet sınır şartları; $u(0, y), u(L_1, y), u(x, 0)$ ve $u(x, L_2)$ olarak verilir. Eğer bağımlı değişken u , sınırın herhangi bir noktasında sıfır ise bu sınır şartına homojen sınır şartı, aksi taktirde homojen olmayan sınır şartı denir.

2) Neumann sınır şartı: Bir L uzunluğu için Neumann sınır şartları

$$u_x(0, t) = \alpha, \quad u_x(L, t) = \beta$$

olarak tanımlanır.

3) Karışık(Robin) sınır şartı: Bu durumda u bağımlı değişkenin bir lineer kombinasyonu ve $\frac{du}{dn}$ normal türevi sınır üzerinde tanımlıdır. Eğer $u(0, y) + u_x(0, y)$ veya $u(L_1, y) + u_x(L_1, y)$ gibi şartlar varsa bu sınır şartları karışık(Robin) sınır şartlarıdır.

2.1.4 Tanım (Başlangıç şartları): Difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi kısmi diferensiyel denklemlerin çoğu zamana bağlıdır. Başlangıç zamanı olan $t = 0$ anında bağımlı değişkenin başlangıç değerleri verilmelidir. Birinci mertebeden bir diferensiyel denklemde başlangıç şartı $u(x, 0)$, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemde ise $u(x, 0)$ ve $u_t(x, 0)$ şeklindedir [61].

2.1.5 Tanım (Operatör): Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [44].

2.1.6. Örnek: $C[a, b]$ den kendi içine olan ve

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b]$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir operatördür. Bu operatöre integral operatörü denir [31].

2.1.7. Tanım (Lineer operatör): E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y = Ax$ operatörünü gözönüne alınsın. A operatörü için

$$1) \quad x_1, x_2 \in E_x \text{ olmak üzere } A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$2) \quad \lambda \text{ bir skaler olmak üzere } \forall x \in E_x \text{ için } A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [26].

2.1.8. Örnek: $K(t, s)$, $0 \leq t, s \leq 1$ sürekli bir fonksiyon, $x(s) \in C[0, 1]$ olmak üzere

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s) x(s) ds$$

eşitliği ile tanımlı $y = Ax$ operatörü bir lineer operatördür [44].

2.1.9. Tanım (Sınırlı Operatör): X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer

$$\|Lx\| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [57].

2.1.10. Tanım (Adjoint Operatör): H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatörü

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L^* = L$ ise L ye self-adjoint operatör denir [45].

2.1.11. Tanım (Analitik fonksiyon): Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyorsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik denir [46].

2.1.12. Tanım (Tam Fonksiyon): Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'ye tam fonksiyon denir [46].

2.1.13. Tanım (Tam Fonksiyonun Mertebesi): $f(z)$ tam fonksiyon olacak biçimde

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|a_n|} \right)^{-1} \quad (2.1)$$

formülü ile tanımlı R

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k \quad (2.2)$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı ve $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ olsun. $r > R$ için

$$M(r) < \exp(r^\mu) \quad (2.3)$$

olmak üzere $\mu > 0$ varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir ve (2.3) eşitsizliğini sağlayan μ sayılar cümlesinin

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \quad (2.4)$$

formülü ile tanımlı ρ alt sınırına $f(z)$ in mertebesi denir [59].

2.1.14. Tanım: $f(z)$ tam fonksiyonunun mertebesi sonlu ρ ($0 < \rho < \infty$) olacak biçimde, $r > R$ için

$$M(r) < \exp(\alpha r^\rho) \quad (2.5)$$

olmak üzere $\alpha > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir.

(2.5) eşitsizliğini sağlayan a sayı cümlesinin σ alt sınırına $f(z)$ fonksiyonunun tipi denir ve

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} \quad (2.6)$$

dir [22].

2.1.15. Tanım: $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\sigma = \infty$ olacak biçimde ρ ($0 < \rho < \infty$) mertebeli $f(z)$ tam fonksiyonu sırası ile minimal, normal, maksimal tipe sahiptir denir [22].

2.1.16. Tanım (Özdeğer, özfonksiyon): L sınırlı lineer bir operatör olsun. L operatörünün tanım kümesinde

$$Ly = \lambda y$$

olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir [37].

2.1.17. Tanım (Sturm-Liouville Operatörü): $p(x)$, $q(x)$ ve $\omega(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denklemi

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y = \lambda \omega(x) y,$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemdir. $\omega(x)$ fonksiyonuna ağırlık veya yoğunluk fonksiyonu denir. Sınır şartlarını sağlayan yukarıdaki denklemin aşikar olmayan çözümleri için λ değerlerini bulmak, Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan problemin bir parçasıdır.

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y = \lambda \omega(x) y$$

denkleminde $\omega(x) = 1$ alırsak

$$Lu = \lambda u$$

özdeğer problemi elde edilir.

Uygulamalarda sık sık kullanılan en temel operatörlerden birisi de $q(x)$ reel değerli ve $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

formundaki Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatör için $y(x)$ çözüm fonksiyonları cümlesi diferensiyellenebilir ve $[a, b]$ aralığının uç noktalarında verilmiş şartlarla belirlenir. L operatörü için sık kullanılan sınır şartlardan biri

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

şeklindedir.

$$Ly \equiv -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) y = \lambda y \tag{2.7}$$

denklemini ve

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0 \tag{2.8}$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

sınır şartlarını gözönüne alalım. (2.7) – (2.8) sınır değer problemine Sturm-Liouville problemi denir. (2.8) sınır şartını $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olmak üzere

$$y(a) \cot \alpha + y'(a) = 0 \tag{2.9}$$

$$y(b) \cot \beta + y'(b) = 0$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ denilirse

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0 \\ y'(b) + Hy(b) &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

sınır şartları elde edilir. Eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli fonksiyon; H ve h sayıları da sonlu ise (2.7) – (2.10) problemine regüler Sturm-Liouville problemi, bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir [37].

2.1.18. Tanım (Normlaştırıcı Sayılar):

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \tag{2.11}$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

Sturm-Liouville sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada λ spektral parametre, h ve H reel sayılar, $q(x) \in L_2(0, \pi)$ dir. $\varphi(x, \lambda)$ ise

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h$$

başlangıç şartları altında (2.11) 'ın çözüm fonksiyonu olsun. $\varphi_n = \varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları için

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

eşitliği ile tanımlı α_n sayılarına normlaştırıcı sayılar denir [10].

2.1.19. Tanım (Dönüşüm Operatörü): E bir lineer topolojik uzay, A ve B de $A, B : E \rightarrow E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 , E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip bir X operatörü,

- 1) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,
- 2) $AX=XB$

şartlarını sağlıyorsa, X e A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [37].

2.1.20. Tanım (O ve o Sembolleri): $x \in E$ olduğunda, verilen x ler için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $x \rightarrow x_0$ iken, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır [37].

2.1.21. Tanım (Spektral fonksiyon): H bir Hilbert uzayı olmak üzere reel bir λ parametresine bağlı E_λ spektral fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur, [37].

- 1) E_λ spektral fonksiyonu, λ nın her değeri için izdüşüm operatörüdür.
- 2) $\lambda < \mu$ ise $E_\lambda < E_\mu$ dir.
- 3) $\forall x \in H$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|E_\lambda\| = 0 \text{ ve } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|E_\lambda x - x\| = 0$$

şeklindedir.

- 4) $\forall x \in H$ için $E_\lambda x$ vektör fonksiyonu sağdan süreklidir. Yani

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|E_{\lambda+\varepsilon} x - E_\lambda x\| = 0$$

şeklindedir.

2.1.22. Tanım (Rezolvent cümlesi, Spektrum): T , H Hilbert uzayında yoğun olan bir cümlede tanımlı, kapalı lineer bir operatör olsun. T operatörünün rezolventi $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ şeklindeki λ parametrelili bir operatör olarak tanımlanır.

$X \neq \emptyset$ kompleks normlu uzayı ve $T : D(T) \rightarrow X$ lineer operatörü verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa λ ya T nin bir regüler değeri denir [26, 37].

R1) $R_\lambda(t)$ mevcut

R2) $R_\lambda(t)$ sınırlı

R3) $R_\lambda(t)$ X de yoğun bir cümlede tanımlı T nin $\rho(T)$ rezolvent cümlesi tüm λ değerlerinin cümlesidir. Bu cümleinin tümleyeni $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ şeklinde olup, T nin spektrumu adını alır. Eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise T nin spektrum değeri olur.

2.1.23. Tanım (Dirac-Delta Fonksiyonu):

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & , \quad t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0 & , \quad t \geq t_0 + a \end{cases}$$

olmak üzere

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t_0)$$

fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

1)

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & , \quad t = t_0 \\ 0 & , \quad t \neq t_0 \end{cases}$$

2)

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

3) Herhangi sürekli bir $G(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{\infty} \delta(t - a) G(t) dt = G(a)$$

özellikleri ile karakterize edilir [5].

2.1.24. Tanım (Osilasyon Teoremi):

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğerlerinin artan bir dizisi

$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ olsun. λ_m özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonunun $a < x < b$ aralığında tam m tane sıfırı vardır [37].

3. SONLU ARALIKTA STURM-LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN YARI TERS PROBLEMLER

3.1. Yarı Ters Problemin Tanımlanması

Bu bölümde Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve yarı aralık üzerindeki potansiyel biliniyorken potansiyelin tüm aralık üzerinde tanımlanması incelenmiştir. Böyle bir problemin çözümünün tekliği daha önceden Hochstadt H. ve Lieberman B.[19] tarafından ispatlanmıştır. Bu bölümde ise bazı koşullar altında çözümün varlığı ispatlandı ve bu çözümü bulmanın yöntemi verildi.

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)y - \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

denklemi ve

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (3.2)$$

sınır koşulları gözönüne alınsın.

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 1 \quad (3.3)$$

koşullarını sağlayan (3.1) denkleminin çözümü $y(x, \lambda)$ olsun. $y(x, \lambda)$

$$y(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} K(x, t) dt \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilir [36]. Burada $K(x, t)$

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} p(t) dt + \int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} \int_0^{(x-y)/2} p(t+s) K(t+s, t-s) ds dt \quad (3.5)$$

integral denklemini sağlayan sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Genelliği bozmadan

$$\int_0^1 p(s) ds = 0 \quad (3.6)$$

olduğu varsayılabilir. Buradan

$$K(1, 1) = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir.

$y(1, \lambda)$ fonksiyonu 1/2-inci mertebeden analitik fonksiyondur. (3.1), (3.2) probleminin spektrumu $y(1, \lambda)$ nın sıfırlarının kümesi ile çakışır. Bu ise $y(1, \lambda)$ fonksiyonunun bu spektrumu tanımlaması anlamına gelir. (3.4) formülünden

$$h_0(t) = K(1, t) \quad (3.8)$$

fonksiyonu (3.1), (3.2) probleminin spektrumu olarak tanımlanır.

Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ aralığı üzerinde $p(x)$ verildiğinde, $p(x)$ aralığın tamamında ($0 \leq x \leq 1$) tanımlanabilir. (3.4) bağıntısında $K(x, t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - p(x) K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

diferensiyel denkleminin

$$\begin{aligned} K(x, x) &= \frac{1}{2} \int_0^x p(s) ds \\ K(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

koşullarını sağlayan bir çözümdür. Yeni $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ değişkenleri yardımı ile (3.9) denklemi

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{4} p\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) A \quad (3.11)$$

formunda yazılabilir. Gerçekten,

$$K_{xx} - K_{tt} - p(x) K = 0, \quad \xi = x + t, \quad \eta = x - t$$

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, t)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$K_x = K_\xi \xi_x + K_\eta \eta_x$$

$$K_{xx} = (K_{\xi\xi}\xi_x + K_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + K_{\xi}\xi_{xx} + (K_{\eta\xi}\xi_x + K_{\eta\eta}\eta_x)\eta_x + K_{\eta}\eta_{xx}$$

$$\Rightarrow K_{xx} = (K_{\xi\xi}.1 + K_{\xi\eta}.1)1 + K_{\xi}.0 + (K_{\eta\xi}.1 + K_{\eta\eta}.1)1 + K_{\eta}.0$$

$$\Rightarrow K_{xx} = K_{\xi\xi} + 2K_{\xi\eta} + K_{\eta\eta}$$

$$K_t = K_{\xi}\xi_t + K_{\eta}\eta_t$$

$$K_{tt} = (K_{\xi\xi}\xi_t + K_{\xi\eta}\eta_t)\xi_t + K_{\xi}\xi_{tt} + (K_{\eta\xi}\xi_t + K_{\eta\eta}\eta_t)\eta_t + K_{\eta}\eta_{tt}$$

$$\Rightarrow K_{tt} = (K_{\xi\xi}.1 - K_{\xi\eta}.1)1 + K_{\xi}.0 + (K_{\eta\xi}.1 - K_{\eta\eta}.1)(-1) + K_{\eta}.0$$

$$\Rightarrow K_{tt} = K_{\xi\xi} - 2K_{\xi\eta} + K_{\eta\eta}$$

Bu ifadeler (3.9) da yerine yazılırsa

$$4K_{\xi\eta} - p(x)K = 0 \Rightarrow K_{\xi\eta} = \frac{1}{4}p(x)K$$

elde edilir. Burada

$$A(\xi, \eta) = K\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right) \quad (3.12)$$

olarak tanımlanırsa (3.11) elde edilir. (3.10) koşulu aşağıdaki forma indirgenir ve

$$A(\xi, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} p(s) ds \quad (3.13)$$

$$A(\xi, \xi) = 0$$

dir. Gerçekten (3.12) ve (3.10) bağıntılarından

$$A(\xi, 0) = K\left(\frac{\xi + 0}{2}, \frac{\xi - 0}{2}\right) = K\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} p(s) ds,$$

$$A(\xi, \xi) = K\left(\frac{\xi + \xi}{2}, \frac{\xi - \xi}{2}\right) = K(\xi, 0) = 0,$$

bulunur. (3.13) koşullarını kullanarak (3.11) denklemi

$$A(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt + \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^{\xi/2} p(t) dt. \quad (3.14)$$

integral formunda yazılabilir. Gerçekten,

$$A_{\xi\eta} = -\frac{1}{4}p\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)A$$

denkleminde η ya göre integral alınırsa

$$A_{\xi}(\xi, \eta) - A_{\xi}(\xi, 0) = -\frac{1}{4} \int_0^{\eta} p\left(\frac{s+t}{2}\right) A(t, s) ds$$

elde edilir. Bu son denklemde ξ ye göre integral alınırsa

$$A(\xi, \eta) - A(\eta, \eta) - A(\xi, 0) + A(\eta, 0) = -\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt$$

elde edilir. (3.13) şartından

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt + A(\xi, 0) - A(\eta, 0) \\ A(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt + \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} p(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\eta/2} p(t) dt \\ A(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt + \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} p(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^0 p(t) dt \\ A(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt + \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^{\xi/2} p(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir [56].

3.1.1. Teorem: $h_0(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ve $P(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

- 1) $h_0(t)$ fonksiyonu sınırlı türeve sahiptir ve $h_0(0) = 0$ dır.
- 2) $P(x)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ aralığında sınırlıdır.
- 3)

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |h'(t)| + \frac{1}{4} \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} |P(x)| < \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

dır. Bu durumda

$$p(x) = P(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

olmak üzere $p(x)$ sınırlı fonksiyonu vardır ve $y(1, \lambda)$ fonksiyonu

$$y(1, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} h_0(t) dt. \quad (3.17)$$

şeklindedir [56].

İspat. $A(\xi, \eta)$ fonksiyonu (3.14) ile tanımlı olmak üzere

$$h(\xi) = A(\xi, 2 - \xi), \quad 1 \leq \xi \leq 2, \quad (3.18)$$

$$h_1(\xi) = A(\xi, 0), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.19)$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu fonksiyonlar

$$h(\xi) = h_0(\xi - 1), \quad 1 \leq \xi \leq 2 \quad (3.20)$$

$$h_1(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} P(s) ds, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.21)$$

bağıntıları ile $h_0(t)$ ve $P(x)$ fonksiyonlarına bağlıdır.

$$g_f(t, s) = \left(\frac{\partial f(\xi, 0)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=t+s} \right) f(t, s), \quad (3.22)$$

$$Tf = - \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} g_f(t, s) ds dt, \quad (3.23)$$

$$\Phi_f(\xi) = (Tf)_{\eta=2-\xi} = - \int_{2-\xi}^{\xi} \int_0^{2-\xi} g_f(t, s) ds dt. \quad (3.24)$$

eşitlikleri sağlansın. (3.14) denklemi

$$A(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta). \quad (3.25)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada

$$\varphi(\xi, \eta) = \begin{cases} h_1(\xi) - h_1(\eta) & , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ h(\xi) - h_1(\eta) + h_1(2 - \xi) & , \quad 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$T_1 f = \begin{cases} Tf & , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ Tf - \Phi_f(\xi) & , \quad 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \quad (3.27)$$

şeklindedir. Gerçekten $0 \leq \xi \leq 1$ iken (3.26) ve (3.27) den

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = h_1(\xi) - h_1(\eta) + TA$$

olup (3.21) ve (3.13) den

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = A(\xi, 0) - A(\eta, 0) + TA$$

bulunur. (3.13) ve (3.23) den

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} p(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^{\eta/2} p(s) ds - \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} (A_{\zeta}(\zeta, 0) |_{\zeta=t+s}) A(t, s) ds dt.$$

bulunur. (3.13) den

$$A(\zeta, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{\zeta/2} p(s) ds$$

dir. Buradan

$$A_{\zeta}(\zeta, 0) = \frac{1}{4} p\left(\frac{t+s}{2}\right)$$

bulunur. Buna göre

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^{\xi/2} p(s) ds - \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt$$

olup (3.14) den

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)$$

elde edilir. $1 \leq \xi \leq 2$ iken (3.26) ve (3.27) den

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = h(\xi) - h_1(\eta) + h_1(2 - \xi) + TA - \Phi_A(\xi)$$

dir. (3.18) den $h(\xi) = A(\xi, 2 - \xi)$ olup $2 - \xi = \eta$ alınırsa $\xi + \eta = 2$ elde edilir. Buna göre

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) - h_1(\eta) + h_1(\eta) + (TA)_{\eta=2-\xi} - (TA)_{\eta=2-\xi}$$

$$\Rightarrow \varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial \Phi_f(\xi)}{\partial \xi} = - \int_0^{2-\xi} g_f(\xi, s) ds - \int_0^{2-\xi} g_f(2-\xi, s) ds + \int_{2-\xi}^{\xi} g_f(t, 2-\xi) dt. \quad (3.28)$$

formülü ileride kullanılacaktır.

$$\|f\| = \sup \left\{ \max |f(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial f(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}, \quad 0 \leq \eta \leq \xi \leq 2, \quad \xi + \eta \leq 2 \quad (3.29)$$

normu ile $f(\xi, \eta)$ fonksiyonlarının uzayı gözönüne alınacaktır. $f_n = T_1^n f_0$, $f_0 = \varphi(\xi, \eta)$ ve $m_n = \|f_n\|$ olsun. (3.15) koşulu ve (3.26) bağıntısından

$$m_0 < \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

elde edilir. Gerçekten

$$m_0 = \|f_0\| = \|\varphi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |\varphi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}.$$

$0 \leq \xi \leq 1$ olsun. $\xi + \eta = 2$ olduğundan $\eta = 2 - \xi$ dir. Buradan $1 \leq \eta \leq 2$ olur.

