

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



YARI ÖKLİD UZAYLARININ GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT ORAN
ALTMANİFOLDLARI

Alev KELLEÇİ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

İkinci Danışman : Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY

NİSAN-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI ÖKLİD UZAYLARININ GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT ORAN
ALTMANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Alev KELLEÇİ

(141121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 Mart 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 20 Nisan 2018

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mahmut ERGÜT (N.K.Ü)

İkinci Danışman : Doç.Dr. Nurettin Cenk TURGAY (İ.T.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Erol KILIÇ (İ.Ü)

Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)

Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN (F.Ü)

Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)

NİSAN-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesi sürecinde, benden manevi desteğini ve ilgilerini esirgemeyen, lisansüstü eğitimim boyunca, bilgi, hoşgörü ve tecrübelerinden yararlandığım ve ayrıca beni her zaman pozitif yönde motive eden sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e tüm özverisi için teşekkürlerimi bir borç bilir, en derin saygılarımı sunarım.

2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkürlerimi sunarım.

Saygıdeğer tez izleme komitesi üyeleri sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ ve Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a harcadıkları değerli zamanları için en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez döneminde aramıza katılan, bilgi ve birikimi benimle cömertçe paylaşan ve ayrıca manevi desteği ile de her zaman yanımda olan sayın hocam Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY'a ve ayrıca doktora eğitimim boyunca, tavsiyelerini hiç düşünmeden paylaşan her zaman desteğini arkamda hissettiğim sayın hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Öğrencilik hayatımın en başından beri, benden maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, şartlar gereği fiilen yanımda olamasalar bile her zaman yanımda varlıkları hissettiğim canım babam Cihat KELLEÇİ'ye ve canım annem Sıdıka KELLEÇİ'ye sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

Alev KELLEÇİ

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	V
SUMMARY	VII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	8
2.1. Yarı-Riemann Manifoldları	10
2.1.1. Yarı-Riemann Altmanifoldları.....	13
2.2. Yarı-Öklid Uzaylarının Altmanifoldları.....	16
2.2.1. Yarı-Öklid uzaylarının yüzeyleri	19
2.2.1. Yarı-Öklid uzaylarının hiperyüzeyleri	21
2.3. Yerel Frobenius Teoremi	24
3. $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDAKİ YÜZEYLER.....	27
3.1. Sabit Açık Yüzeyleri	27
3.2. Asli Kanonik Doğrultuya Sahip Yüzeyler	32
3.3. Sabit Eğim Yüzeyleri	38
3.4. Genelleştirilmiş Sabit Oran Yüzeyleri	46
4. $\mathbb{E}_1^3$ MINKOWSKI UZAYINDAKİ YÜZEYLER.....	53
4.1. Asli Kanonik Doğrultuya Sahip Yüzeyler	58
4.1.1. Space-like asli kanonik doğrultuya sahip yüzeyler	58
4.1.2. Light-like asli kanonik doğrultuya sahip yüzeyler	72
4.2. Sabit Açık Yüzeyleri	79
5. $\mathbb{E}_1^4$ MINKOWSKI UZAYINDAKİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT ORAN YÜZEYLERİ	83

5.1. Space-like konide yatan hiperyüzeyler	88
5.2. Time-like konide yatan hiperyüzeyler	96
6. SONUÇLAR VE İRDELEME	101
KAYNAKLAR	103
ÖZGEÇMİŞ	108



ÖZET

Öklid ve yarı-Öklid uzaylarındaki bir altmanifoldun geometrik özelliklerini anlamak için, üzerinde çalışılan en önemli tasvirlerden (dönüşümlerden) biri; altmanifoldun konum vektörüdür. Bu doğrultuda, 2001 yılında B. Y. Chen tarafından, Öklid uzaylarındaki sabit oran (CR) altmanifold kavramı tanıtılmıştır. M , $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayının bir altmanifoldu ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}^m$ manifoldun konum vektörü olsun. x konum vektörü, $x = x^T + x^\perp$ şeklinde ayrıştırılabilir. Burada x^T ve $x^\perp$, sırasıyla, x konum vektörünün teğetsel (teğet) ve normal bileşenleridir. Eğer, bu iki vektörün uzunlukları oranı sabit ise, bu durumda M altmanifolduna sabit oran (CR) altmanifoldu veya eşit açılı altmanifold denir.

Özel olarak karşıt boyutun bir olması durumunda, M bir CR hiperyüzeyi ise, bu durumda x konum vektörünün x^T teğet bileşeni, M hiperyüzeyinin bir asli doğrultusudur. Oysa, bu durumun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, Y. Fu ve M. I. Munteanu $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayındaki tüm dönel yüzeylerin bu özelliği sağladığını göstermişlerdir. Fakat, bir dönel yüzeyin bir CR yüzeyi olması için, bu dönel yüzeyinin profil eğrisini özel olarak seçmek gerekir. Bu nedenden dolayı, CR yüzey kavramı genelleştirilerek genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzey kavramı, Y. Fu ve M. I. Munteanu tarafından literatürde 2014 yılında sunulmuştur: Eğer, M yüzeyinin x konum vektörünün x^T teğet bileşeni, bu yüzeyin bir asli kanonik doğrultu ise, o zaman M yüzeyine genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyi denir.

Tezde de anlatılacağı üzere, GCR yüzeyleri aynı zamanda asli kanonik doğrultuya sahip bir (CPD) yüzeylerinin, daha açık olarak, yüzeyin x konum vektörü yerine özel olarak, $\mathbb{E}_v^{n+1}$ uzayındaki sabit bir k vektörünün alınmasıyla karakterize edilen yüzeylerinin bir genelleştirilmesi olarak da düşünülebilir.

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında, bu tanımların hiperyüzeyler için de aynı şekilde yapılabileceği kolaylıkla görülür. Diğer taraftan, karşıt boyutun birden büyük olduğu durumda ise, CPD altmanifold tanımı yapılırken, literatürde $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ uzaylarındaki $\mathcal{A}$ -sınıfı daldırma tanımı kullanılmıştır. Bu tez çalışmasında, R. Tojiero ve B. Mendoça tarafından verilen bu tanım kullanılarak Öklid ve yarı-Öklid uzaylarının bir altmanifoldu için şu şekilde genel-

leştirilmiştir: Eğer o altmanifoldun konum vektörünün teğet bileşeni, tüm şekil operatörlerinin asli doğrultusu ise, bu altmanifolda GCR altmanifold denir.