$0 \leq \eta \leq \xi \leq 2$ olduğundan $\xi = \eta = 1$ elde edilir. (3.26) dan

$$|\varphi(\xi, \eta)| = \left| \frac{1}{2} \int_{1/2}^{1/2} P(s) ds \right| = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.31)$$

bulunur ve

$$\left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} P(s) ds \right] \right| = \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \xi/2 \leq \frac{1}{2}} \left| P\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|$$

olup (3.15) şartından

$$\left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.32)$$

bulunur. $1 \leq \xi \leq 2$ olsun. $\xi + \eta = 2$ dir. Buradan $\eta = 2 - \xi$ olup, $0 \leq \eta \leq 1$ olur.

$\xi = 2$ ise $\eta = 0$ olur.

$$|\varphi(\xi, \eta)| = |h(\xi)| = |A(\xi, \eta)|$$

olup (3.14) den

$$|\varphi(\xi, \eta)| = \left| -\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt + \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^{\xi/2} p(t) dt \right|$$

$$|\varphi(\xi, \eta)| \leq \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} \left| p\left(\frac{t+s}{2}\right) \right| |A(t, s)| |ds| |dt| + \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^{\xi/2} |p(t)| |dt|$$

olup (3.7) ve (3.10) dan

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi, \eta)| &\leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \frac{t+s}{2} \leq \frac{1}{2}} \left| p\left(\frac{t+s}{2}\right) \right| |A(t, s)| |\xi - \eta| |\eta - 0| + 0 \\ |\varphi(\xi, \eta)| &\leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \frac{t+s}{2} \leq \frac{1}{2}} \left| p\left(\frac{t+s}{2}\right) \right| |A(t, s)| |2 - 0| |0 - 0| \\ |\varphi(\xi, \eta)| &= 0, \quad 1 \leq \xi \leq 2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

bulunur. Burada (3.26) dan $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \xi} [h(\xi) - h_1(0) + h_1(2 - \xi)] \right| \\ \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^{(2-\xi)/2} P(s) ds \right] \right| = \left| h'(\xi) - \frac{1}{4} P\left(\frac{2-\xi}{2}\right) \right| \\ \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &\leq \sup_{0 \leq \xi \leq 1} |h'(\xi)| + \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \frac{2-\xi}{2} \leq \frac{1}{2}} \left| P\left(\frac{2-\xi}{2}\right) \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

bulunur. Böylece

$$m_0 = \|f_0\| = \sup \left\{ \max |0, 0|, \max \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| \right\} \doteq \frac{1}{2} \Rightarrow m_0 < \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

olup (3.30) elde edilir. Diğer taraftan (3.22) – (3.28) formüllerinden

$$m_{n+1} \leq 2m_n^2 \quad (3.36)$$

eşitsizliği elde edilir. Gerçekten

$$m_{n+1} = \|f_{n+1}\| = \|T_1^{n+1} \varphi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_1^{n+1} \varphi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_1^{n+1} \varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| \right\}$$

$n = 0$ için $m_1 \leq 2m_0^2$ olduğunu gösterelim:

$$m_1 = \|f_1\| = \|T_1 \varphi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_1 \varphi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_1 \varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| \right\}.$$

olup $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$|T_1 \varphi(\xi, \eta)| = |T \varphi(\xi, \eta)| = \left| - \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} (\varphi_{\zeta}(\zeta, 0) |_{\zeta=t+s}) \varphi(t, s) ds dt \right|,$$

$$|T_1\varphi(\xi, \eta)| \leq \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} |\varphi_{\zeta}(\zeta, 0)|_{\zeta=t+s} |\varphi(t, s)| |ds| |dt|$$

bulunur. $0 \leq \xi \leq 1$ ise $1 \leq \eta \leq 2$ olur. Ayrıca

$$\varphi(\zeta, 0) = \varphi(\xi + \eta, 0) = h_1(\xi + \eta) - h_1(0)$$

olup (3.21) den $h_1(0) = \frac{1}{2} \int_0^{0/2} P(s) ds = 0$ olur.

$$\varphi(\zeta, 0) = h_1(\xi + \eta) = \frac{1}{2} \int_0^{(\xi+\eta)/2} P(s) ds$$

Buradan $\varphi_{\zeta}(\zeta, 0) = \frac{1}{4} P\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow |\varphi_{\zeta}(\zeta, 0)| \leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}} |P\left(\frac{\xi}{2}\right)|$ olur. (3.15) den

$|\varphi_{\zeta}(\zeta, 0)| < \frac{1}{2}$ bulunur. (3.31) ve (3.32) den

$$|T_1\varphi(\xi, \eta)| \leq \frac{1}{4} (\xi - \eta)(\eta - 0) = 0 \Rightarrow |T_1\varphi(\xi, \eta)| = 0 \quad (3.37)$$

elde edilir. $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\left| \frac{\partial(T_1\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = |(T\varphi)_{\xi}(\xi, 0)| = \left| \left(\Phi_{\varphi}(\xi)_{\eta=2-\xi=0} \right)_{\xi}(\xi, 0) \right| = \left| \left((\Phi_{\varphi})_{\xi}(\xi) \right) \right|$$

olup (3.28) formülünde $\eta = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\partial(T_1\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = \left| \int_0^{\xi} g_{\varphi}(t, 0) dt \right| = \left| \int_0^{\xi} \varphi_t(t, 0) \varphi(t, 0) dt \right| \leq \int_0^{\xi} |\varphi_t(t, 0)| |\varphi(t, 0)| |dt|$$

olur. (3.31) ve (3.32) den

$$\left| \frac{\partial(T_1\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = 0 \quad (3.38)$$

bulunur. $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$|T_1\varphi(\xi, \eta)| = |T\varphi - \Phi_{\varphi}(\xi)| = |0| \Rightarrow |T_1\varphi(\xi, \eta)| = 0 \quad (3.39)$$

ve

$$\left| \frac{\partial(T_1\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial 0}{\partial \xi} \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial(T_1\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = 0 \quad (3.40)$$

dir. Buradan

$$m_1 = \|f_1\| = \|T_1\varphi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_1\varphi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_1\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| \right\}$$

$$m_1 = \sup \{ \max |0, 0|, \max |0, 0| \} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 2$$

bulunur. (3.35) bağıntısından

$$m_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2m_0^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 \leq 2m_0^2 \quad (3.41)$$

elde edilir. $n = 1$ için $m_2 \leq 2m_1^2$ olduğunu gösterelim:

$$m_2 = \|f_2\| = \|T_1^2\varphi(\xi, \eta)\| = \|T_1(T_1\varphi(\xi, \eta))\|$$

$$m_2 = \sup \left\{ \max |T_1^2\varphi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_1^2\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| \right\}$$

olup $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$|T_1^2\varphi(\xi, \eta)| = \left| - \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} \left((T\varphi)_{\zeta}(\zeta, 0) \big|_{\zeta=t+s} \right) (T\varphi)(t, s) ds dt \right|$$

dir. (3.37) ve (3.38) den

$$|T_1^2\varphi(\xi, \eta)| \leq \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} \left| (T\varphi)_{\zeta}(\zeta, 0) \big|_{\zeta=t+s} \right| |T\varphi(t, s)| |ds| |dt|$$

$$|T_1^2\varphi(\xi, \eta)| = 0$$

bulunur. $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\left| \frac{\partial (T_1^2\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = \left| (T^2\varphi)_{\xi}(\xi, 0) \right| = \left| \left(\Phi_{T\varphi}(\xi)_{\eta=2-\xi=0} \right)_{\xi}(\xi, 0) \right|$$

$$\left| \frac{\partial (T_1^2\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = \left| \left((\Phi_{T\varphi})_{\xi}(\xi) \right) \right|$$

olup (3.28) den

$$\left| \frac{\partial (T_1^2\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = \left| \int_0^{\xi} g_{T\varphi}(t, 0) dt \right| = \left| \int_0^{\xi} (T\varphi)_t(t, 0) (T\varphi)(t, 0) dt \right|$$

$$\left| \frac{\partial (T_1^2\varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| \leq \int_0^{\xi} |(T\varphi)_t(t, 0)| |(T\varphi)(t, 0)| |dt| = 0$$

elde edilir. $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$|T_1^2 \varphi(\xi, \eta)| = |T_1(T\varphi - \Phi_\varphi(\xi))| = |T_1(0)| = 0 \Rightarrow |T_1^2 \varphi(\xi, \eta)| = 0$$

ve

$$\left| \frac{\partial (T_1^2 \varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial 0}{\partial \xi} \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial (T_1^2 \varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| = 0$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} m_2 &= \|f_2\| = \|T_1^2 \varphi(\xi, \eta)\| = \|T_1(T_1 \varphi(\xi, \eta))\| \\ m_2 &= \sup \left\{ \max |T_1^2 \varphi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_1^2 \varphi(\xi, 0))}{\partial \xi} \right| \right\} \\ m_2 &= \sup \{ \max |0, 0|, \max |0, 0| \} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.41) den

$$m_1 = 0 \Rightarrow 2m_1^2 = 0 \Rightarrow m_2 = 2m_1^2$$

ve böylece

$$m_3, m_4, m_5, \dots = 0 \Rightarrow m_{n+1} \leq 2m_n^2$$

bulunur. Böylece

$$\varphi + T_1 \varphi + T_1^2 \varphi + \dots = A(\xi, \eta) \tag{3.42}$$

serisi düzgün yakınsaktır. Gerçekten

$$|K_n(\xi, \eta)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} T_1^k \varphi \right| \leq 0 + 0 + 0 + \dots = 0 < \epsilon$$

dir. Böylece elde edilen $A(\xi, \eta)$ fonksiyonu sınırlıdır:

$$\begin{aligned} |A(\xi, \eta)| &= |\varphi + T_1 \varphi + T_1^2 \varphi + \dots| \\ |A(\xi, \eta)| &\leq |\varphi| + |T_1 \varphi| + |T_1^2 \varphi| + |T_1^3 \varphi| + |T_1^4 \varphi| + |T_1^5 \varphi| + \dots \\ |A(\xi, \eta)| &\leq 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow |A(\xi, \eta)| \leq 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ |A(\xi, \eta)| &= |\varphi + T_1 \varphi + T_1^2 \varphi + \dots| \\ |A(\xi, \eta)| &\leq |\varphi| + |T_1 \varphi| + |T_1^2 \varphi| + |T_1^3 \varphi| + |T_1^4 \varphi| + |T_1^5 \varphi| + \dots \end{aligned}$$

$$|A(\xi, \eta)| \leq 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow |A(\xi, \eta)| \leq 0, \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

ve (3.42) denklemini sağlar:

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + T_1 (\varphi + T_1 \varphi + T_1^2 \varphi + \dots)$$

$$\varphi(\xi, \eta) + T_1 A(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + T_1 \varphi + T_1^2 \varphi + T_1^3 \varphi + \dots = A(\xi, \eta)$$

$\frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi}$ fonksiyonu da sınırlıdır:

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_1 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_1^2 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \dots \right|$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_1 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_1^2 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \dots$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots \Rightarrow \left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq 0.5, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_1 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_1^2 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \dots \right|$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_1 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_1^2 \varphi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \dots$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow \left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq 0.5, \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

(3.22) – (3.27) formüllerine göre

$$A(\xi, \xi) = 0, \quad A(\xi, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} P(s) ds, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.43)$$

$$A(\xi, 2 - \xi) = h(\xi), \quad 1 \leq \xi \leq 2 \quad (3.44)$$

koşulları sağlanır. Gerçekten

$$A(\xi, \xi) = \varphi(\xi, \xi) + T_1 A(\xi, \xi) = h_1(\xi) - h_1(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi, \xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$A(\xi, 0) = \varphi(\xi, 0) + T_1 A(\xi, 0) = h_1(\xi) - h_1(0)$$

dir. $h_1(0) = \frac{1}{2} \int_0^{0/2} P(s) ds$ olduğundan

$$A(\xi, 0) = h_1(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} P(s) ds, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

bulunur. Dolayısıyla (3.43) sağlanır. Diğer taraftan

$$A(\xi, 2 - \xi) = \varphi(\xi, 2 - \xi) + T_1 A(\xi, 2 - \xi)$$

$$A(\xi, 2 - \xi) = h(\xi) - h_1(2 - \xi) + h_1(2 - \xi) + (TA) - \Phi_A(2 - \xi) = h(\xi)$$

olup (3.44) sağlanır.

$$p\left(\frac{\xi}{2}\right) = 4 \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (3.45)$$

olsun. $p(x)$ potansiyeli $0 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde (3.45) formülü ile tanımlanır.

$$p(x) = P(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

eşitliği geçerlidir. Gerçekten (3.43) ve (3.45) den

$$\frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} = \frac{1}{4} P\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow 4 \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} = P\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow p\left(\frac{\xi}{2}\right) = P\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

$$0 \leq \xi \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{\xi}{2} \leq 1 \text{ olup}$$

$$\Rightarrow p(x) = P(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Aşağıdaki 3.1.2. teoremi (3.1), (3.2) sınır değer probleminin λ_n spektrumu ile $h_0(t) = K(1, t)$ fonksiyonu arasındaki bağıntıyı verir [55].

3.1.2. Teorem: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - n^2 \pi^2| < \infty$$

koşulunu sağlayan sayıların bir dizisi olsun: Bu taktirde aşağıdaki şartları sağlayan yalnız ve yalnız bir $\Phi(\lambda)$ fonksiyonu vardır:

- 1) λ_n sayıları, $\Phi(\lambda)$ nın basit sıfırlarıdır.
- 2) $\Phi(\lambda)$ başka sıfırlara sahip değildir.
- 3) $h_0(t)$ sürekli türeve sahip ve $h(0) = h(1) = 0$ olmak üzere $\Phi(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şekildedir [55].

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} h_0(t) dt = y(1, \lambda).$$

Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve $p(x)$ potansiyelinin

$$p(x) - p(1 - x)$$

parçası verilmişken $p(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) tanımlanabilir.

Bazı koşullar altında bu kısımda 3.1.1. Teoreminin çözümünün varlığı ispatlandı ve bu çözümü yeniden kurmanın yöntemi verildi. Bu çalışmada $h_0(t)$ nin normları üzerinde daha zayıf sınırlamalar ve $p(x) - p(1 - x)$ ile 3.1.1. Teoremi tekrar gözönüne alınacaktır. Genelliği bozmadan

$$\int_0^1 p(s) ds = 0 \quad (3.46)$$

alnabilir.

3.1.3. Teorem: $h_0(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ve $q(x) = -q(1 - x)$ ($0 \leq x \leq 1$) fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

- 1) $h_0(t)$ fonksiyonu sınırlı türeve sahiptir ve $h_0(0) = h_0(1) = 0$ dır.
- 2) $q(x)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq 1$ aralığında sınırlıdır.
- 3)

$$\frac{1}{2} \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} |h'_0(t)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{4} |q(x)| \right] < 1 \quad (3.47)$$

dir. Bu durumda

$$p(x) - p(1 - x) = q(x) \quad (3.48)$$

olmak üzere $p(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) sınırlı fonksiyonu vardır ve $y(1, \lambda)$ fonksiyonu (3.17) ile tanımlıdır [56].

İspat:

$$h(\xi) = h_0(\xi - 1) = A(\xi, 2 - \xi), \quad 1 \leq \xi \leq 2 \quad (3.49)$$

$$h_2(\xi) = A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi/2} q(s) ds, \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (3.50)$$

fonksiyonları tanımlansın. (3.14) denklemi

$$A(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) + T_2 A(\xi, \eta) \quad (3.51)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada

$$\Psi(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{h_2(\xi) - h(2-\xi)}{2} - \frac{h_2(\eta) - h(2-\eta)}{2} & , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{h_2(\xi) + h(\xi)}{2} - \frac{h_2(\eta) - h(2-\eta)}{2} & , \quad 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$T_2 f = \begin{cases} T f + \frac{1}{2} [\Phi_f(2-\xi) - \Phi_f(2-\eta)] & , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ T f - \frac{1}{2} [\Phi_f(\xi) + \Phi_f(2-\eta)] & , \quad 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \quad (3.53)$$

dir. $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$A(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) + T_2 A(\xi, \eta)$$

dir. Gerçekten $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &= \frac{h_2(\xi) - h(2-\xi)}{2} - \frac{h_2(\eta) - h(2-\eta)}{2} \\ &= \frac{h_2(\xi) - h_2(\eta)}{2} + \frac{h(2-\eta) - h(2-\xi)}{2} \end{aligned}$$

$h(2-\eta) = A(2-\eta, \eta)$ dir. $2-\eta = \xi$ olsun. Buradan $\xi + \eta = 2$ olur. (3.50) den

$$h_2(\xi) - h_2(\eta) = [A(\xi, 0) + A(2-\xi, 0)] - [A(\eta, 0) + A(2-\eta, 0)]$$

$$h_2(\xi) - h_2(\eta) = [A(\xi, 0) + A(\eta, 0)] - [A(\eta, 0) + A(\xi, 0)] = 0$$

$$\Rightarrow \Psi(\xi, \eta) = 0 + \frac{h(2-\eta) - h(2-\xi)}{2} = \frac{h(\xi) - h(\eta)}{2}$$

olup (3.49) dan

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{A(\xi, 2-\xi) - A(\eta, 2-\eta)}{2} = \frac{A(\xi, \eta) - A(\eta, \xi)}{2}$$

dir. Buradaki $A(\eta, \xi)$ hesaplanırsa

$$A(\eta, \xi) = -\frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} \int_0^{\xi} p\left(\frac{s+t}{2}\right) A(s, t) dt ds + \frac{1}{2} \int_{\xi/2}^{\eta/2} p(t) dt$$

$$A(\eta, \xi) = \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt - \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^{\xi/2} p(t) dt$$

$$A(\eta, \xi) = - \left[-\frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} p\left(\frac{t+s}{2}\right) A(t, s) ds dt + \frac{1}{2} \int_{\eta/2}^{\xi/2} p(t) dt \right] \Rightarrow A(\eta, \xi) = -A(\xi, \eta)$$

bulunur. Bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{A(\xi, \eta) - (-A(\xi, \eta))}{2} = A(\xi, \eta), \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

elde edilir. (3.53) den

$$T_2 A(\xi, \eta) = T A + \frac{1}{2} [\Phi_A(2 - \xi) - \Phi_A(2 - \eta)]$$

$$T_2 A(\xi, \eta) = T A + \frac{1}{2} (T A)_{\eta=2-(2-\xi)} - \frac{1}{2} (T A)_{\eta=2-(2-\eta)}$$

$$T_2 A(\xi, \eta) = T A + \frac{1}{2} (T A)_{\eta=\xi} - \frac{1}{2} (T A)_{\eta=\eta}$$

$$T_2 A(\xi, \eta) = \frac{1}{2} T A$$

$$T_2 A(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} (A_{\zeta}(\zeta, 0) |_{\zeta=t+s}) A(t, s) ds dt$$

elde edilir. $A_{\zeta}(\zeta, 0)$ hesaplanırsa (3.13) ve (3.46) dan

$$A(\zeta, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{\zeta/2} p(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^1 p(s) ds = 0 \Rightarrow A_{\zeta}(\zeta, 0) = 0$$

olup

$$T_2 A(\xi, \eta) = 0$$

$$\Rightarrow \Psi(\xi, \eta) + T_2 A(\xi, \eta) = A(\xi, \eta), \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

elde edilir. $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$A(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) + T_2 A(\xi, \eta)$$

dir. Gerçekten $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{h_2(\xi) + h(\xi)}{2} - \frac{h_2(\eta) + h(2 - \eta)}{2} = \frac{h_2(\xi) - h_2(\eta)}{2} + \frac{h(\xi) + h(2 - \eta)}{2}$$

olup (3.49) dan $h(\xi) = A(\xi, 2 - \xi)$ dır. Buradan $2 - \xi = \eta$ alınırsa $\xi + \eta = 2$ elde edilir. (3.50) den

$$h_2(\xi) - h_2(\eta) = [A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0)] - [A(\eta, 0) + A(2 - \eta, 0)]$$

$$h_2(\xi) - h_2(\eta) = [A(\xi, 0) + A(\eta, 0)] - [A(\eta, 0) + A(\xi, 0)] = 0$$

$$h(\xi) + h(2 - \eta) = h(\xi) + h(\xi) = 2A(\xi, 2 - \xi) = 2A(\xi, \eta)$$

elde edilir. Buradan

$$\Psi(\xi, \eta) = 0 + A(\xi, \eta) = A(\xi, \eta), \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

$$T_2 A(\xi, \eta) = TA - \frac{1}{2} [\Phi_A(\xi) + \Phi_A(2 - \eta)] = TA - \frac{1}{2} [\Phi_A(\xi) + \Phi_A(\xi)]$$

$$T_2 A(\xi, \eta) = TA - \Phi_A(\xi) = (TA) - (TA)_{\eta=2-\xi} = 0$$

$$\Psi(\xi, \eta) + T_2 A(\xi, \eta) = A(\xi, \eta), \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

elde edilir. $f(\xi, \eta)$ nin normu (3.29) ile tanımlansın. $f_n = T_2^n f_0$, $m_n = \|f_n\|$ ve $f_0 = \Psi(\xi, \eta)$ olsun. (3.47) koşulu ve (3.53) bağıntısından $m_o < 1$ elde edilir.

$$m_0 = \|f_0\| = \|\Psi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |\Psi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}$$

olup $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} |\Psi(\xi, \eta)| &= \left| \frac{h_2(\xi) - h_2(\eta)}{2} + A(\xi, \eta) \right| = \left| \frac{1}{4} \int_{\eta/2}^{\xi/2} q(s) ds + A(\xi, \eta) \right| \\ |\Psi(\xi, \eta)| &\leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}} \left| q\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| \int_{\eta/2}^{\xi/2} |ds| + |A(\xi, \eta)| \leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}} \left| q\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| \left(\frac{\xi - \eta}{2} \right) + |A(\xi, \eta)| \\ |\Psi(\xi, \eta)| &\leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}} \left| q\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| \left(\frac{1 - 1}{2} \right) + |A(\xi, \xi)| = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{4} \int_0^{\xi/2} q(s) ds + A(\xi, 0) \right] \right| = \left| \frac{1}{8} q\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}} \left| q\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| \\ \Rightarrow \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &< 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

elde edilir. $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$|\Psi(\xi, \eta)| = \left| \frac{h_2(\xi) - h_2(\eta)}{2} + A(\xi, \eta) \right| = \left| \frac{1}{4} \int_{\eta/2}^{\xi/2} q(s) ds + A(\xi, \eta) \right| \leq 0 \quad (3.56)$$

ve

$$\left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{4} \int_0^{\xi/2} q(s) ds + A(\xi, 0) \right] \right| < 1 \quad (3.57)$$

elde edilir.

$$m_0 = \|f_0\| = \|\Psi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |\Psi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}$$

$$m_0 = \sup \{ \max |0, 0|, \max |1, 1| \} = 1 \Rightarrow m_0 < 1 \quad (3.58)$$

olup (3.22) – (3.26) ve (3.53) bağıntılarından

$$m_{n+1} \leq m_n^2 \quad (3.59)$$

elde edilir. Gerçekten $n = 0$ için $m_1 \leq m_0^2$ olduğunu gösterelim:

$$m_1 = \|f_1\| = \|T_2 \Psi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_2 \Psi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_2 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}$$

dir. $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$|T_2 \Psi(\xi, \eta)| = \left| T\Psi + \frac{1}{2} \left[(T\Psi)_{\eta=\xi} - (T\Psi)_{\eta=\eta} \right] \right|$$

$$|T_2 \Psi(\xi, \eta)| = \frac{1}{2} |T\Psi| = \frac{1}{2} \left| - \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} (\Psi_{\zeta}(\zeta, 0) |_{\zeta=t+s}) \Psi(t, s) ds dt \right|$$

$$|T_2 \Psi(\xi, \eta)| \leq \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} |\Psi_{\zeta}(\zeta, 0) |_{\zeta=t+s}| |\Psi(t, s)| |ds| |dt|$$

olup (3.54) den

$$|T_2 \Psi(\xi, \eta)| = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.60)$$

bulunur. $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\left| \frac{\partial (T_2 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} T\Psi \right) (\xi, 0) \right|$$

$$\left| \frac{\partial (T_2 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\Psi}(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{1}{2} \int_0^{\xi} g_{\Psi}(t, 0) \right|$$

$$\left| \frac{\partial (T_2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{1}{2} \int_0^\xi \Psi_t (t, 0) \Psi (t, 0) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\xi |\Psi_t (t, 0)| |\Psi (t, 0)| |dt|$$

$$\left| \frac{\partial (T_2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\xi |\Psi_t (t, 0)| |\Psi (t, 0)| |dt|$$

bulunur. (3.54) ve (3.55) den

$$\left| \frac{\partial (T_2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.61)$$

elde edilir. $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$|T_2 \Psi (\xi, \eta)| = \left| T \Psi - \frac{1}{2} \left[(T \Psi)_{\eta=2-\xi} + (T \Psi)_{\eta=\eta} \right] \right|$$

dir. Burada $\xi + \eta = 2$ olduğundan

$$|T_2 \Psi (\xi, \eta)| = |T \Psi - T \Psi| = 0 \Rightarrow |T_2 \Psi (\xi, \eta)| = 0, \quad 1 \leq \xi \leq 2 \quad (3.62)$$

elde edilir. Buradan $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$\left| \frac{\partial (T_2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial 0}{\partial \xi} \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial (T_2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = 0, \quad 1 \leq \xi \leq 2 \quad (3.63)$$

olup

$$\begin{aligned} m_1 = \|f_1\| &= \|T_2 \Psi (\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_2 \Psi (\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\} \\ m_1 &= \sup \{ \max |0, 0|, \max |0, 0| \} = 0 \Rightarrow m_1 \leq m_0^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

bulunur. $n = 1$ için $m_2 \leq m_1^2$ olduğunu gösterelim:

$$m_2 = \|f_2\| = \|T_2^2 \Psi (\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_2^2 \Psi (\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}.$$

$0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} |T_2^2 \Psi (\xi, \eta)| &= |T_2 (T_2 \Psi (\xi, \eta))| = \left| T_2 \left(\frac{1}{2} T \Psi \right) \right| \\ |T_2^2 \Psi (\xi, \eta)| &= \left| T \left(\frac{1}{2} T \Psi \right) - \frac{1}{2} \left[\Phi_{\frac{1}{2} T \Psi} (2 - \xi) - \Phi_{\frac{1}{2} T \Psi} (2 - \eta) \right] \right| \\ |T_2^2 \Psi (\xi, \eta)| &= \left| \frac{1}{2} T \left(\frac{1}{2} T \Psi \right) \right| \\ |T_2^2 \Psi (\xi, \eta)| &= \left| -\frac{1}{2} \int_\eta^\xi \int_0^\eta \left(\left(\frac{1}{2} T \Psi \right)_\zeta (\zeta, 0) \Big|_{\zeta=t+s} \right) \left(\frac{1}{2} T \Psi \right) (t, s) ds dt \right| \end{aligned}$$

olup (3.60) ve (3.61) den

$$|T_2^2 \Psi (\xi, \eta)| = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.65)$$

bulunur. $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} T \left(\frac{1}{2} T \Psi \right) \right) (\xi, 0) \right| \\ \left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi_{\frac{1}{2} T \Psi} (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{1}{2} \int_0^\xi g_{\frac{1}{2} T \Psi} (t, 0) dt \right| \\ \left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^\xi \left(\left(\frac{1}{2} T \Psi \right)_t (t, 0) \Big|_{\zeta=t+s} \right) \frac{1}{2} (T \Psi) (t, 0) dt \right| \\ \left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \quad (3.66)$$

dir. (3.62) den $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$|T_2^2 \Psi (\xi, \eta)| = |T_2 (T_2 \Psi (\xi, \eta))| = |T_2 (0)| = 0 \Rightarrow |T_2^2 \Psi (\xi, \eta)| = 0 \quad (3.67)$$

ve (3.63) den $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$\left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial T_2}{\partial \xi} (0) \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = 0 \quad (3.68)$$

bulunur.

$$m_2 = \|f_2\| = \|T_2^2 \Psi (\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_2^2 \Psi (\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_2^2 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}$$

olup (3.64) den

$$m_2 = \sup \{ \max |0, 0|, \max |0, 0| \} = 0 \Rightarrow m_2 \leq m_1^2 \quad (3.69)$$

elde edilir. $n = 2$ için $m_3 \leq m_2^2$ olduğunu gösterelim:

$$m_3 = \|f_3\| = \|T_2^3 \Psi (\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_2^3 \Psi (\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi) (\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}$$

olup $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} |T_2^3 \Psi (\xi, \eta)| &= |T_2 (T_2^2 \Psi (\xi, \eta))| = \left| \frac{1}{2} T (T_2^2 \Psi (\xi, \eta)) \right| \\ |T_2^3 \Psi (\xi, \eta)| &= \left| -\frac{1}{2} \int_\eta^\xi \int_0^\eta \left((T_2^2 \Psi)_\zeta (\zeta, 0) \Big|_{\zeta=t+s} \right) (T_2^2 \Psi) (t, s) ds dt \right| = 0 \end{aligned}$$

dir. (3.65) ve (3.66) dan

$$|T_2^3 \Psi(\xi, \eta)| = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

bulunur. $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} T(T_2^2 \Psi) \right)(\xi, 0) \right| \\ \left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi_{T_2^2 \Psi}(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{1}{2} \int_0^\xi g_{T_2^2 \Psi}(t, 0) dt \right| \\ \left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^\xi ((T_2^2 \Psi)_t(t, 0)|_{\zeta=t+s}) (T_2^2 \Psi)(t, 0) dt \right| = 0 \\ \left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| &= 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned}$$

ve (3.67) den $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$|T_2^3 \Psi(\xi, \eta)| = |T_2(T_2^2 \Psi(\xi, \eta))| = |T_2(0)| = 0 \Rightarrow |T_2^3 \Psi(\xi, \eta)| = 0, \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

dir. (3.68) den $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$\left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial T_2}{\partial \xi}(0) \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = 0, \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

olup

$$m_3 = \|f_3\| = \|T_2^3 \Psi(\xi, \eta)\| = \sup \left\{ \max |T_2^3 \Psi(\xi, \eta)|, \max \left| \frac{\partial (T_2^3 \Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \right\}$$

bulunur. (3.69) gözönüne alınırsa

$$m_3 = \sup \{ \max |0, 0|, \max |0, 0| \} = 0 \Rightarrow m_3 = 0 \Rightarrow m_3 \leq m_2^2$$

elde edilir. Böylece

$$m_4 = m_5 = m_6 = \dots = 0 \Rightarrow m_{n+1} \leq m_n^2$$

bulunur. Bu durumda

$$\Psi + T_2 \Psi + T_2^2 \Psi + \dots = A(\xi, \eta) \quad (3.70)$$

serisi düzgün yakınsaktır. Gerçekten

$$|K_n(\xi, \eta)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} T_2^k \Psi \right| \leq 0 + 0 + 0 + \dots = 0 < \epsilon.$$

Elde edilen $A(\xi, \eta)$ fonksiyonu sınırlıdır:

$$|A(\xi, \eta)| = |\Psi + T_2\Psi + T_2^2\Psi + T_2^3\Psi + \dots|$$

$$|A(\xi, \eta)| \leq |\Psi| + |T_2\Psi| + |T_2^2\Psi| + |T_2^3\Psi| + \dots$$

$$|A(\xi, \eta)| \leq 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow |A(\xi, \eta)| \leq 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$|A(\xi, \eta)| \leq |\Psi| + |T_2\Psi| + |T_2^2\Psi| + |T_2^3\Psi| + \dots$$

$$|A(\xi, \eta)| \leq 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow |A(\xi, \eta)| \leq 0, \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

dir ve (3.70) denklemini sağlar:

$$\Psi(\xi, \eta) + T_2A(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) + T_2(\Psi + T_2\Psi + T_2^2\Psi + \dots)$$

$$\Psi(\xi, \eta) + T_2A(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) + T_2\Psi + T_2^2\Psi + \dots \Rightarrow \Psi(\xi, \eta) + T_2A(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)$$

$\frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi}$ fonksiyonu da sınırlıdır:

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_2^2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \dots \right|$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_2^2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \dots$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq 1 + \frac{1}{4} + 0 + \dots = 1.25 \Rightarrow \left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq 1.25, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

ve

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\partial (T_2^2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} + \dots \right|$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq \left| \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial (T_2^2\Psi)(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| + \dots$$

$$\left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \Rightarrow \left| \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial \xi} \right| \leq 1, \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

bulunur. (3.52), (3.53) formüllerinden

$$A(\xi, \xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \tag{3.71}$$

$$A(\xi, 2 - \xi) = h(\xi), \quad 1 \leq \xi \leq 2 \tag{3.72}$$

koşulları sağlar. Gerçekten

$$A(\xi, \xi) = \Psi(\xi, \xi) + T_2 A(\xi, \xi) = \frac{h_2(\xi) - h(2 - \xi)}{2} - \frac{h_2(\xi) - h(2 - \xi)}{2} = 0$$

$$A(\xi, \xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olup (3.71) sağlanır. Diğer taraftan

$$A(\xi, 2 - \xi) = \Psi(\xi, 2 - \xi) + T_2 A(\xi, 2 - \xi)$$

$$A(\xi, 2 - \xi) = \frac{h_2(\xi) + h(\xi)}{2} - \frac{h_2(2 - \xi) - h(\xi)}{2} + TA - \frac{1}{2} [\Phi_A(\xi) + \Phi_A(\xi)]$$

$$A(\xi, 2 - \xi) = \frac{h_2(\xi) + h(\xi)}{2} - \frac{h_2(2 - \xi) - h(\xi)}{2}.$$

Burada $h_2(\xi) = A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0)$ ve $h_2(2 - \xi) = A(2 - \xi, 0) + A(\xi, 0)$ olduğundan $h_2(\xi) = h_2(2 - \xi)$ elde edilir. Bu, yukarıdaki son denklemde yerine yazılırsa (3.72) elde edilir.

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = h_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (3.73)$$

dir. Gerçekten $0 \leq \xi \leq 1$ iken

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = \Psi(\xi, 0) + T_2 A(\xi, 0) + \Psi(2 - \xi, 0) + T_2 A(2 - \xi, 0)$$

$$\begin{aligned} A(\xi, 0) &= \frac{h_2(\xi) - h(2 - \xi)}{2} - \frac{h_2(0) - h(2)}{2} + (TA)(\xi, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\Phi_A(2 - \xi)_{\eta=\xi} - \Phi_A(2)_{\eta=2-2=0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(2 - \xi, 0) &= \frac{h_2(2 - \xi) - h(\xi)}{2} - \frac{h_2(0) - h(2)}{2} + (TA)(2 - \xi, 0) - \\ &- \frac{1}{2} \left[\Phi_A(2 - \xi)_{\eta=\xi} + \Phi_A(2) \right] \end{aligned}$$

dir. Burada

$$h(2) = h_0(1) = 0, \quad h_2(0) = \frac{1}{2} \int_0^{0/2} q(s) ds = 0$$

olduğundan

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = \frac{h_2(\xi) - h(2 - \xi)}{2} + \frac{h_2(2 - \xi) - h(\xi)}{2}$$

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = h_2(\xi) - \frac{h(\xi) + h(2 - \xi)}{2}$$

bulunur. $h(\xi) = A(\xi, 2 - \xi)$ ve $h(2 - \xi) = A(2 - \xi, \xi)$ dir. $A(\xi, 2 - \xi) = -A(2 - \xi, \xi)$ olduğundan $h(\xi) = -h(2 - \xi)$ dir. Böylece

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = h_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

bulunur. $1 \leq \xi \leq 2$ iken

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = \Psi(\xi, 0) + T_2 A(\xi, 0) + \Psi(2 - \xi, 0) + T_2 A(2 - \xi, 0)$$

$$A(\xi, 0) = \frac{h_2(\xi) + h(\xi)}{2} - \frac{h_2(0) - h(2)}{2} + (TA)(\xi, 0) - \frac{1}{2} [\Phi_A(\xi) + \Phi_A(2)]$$

$$\begin{aligned} A(2 - \xi, 0) &= \frac{h_2(2 - \xi) + h(2 - \xi)}{2} - \frac{h_2(0) - h(2)}{2} + (TA)(2 - \xi, 0) \\ &\quad - \frac{1}{2} [\Phi_A(2 - \xi) + \Phi_A(2)] \end{aligned}$$

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = \frac{h_2(\xi) + h(\xi)}{2} + \frac{h_2(2 - \xi) + h(2 - \xi)}{2}$$

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = h_2(\xi), \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

olup buradan

$$A(\xi, 0) + A(2 - \xi, 0) = h_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2$$

elde edilir. $p(x)$ potansiyeli (3.45) formülü ile tanımlıdır. Teorem ispatlanmıştır.

4. İSOSPEKTRAL PROBLEM

4.1. Klasik Sturm-Liouville Denkleminin Tanımlanması

Klasik Sturm-Liouville problemi ile

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (4.2)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (4.3)$$

şeklindeki iki noktalı sınır değer problemi kastedilir. Burada $q(x)$ reel sürekli bir fonksiyon, h ve H reel sayılar ve λ özdeğerdir. İsospektral problem, aynı spektruma sahip (4.1)-(4.2)-(4.3) şeklindeki bütün problemlerdir. Bu problem Trubowitz tarafından detaylı olarak çalışılmıştır [6], [20], [21].

Bu çalışmadaki temel sonuçlardan bazıları belirtilen çalışmalarla denk gelir, fakat yöntemler tamamen farklıdır. Buradaki temel araçlar Gelfand-Levitan integral denklemi ve dönüşüm operatörleridir. [6],[20], [21], [55], [56] makalelerindeki sonuçlar $q(x)$ in $L^2(0, \pi)$ uzayında olduğu kabulü ile elde edilmiştir. Bunun yerine $q(x)$ in birinci mertebeden türevlerinin $L^2(0, \pi)$ de olduğunu varsayalım. Bu kabul $F(x, y)$ fonksiyonunun diferensiyellenebilirliğinin ispatında kolaylık sağlar.

Bu bölümün ana sonuçlarının bazı aşamalarını açıklamak için klasik Sturm-Liouville problemi üzerinde yöntemin ana aşamalarının taslağını yapmak faydalı olacaktır.