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında genelleştirilmiş sabit oran (GCR) altmanifoldları ele alınmıştır ve bu tez altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Tezin ilk iki bölümünde tezin konusu ile ilgili bazı genel bilgiler verilmiş; üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde ise, elde edilen orijinal sonuçlar sunulmuştur. Altıncı bölümde ise, elde edilen sonuçlar değerlendirilip, açık problemler sunulmuştur. Tezin organizasyonu şu şekildedir:

Birinci bölümde; genelleştirilmiş sabit oran (GCR) altmanifoldlarının tarihçesi ve altmanifoldların geometrik özellikleri göz önüne alınarak yapılan çalışmalar özet halinde ifade edilmiştir. İkinci bölümde; tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında karşıt boyut iki olan, sırasıyla, sabit açı (CAS) yüzeyleri, asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri, sabit eğim (CSS) yüzeyleri ve son olarak da genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyleri sınıflandırılmıştır. Dördüncü bölümde; ilk olarak $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) hiperyüzeylerinin bazı geometrik özellikler incelenerek bu bölümde kullanılacak olan önemli teorem ve sonuçlar verilmiştir. Sonrasında, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında karşıt boyut bir olan asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri için yeni bir sınıflandırma elde edilmiştir. Ayrıca, bu yüzeylerin minimal (maksimal) olma durumları incelenmiş ve bazı önemli karakterizasyonlar verilmiştir. Son olarak ise, light-like sabit doğrultu ile ilişkili sabit açı (CAS) yüzeyleri için sınıflandırma verilmiştir. Beşinci bölümde; ilk olarak $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki genelleştirilmiş sabit oran (GCR) hiperyüzeylerinin bazı geometrik özellikleri incelenerek, bu bölümde kullanılacak olan önemli teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Sonrasında, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında karşıt boyut bir olan genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyleri için sınıflandırma elde edilmiştir. Son bölüm de ise; öncelikle elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve sonrasında bazı açık problemler ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Öklid Uzayları, Minkowski Uzayları, Sabit Açı Yüzeyleri, Asli Kanonik Doğrultu, Asli Kanonik Doğrultuya Sahip Yüzeyler, Sabit Oran Yüzeyleri, Sabit Eğim Yüzeyleri, Genelleştirilmiş Sabit Oran Yüzeyleri, Hiperyüzeyler, Gauss-Kronicker Eğriliği, Ortalama Eğriliği, Flat Yüzeyler, Minimal Yüzeyler, Maksimal Yüzeyler.

SUMMARY

Generalized Constant Ratio Submanifolds of Semi-Euclidean Spaces

One of the most basic objects studied to understand geometrical properties of a submanifold of a Euclidean space or semi-Euclidean space is its position vector. In this direction, the notion of constant ratio (CR) submanifolds in Euclidean spaces introduced by B. Y. Chen. For each Riemannian manifold M isometrically immersed in $\mathbb{E}_\nu^m$, there is a natural orthogonal decomposition of the position vector x at each point on M ; namely

$$x = x^T + x^\perp$$

where x^T and $x^\perp$ denote the tangential (tangent) and normal components of x , respectively. If the ratio of length of these two vectors is constant, then M is said to be a CR submanifold or an equiangular submanifold.

In the particular case of the codimension= 1, if M is an CR hypersurface, then the tangential part x^T of x is a principal direction of M . However, the converse of this statement does not hold in general. For example, it is proved that all of rotational surfaces in $\mathbb{E}^3$ have this property. But a rotational surface is not a CR surface unless its profile curve is chosen specifically. Therefore, the definition of generalized constant ratio (GCR) surface has been recently given: If x^T is a principal direction of a surface, then the surface is said to be a GCR surface. In Euclidean and semi-Euclidean spaces, generalized constant ratio (GCR) submanifolds have been studied and obtained some new important results by many researchers interested in geometry. There are still many open problems in this regard.

As also mentioned in the thesis, GCR surfaces can also be thought as a generalization of the surface endowed with canonical principal direction (CPD) obtained by taking a constant vector k rather than the position vector x .

Given the above definitions, it is easy to see that these definitions can be made the same for hypersurfaces. However, when the GCR submanifold is defined, the definition of the $\mathcal{A}$ -class of the $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ spaces is used in the case of codimension being larger than one.

By using this definition given by R. Tojiero and B. Mendoza, a submanifold of Euclidean and semi-Euclidean spaces is called a GCR submanifold if the tangential component of the position vector of that submanifold is the principal direction of all shape operators.

In this thesis, the generalized constant ratio (GCR) submanifolds in Euclidean and semi-Euclidean spaces are discussed and this thesis is organized into six sections. In the first two chapters of the thesis, some general information about the topic of the thesis is given; In the third, fourth and fifth sections, the main results are presented. The organization of thesis is as follows:

In the first chapter; papers studied by considering the geometric properties of generalized constant ratio (GCR) submanifolds and the submanifolds are summarized. In Chapter 2; basic definitions and theorems to be used throughout the thesis are given. In Chapter 3; we have classified constant angle (CAS) surfaces, surfaces endowed with constant canonical direction (CPD) surfaces, constant slope (CSS) surfaces and finally generalized constant ratio (GCR) surfaces with codimension= 2 in $\mathbb{E}^4$ Euclidean space, respectively. In Chapter 4; firstly we give some important theorems and results to be used in this section by investigating some geometrical properties for hypersurfaces endowed with canonical principal direction (CPD) in Minkowski space $\mathbb{E}_1^{n+1}$. In addition, a classification was made for surfaces endowed with a canonical principal direction (CPD) with codimension= 1 in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$. Subsequently, minimal (maximal) cases of these surfaces have been investigated and have been given some important characterizations. Finally, we give a new classification for constant angle (CAS) surfaces with a light-like constant direction. In Chapter 5; firstly we give some important theorems and results to be used in this section by investigating some geometrical properties for generalized constant ratio (GCR) hypersurfaces in Minkowski space $\mathbb{E}_1^{n+1}$. In addition, a classification was made for generalized constant ratio (GCR) surfaces with codimension= 1 in Minkowski space $\mathbb{E}_1^4$. In the last chapter; first the obtained results are evaluated and then some open problems are revealed.

Keywords : Euclidean Spaces, Minkowski Spaces, Constant Angle Surfaces, Canonical Principal Direction, Surfaces Endowed With Canonical Principal Direction, Constant Ratio Surfaces, Constant Slope Surfaces, Generalized Constant Ratio Surfaces, Hypersurfaces, Gauss-Kronicker Curvature, Mean Curvature, Flat Surfaces, Minimal Surfaces, Maximal Surfaces.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{E}_U^m$	: Yarı-Öklid uzayı
M	: Altmanifold
$\overline{M}$	: Manifold
$[,]$	: Lie operatörü
g	: Metrik tensör
$T_p M, T_p M^\perp$	: M altmanifoldunun, p noktasındaki sırasıyla, tanjant ve normal uzayı
$\chi(M), \chi(M)^\perp$	: M altmanifoldunun, sırasıyla, teğet ve normal vektör alanlarının cümlesi
$\nabla, \widetilde{\nabla}, D$	: Sırasıyla, $M, \overline{M}$ ve normal demet üzerindeki konneksiyonlar
N, e_3, e_4	: Birim normal vektör alanları
S	: Hiperyüzeyler için, şekil operatörü
A_β	: Yüzeyler için, e_β normal vektörü doğrultusundaki Weingarten dönüşümü
h	: M altmanifoldunun ikinci temel formu
$\mathbf{D}, \mathbf{D}^\perp$	: Distribüsyon
x	: Konum vektörü
μ	: x konum vektörünün uzunluğu
k	: Sabit vektör

1 GİRİŞ

Öklid ve yarı-Öklid uzaylarındaki bir altmanifoldun geometrik özelliklerini anlamak için, üzerinde çalışılan en önemli tasvirlerden (dönüşümlerden) biri, altmanifoldun konum vektörüdür. M , $\mathbb{E}_U^m$ yarı-Öklid uzayının bir altmanifoldu ve $x : M \longrightarrow \mathbb{E}_U^m$, manifoldun konum vektörü olsun. O zaman M altmanifoldunun her bir noktasındaki x konum vektörünün doğal bir ortogonal ayrışımı;

$$x = x^T + x^\perp$$

şeklinde. Burada x^T ve $x^\perp$, sırasıyla, x konum vektörünün teğetsel (teğet) ve normal bileşenleridir. Öklid ve yarı-Öklid uzaylarındaki konum vektörünün geometrisinin gelişiminde büyük bir katkı [5, 7] makalelerinde, B. Y. Chen tarafından yapılmıştır. Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında M bir altmanifold ve x bu altmanifoldun konum vektörü olmak üzere, eğer, $\|x^T\|$ (sırasıyla, $\|x^\perp\|$) uzunluğu sabit ise, bu durumda M altmanifoldu T -sabit altmanifold (sırasıyla, N -sabit altmanifold) olarak isimlendirilir, [5]. Bu makalede, B. Y. Chen tarafından bu tipteki altmanifoldlar için, tam birer sınıflandırma ve birçok örnek verilmiştir.

Diğer taraftan, eğer $\frac{\|x^T\|}{\|x^\perp\|} = \text{sabit}$ ise, o zaman M altmanifolduna sabit oran (CR) altmanifoldu denir. Bu kavram ilk olarak 2001 yılında B. Y. Chen tarafından [4] numaralı makalesinde verilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklid uzaylarındaki CR hiperyüzeyleri; ya merkezi orijinde olan $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklid uzayındaki $\mathbb{S}^n(r)$ hiperküresinin açık bir parçasıdır, ya merkezi orijinde olan koninin açık bir parçasıdır, veya parametrizasyonu;

$$x(s, u_2, u_3, \dots, u_n) = (cs)Y(s, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

şeklinde. Burada $\{s, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ sistemi, hiperyüzey üzerindeki yerel koordinat sistemidir ve $Y(s, u_2, u_3, \dots, u_n)$; merkezi orijinde olan $\mathbb{S}^n(1)$ birim hiperküresinde,

- $Y_s, Y_{u_2}, Y_{u_3}, \dots, Y_{u_n}$ vektörlerinin herbirine dik,
- $\|Y_s\| = \sqrt{1 - c^2}/(cs)$,

koşullarını sağlayan bir parametrizasyondur.

[6] numaralı makalede B. Y. Chen tarafından, sabit oran (CR) altmanifold geometrisinin, Fizik bilimdalı ile arasındaki ilişki izah edilmiştir: Newton'un ters-küp yasasına uyan orijinde bulunan bir merkez çekim kuvvetine maruz kalan bir parçacığın yörüngesi bir sabit oran eğrisidir. [26] numaralı makalede, yazarlar tarafından bir düzlemde bulunan sabit oran eğrilerinin, tam olarak D. Thompson tarafından [53] de izah edilen logaritmik (eşit açılı) spirallere karşılık geldiği ve bu nedenden dolayı sabit oran (CR) altmanifoldlarını, Thompson'ın logaritmik (eşit açılı) spirallerinin daha yüksek boyuttaki versiyonu olduğu ayrıntılı bir şekilde izah edilmiştir.

Özel olarak, sabit oran (CR) yüzeyler, logaritmik (veya eşit açılı) spiralin 2-boyutlu modeline benzer olarak 3-boyutlu büyüme modelleri olarak kabul edilir. Temel büyüme modellerinin, özellikle logaritmik spiral bakımından, kapsamlı ve tam bir tanımı K. Boyadzhiev tarafından verilmiştir, [1]. Bu nedenle, bazı makalelerde sabit oran (CR) altmanifoldları, eşit açılı altmanifoldlar olarak adlandırılmıştır, [1].

Yakın geçmişte, K. Boyadzhiev den bağımsız olarak, M. I. Munteanu tarafından sabit eğim (CSS) yüzey (Logaritmik spiral) kavramı, doğada ve bilimde önemli bir yeri olan helis eğrisi kavramı düşünülerek ortaya atılmıştır. Bilindiği gibi, sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapan eğriler *helis* olarak adlandırılır. Sabit eğim yüzeyi kavramı ise, bu doğrultuda; 'Acaba, Öklid uzayında konum vektörü ile sabit açı yapan yüzeyler var mı?' sorusunun cevabı olarak, bahsedildiği gibi [46] numaralı makalede Munteanu tarafından, Öklid uzaylarında sabit eğim (CSS) yüzey kavramı ifade edilmiştir. Bu tanım daha genel olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 1.1. $\mathbb{E}_y^{n+1}$ yarı-Öklid uzayında *dejenere olmamış* bir M^m altmanifoldu göz önüne alınsın ve bu altmanifoldunun konum vektörü x ile gösterilsin. Eğer $\langle x, e_{m+1} \rangle = \text{sabit}$ olacak şekilde paralel bir e_{m+1} normal vektörü varsa, o zaman M altmanifolduna, *sabit eğim (CSS) altmanifoldu* denir.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzaylarındaki CSS yüzeyleri; ya $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayındaki orijin merkezli $\mathbb{S}^2$ küresinin açık bir parçasıdır, ya da

$$x(u, v) = u \sin \theta \left(\cos \xi f(v) + \sin \xi f(v) \times f'(v) \right)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada, θ sıfırdan farklı sabit bir açıdır, $\xi = \xi(u) = \cot \theta \log u$ ve f , $\mathbb{S}^2$ küresinde yatan birim hızlı bir eğridir. Öklid uzaylarında düz bir CSS yüzeyi bir düzlemin

veya bir koninin açık bir parçasıdır ve ayrıca, minimal CSS yüzeyleri bir düzlemin açık bir parçasıdır. Bu kavram ayrıca yarı-Öklid uzaylarında [18, 20] makalelerinde incelenmiştir.

Helis kavramından yola çıkılarak elde edilen bir diğer yüzey kavramı ise, sabit açı (CAS) yüzeyleridir. Bu yüzeyler, CSS yüzeylerinin konum vektörlerinin özel bir seçim ile, yani, yüzeyin konum vektörü yerine $\mathbb{E}^n$ uzayındaki sabit bir k doğrultusu alınarak elde edilen yüzeylerdir. Bu tipteki yüzeyler aynı zamanda, yüzeyin normal vektörü ile bu sabit doğrultunun arasındaki açı sabit olan yüzeyler olarak ifade edilir. Bu tanım daha genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Tanım 1.2. $\mathbb{E}_v^{n+1}$ yarı-Öklid uzayında dejenere olmamış bir M^m altmanifoldu göz önüne alınsın ve bu uzaydaki sabit bir doğrultu k ile gösterilsin. Eğer $\langle k, e_{m+1} \rangle = \text{sabit}$ olacak şekilde paralel bir e_{m+1} normal vektörü varsa, o zaman M altmanifolduna, sabit açı (CAS) altmanifoldu denir.