Ters problemin modern teorisi G.Borg'un temel makalesi ile başlamıştır [4]. Borg'un makalesindeki iki temel sonuç doğrudan doğruya bu konu ile ilgilidir. Borg;

1) $\{\lambda_n\}$ in bilinen spektrum olması durumunda $q(x)$ potansiyelini ve (h, H) sayı çiftini içeren birçok (q, h, H) sonsuz üçlünün var olduğunu ve karşılık gelen (4.1)-(4.2)-(4.3) problemlerinin $\{\lambda_n\}$ spektrumuna sahip olduğunu ve

2) (4.1)-(4.2)-(4.3) probleminin spektrumunun $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ olması ve $H_1 \neq H$ olmak üzere $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ in

$$y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0 \quad (4.3')$$

şeklindeki (4.3') ve (4.2) sınır koşullu (4.1) denkleminin karşılık gelen problemin spektrumu olması durumunda, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ spektrumlarının tek olarak $q(x)$ potansiyelini ve h, H ve H_1 sayılarını tanımladığını göstermiştir.

Klasik ters Sturm-Liouville probleminin gelişmesinde bir sonraki önemli adım N. Levinson [33] tarafından ele alındı.

4.1.1. Tanım: (4.1)-(4.2)-(4.3) Sturm-Liouville problemine $q(x) = q(\pi - x)$ ve $h = H$ şartları sağlanacak biçimde 'simetriktir' denir [24].

4.1.2. Teorem (Levinson [33]): Simetrik Sturm-Liouville problemler sınıfında $\{\lambda_n\}, n \geq 0$ spektrumu, $q(x)$ potansiyelini ve h sayısını tek olarak tanımlar.

1950'de V. Marchenko [41] dönüştürme operatörlerini kullanarak yarı aralık üzerindeki

$$\begin{aligned} -y'' + q_1(x)y &= \lambda y & -y'' + q_2(x)y &= \lambda y \\ y'(0) &= h_1 y(0) & y'(0) &= h_2 y(0) \end{aligned}$$

Sturm-Liouville problemlerinin aynı spektral fonksiyonlara sahip olmaları durumunda $q_2(x) \equiv q_1(x)$ ve $h_2 = h_1$ olduğunu ispatlamıştır.

$\varphi(x, \lambda)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde $y(0) = 1$, $y'(0) = h$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

başlangıç değer probleminin çözümü olsun. Aşağıdaki teorem H. Weyl'in çalışmasına dayanır.

$f(x)$ düzgün kompakt desteklenen bir fonksiyon ve

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

olsun. Bu durumda azalmayan en az bir $\rho(\lambda)$ fonksiyonu vardır ki $f(x) \rightarrow F(\lambda)$ dönüştürme üniterdir. Bu ise

$$\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_0^\infty F^2(\lambda) d\rho(\lambda)$$

demektir. $\rho(\lambda)$ fonksiyonuna spektral fonksiyon denir.

Borg'un teklik teoremi, Marchenko'nun teklik teoreminden elde edilebilir.

G. Borg, N. Levinson ve V. Marchenko'nun sonuçları önemlidir ve onlar daha fazla araştırma için yol göstermiştir, fakat onlar sadece teklik teoremleridir. Sonra etkin bir şekilde $q(x)$ potansiyelini ve sınır koşullarında h ve H sayılarını kurma problemi oluştu.

Bu problem I.M.Gelfand ve B. M. Levitan tarafından çözüldü [14]. Onların temel düşünceleri dönüşüm operatörleri ve sürekli ortogonalite fikriydi. Bu iki düşünce spektral fonksiyon açısından ters problemin tam bir araştırmasını yapmaya olanak sağlayan bir integral denklem verir. Bu integral denklem bu bölümde ele alınır.

Ters Sturm-Liouville problemi için başka bir yöntem, M.Krein [30] tarafından geliştirilmiştir.

4.2. Gelfand-Levitan İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu konuda Gelfand-Levitan integral denkleminin (klasik Sturm-Liouville probleminin yapısında) kısmen yeni bir ispatı ve dönüşüm operatörlerinin varlığının ispatı verildi.

$q_0(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$), reel diferensiyellenebilir bir fonksiyon, h_0 ve H_0 sabit reel sayılar olsun.

$$-y'' + q_0(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.4)$$

$$y'(0) - h_0 y(0) = 0 \quad (4.5)$$

$$y'(\pi) + H_0 y(\pi) = 0$$

klasik Sturm-Liouville problemi gözönüne alınsın. $\varphi_0(x, \lambda)$, (4.4) denkleminin

$$\varphi_0(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_0'(0, \lambda) = h_0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Böylece her λ için $\varphi_0(x, \lambda)$, (4.5) ilk sınır koşulunu sağlar. (4.4)-(4.5) probleminin $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ özdeğerleri

$$\varphi_0'(\pi, \lambda) + H_0 \varphi_0(\pi, \lambda) = 0 \quad (4.6)$$

denkleminin kökleridir ve λ_n lere karşılık gelen özfonksiyonlar ise $\varphi_0(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ dır. Bu fonksiyonlar $L^2(0, \pi)$ de normleştirilmemiştir.

Aşağıdaki gibi integral denkleminin çekirdeğini kuralım. c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ $n \rightarrow \infty$ iken çok hızlı bir şekilde sıfıra yakınsayan keyfi reel sayılar olsun.

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(y, \lambda_n) \quad (4.7)$$

fonksiyonu sürekli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilirdir. Bu bölümde ters problemde önemli bir yere sahip

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi \quad (4.8)$$

integral denklemi ele alınır. Bu denklem Gelfand-Levitan denklemi olarak bilinir. (4.8) integral denkleminin çekirdeği $F(t, y)$ dir ve $F(x, y)$ y nin bilinmeyen fonksiyonudur, x parametredir ve $K(x, y)$ (y nin bilinmeyen fonksiyonu olarak) bilinmeyen fonksiyondur.

4.2.1. Teorem: $\forall n \geq 0$ için $\alpha_{n,0}^2 > 0$ olmak üzere

$$1 + c_n \alpha_{n,0}^2 > 0 \quad (4.9)$$

olsun. Bu taktirde (4.8) integral denklemi $\forall x, 0 \leq x \leq \pi$ için bir tek çözüme sahiptir [24].

İspat: Teoremin ispatı için

$$h_x(y) + \int_0^x F(t, y) h_t(y) dt = 0 \quad (4.10)$$

homogen denkleminin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Böyle-

ce $h_x(y)$ (4.10) denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümdür. (4.10) denklemini $h_x(y)$ ile çarpılırsa ve y ye göre 0 dan x e integrallenirse

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x F(t, y) h_t(y) dt dy = 0$$

elde edilir. Parseval eşitliği kullanılarak

$$\int_0^x h_x^2(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \left(\int_0^x h_x^2(y) \varphi(y, \lambda) dy \right)^2$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x F(t, y) h_t(y) dt dy = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \left(\int_0^x h_x^2(y) \varphi(y, \lambda) dy \right)^2 + \int_0^x \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_0(t, \lambda) \varphi_0(y, \lambda) \right) h_t(y) dt dy \end{aligned}$$

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x F(t, y) h_t(y) dt dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} (1 + c_n \alpha_{n,0}^2) \left(\int_0^x h_x^2(y) \varphi(y, \lambda) dy \right)^2 = 0$$

olur. Son denklemden ve (4.9) koşulundan

$$\int_0^x h_x^2(y) \varphi(y, \lambda) dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. $\{\varphi_n(x, \lambda), n \geq 0\}$ sistemi tam olduğundan $h_x(y) = 0$ olur. İspat tamamlanır.

4.2.2. Teorem: (4.8) integral denkleminin $K(x, y)$ çözümü

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q(x) K = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - q_0(y) K, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.11)$$

kısmi diferensiyel denklemini sağlar. Burada

$$q(x) = q_0(x) + 2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (4.12)$$

dır. Ayrıca $K(x, y)$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x [q(t) - q_0(t)] dt - F(0, 0) \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial y} - h_0 K \right) |_{y=0} = 0 \quad (4.14)$$

sınır koşullarını sağlar [24].

İspat:

$$J = K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0 \quad (0 \leq y \leq x \leq \pi)$$

olsun. Böylece $q(x)$ (4.12) açılımına sahip ve $q_0(x)$ (4.4) unperturbed probleminin potansiyeli olmak üzere

$$\mathfrak{S} = J_{xx} + J_{yy} - q(x) J + q_0(x) J = 0 \quad (4.15)$$

dir.

$$J_x = \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} + K(x, x) F(x, y) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} F(t, y) dt$$

denkleminde x e göre tekrar türev alınırsa

$$J_{xx} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{d}{dx} (K(x, x)) F(x, y) + K(x, x) \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} F(x, y) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} F(t, y) dt$$

olur.

$$J_y = \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} + \int_0^x K(x, t) \frac{\partial F}{\partial y} dt$$

denkleminde y ye göre tekrar türev alınırsa

$$J_{yy} = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \int_0^x K(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dt$$

elde edilir. Bu değerler $\Im$ de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Im &= \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{d}{dx} (K(x, x)) F(x, y) + K(x, x) \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) + \\ &+ \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} F(x, y) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} F(t, y) dt - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \\ &- \int_0^x K(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dt - q(x) K - q(x) F - q(x) \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt + \\ &+ q_0(y) K + q_0(y) F + q_0(y) \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt \\ \Im &= \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - q(x) K + q_0(y) K \right] + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q(x) K + q_0(y) K \right] F(t, y) dt \\ &+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - q(x) F + q_0(y) F \right] + \frac{d}{dx} (K(x, x)) F(x, y) + K(x, x) \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) + \\ &+ \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} F(x, y) - \int_0^x K(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dt = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - q(x) F + q_0(y) F = 0$ olduğu bilinmektedir. Böylece

$$\Im = \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - q(x) K + q_0(y) K \right] + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q(x) K + q_0(y) K \right] F(t, y) dt +$$

$$+\frac{d}{dx}(K(x,x))F(x,y)+K(x,x)\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)+\frac{\partial K}{\partial x}|_{t=x}F(x,y)-\int_0^x K(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dt=0$$

olur. Burada $\int_0^x K(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dt$ integralindeki $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ terimi $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ ile değiştirilip elde edilen integralde iki kez kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^x K(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}dt &= \int_0^x K(x,t)d\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \left(K(x,t)\frac{\partial F}{\partial t}\right)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial t}dt \\ \int_0^x K(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}dt &= K(x,x)\frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{t=x} - K(x,0)\frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{t=0} - \left(\frac{\partial K}{\partial t}F(t,y)\right)\Big|_0^x + \\ &\quad + \int_0^x F(t,y)\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}dt\end{aligned}$$

bulunur. Bu integral $\mathfrak{S}$ nin son değerinde yerine yazılır, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - q(x)K + q_0(y)K\right] + \\ &\quad + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - q(x)K + q_0(y)K\right]F(t,y)dt\end{aligned}\tag{4.15'}$$

ve (4.13), (4.14) sınır koşulları elde edilir. (4.15') denklemini

$$h_x(y) = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - q(x)K + q_0(y)K$$

fonksiyonunun (4.10) homogen integral denkleminin çözümü olması ve böylece sıfıra eşit olması demektir. Bu (4.11) diferensiyel denkleminin sağlandığını ispatlar.

4.2.3. Teorem: Eğer $K(x,y)$ (4.8) integral denkleminin bir çözümü ise, 4.2.2. Teoreminden dolayı, böylece (4.11)-(4.13)-(4.14) probleminin bir çözümü ise

1) $\forall \lambda$ kompleks sayısı için

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt\tag{4.16}$$

fonksiyonu $q(x) = q_0(x) + 2\frac{d}{dx}K(x,x)$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi\tag{4.17}$$

diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

2) $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h_0 - \sum_{k=0}^{\infty} c_k = h \quad (4.18)$$

başlangıç koşullarını sağlar [24].

İspat: (4.16) denkleminde $x = 0$ alınırsa $\varphi(0, \lambda) = \varphi_0(0, \lambda) = 1$ ve x e göre türev alınırsa

$$\varphi'(x, \lambda) = \varphi'_0(x, \lambda) + K(x, x) \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} \varphi_0(t, \lambda) dt$$

bulunur. Son denklemde $x = 0$ alınırsa

$$\varphi'(0, \lambda) = \varphi'_0(0, \lambda) + K(0, 0) \varphi_0(0, \lambda)$$

$$\Rightarrow \varphi'(0, \lambda) = h_0 + K(0, 0)$$

olur. (4.8) integral denkleminde $x = y = 0$ için $K(0, 0) = -F(0, 0)$ bulunur. (4.7) den

$$F(0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_0(0, \lambda) \varphi_0(0, \lambda)$$

$$\Rightarrow F(0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

olup

$$\varphi'(0, \lambda) = \varphi'_0(0, \lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n = h$$

elde edilir. Böylece (4.18) sınır koşulları sağlar.

(4.16) denkleminde x e göre iki kez türev alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= \varphi''_0(x, \lambda) + \frac{d}{dx} K(x, x) \varphi_0(x, \lambda) + K(x, x) \varphi'_0(x, \lambda) + \\ &+ \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \varphi_0(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

bulunur. (4.4) den $-\varphi''_0(x, \lambda) + q_0(x) \varphi_0(x, \lambda) = \lambda \varphi_0(x, \lambda)$ olduğundan

$\varphi''_0(x, \lambda) = (q_0(x) - \lambda) \varphi_0(x, \lambda)$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= (q_0(x) - \lambda) \varphi_0(x, \lambda) + \frac{d}{dx} K(x, x) \varphi_0(x, \lambda) + \\ &+ K(x, x) \varphi'_0(x, \lambda) + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \varphi_0(t, \lambda) dt \end{aligned} \quad (4.19)$$

bulunur. (4.16) denkleminin her iki yanı λ ile çarpılırsa

$$\lambda \varphi(x, \lambda) = \lambda \varphi_0(x, \lambda) + \lambda \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt$$

olur. $\lambda \varphi_0(t, \lambda) = -\varphi_0''(t, \lambda) + q_0(t) \varphi_0(t, \lambda)$ yerine yazılırsa

$$\Rightarrow \lambda \varphi(x, \lambda) = \lambda \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) [-\varphi_0''(t, \lambda) + q_0(t) \varphi_0(t, \lambda)] dt$$

$$\lambda \varphi(x, \lambda) = \lambda \varphi_0(x, \lambda) - \int_0^x K(x, t) \varphi_0''(t, \lambda) dt + \int_0^x K(x, t) q_0(t) \varphi_0(t, \lambda) dt$$

elde edilir. Son eşitlikte sağdaki ilk integralde kısmi integrasyon ile

$$\int_0^x K(x, t) \varphi_0''(t, \lambda) dt = (K(x, t) \varphi_0'(t, \lambda)) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{\partial K}{\partial t} \varphi_0'(t, \lambda) dt$$

$$\int_0^x K(x, t) \varphi_0''(t, \lambda) dt = K(x, x) \varphi_0'(x, \lambda) - K(x, t) \Big|_{t=0} \varphi_0'(0, \lambda) - \int_0^x \frac{\partial K}{\partial t} \varphi_0'(t, \lambda) dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x, t) \varphi_0''(t, \lambda) dt &= K(x, x) \varphi_0'(x, \lambda) - h_0 K(x, t) \Big|_{t=0} - \\ &\quad - \left[\left(\frac{\partial K}{\partial t} \varphi_0(t, \lambda) \right) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \varphi_0(t, \lambda) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x, t) \varphi_0''(t, \lambda) dt &= K(x, x) \varphi_0'(x, \lambda) - h_0 K(x, t) \Big|_{t=0} - \\ &\quad - \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi_0(x, \lambda) + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi_0(0, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \varphi_0(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\varphi_0(0, \lambda) = 1$ olduğu gözönüne alınır

$$\begin{aligned} \lambda \varphi(x, \lambda) &= \lambda \varphi_0(x, \lambda) - K(x, x) \varphi_0'(x, \lambda) + h_0 K(x, t) \Big|_{t=0} + \\ &\quad + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi_0(x, \lambda) + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi_0(x, \lambda) - \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} - \\ &\quad - \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \varphi_0(t, \lambda) dt + \int_0^x K(x, t) q_0(t) \varphi_0(t, \lambda) dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.16) denkleminin her iki yanını $-q(x)$ ile çarpılırsa

$$-q(x) \varphi(x, \lambda) = -q(x) \varphi_0(x, \lambda) - q(x) \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.19), (4.20) ve (4.21) denklemleri toplamırsa

$$\begin{aligned} \varphi'' - q(x) \varphi + \lambda \varphi &= (q_0 - \lambda) \varphi_0 + \frac{d}{dx} K(x, x) \varphi_0 + K(x, x) \varphi'_0 + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi_0 + \\ &+ \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \varphi_0(t, \lambda) dt - q(x) \varphi_0 - \int_0^x q(x) K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt + \\ &+ \lambda \varphi_0 - K(x, x) \varphi'_0 + h_0 K(x, t) \Big|_{t=0} + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi_0 - \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} - \\ &- \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \varphi_0(t, \lambda) dt + \int_0^x K(x, t) q_0(t) \varphi_0(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.14) den $h_0 K(x, t) \Big|_{t=0} - \left(\frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi'' - q(x) \varphi + \lambda \varphi &= \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(x) K + q_0(t) K \right] \varphi_0(t, \lambda) dt + \\ &+ [q_0(x) - q(x)] \varphi_0 + \frac{d}{dx} K(x, x) \varphi_0 + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi_0 + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.11) denklemini gözönüne alınırsa

$$\varphi'' - q(x) \varphi + \lambda \varphi = [q_0(x) - q(x)] \varphi_0 + \frac{d}{dx} K(x, x) \varphi_0 + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi_0 + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi_0$$

bulunur. Tam diferensiyelden $\frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} = \frac{dK}{dx}$ ve $q(x) = q_0(x) + 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$ den

$$q_0(x) - q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$$

olduğundan

$$\varphi'' - q(x) \varphi + \lambda \varphi = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) + 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$$

bulunur. Buradan da

$$\varphi'' - q(x) \varphi + \lambda \varphi = 0$$

elde edilir.

4.2.4. Teorem: $\lambda_n, n \geq 0$ (4.4)-(4.5) unperturbed probleminin özdeğerleri olsun. Böylece λ yerine λ_n alınarak (4.17) problemi tarafından tanımlanan $\varphi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \int_0^x \varphi_0(t, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_k) dt \quad (4.22)$$

formülü ile tanımlanabilir [24].

İspat: (4.7) den ve (4.8) integral denkleminde

$$\begin{aligned} K(x, t) &= F(x, t) - \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds \\ K(x, t) &= -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(x, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_k) - \int_0^x K(x, s) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(s, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_k) \right) ds \\ \Rightarrow K(x, t) &= -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(t, \lambda_k) \left[\varphi_0(x, \lambda_k) + \int_0^x K(x, s) \varphi_0(s, \lambda_k) ds \right] \end{aligned}$$

olup (4.16) denkleminde

$$\Rightarrow K(x, t) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(t, \lambda_k) \varphi(x, \lambda_k)$$

elde edilir. (4.16) da λ yerine λ_n alınırsa

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) + \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda_n) dt$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda_n) &= \varphi_0(x, \lambda_n) + \int_0^x \left[-\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(t, \lambda_k) \varphi(x, \lambda_k) \right] \varphi_0(t, \lambda_n) dt \\ \Rightarrow \varphi(x, \lambda_n) &= \varphi_0(x, \lambda_n) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \int_0^x \varphi_0(t, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır.

Bu kısımda her kabul edilebilir $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi gösterildi, verilen spektrumla potansiyel elde edildi.

4.3. Klasik Sturm-Liouville Denklemi için İsospektral Problem

(4.16) ve (4.22) formülleri isospektral problemini gözönüne almaya olanak sağlar. h_0 ve H_0 ın sonlu olduğunu kabul edelim. 4.2. de gösterildiği gibi (4.2.3. Teorem), $\varphi(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ fonksiyonları (4.17) diferensiyel denkleminin çözümleridir ve (4.18) başlangıç koşullarını sağlarlar ve böylece sınır koşulu

$$h = h_0 - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad (4.23)$$

olmak üzere

$$\varphi'(0, \lambda_n) - h\varphi(0, \lambda_n) = 0$$

dır. (4.4)-(4.5) isospektral problemini elde etmek için $\varphi(x, \lambda_n)$ in $x = \pi$ noktasında bazı reel H lar için

$$\varphi'(x, \lambda_n) + H\varphi(x, \lambda_n) = 0$$

sınır koşulunu sağladığını göstermek gerekir. Aynı zamanda H için bir formül elde edilecektir.

(4.22) formülünde $x = \pi$ alınır

$$\begin{aligned} \varphi(\pi, \lambda_n) &= \varphi_0(\pi, \lambda_n) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(\pi, \lambda_k) \int_0^{\pi} \varphi_0(t, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_k) dt \\ \Rightarrow \varphi(\pi, \lambda_n) &= \varphi_0(\pi, \lambda_n) - c_n \alpha_{n,0}^2 \varphi(\pi, \lambda_n) \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. Burada $\alpha_{n,0}^2 = \int_0^{\pi} \varphi_0^2(x, \lambda_n) dx$ dir. (4.24) formülünden

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} \quad (4.25)$$

bulunur. (4.22) diferensiyellenirse

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda_n) &= \varphi'_0(x, \lambda_n) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi'(x, \lambda_k) \int_0^x \varphi_0(t, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_k) dt - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(x, \lambda_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = \pi$ için

$$\begin{aligned}
\varphi'(\pi, \lambda_n) &= \varphi'_0(\pi, \lambda_n) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi'(\pi, \lambda_k) \int_0^{\pi} \varphi_0(t, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_k) dt - \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(\pi, \lambda_k) \varphi_0(\pi, \lambda_n) \varphi_0(\pi, \lambda_k) \\
\Rightarrow \varphi'(\pi, \lambda_n) &= \varphi'_0(\pi, \lambda_n) - c_n \varphi'(\pi, \lambda_n) \alpha_{n,0}^2 - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(\pi, \lambda_k) \varphi_0(\pi, \lambda_k) \\
\Rightarrow (1 + c_n \alpha_{n,0}^2) \varphi'(\pi, \lambda_n) &= \varphi'_0(\pi, \lambda_n) - \varphi_0(\pi, \lambda_n) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(\pi, \lambda_k) \varphi_0(\pi, \lambda_k)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ikinci sınır koşulundan $\varphi'_0(\pi, \lambda_n) + H_0 \varphi_0(\pi, \lambda_n)$

$\Rightarrow \varphi'_0(\pi, \lambda_n) = -H_0 \varphi_0(\pi, \lambda_n)$ bulunur ve (4.25) den

$$\begin{aligned}
(1 + c_n \alpha_{n,0}^2) \varphi'(\pi, \lambda_n) &= -H_0 \varphi_0(\pi, \lambda_n) - (1 + c_n \alpha_{n,0}^2) \varphi_0(\pi, \lambda_n) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\varphi_0^2(\pi, \lambda_k)}{1 + c_k \alpha_{k,0}^2} \\
\Rightarrow (1 + c_n \alpha_{n,0}^2) \varphi'(\pi, \lambda_n) &= - (1 + c_n \alpha_{n,0}^2) \varphi_0(\pi, \lambda_n) \left[H_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\varphi_0^2(\pi, \lambda_k)}{1 + c_k \alpha_{k,0}^2} \right] \\
\Rightarrow \varphi'(\pi, \lambda_n) + \left[H_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\varphi_0^2(\pi, \lambda_k)}{1 + c_k \alpha_{k,0}^2} \right] \varphi_0(\pi, \lambda_n) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$H = H_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\varphi_0^2(\pi, \lambda_k)}{1 + c_k \alpha_{k,0}^2} \quad (4.26)$$

denilirse $\varphi'(\pi, \lambda_n) + H \varphi_0(\pi, \lambda_n) = 0$ elde edilir.

Şimdi $\forall n \geq 0$ için

$$\varphi_0(\pi, \lambda_n) = (-1)^n \quad (4.27)$$

olduğunu varsayalım. Bir sonraki bölümde (4.27) koşullarının (4.4)-(4.5) Sturm-Liouvil-

le probleminin simetrik olması için gerek ve yeter olacağı gösterilecektir. Simetrik problem için $H_0 = h_0$ olduğundan (4.26) formülü

$$H = h_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{1 + c_k \alpha_{k,0}^2} \quad (4.28)$$

şeklinde. (4.23) ve (4.28) toplanırse

$$h + H = 2h_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \alpha_{k,0}^2}{1 + c_k \alpha_{k,0}^2} \quad (4.29)$$

bulunur. Bir sonraki bölümde, (4.29) nin bir uygulaması, h ve H düzlemde bir noktanın koordinatları olarak düşünilecektir.

4.3.1. Teorem: i) (h, H) noktaları $h + H < 2h_0$ açık yarı düzlemindedir.

ii) Eğer $h + H = 2h_0$ ise $h = H = h_0$ ve $q(x) = q_0(x)$ dir. (Burada $q_0(x)$ unperturbed potansiyel (simetrik olduğu varsayıldı.), $q(x)$ perturbed potansiyeldir.) [24].

İspat: i) (4.29) denkleminde $h + H < 2h_0$ olduğu aşıkardır.

ii) $h + H = 2h_0$ olsun. (4.29) den $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \alpha_{k,0}^2}{1 + c_k \alpha_{k,0}^2} = 0$ olup $c_k = 0$ elde edilir. (4.28) den $H = h_0$ ve (4.23) den $h = h_0$ olur. Buradan (4.7) den $F(x, y) = 0$ olduğundan (4.8) den $K(x, y) = 0$ olur. Bu ifade (4.16) de yerine yazılırsa $\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda)$ olur.

$$-\varphi'' + q(x) \varphi = \lambda \varphi$$

denklemini sağladığından

$$-\varphi_0'' + q(x) \varphi_0 = \lambda \varphi_0$$

olur. (4.4) den $q(x) = q_0(x)$ elde edilir.

Ambarzumjan'ın klasik teoremini ispatlamak için 4.3.1. Teoreminin ii) şıkkı kullanılacaktır.

4.3.2. Teorem (V. A. Ambarzumjan [2]):

$$\begin{aligned} -y'' + q(x) y &= \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

probleminin λ_n özdeğerleri n^2 , $n \geq 0$ olsun. Bu taktirde $q(x) \equiv 0$ dır.

İspat: Perturbed olarak (4.30) problemi ve unperturbed olarak

$$-y'' = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

problemi gözönüne alınsın. Her iki problem de hipoteze göre aynı $\lambda_n = n^2$ ($n \geq 0$) spektrumuna sahiptir. (Bu (4.29) formülünün doğruluğu için gereklidir.)

Perturbed problem için $h = H = h_0$ dır. Şimdi 4.3.1. Teoreminin ii) kısmı uygulanabilir.

4.4. h ve H in Bulunması için Alternatif Yöntem

Bu bölümde (4.23) ve (4.26) formülleri için alternatif ispat verildi. Bu ispat Gelfand-Levitan integral denkleminde dayalıdır ve aşağıda gösterileceği gibi bazı genelleştirmeler yapılmasına olanak sağlar.

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y \\ y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

problemi gözönüne alınsın. $\varphi(x, \lambda)$, (4.31) denkleminin $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümdür. (4.31) probleminin $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ özdeğerleri tanıma göre

$$D(\lambda) \equiv \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0$$

denkleminin kökleridir. Bu da (4.31) de ikinci sınır koşulundan elde edilir.

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx, \quad n \geq 0$$

olsun.

4.4.1. Lemma:

$$\alpha_n^2 = -\varphi(\pi, \lambda) \dot{D}(\lambda_n) = |\varphi(\pi, \lambda)| \left| \dot{D}(\lambda_n) \right|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.32}$$

dır. Burada D nin üzerindeki nokta, λ ya göre $D(\lambda)$ nin türevidir [24].

İspat: Keyfi λ ve μ için $y = \varphi(x, \lambda)$, $z = \varphi(x, \mu)$ olsun.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$-z'' + q(x)z = \mu z$$

olup ilk denklem z ile ikinci denklem y ile çarpılırsa

$$-y''z + q(x)yz = \lambda yz$$

$$-z''y + q(x)zy = \mu zy$$

olur. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılırsa

$$(y'z - yz')' = (\mu - \lambda)yz$$

elde edilir. Son denklemde her iki taraf 0 dan π ye integre edilirse

$$\int_0^\pi yz dx = \frac{\varphi'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \mu) - \varphi(\pi, \lambda) \varphi'(\pi, \mu)}{\mu - \lambda}$$

elde edilir. $\mu \rightarrow \lambda$ iken

$$\int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda) dx = \varphi'(\pi, \lambda) \dot{\varphi}(\pi, \lambda) - \varphi(\pi, \lambda) \dot{\varphi}'(\pi, \lambda)$$

bulunur. $\lambda = \lambda_n$ alınırsa $\varphi'(\pi, \lambda) = -H\varphi(\pi, \lambda)$ olduğundan

$$\alpha_n^2 = -\varphi(\pi, \lambda_n) [\dot{\varphi}'(\pi, \lambda) + H\dot{\varphi}(\pi, \lambda_n)] = -\varphi(\pi, \lambda_n) \dot{D}(\lambda_n)$$

elde edilir.

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = 0 \text{ ise}$$

$$\alpha_n^2 = \varphi'(\pi, \lambda_n) \dot{\varphi}(\pi, \lambda_n) \tag{4.33}$$

dir.

$\{\lambda_n\}$, $n \geq 0$ spektrumu verilmiş olsun. O zaman $D(\lambda)$ ve böylece $\dot{D}(\lambda_n)$, $n \geq 0$ tanımlanabilir. Eğer $\varphi(\pi, \lambda)$, $n \geq 0$ sayıları da biliniyorsa (4.32) veya (4.33) formülü kullanılarak, α_n^2 normlaştırıcı sabitleri bulunabilir. Spektrum ve normlaştırıcı sayılardan potansiyel ve sınır koşullarını tek olarak tanımlayan spektral fonksiyon tanımlanabilir.

4.4.2. Lemma (N. Levinson [33]): (4.31) Sturm-Liouville probleminin simetrik olması için gerek ve yeter koşul $\forall n \geq 0$ için

$$\varphi(\pi, \lambda) = (-1)^n, \quad n \geq 0 \tag{4.34}$$

olmasıdır.

İspat:(Gerekliliğin İspatı): (4.31) denklemindeki potansiyel simetrik yani $q(\pi - x) = q(x)$ ve $H = h$ olsun.

$$\Psi(x, \lambda_n) = \frac{\varphi(\pi - x, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)}, \quad n \geq 0$$

fonksiyonu tanımlansın. 4.2.3. Teoreminden

$$-\varphi''(x, \lambda_n) + q(x) \varphi(x, \lambda_n) = \lambda_n \varphi(x, \lambda_n)$$

yazılabilir. Bu denklemde x yerine $\pi - x$ alınırsa ve elde edilen denklemin her iki tarafı $\varphi(\pi, \lambda_n)$ e bölünürse

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi''(\pi - x, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} + \frac{q(\pi - x) \varphi(\pi - x, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} &= \lambda_n \frac{\varphi(\pi - x, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} \\ \Rightarrow -\Psi''(x, \lambda_n) + q(\pi - x) \Psi(x, \lambda_n) &= \lambda_n \Psi(x, \lambda_n) \end{aligned}$$

elde edilir. $q(\pi - x) = q(x)$ olduğundan $\Psi(x, \lambda_n)$

$$-\Psi''(x, \lambda_n) + q(x) \Psi(x, \lambda_n) = \lambda_n \Psi(x, \lambda_n) \quad (4.35)$$

denkleminin bir çözümüdür. $\Psi(x, \lambda_n)$ nin (4.35) denkleminin özfonksiyonu olduğunu ispatlamak için $\Psi(x, \lambda_n)$ nin sınır davranışı gözönüne alınmalıdır. (4.31) e göre

$$\Psi(0, \lambda_n) = \frac{\varphi(\pi, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} = 1, \quad \Psi'(0, \lambda_n) = -\frac{\varphi'(\pi, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)}$$

olur. $\varphi'(\pi, \lambda_n) + H\varphi(\pi, \lambda_n) = 0$ koşulundan $\Psi'(0, \lambda_n) = H = h$ elde edilir.

$$\Psi(\pi, \lambda_n) = \frac{\varphi(0, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} = \frac{1}{\varphi(\pi, \lambda_n)}, \quad \Psi'(\pi, \lambda_n) = -\frac{\varphi'(0, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)}$$

olur. $\varphi'(0, \lambda_n) - h\varphi(0, \lambda_n) = 0$ koşulundan

$$\Psi'(\pi, \lambda_n) = -\frac{h\varphi(0, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} = -h\Psi(\pi, \lambda_n)$$

elde edilir. Böylece

$$\Psi'(0, \lambda_n) - h\Psi(0, \lambda_n) = 0 \quad \text{ve} \quad \Psi'(\pi, \lambda_n) + h\Psi(\pi, \lambda_n) = 0$$

elde edilir ve $\Psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları aynı sınır koşullarını ve $\varphi(x, \lambda_n)$ ile aynı denklemi sağlar. Buna göre $\Psi(x, \lambda_n) = \kappa_n \varphi(x, \lambda_n)$ (κ_n sabitlerdir.). $\Psi(x, \lambda_n)$ nin tanımından

$$\kappa_n \varphi(x, \lambda_n) = \frac{\varphi(\pi - x, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)}$$

olur. Burada $x = 0$ alınırsa

$$\kappa_n \varphi(0, \lambda_n) = \frac{\varphi(\pi, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} = 1 \Rightarrow \kappa_n = 1$$

elde edilir. Böylece $\varphi(x, \lambda_n) = \frac{\varphi(\pi-x, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)}$ olur. $x = \pi$ için $\varphi^2(\pi, \lambda_n) = 1$ böylece $\varphi(\pi, \lambda_n) = \pm 1$ dir. Sturm osilasyon teoreminden $\varphi(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$ (eğer $\varphi(\pi, \lambda_0) = 1$ ise) elde edilir.

(Yeterliliğin İspatı): (4.34) koşulu sağlansın. $\Psi(x, \lambda_n) = (-1)^n \varphi(\pi - x, \lambda_n)$ olsun. Böylece

$$\Psi(0, \lambda_n) = (-1)^n \varphi(\pi, \lambda_n) = (-1)^n (-1)^n = 1$$

$$\Psi'(0, \lambda_n) = -(-1)^n \varphi'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n H \varphi(\pi, \lambda_n) = H$$

$$\Psi(\pi, \lambda_n) = (-1)^n \varphi(0, \lambda_n) = (-1)^n = \varphi(\pi, \lambda_n)$$

$$\Psi'(\pi, \lambda_n) = -(-1)^n \varphi'(0, \lambda_n) = -(-1)^n h \varphi(0, \lambda_n) = -(-1)^n h = -h \varphi(\pi, \lambda_n)$$

dir. $\Psi(\pi, \lambda_n)$ nin normlaştırıcı sayıları

$$\int_0^\pi \Psi^2(\pi, \lambda_n) dx = \int_0^\pi \varphi^2(\pi - x, \lambda_n) dx = \alpha_n^2$$

dir. Böylece (4.35) denklemi ile

$$-y'' + q(\pi - x)y = \lambda y$$

denklemi aynı spektrum, aynı normlaştırıcı sayılar ve $x = 0$ da aynı başlangıç koşullarına sahiptir. Marchenko'nun teklik teoreminden $q(\pi - x) = q(x)$ ve $h = H$ elde edilir. Bu ise (4.31) in simetrik olması demektir [41].

(4.32) formülü kullanılarak (4.23) ve (4.26) formüllerinin sağ tarafı , $\{c_n\}$ dizisine göre, özfonksiyonların sınır davranışını içeren formüllere dönüştürülebilir.

(4.4)-(4.5)ve (4.31) problemleri gözönüne alınsın.

$$\alpha_{n,0}^2 = \int_0^\pi \varphi_0^2(x, \lambda_n) dx, \quad \alpha_n^2 = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

olsun. Bu iki problemle ilgili integral denklemi

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi \quad (4.36)$$

dır. Burada

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \right) \varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(y, \lambda_n) \quad (4.37)$$

dir. (4.36)-(4.37) denklemleri (4.7)-(4.8) ile karşılaştırılırsa

$$c_n = \frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{\alpha_{n,0}^2}$$

elde edilir. (4.32) formülü kullanılırsa

$$c_n = \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|} \left(\frac{1}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - \frac{1}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)|} \right) \quad (4.38)$$

ve (4.23) den ilk dönüşmüş formül

$$h = h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|} \left(\frac{1}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - \frac{1}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)|} \right) \quad (4.39)$$

dur. Eğer unperturbed problem simetrik ise $\varphi_0(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$ ve (4.39) formülü

$$h = h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|} \left(\frac{1}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - 1 \right) \quad (4.40)$$

şeklinde basit bir formdadır. (4.26) formülü için benzer bir sonuç elde etmek için ilk olarak $c_n \frac{\varphi_0^2(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2}$ ifadesini hesaplayalım. c_n için (4.38) geçerlidir. (4.32) kullanılarak

$$1 + c_n \alpha_{n,0}^2 = 1 + \left(\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \right) \alpha_{n,0}^2 = \frac{\alpha_{n,0}^2}{\alpha_n^2} = \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)}$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile

$$c_n \frac{\varphi_0^2(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} = \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|} (|\varphi_0(\pi, \lambda_n)| - |\varphi(\pi, \lambda_n)|)$$

elde edilir. Son sonuç olan ikinci dönüşmüş formül (4.26) nın yeni bir görüntüsüdür: (Eğer unperturbed problem simetrik ise)

$$H = h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|} (|\varphi(\pi, \lambda_n)| - 1) \quad (4.41)$$

(4.40), (4.41) formülleri, perturbed ve unperturbed problemlerin $\{\mu_n\}$ ve $\{\lambda_n\}$ spektrumları farklı olduğundaki duruma kolay genellemesini kabul eder. (aşağıdaki (4.42) ve (4.44) formüllerine bakınız.)

Bu durumda integral denklemi (4.36) ile aynı formdadır fakat $F(x, y)$ daha karmaşık formdadır [14].