Açıklama 1.3. Bölüm 3.1 de anlatılacağı üzere, M yüzeyi bir CAS yüzeyi ise, bu durumda k sabit vektörünün teğetsel bileşeni k^T ; $k_1 = 0$ asli eğriliğine karşılık gelen bir asli doğrultudur.

Son yıllarda bu konuda, farklı çevreleyen uzaylarında birçok çalışmalar yapılmıştır, [2, 9, 10, 11, 19, 24, 17, 42, 45, 54]. Örneğin, R. Lopez ve M. I. Munteanu [42] makalesinde; $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında time-like sabit bir doğrultu ile ilişkili sabit açı (CAS) yüzeyleri için kısmi bir sınıflandırma vermişlerdir ve bu uzaydaki CAS yüzeylerinin düz olduğu sonucuna varmışlardır. Dahası, bu makalede teğet açılabilir (sırasıyla, silindir, koni) bir yüzeyin bir CAS yüzeyi olması için, üreteç eğrisinin bir helis (sırasıyla, düz bir doğru, çember) eğrisi olması gerek ve yeter olduğu elde edilmiştir. Ayrıca Bölüm 3.1 ve Bölüm 4.2 de anlatılacağı üzere, bu konuyla ilgili elde edilen bazı sonuçlar [31, 35] numaralı konferans bildirilerinde sunulmuştur.

[10, 11, 19] makalelerinde, $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldlarındaki sabit açı (CAS) yüzeyleri incelenmiş ve sabit doğrultu olarak $\mathbb{R}$ -doğrultusu seçilmiş ve bu yüzeyler için bazı önemli sınıflandırma sonuçları verilmiştir. Burada, $\mathbb{R}$ -doğrultusunun, daldırılmış yüzeyin teğet düzlemi üzerine olan izdüşümü; ilişkili asli eğriliği sıfır olan bir asli doğrultudur.

[12, 13] makalelerinde F. Dillen ve diğerleri tarafından $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ çarpım uzaylarında tanımlanan sabit açı yüzey kavramından yola çıkılarak, literatürde ilk kez asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri üzerinde çalışılmış ve bu yüzeyler için bazı önemli sınıflandırma sonuçları elde etmişlerdir. Bu yüzeyler için ise; burada $\mathbb{R}$ -doğrultusunun daldırılmış

yüzeyin teğet düzlemi üzerine olan izdüşümü; ilişkili asli eğriliği sıfırından farklı olan bir asli doğrultudur. Bu nedenle de, bu izdüşüm asli kanonik doğrultu olarak adlandırılmıştır. Böylece, bu tipteki yüzeyler, asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzey olarak adlandırılmıştır. Tez boyunca, F. Dillen ve diğerleri tarafından kullanılan bu isimlendirme kullanılacaktır. [23] numaralı makalede ise, E. Garnica, O. Palmas ve G. Ruiz-Hernandez tarafından Öklid uzayındaki keyfi bir X vektör alanı ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip hiperyüzeyler tanımlanmıştır. Ayrıca [12, 13] makalelerinde yapılan çalışma daha sonra, R. Tojiero tarafından, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ çarpım uzaylarındaki hiperyüzeylere taşınmıştır, [54]. R. Tojiero tarafından bu tür hiperyüzeylere $\mathcal{A}$ -sınıfı daldırma denilmiştir. Daha sonra ise, [44] numaralı makalede bu kavram $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uzayında karşıt boyutun birden büyük olduğu duruma genelleştirilmiştir. Karşıt boyutun birden büyük olduğu durum göz önüne alınarak, asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzey kavramı, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Tanım 1.4. $\mathbb{E}_v^{n+1}$ yarı-Öklid uzayında M dejenere olmamış bir yüzey ve $k \in \mathbb{E}_v^{n+1}$ sabit vektörü göz önüne alınsın. Eğer, k^T teğet bileşeni M yüzeyinin tüm şekil operatörlerinin bir asli doğrultusu ise, o zaman k^T vektör alanına M yüzeyinin asli kanonik doğrultusu denir. Bu durumda M yüzeyine, k sabit vektörü ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzey denir.

Bir CAS yüzeyinin bir CPD yüzeyi olduğu, Açıklama 1.3 den görülebilir. Bununla birlikte, Bölüm 3.2 de görüleceği üzere, M bir CPD yüzey ise, k sabit vektörü ile N normal vektörü arasındaki açı sabit değildir. Dolayısıyla her CPD yüzeyi, CAS yüzeyi değildir. O halde, Tanım 1.2 göz önünde bulundurularak aşağıdaki önemli açıklama verilebilir:

Açıklama 1.5. $\mathbb{E}_v^{n+1}$ yarı-Öklid uzayında M , dejenere olmamış bir CPD yüzey ve bu yüzeyin tüm şekil operatörleri köşegenleştirilebilir olsun. Eğer, M CPD yüzeyinin birinci asli eğriliği $k_1 = 0$ ise, M yüzeyi bir CAS yüzeyidir.

CPD yüzeyleri ayrıca, Öklid ve Minkowski uzaylarında [47, 48] numaralı makalelerinde incelenmişlerdir ve bu tipteki yüzeylerin birer silindir olduğu sonucuna varmışlardır. Ayrıca, minimal CPD yüzeyleri birer katenoid, düz CPD yüzeyleri ise, birer genelleştirilmiş silindirdir. [37] numaralı makalede A. Kelleci, M. Ergüt ve N. C. Turgay tarafından, CPD yüzeyleri için [48] de kısmi bir şekilde elde edilen sınıflandırma tamamlanmıştır ve bu yüzeyler için yeni karakterizasyonlar elde edilmiştir. Bu konuyla ilgili elde edilen bazı sonuçlar, Bölüm 3.2 ve

Bölüm 4.1 de verileceği üzere, [28, 29, 32, 33, 34, 35, 36] numaralı konferans bildirilerinde sunulmuştur.

Öklid 3–uzaylarında çok yakın geçmişte, [21] numaralı makalede Y. Fu ve M. I. Munteanu tarafından, CPD ve CSS yüzey kavramlarından yola çıkılarak yeni bir yüzey kavramından bahsetmişlerdir. CSS yüzeyleri; eşit açılı yüzeyler ve dolayısıyla da B. Y. Chen’in tanımlamış olduğu CR yüzeyleri ile ilişkili olduğundan, [21] de tanımlanan bu yüzeylere genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyleri adı verilmiştir. Bu kavram daha genel olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 1.6. $\mathbb{E}_1^{n+1}$ yarı-Öklid uzayında *dejenere olmamış bir M^m altmanifoldu göz önüne alınsın ve x , M altmanifoldunun konum vektörü olsun. Eğer x konum vektörünün x^T teğetsel bileşeni, tüm şekil operatörlerinin özvektörü ise, M altmanifolduna genelleştirilmiş sabit oran (GCR) altmanifoldu denir.*

Bu kavram ve Tanım 1.1 göz önünde bulundurularak aşağıdaki önemli açıklama verilebilir:

Açıklama 1.7. M , $\mathbb{E}_1^{n+1}$ yarı-Öklid uzayında *dejenere olmamış bir GCR yüzey ve M yüzeyinin tüm şekil operatörleri köşegenleştirilebilir olsun. Eğer, M GCR yüzeyinin konum vektörü ile yüzeyin paralel bir e_3 normal vektörü arasındaki açı sabit ise, M yüzeyi bir CSS yüzeyidir.*

[21] numaralı makalede, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzaylarındaki GCR yüzeylerinin parametrisasyonu;

$$x(s, t) = s(\cos u(s)f(t) + \sin u(s)f(t) \times f'(t)) \quad (1.1)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada, $u(s) = \int \frac{\cot \theta(s)}{s} ds$, $\theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$ açı fonksiyonu ve f fonksiyonu da $\mathbb{S}^2$ üzerindeki birim hızlı bir eğridir.

Ayrıca $\mathbb{E}^3$ Öklid uzaylarında (1.1) ile verilen GCR yüzeyleri; yüzeyin konum vektörünün teğet bileşenine karşılık gelen asli eğriliği sabit olan bir yüzey ise, ya bir düzlemin, bir kürenin, bir silindir yüzeyinin açık bir parçasıdır, veya bir teğet açılabilir bir yüzeydir ya da Gauss eğriliği sabit olmayan bir yüzeydir. Dahası, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzaylarındaki düz GCR yüzeyleri, ya bir düzlemin, ya bir silindirin açık bir parçasıdır ya da teğet açılabilir bir yüzeydir ve ayrıca sabit ortalama eğrilikli GCR yüzeylerinin, dönel yüzey olduğu elde edilmiştir.

[16, 55] makalelerinde Öklid ve yarı-Öklid uzaylarındaki GCR hiperyüzey kavramı verilmiştir. N. C. Turgay, [55] de $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklid uzaylarındaki GCR hiperyüzeylerini incelemiş ve bazı

önemli sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca, GCR hiperyüzeyleri ile bikonzervatif hiperyüzeylerin ortak özelliklerinden bahsetmiştir. Dahası, GCR hiperyüzeyleri için elde edilen sonuçları göz önünde bulundurarak bazı örnekler vermiştir. A. Kelleci, M. Ergüt ve N. C. Turgay, [16] makalesinde, D. Yang, Y. Fu ve L. Li tarafından [56] makalesinde $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında incelenen space-like GCR yüzeyleri için elde edilen sonuçlardan bağımsız olarak, daha yüksek boyuttaki hiperyüzeyler için bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında time-like GCR yüzeyleri ise, [22] numaralı makalede Y. Fu ve D. Yang tarafından incelenmiş ve bu yüzeyler için bazı sınıflandırma sonuçları verilmiştir.

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzaylarındaki düz GCR yüzeyleri, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzaylarında elde edildiği gibi ya bir düzlemin veya bir silindirin açık bir parçasıdır ve ayrıca sabit ortalama eğrilikli GCR yüzeyleri de yine bir dönel yüzeye karşılık gelmektedir. Ayrıca bu konuyla ilgili elde edilen bazı sonuçlar, [30, 33] numaralı konferans bildirilerinde sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında, Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında genelleştirilmiş sabit oran (GCR) altmanifoldları ele alınmıştır ve bu tez altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Tezin ilk iki bölümünde tezin konusu ile ilgili bazı genel bilgiler verilmiş; üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde ise, elde edilen ana sonuçlar sunulmuştur. Altıncı bölümde ise, elde edilen sonuçlar değerlendirilip, açık problemler sunulmuştur. Tezin organizasyonu şu şekildedir:

Birinci bölümde; genelleştirilmiş sabit oran (GCR) altmanifoldlarının tarihçesi ve altmanifoldların geometrik özellikleri göz önüne alınarak yapılan çalışmalar özet halinde ifade edilmiştir. İkinci bölümde; tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında karşıt boyut iki olan, sırasıyla, sabit açı (CAS) yüzeyleri, asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri, sabit eğim (CSS) yüzeyleri ve son olarak genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyleri sınıflandırılmıştır. Dördüncü bölümde; ilk olarak $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) hiperyüzeyleri için bazı geometrik özellikler incelenerek bu bölümde kullanılacak olan önemli teorem ve sonuçlar verilmiştir. Sonrasında, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri için sınıflandırma elde edilmiştir. Ayrıca, bu yüzeylerin minimal (maksimal) olma durumları incelenmiş ve bazı önemli karakterizasyonlar verilmiştir. Son olarak ise, light-like sabit doğrultu ile ilişkili sabit açı (CAS) yüzeyleri için yeni bir sınıflandırma verilmiştir. Beşinci bölümde; ilk olarak $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki genelleştirilmiş sabit oran (GCR) hiperyüzeyleri için bazı geomet-

rik özellikler incelenerek bu bölümde kullanılacak olan önemli teorem ve sonuçlar verilmiştir. Sonrasında, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında karşıt boyut bir olan genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyleri için sınıflandırma elde edilmiştir. Son bölüm de ise; öncelikle elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve sonrasında bazı açık problemler ortaya konulmuştur.



2 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $p \in M$ için, $\mathbb{R}^m$ deki bir açık cümleye homeomorfik olacak şekilde p noktasının açık bir U komşuluğu varsa, M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda $\text{boy}(\mathbb{R}^m) = m$ olduğundan, M manifoldunun boyutu m olarak tanımlıdır, [25, 52].

Tanım 2.2. M , m -boyutlu manifold olsun. M üzerinde $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ koordinat haritalarının bir ailesi olan J bir indeks cümlesi olmak üzere, $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in J\}$ kümesi için, aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\mathcal{A}$ kolleksiyonuna M üzerinde n . mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) denir;

1. $\{U_\alpha | \alpha \in J\}$ açık kümelerinin kolleksiyonu M manifoldunun bir açık bir örtüsüdür, yani, $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = M$.
2. Herhangi iki koordinat haritası n . mertebeden uyumludur. Yani, $\forall \alpha, \beta \in J$ için, $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ cümlesi boştan farklı ise, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(W_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})$ fonksiyonları $C^r(W_{\alpha\beta})$ -sınıfındadır.
3. $\mathcal{A}$ maksimaldir, yani bir $(\bar{\varphi}, \bar{U})$ haritası $\mathcal{A}$ daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise, bu durumda $(\bar{\varphi}, \bar{U}) \in \mathcal{A}$ dır.

Bir M manifoldu üzerinde $n \leq m$ olmak üzere, n . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa, M manifolduna n . mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Ayrıca, atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa, M manifolduna C^∞ -manifold veya kısaca diferensiyellenebilir manifold denir, [15, 52].

Tanım 2.3. M ve $\bar{M}$, sırasıyla, m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $x : M \rightarrow \bar{M}$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer $\forall p \in M$ noktasında,

$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \overline{M}$ türev dönüşümü 1-1 ise, o zaman x dönüşümüne daldırma (immersiyon) denir, [3, 14, 15].

Tanım 2.4. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, o zaman M üzerinde tanım cümleleri M yi örten haritaların bir $\mathcal{A}$ koleksiyonu vardır. Eğer $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{A}$ haritaları için, $J(\varphi, \psi) = \det(\partial y^i / \partial x^j)$ Jakobiyen determinant fonksiyonu pozitif ise, M manifolduna yönlendirilebilir manifold veya kısaca yönlendirilebilirdir denir. Ayrıca, $\mathcal{A}$ koleksiyonu da M için, yönlü bir atlas olarak adlandırılır, [14, 51, 52].