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_n^2} \varphi_0(x, \mu_n) \varphi_0(y, \mu_n) - \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(y, \lambda_n) \right]$$

Önceki gibi (4.36) integral denkleminde

$$\begin{aligned} h &= h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \right) \\ h &= h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\mu_n)|} \frac{1}{|\varphi(\pi, \mu_n)|} - \frac{1}{|\dot{D}(\lambda_n)|} \frac{1}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)|} \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. Burada

$$D(\lambda) = \varphi'_0(\pi, \lambda) + H_0 \varphi_0(\pi, \lambda), \quad \varepsilon(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H \varphi(\pi, \lambda)$$

dir. (4.41) in genellemesini elde etmek için

$$-y'' + q_0(\pi - x)y = \lambda_n y, \quad -y'' + q_0(\pi - x)y = \mu_n y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.43)$$

denklemleri ele alınsın. Bu denklemlerin çözümleri

$$\Psi_0(x, \lambda_n) = \frac{\varphi_0(\pi - x, \lambda_n)}{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}, \quad \Psi_0(x, \mu_n) = \frac{\varphi_0(\pi - x, \mu_n)}{\varphi_0(\pi, \mu_n)}$$

dir ve sırasıyla aşağıdaki sınır koşullarını sağlarlar:

$$\Psi_0(0, \lambda_n) = 1, \quad \Psi'_0(0, \lambda_n) = H_0, \quad \Psi'_0(\pi, \lambda_n) = -h_0 \Psi_0(\pi, \lambda_n)$$

$$\Psi(0, \mu_n) = 1, \quad \Psi'(0, \mu_n) = H_0, \quad \Psi'(\pi, \mu_n) = -h \Psi(\pi, \mu_n)$$

Yeni $\tilde{\alpha}_{n,0}^2$ ve $\tilde{\alpha}_n^2$ normlaştırıcı sayıları

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{n,0}^2 &= \frac{1}{\varphi_0^2(\pi, \lambda_n)} \alpha_{n,0}^2 = \left| \dot{D}(\lambda_n) \right| \frac{1}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)|}, \\ \tilde{\alpha}_n^2 &= \frac{1}{\varphi^2(\pi, \mu_n)} \alpha_n^2 = |\dot{\varepsilon}(\mu_n)| \frac{1}{|\varphi(\pi, \mu_n)|} \end{aligned}$$

dir. (4.42) formülleri kullanılırsa

$$H = H_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\mu_n)|} |\varphi(\pi, \mu_n)| - \frac{1}{|\dot{D}(\lambda_n)|} |\varphi_0(\pi, \lambda_n)| \right\} \quad (4.44)$$

elde edilir.

4.5. $h_0 = h_0(\mu_0, \mu_1, \dots)$ için Formül

$\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ sabit spektrum olsun. Bilindiği gibi her olası spektrum bir tek simetrik $q(x)$ potansiyeline ($q(\pi - x) = q(x)$) ve sınır koşullarından bir tek $h_0 = h_0(\mu_0, \mu_1, \dots) = H_0$ sayısına karşılık gelir. (4.44) formülü, $h_0 = h_0(\mu_0, \mu_1, \dots)$ sayısı için faydalı ve kolayca bulunan bir formül verir. (4.44) formülünde perturbed problem olarak verilen $\{\mu_n\}$, $n \geq 0$ spektrumlu tek simetrik Sturm-Liouville problemi seçilir ve unperturbed problem

$$-y'' = \lambda_n y, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (4.45)$$

olarak alınır. Son problem de simetriktir ve bu problem için Ambarzumjan teoreminden $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$ dir. Buradan $n = 0$ için $\lambda_n = 0$ olup $-y'' = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2$ olur. $y'(0) = y'(\pi) = 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olup $y = \varphi_0(x, \lambda_n) = c_2$ olur.

$$\alpha_{n,0}^2 = \int_0^\pi \varphi_0^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^\pi c_2^2 dx = c_2^2(\pi - 0) = c_2^2 \pi$$

elde edilir. (4.32) den

$$\alpha_{n,0}^2 = \left| \dot{D}(\lambda_0) \right| |\varphi_0(\pi, \lambda_0)| = \left| \dot{D}(\lambda_0) \right| c_2$$

olup $\left| \dot{D}(\lambda_0) \right| c_2 = c_2^2 \pi \Rightarrow \dot{D}(\lambda_0) = \pi (c_2 = 1)$ bulunur. $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$ için $y'' + n^2 y = 0$ dir. $y = e^{kx} \neq 0$ çözüm olsun. $y = c_1 \cos(nx) + c_2 \sin(nx)$ bulunur. $y'(0) = y'(\pi) = 0$ olduğundan $y'(0) = -c_1 n \sin 0 + c_2 n \cos 0 = c_2 n = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ bulunur.

$y'(\pi) = -c_1 n \sin \pi = 0 \Rightarrow c_1 \neq 0$ dir. Buradan $y = c_1 \cos(nx)$ elde edilir.

$$\alpha_{n,0}^2 = \int_0^\pi c_1^2 \cos^2(nx) dx = \frac{c_1^2}{2} \pi$$

$$\alpha_{n,0}^2 = \left| \dot{D}(\lambda_n) \right| |\varphi_0(\pi, \lambda_n)| = \left| \dot{D}(\lambda_n) \right| |c_1 \cos(n\pi)| = c_1 \left| \dot{D}(\lambda_n) \right|$$

olup $\frac{c_1^2}{2} \pi = c_1 \left| \dot{D}(\lambda_n) \right| \Rightarrow \left| \dot{D}(\lambda_n) \right| = \frac{\pi}{2} (c_1 = 1)$ bulunur. Böylece

$$\lambda_n = n^2, \quad n \geq 0; \quad \dot{D}(\lambda_0) = \pi, \quad \left| \dot{D}(\lambda_n) \right| = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$h_0(\lambda_0, \lambda_1, \dots) = 0, \quad H_0 = h_0(\lambda_0, \lambda_1, \dots) = 0$$

dır. Şimdi (4.44) formülünden

$$h_0(\mu_0, \mu_1, \dots) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\mu_n)|} - \frac{1}{|\dot{D}(\lambda_n)|} \right)$$

$$h_0(\mu_0, \mu_1, \dots) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\mu_0)|} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\mu_n)|} \right) \quad (4.46)$$

bulunur.

(4.46) formülü ν_0 , μ_0 dan μ_1 e veya μ_0 dan $-\infty$ a değiştiğinde $h_0(\nu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$ ın davranışını incelemeye olanak sağlar ve diğer özdeğerler sabit kabul edilir.

4.5.1. Teorem: i) $\nu_0 < \mu_1$, $\nu_0 \rightarrow \mu_1$ ise $h_0(\nu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \rightarrow -\infty$ dur.

ii) $\nu_0 \rightarrow -\infty$ ise $h_0(\nu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \rightarrow \infty$ dur [24].

İspat: $\varepsilon(\nu_0, \lambda) = C(\lambda - \nu_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right) = (\lambda - \nu_0) F(\lambda)$ notasyonu kullanılsın.

Burada

$$F(\lambda) = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right)$$

dır. Önce **i)** yi hesaplayalım. $\nu_0 < \mu_1$ ve $\nu_0 \rightarrow \mu_1$ olsun.

$$\dot{\varepsilon}(\nu_0, \lambda) = F(\lambda) + (\lambda - \nu_0) \dot{F}(\lambda)$$

dır. Burada $\lambda = \nu_0$ alınırsa

$$\dot{\varepsilon}(\nu_0, \nu_0) = F(\nu_0) + (\nu_0 - \nu_0) F'(\nu_0) = F(\nu_0)$$

bulunur. $F(\nu_0)$ ın tanımından

$$\dot{\varepsilon}(\nu_0, \nu_0) = F(\nu_0) = C \left(1 - \frac{\nu_0}{\mu_1} \right) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\nu_0}{\mu_n} \right) = o(1)$$

bulunur. Benzer olarak

$$\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_1) = F(\mu_1) + (\mu_1 - \nu_0) \dot{F}(\mu_1)$$

dir.

$$F(\mu_1) = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_n} \right) = C \left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_n} \right).$$

$\lambda_n = n^2$, $\mu_n = n^2$ olduğundan $\lambda_1 = \mu_1 = 1$ olur. Buradan $\lambda_1 - \mu_1 = 0$ olup $F(\mu_1) = 0$ olur. Buna göre

$$\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_1) = (\mu_1 - \nu_0) \dot{F}(\mu_1) = o(1)$$

olur. $n \geq 2$ için

$$\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_n) = (\mu_n - \nu_0) \dot{F}(\mu_n)$$

dir. (4.46) formülünden

$$\begin{aligned} h_0(\nu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) &= \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\nu_0, \nu_0)|} \right) + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_1)|} \right) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{(\mu_n - \nu_0) |\dot{F}(\mu_n)|} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\dot{\varepsilon}(\nu_0, \nu_0) = C \left(1 - \frac{\nu_0}{\mu_1}\right) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\nu_0}{\mu_n}\right)$ olduğundan $\nu_0 \rightarrow \mu_1$ iken

$\frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\nu_0, \nu_0)|} \rightarrow \infty$ olup $\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\nu_0, \nu_0)|}\right) \rightarrow -\infty$ olur. Ayrıca $\nu_0 \rightarrow \mu_1$ iken $\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_1) = (\mu_1 - \nu_0) \dot{F}(\mu_1)$ olup $\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_1) \rightarrow 0$ buradan da $\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_1)|}\right) \rightarrow -\infty$ dur. Üçüncü terim olan seri sınırlıdır. Bu $n \geq 2$ için

$$\frac{1}{\mu_n - \nu_0} - \frac{1}{\mu_n - \lambda_0} = O(\mu_n^{-2}), \quad \dot{F}(\mu_n) = O(\mu_n^{-1})$$

tahminlerden ve $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{|\dot{\varepsilon}(\mu_n)|}\right)$ serisinin yakınsaklığından elde edilir.

ii) nin ispatı: $\nu_0 \rightarrow -\infty$ ise

$$\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_n) = (\mu_n - \nu_0) \dot{F}(\mu_n) \rightarrow \infty$$

olur. (4.46) da $|\dot{\varepsilon}(\nu_0, \mu_n)| \rightarrow 0$ olduğundan $h_0(\nu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \rightarrow \infty$ olur.

$\mu_0, -\infty$ a yaklaşırken keyfi büyük $h_0 = h_0(\mu_0, \mu_1, \dots)$ elde edilebilir. Bir sonraki bölümün sonuçları kullanılırsa keyfi reel h ve H ($h + H < 2h_0$) ile Sturm-Liouville problemlerinin varlığı ispat edilebilir.

$$\alpha_n^2 = \int_0^{\pi} \varphi^2(x, \mu_n) dx = -\varphi(\pi, \mu_n) \dot{\varepsilon}(\mu_n)$$

olduğunu hatırlayalım. Böylece $\{\mu_n\}$, $n \geq 0$ spektrumu ve $\varphi(\pi, \mu_n)$ sayıları, spektral fonksiyonu tanımlar, buradan Sturm-Liouville problemi tektir.

4.6. (4.40)-(4.41) Dönüşümünün $h+H < 2h_0$ Yarı Düzleminde Örtlen Olması

Unperturbed probleminin q_0 potansiyelinin simetrik olduğunu varsayarak (4.31) perturbed probleminin sınır koşullarında sırasıyla h ve H parametrelerini yazarak (4.41) ve (4.40) denklemlerini hatırlayalım:

$$H = h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\dot{D}(\lambda_n)|} (|\varphi(\pi, \lambda_n)| - 1) \quad (4.47)$$

$$h = h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\dot{D}(\lambda_n)|} \left(\frac{1}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - 1 \right) \quad (4.48)$$

4.3.1. Teoremine göre $h+H < 2h_0$ dır. Bu kısımda $h+H < 2h_0$ yarı düzlemindeki her (h, H) noktasının $\{\lambda_n\}$ spektrumlu ve tek $(h_0, H_0) = (h_0, h_0)$ parametreleriyle tanımlı tek simetrik problemin pertürbasyonu olduğu gösterilecektir. Bu, $|\varphi(\pi, \lambda_n)|$ sayıları (4.47) ve (4.48) denklemlerini sağlamak üzere q potansiyelinin bulunması gerektiğini ifade eder.

4.6.1. Teorem: $\{\lambda_n\}$ (4.31) Sturm-Liouville probleminin spektrumu olsun ve h_0 ((4.31) de simetrik olan unperturbed q_0 potansiyeli ile başladı bu yüzden $h = H = h_0$ dır.)sınır koşullarında belirtilen tek olarak tanımlı parametreyi belirtsin. Böylece

$h+H < 2h_0$ yarı düzlemindeki bütün (h, H) noktaları için öyle bir $q(x)$ potansiyeli vardır ki, q potansiyelli ve (h, H) sınır parametrelili, (4.31) Sturm-Liouville problemi (4.47) ve (4.48) denklemlerini sağlayan $\varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonlarına sahiptir [24].

İspat: İki adımda ispatı yapalım. Birinci adım cebirseldir. İkinci adımda yaklaşım potansiyelinin nasıl kurulduğu gösterilmiştir.

1.Adım: Sonsuz bilinmeyenli iki cebirsel denklem sistemi ile başlayalım. (4.47) ve (4.48) denklemleri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (x_n - 1) = a, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \left(\frac{1}{x_n} - 1 \right) = b \quad (4.49)$$

formundadır. Burada ω_n sayıları verilen pozitif sayılar, a ve b verilen reel sayılardır ve pozitif sayıların $\{x_n\}$ dizisinin (4.49) denklemini sağladığı kabul edilir. Her n için $x_n = 1$ olmadığı sürece $a+b > 0$ dır çünkü $x = 1$ hariç her x pozitif için $x + \frac{1}{x} - 2 > 0$ dir.

(4.49) denkleminin sonunda 1 e eşit $\{x_n\}$ çözümünün olduğu gösterilecektir.

Bazı kuadratik denklemleri çözerek ilerleyelim. Bir örnek ve özel bir durumla başlayalım. Özel durum örneğe indirgenir. Bundan sonra genel durumda çözümleri bulmak için benzer durumlar kullanılacaktır. İspatın geri kalanını atlayarak özel durumu incelemek yeterlidir. Bu durumda özel durum bazı uygulamalarda yeterli olabilir.

Örneğin $\omega_n = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ ve $x_n \equiv 1$ olsun. ($\forall n > 2$ için) (4.49) un ilk denkleminde

$$(x_0 - 1) + (x - 1) + (y - 1) + \sum_{n=3}^{\infty} (1 - 1) = a$$

$$(x_0 - 1) + (x + y - 2) = a$$

elde edilir. Özel olarak $x_0 = 1$ alınırsa $x + y - 2 = a$ olur. Benzer olarak ikinci denklemden de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2 = b$ elde edilir. Dolayısıyla bütün a ve b sayılarını $a + b > 0$ ve bazı x ve y pozitifleri için $x + y - 2 = a$ ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2 = b$ olacak şekilde araştıralım.

Basitlik için $\alpha = a + 2$ ve $\beta = b + 2$ seçelim ve $x > 0$, $y > 0$ ve $\alpha + \beta > 0$ olmak üzere $x + y = \alpha > 0$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \beta > 0$ in bütün çözümlerini araştıralım. $x > 0$ ve $y > 0$ olduğundan $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ (veya $a > -2$, $b > -2$) alınmalıdır. (Denklemlerin sağlandığı varsayılarak) art arda

$$\beta xy = x + y = \alpha, \quad y = \alpha - x, \quad \beta x(\alpha - x) = \alpha, \quad \beta x^2 - \alpha\beta x + \alpha = 0$$

yazılabilir. Böylece

$$x = \pm \frac{(\alpha\beta) \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 4\beta\alpha}}{2\beta}$$

dır. $x_{\pm}$ çözümlerinin pozitif olması amacıyla $\alpha\beta \geq 4$ seçmek gerekli ve yeterlidir. Eğer bu koşul sağlanıyorsa $x_{\pm} > 0$ dır. Ayrıca

$$y_{\pm} = \alpha - x_{\pm} = \frac{\alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 4\beta\alpha}}{2\beta} \Rightarrow y_{\pm} > 0$$

dır. Yani istenen denklemler ancak ve ancak (a ve b cinsinden) $a > -2$, $b > -2$, $a + b > 0$ ve $(a + 2)(b + 2) \geq 4$ ise (x, y) pozitif çözüm çiftine sahiptir.

Geometrik terimlerde, $(a + 2)(b + 2) = 4$ hiperbolünün yukarısı veya üst tarafındaki kol üzerindeki $(0, 0)$ noktası hariç bütün (a, b) noktaları $x > 0$, $y > 0$ olmak üzere $(a, b) = \left(x + y - 2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2\right)$ olarak ifade edilebilir. $(a + 2k)(b + 2k) \geq 4k^2$

ın dışındaki tek neden onun koordinatlarının toplamının pozitif olmadığıdır. Bu örnek problemimizi çözmez çünkü $a + b > 0$ yarı düzlemindeki her nokta istenen formda temsil edilemez.

1. $\omega_n \equiv 1$ ağırlıklarıyla özel durum (4.49) denklemlerinin özel bir durumu olarak

$$x_n = \begin{cases} x, & 0 \leq n \leq k \text{ için} \\ y, & k \leq n \leq 2k \text{ için} \\ 1, & n \geq 2k \text{ için} \end{cases}$$

olsun. (4.49) denklemlerinin problemini oluşturalım. İlk denklemden

$$\sum_{n=0}^{k-1} (x-1) + \sum_{n=k}^{2k-1} (y-1) + \sum_{n=2k}^{\infty} (1-1) = a$$

$$k(x-1) + k(y-1) = a \Rightarrow kx + ky - 2k = a$$

benzer olarak ikinci denklemden de $\frac{k}{x} + \frac{k}{y} - 2k = b$ elde edilir. Bütün a ve b sabitleri için $a + b > 0$ ve bazı x ve y pozitifleri için $kx + ky - 2k = a$ ve $\frac{k}{x} + \frac{k}{y} - 2k = b$ olduğunu bulalım. Denklemlerin her ikisi k ile bölünürse düşündüğümüz örneğe dönülür, a ve b yi $\frac{a}{k}$ ve $\frac{b}{k}$ ile yer değiştirelim. İstenen denklemler öyle pozitif (x, y) çözüm çiftine sahiptir ancak ve ancak (a ve b ye göre) $a > -2k$, $b > -2k$, $a + b > 0$ ve $(a + 2k)(b + 2k) \geq 4k^2$ dir. Geometrik olarak $(a + 2k)(b + 2k) = 4k^2$ hiperbolünün kolunun üst veya yukarısındaki $(0, 0)$ noktası hariç bütün (a, b) noktaları, $x > 0$ ve $y > 0$ olmak üzere $(a, b) = \left(kx + ky - 2, \frac{k}{x} + \frac{k}{y} - 2k\right)$ olarak temsil edilebilir.

$a + b > 0$ ise yeterince büyük k için

$$(a + 2k)(b + 2k) - 4k^2 = ab + 2k(a + b) \geq 0$$

dır. Böylece $a + b > 0$ olmak üzere her (a, b) noktası, bütün 1 leri takip eden, aynı uzunluklu y lerin kirişini takip eden, x lerin sonlu kirişini içeren diziye göre ifade edilebilir.

2. Genel durum

Son olarak $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = +\infty$ olduğu varsayılarak değişken-ağırlıklı durumu gözönüne alalım. Bu uygulama için uygun bir kabuldür.

$$x_n = \begin{cases} x, & 0 \leq n < k \text{ için} \\ y, & n = k \text{ için} \\ 1, & n > k \text{ için} \end{cases}$$

alalım. (4.49) un ilk denkleminde

$$\sum_{n=0}^{k-1} \omega_n (x-1) + \omega_k (y-1) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \omega_n (1-1) = a$$

$$\sum_{n=0}^{k-1} \omega_n x + \omega_k y - \sum_{n=0}^{k-1} \omega_n - \omega_k = a$$

benzer olarak (4.49) un ikinci denkleminde

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\omega_n}{x} + \frac{\omega_k}{y} - \sum_{n=0}^k \omega_n = b$$

elde edilir. Böylece (4.49) denklemi

$$\sum_{n=0}^{k-1} \omega_n x + \omega_k y - \sum_{n=0}^k \omega_n = a, \quad \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\omega_n}{x} + \frac{\omega_k}{y} - \sum_{n=0}^k \omega_n = b \quad (4.50)$$

şeklinde oluşturulur. Notasyonu basitleştirmek için $\nu = \sum_{n=0}^{k-1} \omega_n$ ve $\omega = \omega_k$ alınıp (4.50) denklemleri ile ilgili problemi oluşturalım:

$a + b > 0$ ve bazı pozitif x ve y için $\nu x + \omega y - (\nu + \omega) = a$ ve $\frac{\nu}{x} + \frac{\omega}{y} - (\nu + \omega) = b$ olacak şekilde bütün a ve b leri bulalım.