Tanım 2.5. $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi verilsin. $X \in \chi(M)$ olmak üzere, $\alpha' = X_\alpha$ koşulunu sağlanıyorsa, yani, $\forall t \in I$ için, $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ ise, α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir, [25, 50].

Tanım 2.6. M diferensiyellenebilir bir manifold ve manifold üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda, $X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

ile tanımlı ve

1. $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$
4. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

koşullarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon denir, [14, 25, 51, 52].

Tanım 2.7. M bir manifold ve ∇ , M üzerindeki konneksiyon olsun. M manifoldunun bir U açık komşuluğundaki çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ olacak şekildeki dual çatı $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ olsun. Bu durumda,

$$\omega_{ij} : \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$X \rightarrow \omega_{ij}(X)$$

ve

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) e_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

ile tanımlı ω_{ij} ; 1-formlarına, ∇ konneksiyonunun konneksiyon 1-formları denir, [51, 52].

Tanım 2.8. M diferensiyellenebilir bir manifold ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olsun. $\alpha' = d\alpha\left(\frac{d}{dt}\right)$ olmak üzere, eğer $\nabla_{\alpha'} X = 0$ ise, X vektör alanına α boyunca paraleldir denir. Eğer $\forall Y \in \chi(M)$ vektör alanları için, $\nabla_Y X = 0$ ise X vektör alanı paraleldir denir, [25, 51].

Tanım 2.9. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisinin teğet vektör alanı, α boyunca paralel ise, yani $\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$ ise, α eğrisine jeodezik denir, [25, 51].

2.1 Yarı-Riemann Manifolds

Tanım 2.10. V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ -bilineer fonksiyonuna bilinear form denir. Ayrıca, b bilinear formu $\forall v, w \in V$ için, $b(v, w) = b(w, v)$ koşulunu sağlıyorsa, b formuna simetrik bilinear form denir, [8, 50].

Tanım 2.11. V üzerindeki b simetrik bilinear formu,

i) $\forall v \in V, v \neq 0$ olacak şekilde $b(v, v) > 0$ ise, pozitif tanımlıdır,

ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ olacak şekilde $b(v, v) < 0$ ise, negatif tanımlıdır,

iii) $\forall w \in V$ için, $b(v, w) = 0$ koşulu sadece $v = 0$ için sağlanıyorsa, dejenere olmamıştır,

denir, [8, 50].

Tanım 2.12. V reel vektör uzayı üzerindeki b simetrik bilinear formunun v indisi, $b|_{(W)}$ negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu $W \subset V$ altuzayının boyutudur. b nin indisi v ise $0 \leq v \leq \text{boy} V$ dir, [8, 50].

Tanım 2.13. V üzerinde tanımlı b simetrik bilinear formu dejenere olmamış ise, b ye V üzerinde bir skalar çarpım denir ve g ile gösterilir, [8, 50].

Tanım 2.14. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde tanımlı g skalar çarpımı, sabit indisli ise, g ye bir metrik tansör denir. Bu durumda, (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir. Ayrıca, g metrik tansörü M manifoldunun birinci temel formu olarak da adlandırılır, [50].

Teorem 2.15. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu ($\nabla g = 0$), yani $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

koşullarını sağlayan bir tek ∇ afin konneksiyonu vardır.

Bu konneksiyona, M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu denir ve bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \end{aligned}$$

şeklindeki Kozsul özdeşliği ile karakterize edilir, [8, 14, 50, 52].

Tanım 2.16. M bir yarı-Riemann manifoldu ve üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ ile gösterilsin. M üzerinde

$$\begin{aligned} R &: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = R_{XY}Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı R , $(3,1)$ tensör alanına ∇ konneksiyonunun Riemann eğrilik tensörü denir. Eğer, $R = 0$ ise, M manifolduna flattır (düzdür) denir.

Ayrıca, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} K &: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y, Z, W) &\rightarrow K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

olarak tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü adı verilir, [8, 14, 50, 52].

Tanım 2.17. M , n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M$ olsun. $T_p M$ uzayının 2-boyutlu bir altuzayı Π olsun. Π dejenere olmamış düzlemini geren birim vektörler x ve y olmak üzere

$$\mathcal{K}(\Pi) = \mathcal{K}(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}$$

değerine, M manifoldunun Π düzlemine göre kesit eğriliği denir. Burada, kesit eğriliği Π düzlemi için seçilen bazlardan bağımsızdır.

Özel olarak, 2-boyutlu bir M manifoldu için, yani bir M yüzeyi için, $\mathcal{K}$ kesit eğriliği M üzerinde bir reel-değerli fonksiyona karşılık gelir. Bu reel değerli fonksiyon M manifoldunun Gauss eğriliği olarak adlandırılır, [8, 50, 52].

2.1.1 Yarı-Riemann Altmanifoldları

Tanım 2.18. M ve $\overline{M}$ birer diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, eğer

1. $M, \overline{M}$ manifoldunun bir topolojik altuzayı,
2. $j: M \rightarrow \overline{M}$ içine (inclusion) dönüşümü diferensiyellenebilir ve bu dönüşümün dj , türev dönüşümü $\forall p \in M$ noktasında 1-1 ise,

M manifolduna, $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu denir, [50, 52].

Tanım 2.19. M ve $\overline{M}$, sırasıyla, n ve m boyutlu manifoldlar olmak üzere, $x: M \rightarrow \overline{M}$ dönüşümü bir daldırma olsun. $v, w \in T_p(M)$ için,

$$g(v, w) = \overline{g}(dx_p(v), dx_p(w))$$

eşitliği sağlanıyorsa, yani, $\overline{M}$ üzerindeki metrik M üzerindeki metriğe indirgenmişse, x dönüşümüne bir izometrik daldırma ve ayrıca $m - n$ farkına da x daldırma dönüşümünün karşı boyutu denir, [50, 52].

Tanım 2.20. M , $\overline{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun ve $\overline{M}$ üzerindeki $\overline{g}$ metrik tansörünün, M altmanifolduna indirgenmesiyle elde edilen $g = \overline{g}|_M$ tansörü göz önüne alınsın. M altmanifoldunun bir p noktasındaki sıfırdan farklı her $w \in T_p(M)$ teğet vektörü için $g_p(w, v \neq 0)$ olacak şekilde bir $v' \in T_p(M)$ teğet vektörü varsa, g indirgenmiş metrik tansörüne, p noktasında dejenere olmamıştır denir. Eğer g , M üzerindeki her noktada dejenere olmamış metrik tansörse ve indisi M manifoldunun her noktasında aynıysa, M altmanifolduna $\overline{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldudur denir. Bu durumda, M altmanifoldunun indisi, g metrik tansörünün bir $p \in M$ noktasındaki indisi olarak tanımlanır, [50].

Tanım 2.21. $\overline{M}$ m -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin n -boyutlu bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer, $m - n$ karşı boyutu bir ise, M altmanifolduna hiperyüzey denir, [50, 52].