Tekrar basitlik için $\alpha = a + \nu + \omega$ ve $\beta = b + \nu + \omega$ alalım. Böylece önceki gibi $\nu x + \omega y = \alpha > 0$, $\frac{\nu}{x} + \frac{\omega}{y} = \beta > 0$ ın bütün (x, y) pozitif çiftlerini araştıralım. Yöntem, örnek ve özel durumdakiyle aynıdır fakat biraz ayrıntı ile

$$y = (\alpha - \nu x) / \omega, \quad \beta xy = \nu y + \omega x, \quad \beta x (\alpha - \nu x) = \omega^2 x + \nu (\alpha - \nu x),$$

$$-\nu \beta x^2 + (\alpha \beta + \nu^2 - \omega^2) x - \nu \alpha = 0$$

yazılabilir veya tekrar yazılırsa

$$\nu \beta x^2 - (\alpha \beta + \nu^2 - \omega^2) x + \nu \alpha = 0$$

dır. Bu x için iki muhtemel değer verir yani

$$x = \frac{(\alpha \beta + \nu^2 - \omega^2) \pm \sqrt{(\alpha \beta + \nu^2 - \omega^2)^2 - 4(\nu \beta) \nu \alpha}}{2(\nu \beta)} \quad (4.51)$$

dir. Paydaki pozitif ilk terimin ve negatif olmayan diskriminantın belirttiği kabulleri yapmak gerekir. Diskriminant $(\alpha \beta + \nu^2 - \omega^2)^2 - 4(\alpha \beta) \nu^2$ olarak yazılırsa A , B ve C pozitif olmak üzere diskriminant $(A + B - C)^2 - 4AB = (A - B + C)^2 - 4AC$ olarak

yazılabilir. Bu negatif değildir ancak ve ancak, örneğin $A^2 - 2(B + C)A + (B - C)^2 > 0$ ise, bir başka deyişle, A uç noktaları iki muhtemel değerle verilen açık aralığın dışında olduğunda, formüldeki $A_{\pm}$ değerleri

$$A_{\pm} = \frac{(2(B + C)) \pm \sqrt{(2(B + C))^2 - 4(B - C)^2}}{2}$$

$$A_{\pm} = B + C \pm \sqrt{(B + C)^2 - (B - C)^2} = \left(\sqrt{B} \pm \sqrt{C}\right)^2$$

dır. Yani

$$A \leq \left(\sqrt{B} - \sqrt{C}\right)^2 \text{ veya } A \geq \left(\sqrt{B} + \sqrt{C}\right)^2 \quad (4.52)$$

dır. Uygulamada $A = \alpha\beta$, $B = \nu^2$, $C = \omega^2$ alındı. Böylece (4.52) diskriminantının negatif olmayacağı gerekli koşulu belirtir:

$$\alpha\beta \leq (\nu - \omega)^2 \text{ veya } \alpha\beta \geq (\nu + \omega)^2 \quad (4.53)$$

dir. (4.51) ile verilen x in değerlerinin pozitif olduğundan emin olmak için $\alpha\beta + \omega^2 - \nu^2 > 0$ olması gerekir. Yani

$$\alpha\beta > \omega^2 - \nu^2 \quad (4.54)$$

olduğu varsayılmalıdır. y nin karşılık gelen değerlerinin de pozitif olduğu garantilenmelidir, $y = (\alpha - \nu x) / \omega$ alınır

$$y = \frac{(\alpha\beta - \nu^2 + \omega^2) \pm \sqrt{(\alpha\beta - \nu^2 + \omega^2)^2 - 4\alpha\beta\omega^2}}{2\omega\beta} \quad (4.55)$$

elde edilir. Diskriminant, yalnızca farklı ifade edilen, x için de aynıdır. Böylece (4.53) sağlanıyorsa, diskriminant negatif değildir. $\alpha\beta - \nu^2 + \omega^2 > 0$ olsun.

$$\alpha\beta > \nu^2 - \omega^2 \quad (4.56)$$

kabul edilmelidir. (4.54) ve (4.55) gerekli koşullar olduğundan

$$\alpha\beta > |\nu^2 - \omega^2| = |\nu - \omega|(\nu + \omega) \geq (\nu - \omega)^2$$

olduğu görülebilir. Böylece ilk ihtimal, $\alpha\beta \geq (\nu - \omega)^2$, (4.53) de sağlanmaz. Böylece

$$\alpha\beta > (\nu + \omega)^2 \quad (4.57)$$

alınmalıdır. Bu koşul, (4.57), (4.54) ve (4.55) in de sağlandığını ifade eder. (4.50) denklemlerinin (x, y) pozitif çözüm çiftlerinin $(a$ ve b ye göre)

$$a > -(\nu + \omega), \quad b > -(\nu + \omega), \quad a+b > 0 \text{ ve } (a + \nu + \omega)(b + \nu + \omega) \geq (\nu + \omega)^2 \quad (4.58)$$

olması gerek ve yeter koşuldur.

Geometrik olarak $(x + \nu + \omega)(y + \nu + \omega) = (\nu + \omega)^2$ (noktaları (x, y) olan) hiperbolünün kolunun yukarı ve üstündeki bütün (a, b) noktaları, $(0, 0)$ hariç,

$$(a, b) = \left(\nu x + \omega y - (\nu + \omega), \frac{\nu}{x} + \frac{\omega}{y} - (\nu + \omega) \right)$$

olarak ifade edilir. Burada x (4.51) ile verilir ve $y = (\alpha - \nu x) / \omega > 0$ veya (4.55) ile verilir.

Şimdi özel durumdaki gibi, $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$ serileri için keyfi büyük $\nu = \sum_{n=0}^{k-1} \omega_n$ kısmi toplam-ları bulanabildiği sürece bu tür hiperbollerin üst bölgelerinin $a + b > 0$ yarı düzlemini doldurduğu görülür. Böylece $a + b > 0$ olmak üzere tüm a ve b için varolan (4.49) denklemlerinin çözümü olduğunun bilinmesi için, sadece serinin yakınsak olduğu kabul edilmelidir.

Özellikle, $a + b > 0$ olmak üzere verilen a ve b , (4.50) denklemlerinin sağlandığını garantilemek için

$$\nu + \omega > -a, \quad \nu + \omega > -b \text{ ve } \nu + \omega \geq -ab / (a + b) \quad (4.59)$$

olacak şekilde k çok büyük seçilmelidir. $\nu + \omega = \sum_{n=0}^k \omega_n$ olduğu hatırlanarak (4.59) aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

Verilen a ve b reel sayıları için $a + b > 0$ dır ve $k > 0$ ı

$$\sum_{n=0}^k \omega_n > -a, \quad \sum_{n=0}^k \omega_n > -b \text{ ve } \sum_{n=0}^k \omega_n \geq -ab / (a + b) \quad (4.60)$$

olacak şekilde çok büyük seçelim. ω_n pozitif olduğundan sadece son eşitsizlik kontrol edilmelidir, diğer ikisi aşıkardır.

Böylece (4.51) ile verilen x ve (4.55) ile verilen y ile

$$x_1 = \dots = x_{k-1} = x, \quad x_k = y$$

aksi taktirde $x_n = 1$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi (4.49) denklemlerini sağlar.

2.Adım: (4.38) denklemini yani

$$c_n = \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|} \left(\frac{1}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - \frac{1}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)|} \right)$$

denklemini hatırlayalım. Çünkü unperturbed problem simetriktir, buradan

$$c_n = \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|} \left(\frac{1}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - 1 \right) \quad (4.61)$$

elde edilir. $\omega_n = \frac{1}{\left| \dot{D}(\lambda_n) \right|}$ alabilir ve $a = h_0 - H$ ve $b = h_0 - h$ olmak üzere (4.49) denklemleri çözülebilir ve sonra (4.61) de $|\varphi(\pi, \lambda_n)|$ yerine (1 olmayan) x_n çözüm değerleri oluşturulabilir. x_n sayıları sonunda 1 e eşit olduğundan bu sıfırdan farklı c_n sayılarının sonlu bir sayısını verir ve $F(x, y)$ fonksiyonunun kurulması için onlar kullanılabilir ve sonra q_0 ın bilindiği varsayılarak (4.38) denklemini sağlayan özfonksiyonların q potansiyeli açıkça kurulabilir. Bu 4.6.1. Teoreminin ispatını tamamlar.

4.7. Dirichlet Sınır Koşulları

1.Durum: $c_n, n \geq 1$ sayılarının her uygun kümesi için, perturbed operatörün sınır koşulları Dirichlet olur.

İspat kolaydır: $\varphi_0(x, \lambda_n), n \geq 1$ unperturbed özfonksiyonları için

$$\varphi_0(0, \lambda_n) = \varphi_0(\pi, \lambda_n) = 0$$

elde edilir. Perturbed $\varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları için (4.16) denkleminde

$$\varphi(0, \lambda_n) = 0, n \geq 1$$

elde edilir ve (4.22) denkleminde

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = \varphi_0(\pi, \lambda_n) - c_n \alpha_{n,0}^2 \varphi(\pi, \lambda_n)$$

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} = 0, n \geq 1$$

elde edilir [24].

2.Durum: $h_0 = \infty$ ve $H_0 = \infty$ durumlarını gözönüne alalım:

$$h_0 \neq \infty, H_0 = \infty \text{ veya } h_0 = \infty, H_0 \neq \infty$$

Önceki gibi yaparak ilk durumda

$$\varphi(0, \lambda_n) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda_n) = h = h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \varphi(\pi, \lambda_n) = 0$$

ve ikinci durumda

$$\varphi(0, \lambda_n) = 0, \quad \varphi'(\pi, \lambda_n) + H\varphi(\pi, \lambda_n) = 0$$

dir. Burada

$$H = H_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\varphi_0^2(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2}$$

dır [24].

4.8. Dirac Sistemi için Gelfand-Levitan İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

$p_0(x)$ ve $q_0(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ reel diferensiyellenebilir fonksiyonlar, h_0 ve H_0 sabit reel sayılar olsun.

$$By' + Q_0(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.62)$$

$$y_2(0) - h_0 y_1(0) = 0 \quad (4.63)$$

$$y_2(\pi) + H_0 y_1(\pi) = 0$$

Dirac sistemi gözönüne alınsın. Burada

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) & q_0(x) \\ q_0(x) & -p_0(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dir. $\varphi_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{01}(x, \lambda) \\ \varphi_{02}(x, \lambda) \end{pmatrix}$, (4.63) ün $\varphi_{01}(0, \lambda) = 1$, $\varphi_{02}(0, \lambda) = h_0$ koşullarını sağlayan çözümü olsun. Böylece her λ için $\varphi_0(x, \lambda)$, (4.63) ün ilk sınır koşulunu sağlar. (4.62)-(4.63) probleminin özdeğerleri

$$\varphi_{02}(\pi, \lambda) + H_0 \varphi_{01}(\pi, \lambda) = 0 \quad (4.64)$$

denkleminin kökleridir. Karşılık gelen özfonksiyonlar $\varphi_0(x, \lambda)$, $n \geq 0$ dir.

Aşağıdaki integral denklem sisteminin çekirdeğini kuralım.

$$F(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \varphi_0(x, \lambda) \varphi_0^\top(y, \lambda) \quad (4.65)$$

matrisinin bileşenleri sürekli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir. Ayrıca bu serinin x ve y ye göre düzgün yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu konuda da

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi \quad (4.66)$$

integral denklem sistemi ele alınır. Burada $F(x, y)$, y nin bilinmeyen matris fonksiyonudur, x parametredir ve $K(x, y)$ (y nin bilinmeyen matris fonksiyonu olarak) bilinmeyen matris fonksiyonu olarak bilinir [39].

4.8.1. Teorem: $\forall n \geq 0$ için

$$\alpha_{n,0}^2 = \int_0^\pi \varphi_0^2(x, \lambda) dx = \int_0^\pi [\varphi_{01}^2(x, \lambda) + \varphi_{02}^2(x, \lambda)] dx$$

olmak üzere

$$\alpha_{n,0}^2 > 0 \quad (4.67)$$

olsun. Böylece (4.66) integral denklem sistemi $\forall x, 0 \leq x \leq \pi$ için bir tek çözüme sahiptir [39].

İspat:

$$h_x(y) + \int_0^x F(t, y) h_x(t) dt = 0 \quad (4.68)$$

homogen denklem sisteminin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

(4.68) denklem sistemi sağdan $h_x(y)$ ile çarpılırsa ve y ye göre 0 dan x e integre edilirse

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x F(t, y) h_x(t) h_x(y) dt dy = 0$$

elde edilir. Burada (4.65) den

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \varphi_0(t, \lambda) \varphi_0^\top(y, \lambda) \right] h_x(t) h_x(y) dt dy = 0$$

ve Dirac-Delta fonksiyonunun tanımından

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x I \delta(x-t) h_x(t) h_x(y) dt dy = 0$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^x h_x^2(y) dy = 0$$

bulunur. Buradan $h_x(y) \equiv 0$ elde edilir. İspat tamamlanır.

4.8.2. Teorem: (4.66) integral denkleminin çözümü

$$B \frac{\partial K}{\partial x} + Q(x) K(x, y) = -\frac{\partial K}{\partial y} B + Q_0(y) K(x, y) \quad (4.69)$$

diferensiyel denklem sistemini sağlar. Burada

$$Q(x) = Q_0(x) + BK(x, x) - K(x, x)B \quad (4.70)$$

ile tanımlıdır. Ayrıca $K(x, y)$

$$BK(x, x) - K(x, x)B = Q(x) - Q_0(x) \quad (4.71)$$

$$K_{21}(x, 0) = K_{11}(x, 0) = 0 \quad (4.72)$$

koşullarını sağlar [39].

İspat:

$$J = K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0 \quad (0 \leq y \leq x \leq \pi)$$

olsun. Böylece $Q(x)$, (4.70) açılımına sahip ve $Q_0(x)$ (4.62) unperturbed problemin potansiyeli olmak üzere

$$\mathfrak{S} \equiv BJ_x + J_y B + Q(x)J - Q_0(y)J = 0 \quad (4.73)$$

dır.

$$BJ_x = B \frac{\partial K}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial x} + BK(x, x)F(x, y) + \int_0^x B \frac{\partial}{\partial x} (K(x, t)) F(t, y) dt$$

$$J_y B = \frac{\partial K}{\partial y} B + \frac{\partial F}{\partial y} B + \int_0^x K(x, t) \frac{\partial}{\partial y} (F(t, y)) B dt$$

ifadesinin sağında bulunan integral için $\frac{\partial}{\partial y} (F(t, y)) B$ ifadesi yerine $-B \frac{\partial}{\partial t} (F(t, y))$ alınır ve elde edilen integralde kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned} - \int_0^x K(x, t) B \frac{\partial}{\partial t} (F(t, y)) dt &= - (K(x, t) B F(t, y)) \Big|_0^x + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (K(x, t)) B F(t, y) dt \\ &= -K(x, x) B F(x, y) + K(x, 0) B F(0, y) + \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (K(x, t)) B F(t, y) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada J nin tanımından

$$K(x, 0) = -F(x, 0) \text{ olup } K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = 0 \text{ ve } K(x, 0) B F(0, y) = 0 \text{ bulunur.}$$

Böylece

$$J_y B = \frac{\partial K}{\partial y} B + \frac{\partial F}{\partial y} B - K(x, x) B F(x, y) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (K(x, t)) B F(t, y) dt$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Q(x) J &= Q(x) K + Q(x) F + Q(x) \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt \\ -Q_0(y) J &= -Q_0(y) K - Q_0(y) F - Q_0(y) \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt \end{aligned}$$

olup bu ifadeler (4.73) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &\equiv \left[B \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} B + Q(x) K - Q_0(y) K \right] + \\ &\quad + \int_0^x \left[B \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} B + Q(x) K - Q_0(y) K \right] F(t, y) dt = 0 \end{aligned} \tag{4.73'}$$

elde edilir. Diğer taraftan $K(x, y)$ (4.71) ve (4.72) koşullarını sağlar. (4.73') denklemi

$$h_x(y) = B \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} B + Q(x) K - Q_0(y) K$$

matris fonksiyonunun (4.68) homogen integral denkleminin çözümü olması ve böylece sıfıra eşit olması demektir. Bu (4.69) denklem sisteminin sağlandığını ispatlar.

4.8.3. Teorem: Eğer $K(x, y)$, (4.66) integral denkleminin bir çözümü ise, 4.8.2. teoreminden dolayı, böylece (4.69)-(4.71)-(4.72) probleminin bir çözümü ise

1) $\forall \lambda$ kompleks sayısı için

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt \quad (4.74)$$

vektör-değerli fonksiyonu

$$Q(x) = Q_0(x) + BK(x, x) - K(x, x)B$$

olmak üzere

$$By' + Q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.75)$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümüdür.

2) $\varphi(x, \lambda)$ vektör-değerli fonksiyonu

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h_0 = h \quad (4.76)$$

koşullarını sağlar.

İspat: i) nin ispatı açıktır [39]. ii) nin sağlandığını gösterelim:

(4.74) den

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{01}(x, \lambda) \\ \varphi_{02}(x, \lambda) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} K_{11}(x, t) & K_{12}(x, t) \\ K_{21}(x, t) & K_{22}(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(t, \lambda) \\ \varphi_{02}(t, \lambda) \end{pmatrix} dt$$

olup

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) &= \varphi_{01}(x, \lambda) + \int_0^x [K_{11}(x, t) \varphi_{01}(t, \lambda) + K_{12}(x, t) \varphi_{02}(t, \lambda)] dt \\ \varphi_2(x, \lambda) &= \varphi_{02}(x, \lambda) + \int_0^x [K_{21}(x, t) \varphi_{01}(t, \lambda) + K_{22}(x, t) \varphi_{02}(t, \lambda)] dt \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemlerde $x = 0$ alınırsa $\varphi_1(0, \lambda) = \varphi_{01}(0, \lambda) = 1$ ve $\varphi_2(0, \lambda) = \varphi_{02}(0, \lambda) = h_0 = h$ elde edilir.

4.8.4. Teorem: $\lambda_n, n \geq 0$ (4.62)-(4.63) unperturbed probleminin özdeğerleri olsun. Böylece λ yerine λ_n alınarak (4.74) problemi tarafından tanımlanan $\varphi(x, \lambda)$ vektör-değerli fonksiyonları

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \int_0^x \varphi_0^\top(t, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \quad (4.77)$$

formülü ile tanımlanabilir.