Tanım 2.22. $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve p noktasındaki tanjant uzayı $T_p\overline{M}$ olsun. Ayrıca M , $\overline{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. p noktasında T_pM uzayına dik olan normal uzay ise, $T_pM^\perp$ ile gösterilsin. Normal uzayın meydana getirdiği $TM^\perp$ tanjant demete de normal demet denir. Böylece $T_p\overline{M}$ uzayı için,

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$$

veya

$$T\overline{M} = TM \oplus TM^\perp$$

yazılabilir. Böylece, $p \in M$ olmak üzere, $\forall x \in T_p \overline{M}$ tanjant vektörü,

$$x = x^T + x^\perp \quad (2.2)$$

şeklinde ayrıştırılır. Burada, $x^T \in T_p M$ ve $x^\perp \in T_p M^\perp$. Ayrıca, $V \in T_p M^\perp$ vektörüne normal vektör ve birim normal vektöre de normal kesit denir. Normal vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)^\perp$ ile gösterilir, [3, 14, 50, 52].

Tanım 2.23. $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\overline{\nabla}$ olsun. Eğer, M manifoldu $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu ve üzerindeki konneksiyon ∇ ise, o zaman, M altmanifoldu üzerindeki ∇ konneksiyonu bir Levi-Civita konneksiyonudur ve bu konneksiyona indirgenmiş konneksiyon denir, [8, 50].

Tanım 2.24. $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve M ise, $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonlar, sırasıyla, $\overline{\nabla}$ ve ∇ olmak üzere,

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp$$

ile tanımlı $\chi(M)^\perp$ -değerli simetrik bilineer formuna, M manifoldunun şekil tensörü veya ikinci temel form denir, [8, 50, 52].

Tanım 2.25. $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve M ise, $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla, $\overline{\nabla}$ ve ∇ olmak üzere,

$$A_V : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

ile tanımlı operatöre Weingarten tasviri veya şekil operatörü denir. Burada $V \in \chi(M)^\perp$. [8, 50, 52].

Yardımcı Teorem 2.26. $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve M , $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$ için,

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V) \quad (2.3)$$

şeklindedir, [8, 50].

Tanım 2.27. $\bar{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve M ise, $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla, $\bar{\nabla}$ ve ∇ olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$ için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.4)$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V \quad (2.5)$$

ile tanımlı denklemlerine, sırasıyla, Gauss ve Weingarten formülü denir. Burada D konneksiyonu, normal demet üzerindedir ve normal konneksiyon olarak adlandırılır, [52].

Tanım 2.28. $\bar{M}$ m -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu ve M , $\bar{M}$ manifoldunun n -boyutlu altmanifoldu olsun. $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ teğet uzayının ve $T_p(M)^\perp$ normal uzayının ortonormal çatıları, sırasıyla, $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$ olmak üzere,

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{\beta=n+1}^m g(e_\beta, e_\beta)(\text{tr} A_\beta) e_\beta,$$

$$H = \sqrt{g(\vec{H}, \vec{H})},$$

ile tanımlı $\vec{H}$ vektör alanına ortalama eğrilik vektör alanı, H değerine de ortalama eğriliği denir. Burada,

$$\text{tr} A_\beta = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) h_{ii}^\beta$$

şeklinde ve bu ifadede $A_\beta = A_{e_\beta}$ şekil operatörünün izi ve h_{ii}^β ise, M manifoldunun ikinci temel formunun bileşenleridir. Eğer manifoldun, ortalama eğriliği $H = 0$ ise, manifolda minimaldir denir, [41, 50].

Tanım 2.29. $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensör alanı $\bar{R}$ ve M altmanifoldunun eğrilik tensör alanı R olsun. Bu durumda, $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$ olmak üzere

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - g(h(Y, Z), h(X, W)) + g(h(X, Z), h(Y, W))$$

ve

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \quad (2.6)$$

denklemlerine, sırasıyla, Gauss ve Codazzi denklemi adı verilir. Ayrıca, h ikinci temel formun kovaryant türevi ∇h ,

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = D_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, M altmanifolduna; eğer $\nabla h = 0$ ise paraleldir denir, [52].

2.2 Yarı-Öklid Uzaylarının Altmanifoldları

Bu alt bölümde, tez boyunca çevreleyen uzay $\mathbb{E}_v^m$ yarı-Öklid uzayı olarak alınacağından, öncelikle yarı-Öklid uzayları ifade edilecek ve bu uzaylar için temel geometrik kavramlardan bahsedilecektir. Daha sonrasında ise, yarı-Öklid uzaylarındaki yüzeyler ve hiperyüzeyler için temel kavramlar verilecektir:

Tanım 2.30. $\mathbb{E}_v^m$ uzayı, üzerindeki metrik tansör

$$\widetilde{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^v dx_i^2 - \sum_{j=v+1}^m dx_j^2$$

şeklinde tanımlı olan m -boyutlu, v indisli yarı-Öklid uzayı olarak adlandırılır. Burada, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, E_v^m uzayındaki bir kartezyen koordinat sistemidir. Ayrıca eğer $v = 0$ ise, $E_0^m = E^m$ uzayı Öklid uzayı olarak, eğer $v = 1$ ise, $\mathbb{E}_1^m$ uzayı Minkowski uzayı olarak adlandırılır, [50].

Özel olarak, $c_0 \in \mathbb{E}_v^m$ ve $r > 0$ olmak üzere, eğrilikleri, sırasıyla, r^2 ve $-r^2$ olan $\mathbb{S}_v^{m-1}(c_0, r^2)$ ve $\mathbb{H}_{v-1}^{m-1}(c_0, -r^2)$ tam uzayları, sırasıyla,

$$\mathbb{S}_v^{m-1}(c_0, r^2) = \{x \in \mathbb{E}_v^m : \langle x - c_0, x - c_0 \rangle = r^2\}, \quad (2.7)$$

$$\mathbb{H}_{v-1}^{m-1}(c_0, -r^2) = \{x \in \mathbb{E}_v^m : \langle x - c_0, x - c_0 \rangle = -r^2\} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Genel görelilik kuramında, $\mathbb{E}_1^4$, $\mathbb{S}_1^4(c_0, r^2)$ ve $\mathbb{H}_1^4(c_0, r^2)$ uzaylarına, sırasıyla, *Minkowski*, *de Sitter* ve *anti-de Sitter space-time* olarak isimlendirilir. $c_0 = 0$ olması durumunda, $\mathbb{S}_v^{m-1}(0, -r^2)$ ve $\mathbb{H}_{v-1}^{m-1}(0, -r^2)$ uzayları, buradaki 0 kaldırılarak, kısaca $\mathbb{S}_v^{m-1}(r^2)$ ve $\mathbb{H}_{v-1}^{m-1}(-r^2)$ ile gösterilir. Ayrıca, $v = 1$ olması durumunda

$$\mathbb{H}^{m-1}(-r^2) = \{x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{E}_1^m : \langle x, x \rangle = -r^2 \text{ ve } x^0 > 0\} \quad (2.9)$$

ile verilen $\mathbb{H}^{m-1}(-r^2)$ uzayına *hiperbolik uzay* denir, [51].