İspat: (4.65) ve (4.66) integral denklem sisteminden

$$\begin{aligned}
K(x, t) &= -F(x, t) - \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds \\
K(x, t) &= -\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \varphi_0(x, \lambda_k) \varphi_0^\top(t, \lambda_k) - \\
&\quad - \int_0^x K(x, s) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \varphi_0(s, \lambda_k) \varphi_0^\top(t, \lambda_k) \right) \\
K(x, t) &= -\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \left[\varphi_0(x, \lambda_k) + \int_0^x K(x, s) \varphi_0(s, \lambda_k) ds \right] \varphi_0^\top(t, \lambda_k)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.74) gözönüne alınırsa

$$K(x, t) = -\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \varphi_0^\top(t, \lambda_k) \quad (4.78)$$

elde edilir. (4.74) de λ yerine λ_n alınırsa

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) + \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda_n) dt$$

olup (4.78) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda_n) &= \varphi_0(x, \lambda_n) + \int_0^x \left(-\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \varphi_0^\top(t, \lambda_k) \right) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \\
\varphi(x, \lambda_n) &= \varphi_0(x, \lambda_n) - \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \int_0^x \varphi_0^\top(t, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_n) dt
\end{aligned}$$

olur. İspat tamamlanır.

4.9. Dirac Sistemi için İsospektral Problem

(4.74) ve (4.77) formülleri Dirac sistemi için isospektral problemi gözönüne almaya olanak sağlar. h_0 ve H_0 ın sonlu olduğu kabul edilsin. 4.8.de gösterildiği gibi (4.8.3. Teorem) $\varphi(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ vektör-değerli fonksiyonları (4.75) denklem sisteminin çözümleridir ve (4.76) koşullarını sağlarlar ve böylece sınır koşulu

$$h = h_0 \quad (4.79)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(0, \lambda) - h\varphi_1(0, \lambda) = 0$$

dır. (4.62)-(4.63) isospektral probleminin elde edilmesi için $\varphi(x, \lambda_n)$ ın $x = \pi$ noktasında bazı reel H lar için

$$\varphi_2(\pi, \lambda) + H\varphi_1(\pi, \lambda) = 0$$

sınır koşulunu sağladığını göstermek gerekir. Aynı zamanda H için bir formül elde edilecektir.

(4.77) de $x = \pi$ alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi(\pi, \lambda_n) &= \varphi_0(\pi, \lambda_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(\pi, \lambda_k) \int_0^{\pi} \varphi_0^{\top}(t, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \\ \Rightarrow \varphi(\pi, \lambda_n) &= \varphi_0(\pi, \lambda_n) - c_n \alpha_{n,0}^2 \varphi(\pi, \lambda_n) \end{aligned} \quad (4.80)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_{n,0}^2 &= \int_0^{\pi} \varphi_0^{\top}(t, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \\ \Rightarrow \alpha_{n,0}^2 &= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(t, \lambda_n) & \varphi_{02}(t, \lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(t, \lambda_n) \\ \varphi_{02}(t, \lambda_n) \end{pmatrix} dt \\ \Rightarrow \alpha_{n,0}^2 &= \int_0^{\pi} [\varphi_{01}^2(t, \lambda_n) + \varphi_{02}^2(t, \lambda_n)] dt = \int_0^{\pi} \varphi_0^2(t, \lambda_n) dt \end{aligned}$$

dir. (4.80) formülünden

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} \quad (4.81)$$

elde edilir. (4.81) açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_1(\pi, \lambda_n) \\ \varphi_2(\pi, \lambda_n) \end{pmatrix} &= \frac{1}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(\pi, \lambda_n) \\ \varphi_{02}(\pi, \lambda_n) \end{pmatrix} \\ \rightarrow \varphi_1(\pi, \lambda_n) &= \frac{\varphi_{01}(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2}, \quad \varphi_2(\pi, \lambda_n) = \frac{\varphi_{02}(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi_{02}(\pi, \lambda_n) + H_0\varphi_{01}(\pi, \lambda_n) = 0$ olup $\varphi_{02}(\pi, \lambda_n) = -H_0\varphi_{01}(\pi, \lambda_n)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\varphi_2(\pi, \lambda_n) &= -\frac{H_0\varphi_{01}(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n\alpha_{n,0}^2} = -H_0\varphi_1(\pi, \lambda_n) \\ \Rightarrow \varphi_2(\pi, \lambda_n) + H_0\varphi_1(\pi, \lambda_n) &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$H = H_0 \tag{4.82}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}By' + Q(x)y &= \lambda y \\ y_2(0) - hy_1(0) &= 0 \\ y_2(\pi) + Hy_1(\pi) &= 0\end{aligned} \tag{4.83}$$

problemi gözönüne alınsın. $\varphi(x, \lambda_n)$, (4.83) denklem sisteminin $\varphi_1(0, \lambda) = 1$, $\varphi_2(0, \lambda) = h$ koşullarını sağlayan çözümüdür. (4.83) probleminin $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ özdeğerleri tanıma göre

$$D(\lambda) \equiv \varphi_2(\pi, \lambda) + H\varphi_1(\pi, \lambda) = 0$$

denkleminin kökleridir. Bu da (4.83) ün ikinci koşulundan elde edilir.

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx, n \geq 0$$

olsun.

4.9.1. Lemma:

$$\alpha_n^2 = \varphi_1(\pi, \lambda_n) \dot{D}(\lambda_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.84}$$

dir. Burada D nin üzerindeki nokta λ ya göre $D(\lambda)$ nın türevidir [3].

İspat:

$$B\varphi'(x, \lambda_n) + Q(x)\varphi(x, \lambda_n) = \lambda\varphi(x, \lambda_n) \tag{4.85}$$

denkleminde λ ya göre türev alınırsa

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n) + Q(x) \dot{\varphi}(x, \lambda_n) = \varphi(x, \lambda_n) + \lambda \dot{\varphi}(x, \lambda_n) \quad (4.86)$$

olur. (4.85) denklemi $\dot{\varphi}(x, \lambda_n)$, (4.4) denklemi $\varphi(x, \lambda_n)$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n) \dot{\varphi}(x, \lambda_n) + Q(x) \varphi(x, \lambda_n) \dot{\varphi}(x, \lambda_n) = \lambda \varphi(x, \lambda_n) \dot{\varphi}(x, \lambda_n)$$

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n) + Q(x) \dot{\varphi}(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n) = \varphi^2(x, \lambda_n) + \lambda \dot{\varphi}(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n)$$

elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılırsa

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n) - B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n) \dot{\varphi}(x, \lambda_n) = \varphi^2(x, \lambda_n)$$

bulunur. $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında

$$\langle \varphi(x, \lambda_n), \varphi(x, \lambda_n) \rangle = \langle B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n), \varphi(x, \lambda_n) \rangle - \langle B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n), \dot{\varphi}(x, \lambda_n) \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}'_1 \\ \dot{\varphi}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}'_2 \\ -\dot{\varphi}'_1 \end{pmatrix}$$

$$B\varphi'(x, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_2 \\ -\varphi'_1 \end{pmatrix}$$

ifadeleri skalar olarak gözönüne alınırsa

$$\langle \varphi(x, \lambda_n), \varphi(x, \lambda_n) \rangle = \langle (\dot{\varphi}'_2, -\dot{\varphi}'_1), (\varphi_1, \varphi_2) \rangle - \langle (\varphi'_2, -\varphi'_1), (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \rangle$$

bulunur. Bu eşitlikte $[0, \pi]$ aralığında $\lambda = \lambda_n$ alınıp integralenirse

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n)] dx$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^\pi [\dot{\varphi}'_2(x, \lambda_n) \varphi_1(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}'_1(x, \lambda_n) \varphi_2(x, \lambda_n)] dx - \\ &\quad - \int_0^\pi [\varphi'_2(x, \lambda_n) \dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) - \varphi'_1(x, \lambda_n) \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n)] dx \end{aligned}$$

bulunur. İlk integralde kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} [\dot{\varphi}_2'(x, \lambda_n) \varphi_1(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1'(x, \lambda_n) \varphi_2(x, \lambda_n)] dx = \\
& = \int_0^{\pi} \varphi_1(x, \lambda_n) d(\dot{\varphi}_2(x, \lambda_n)) - \int_0^{\pi} \varphi_2(x, \lambda_n) d(\dot{\varphi}_1(x, \lambda_n)) \\
& = (\varphi_1(x, \lambda_n) \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n)) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) \varphi_1'(x, \lambda_n) dx - \\
& \quad - (\dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) \varphi_2(x, \lambda_n)) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) \varphi_2'(x, \lambda_n) dx \\
& = \varphi_1(\pi, \lambda_n) \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) - \varphi_1(0, \lambda_n) \dot{\varphi}_2(0, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_2(\pi, \lambda_n) + \\
& \quad + \dot{\varphi}_1(0, \lambda_n) \varphi_2(0, \lambda_n) + \int_0^{\pi} [\dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) \varphi_2'(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) \varphi_1'(x, \lambda_n)] dx
\end{aligned}$$

Bu integral

$$\begin{aligned}
\alpha_n^2 & = \int_0^{\pi} [\dot{\varphi}_2'(x, \lambda_n) \varphi_1(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1'(x, \lambda_n) \varphi_2(x, \lambda_n)] dx - \\
& \quad - \int_0^{\pi} [\dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) \varphi_2'(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) \varphi_1'(x, \lambda_n)] dx
\end{aligned}$$

de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_n^2 & = \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_2(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(0, \lambda_n) \varphi_1(0, \lambda_n) + \\
& \quad + \dot{\varphi}_1(0, \lambda_n) \varphi_2(0, \lambda_n) + \int_0^{\pi} [\dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) \varphi_2'(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) \varphi_1'(x, \lambda_n)] dx - \\
& \quad - \int_0^{\pi} [\dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) \varphi_2'(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) \varphi_1'(x, \lambda_n)] dx \\
\alpha_n^2 & = \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_2(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(0, \lambda_n) \varphi_1(0, \lambda_n) + \\
& \quad + \dot{\varphi}_1(0, \lambda_n) \varphi_2(0, \lambda_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi_1(0, \lambda_n) = 1$, $\varphi_2(0, \lambda_n) = h(y_2(0) - hy_1(0)) = 0$ olduğundan alınır

$$-\dot{\varphi}_2(0, \lambda_n) \varphi_1(0, \lambda_n) + \dot{\varphi}_1(0, \lambda_n) \varphi_2(0, \lambda_n) = -\dot{\varphi}_2(0, \lambda_n) + h\dot{\varphi}_1(0, \lambda_n)$$

$$= \frac{d}{d\lambda} [-\varphi_2(0, \lambda_n) + h\varphi_1(0, \lambda_n)] = \frac{d}{d\lambda}(0) = 0$$

bulunur. Buna göre

$$\alpha_n^2 = \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_2(\pi, \lambda_n)$$

olur. Burada $\varphi_2(\pi, \lambda_n) + H\varphi_1(\pi, \lambda_n) = 0$ olup $\varphi_2(\pi, \lambda_n) = -H\varphi_1(\pi, \lambda_n)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\alpha_n^2 = \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n) + H\dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n)$$

$$\alpha_n^2 = \varphi_1(\pi, \lambda_n) [\dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) + H\dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n)]$$

$$\alpha_n^2 = \varphi_1(\pi, \lambda_n) \dot{D}(\lambda_n)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Abdukadyrov, E.**, 1967. Computation of the Regularized Trace for a Dirac System, Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., **22**, (4), 17-24.
- [2] **Ambarzumjan, V.A.**, 1929. Über eine Frage der Eigenwertstheorie, Z. Ph., **53**, 690-695.
- [3] **Amirov, R. Kh., Güldü, Y.**, 2005. Aralık İç Noktasında Süreksizliğe Sahip Dirac Operatörünün Spektral Özellikleri, C. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Cilt 26, Sayı 1.
- [4] **Borg, G.**, 1946. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillsche Eigenwertaufgabe, Acta Math. **78**, 1-96.
- [5] **Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S.**, 2010. Adi Diferensiyel Denklemler, Dora Yayınları, Bursa.
- [6] **Dahlberg, B.E.J. and Trubowitz, E.**, 1984. The inverse Sturm-Liouville Problem III, Comm. Pure Appl. Math., v. **37**, pp 255-267.
- [7] **Delsarte, J.**, 1938. Sur Certaines Transformations Fonctionnelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, C. R. Hebd. Acad. Sci., **206**, 178-182.
- [8] **Delsarte, J. and Lions, J.**, 1957. Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., **32**(2), 113-128.
- [9] **Evans, W. D. and Harris, B. J.**, 1980. Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., **A 88**, 1-15.
- [10] **Freiling, G. and Yurko, V.**, 2001. Invers Sturm-Liouville problems and their Applications, Nova Science Pub. Inc., 305p.
- [11] **Gasymov, M. G.**, 1967. The Inverse Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order $2n$, Soviet Physics Dokl., **11**, 676-678.
- [12] **Gasymov, M. G. and Levitan, B. M.**, 1966. The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, **167**, 967-970.
- [13] **Gasymov, M. G. and Dzhabiev, T. T.**, 1975. On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., pp. 46-71.
- [14] **Gelfand, I.M. and Levitan, B.M.**, 1955. On the determination of a

differential equation from its spectral function, A.M.S. Transl., (2), **1**, 253-304.

[15] **Grosse, H. and Martin, A.**, 1979. Theory of the Inverse Problem for Confining Potentials, Nuclear Phys., B 14 B, pp. 413-432.

[16] **Harris, B. J.**, 1983. Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators, Proc. of the Royal Society of Edinburgh, **95 A**, 341-366.

[17] **Hochstadt, H.**, 1973. The Inverse Sturm-Liouville Problem, Comm. On Pure And Applied Mathematics, vol. **XXVI**, 715-729.

[18] **Hochstadt, H.**, 1971. The Functions of Mathematical Physics(A Series of Pure and Applied Mathematics), Brooklyn, New-York.

[19] **Hochstadt, H. and Lieberman, B.**, 1978. An inverse Sturm-Liouville problems with mixed given data, SIAM. J. Appl. Math.

[20] **Isaacson, E.L. and Trubowitz, E.**, 1983. The inverse Sturm-Liouville problem I, Comm. Pure Appl. Math. v. **36**, pp 767-783.

[21] **Isaacson, E. L., McKean, H. P. and Trubowitz, E.**, 1984. The inverse Sturm-Liouville problem II, Comm. Pure Appl. Math., v **37**, pp 1-11.

[22] **İdemen, M.**, 1999. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Işık Ün., İstanbul.

[23] **İç, Ü.**, 2003. Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters Problem, *Yüksek lisans tezi*, F. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[24] **Jodeit, M. A. and Levitan, B.M.**, 1997. The isospectrality Problem for the classical Sturm-Liouville equation, Adv. Differential Equations, **2**, 297-318.

[25] **Khasanov, A. B.**, 1994. On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum, Theory and Math. Phys., v. **99**, No:1, 20-26.

[26] **Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V.**, 1972. Elements of Functional Analysis and Theory of Functions, Moscow, Nauka.

[27] **Koyunbakan, H. and Panakhov, E. S.**, 2007. Half inverse problem for diffusion operators on the finite interval, J. Math. Anal. Appl, **326**, 1024-1030.

[28] **Koyunbakan, H. and Panakhov, E. S.**, 2005. Half inverse problem for singular differential operator, Appl. Anal, **84** (3), 247-252.

[29] **Krein, M. G.**, 1951. Solution of the inverse Sturm-Liouville problem, Doklady Akad. Nauk SSSR, **76**(1), 21-24.

[30] **Krein, M. G.**, 1954. On a Method of the Effective Solution of an Inverse

Boundary Value Problem, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **95**, 767-770.

[31] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory to Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.

[32] **Levinson, N.**, 1949. Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys., **74**, 17-20.

[33] **Levinson, N.**, 1949. The inverse Sturm-Liouville problem, Mat. Tidsskr. B., 25-30.

[34] **Levitan, B.M.**, 1964. Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

[35] **Levitan, B. M. and Gasymov, M. G.**, 1964. Determination of a Differential Equation by two its Spectra, Russian Math. Surveys, **19**, 1-63.

[36] **Levitan, B. M.**, 1974. Inverse Sturm-Liouville Problems, (Utrecht:VNU.Science Press).

[37] **Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.**, 1975. Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Operators, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[38] **Levitan, B. M.**, 1978. On the Determination of the Sturm-Liouville Operator from One and Two Spectra, Math. USSR, Izvestija, vol. **12**, no. 1, pp. 179-193.

[39] **Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.**, 1990. Sturm-Liouville and Dirac Operators, Netherlands.

[40] **Maksudov, F.G. and Veliev, S. G.**, 1975. The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis, Soviet Math. Dokl., V. **16**, No:6, 1629-1633.

[41] **Marchenko, V.A.**, 1950. Certain problems of the theory of the second order differential operator, Dokl. Acad. Nauk., **72**(3), 457-460.

[42] **Martynov, V. V.**, 1965. Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrum in the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, 996-999.

[43] **Moses, H. E.**, 1957. Calculation of the Scattering Potantial for One-Dimentional Dirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues, Bull. Amer. Phys. Soc., **4**, pp. 240.

[44] **Musayev, B. and Alp, M.**, 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları,

Kütahya.

- [45] **Naimark, M. A.**, 1969. Linear Differential operators, NAUKA.
- [46] **Ocak, R.**, 1993. Kompleks Analiz, Atatürk Üni., Erzurum.
- [47] **Otelbayev, M. O.**, 1973. Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator, Mat. Zametki, **14**, 843-852.
- [48] **Penahov, E. S.**, 1985. The Defining of Dirac System in two incompletely set collection of eigenvalues, DAN Az SSR, v. **XLI**, no:5, pp. 8-12.
- [49] **Povzner, A. V.**, 1948. On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., **23**.
- [50] **Prats, F. and Toll, J.**, 1959. Construction of the Dirac Equation Central Potantial from Phase Shifts and Bound States, Phys. Rev., **113**, (1), 363-370.
- [51] **Quigg, C., Rosner, J. L. and Thacker, H. B.**, 1978. Inverse Scattering Problem for Quarkonium Sistems, I and II Phys. Rev., D 18, No:1, pp. 274-295.
- [52] **Roos, B. W. and Sangren, W. C.**, 1961. Spectra for a Pair Singular First Order Differential Equations, Proc. Amer. Math. Soc., V. **12**, pp. 468-476.
- [53] **Sargsjan, I.S.**, 1966. A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System, Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR, **42**, (2), 77-82.
- [54] **Sargsjan, I.S.**, 1966. Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional Dirac System, Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., **1**, (6), 392-436.
- [55] **Sakhnovich, L.**, 1963. On one half-inverse problem, Usp. Mat. Nauk., **18**, 199-206.
- [56] **Sakhnovich, L.**, 2001. Half-inverse problem on the finite interval, Inverse Problems, **17**, 527-532.
- [57] **Şuhubi, E. S.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, İ. T. Ü., İstanbul.
- [58] **Tichknof, A. N.**, 1949. Jeofizik Problemleri için Teklik Teoremleri, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. **69**, No:4, 797-800.
- [59] **Uluçay, C.**, 1978. Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, Ankara.
- [60] **Veliev, S. G.**, 1972. Inverse Problem for the Dirac Systems a the Whole Axis, DEP. VINITI, 4917-4972.
- [61] **Waz Waz, A.M.**, 2002. Partial Differential Equations Methods and Applications, Saint Xaiver University, Chicago.

ÖZGEÇMİŞ

1987 Elazığ doğumluyum. İlköğretim öğrenimimi Elazığ İsmet Paşa İlköğretim okulunda tamamladım. Orta öğretimi Elazığ Balakgazi Lisesinde okudum ve 2005 yılında aynı okuldan mezun oldum. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2009 yılında lisans öğrenimimi tamamladım. Aynı yıl lisans öğrenimimi tamamladığım bölümde Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans yapmaya hak kazandım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi oldum. Halen aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.

Tüba YALÇIN