Tanım 2.31. $\mathbb{E}_V^m$ yarı-Öklid uzayındaki bir v tanjant vektörü için, eğer

- $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise *space-like vektör*,
- $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise *light-like vektör*,
- $\langle v, v \rangle < 0$ ise *time-like vektör*,

denir, [41, 50]. Diğer taraftan, $\mathbb{E}_V^m$ yarı-Öklid uzayındaki bir X vektör alanına, eğer tanım cümlesinin tamamında *space-like*, *light-like* veya *time-like* ise, sırasıyla, *space-like*, *light-like* veya *time-like vektör alanı* denir.

Ayrıca, $\mathbb{E}_V^m$ yarı-Öklid uzayındaki iki *light-like* vektör v_1 ve v_2 'nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ olmasıdır. Özel olarak $v = 1$ olması durumunda, eğer $\langle v_3, v_4 \rangle = 0$ ve v_3 *time-like* ise, v_4 *space-like vektördür*.

Tanım 2.32. $\mathbb{E}_V^m$ yarı-Öklid uzay ve üzerindeki metrik $\tilde{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$, olmak üzere,

- i) $\Gamma_N = \{v \in \mathbb{E}_V^m(-\{0\}) : \langle v, v \rangle = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine $\mathbb{E}_V^m$ uzayının *light-like (null) konisi*,
- ii) $\Gamma_S = \{v \in \mathbb{E}_V^m : \langle v, v \rangle \geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine $\mathbb{E}_V^m$ uzayının *space-like konisi*,
- iii) $\Gamma_T = \{v \in (\mathbb{E}_V^m - \{0\}) : \langle v, v \rangle < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine $\mathbb{E}_V^m$ uzayının *time-like konisi*,

denir, [41, 50].

Tanım 2.33. $\mathbb{E}_V^m$ yarı-Öklid uzayındaki bir yüzey için, eğer üzerindeki metrik tensör

- *pozitif tanımlı ise, space-like yüzey*,
- *indisi bir ise time-like yüzey*,
- *dejenere ise light-like yüzey*

olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, eğer yüzeyin her bir p noktasındaki normal vektörü time-like, space-like veya light-like ise, sırasıyla, space-like, time-like veya light-like yüzey olarak adlandırılır, [41, 50]. Ayrıca, yüzey üzerindeki teğet vektörlerin tamamı space-like ise, yani yüzeyin indisi sıfır ise, bu taktirde yüzeye space-like yüzey denir

Tanım 2.34. $\mathbb{E}_v^m$, yarı-Öklid uzayındaki bir v_p tanjant vektörünün normu,

$$\|v_p\| = \sqrt{|g(v, v)|_p}$$

reel sayısı ile tanımlanır, [50, 52].

Tanım 2.35. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında verilen v ve w pozitif (negatif) time-like vektörleri için,

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $\theta \geq 0$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, v ve w vektörleri arasındaki Lorentz time-like açısı denir, [18, 20].

Tanım 2.36. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında v bir space-like vektör ve w bir pozitif time-like vektör olmak üzere,

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \sinh \theta$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $\theta \geq 0$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, v ve w vektörleri arasındaki Lorentz time-like açısı denir, [18, 20].

Tanım 2.37. Time-like bir vektör altuzayı tarafından gerilen, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında verilen v ve w time-like vektörleri için, $|\langle v, w \rangle| > \|v\| \|w\|$ olmak üzere,

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, v ve w vektörleri arasındaki Lorentz time-like açı denir, [18, 20].

Tanım 2.38. *Space-like bir vektör altuzayı tarafından gerilen, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında verilen v ve w space-like vektörleri için, $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ olmak üzere,*

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cos \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \in [0, \Pi/2]$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, v ve w vektörleri arasındaki Lorentz space-like açı denir, [18, 20].

2.2.1 Yarı-Öklid uzaylarının yüzeyleri

Bu alt bölümde $\mathbb{E}_\nu^m$ yarı-Öklid uzaylarında, $\nu = 0$ ve $m = 4$ alınarak, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzaylarındaki M yüzeyleri için temel geometrik kavramlar verilecektir:

M , $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında yönlendirilmiş, regüler bir yüzey olsun. $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$, M yüzeyi üzerinde tanımlı ortonormal çatı alanı ve $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ise, bu çatı alanına karşılık gelen dual çatı alanı olsun. Ayrıca $\widetilde{\nabla}$, ∇ ve D ile, sırasıyla, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayının Levi-Civita konneksiyonu, M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ve M yüzeyinin normal konneksiyonu gösterilsin. Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$\widetilde{\nabla}_{e_j} e_i = \sum_{k=1}^2 \omega_{ik}(e_j) e_k + h_{ij}^3 e_3 + h_{ij}^4 e_4, \quad (2.10)$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_\beta = -h_{1i}^\beta e_1 - h_{i2}^\beta e_2 + \sum_{\gamma=3}^4 \omega_{\beta\gamma}(e_i) e_\gamma, \quad i, j = 1, 2, \beta = 3, 4 \quad (2.11)$$

şeklinde. Burada $\{\omega_{BC}\}$, $B, C = 1, 2, 3, 4$; $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ çatı alanına karşı gelen konneksiyon formları, $\omega_{BC}(X) = \langle \widetilde{\nabla}_X e_B, e_C \rangle$ şeklinde tanımlanır ve $\omega_{BC} + \omega_{CB} = 0$ eşitliklerini sağlar. $h_{ik}^\beta = \langle h(e_i, e_k), e_\beta \rangle$ ise, M yüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleridir.

M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2} i z A_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\beta, i} h_{ii}^\beta e_i, \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. Ortalama eğriliği ise,

$$H = \|\vec{H}\|$$

şeklinde.

M yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \det A_\beta = \sum_{\beta=3}^4 (h_{11}^\beta h_{22}^\beta - (h_{12}^\beta)^2), \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır.

Diğer taraftan $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki M yüzeyleri için, Gauss ve Codazzi denklemleri, sırasıyla,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle h(Y, Z), h(X, W) \rangle - \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle, \quad (2.14)$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z). \quad (2.15)$$

Burada R , yüzeyin ∇ konneksiyonu ile ilişkili eğrilik tansörüdür ve ∇h ,

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = D_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$R^D(e_j, e_k; e_\beta, e_\gamma) = \langle [A_\beta, A_\gamma](e_j), e_k \rangle = \sum_{i=1}^2 (h_{ik}^\beta h_{ij}^\gamma - h_{ij}^\beta h_{ik}^\gamma), \quad i, j, k = 1, 2, \quad \beta, \gamma = 3, 4 \quad (2.16)$$

şeklindedir. Burada R^D , yüzeyin D konneksiyonu ile ilişkili normal eğrilik tansörü, A_β ise e_β vektörü doğrultusundaki Weingarten dönüşümüdür.

Eğer $R^D = 0$ ise, M yüzeyinin normal konneksiyonu düzdür denir. (2.16) ile verilen Ricci denkleminin dolayısı, bu koşul bu yüzeyin tüm şekil operatörlerinin aynı anda köşegenleştirilebilir olmasına denktir.

Önerme 2.39. M , $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında regüler bir yüzey olsun. Bu taktirde, M yüzeyinin tüm şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul paralel $\{\hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ normal vektörlerinin mevcut olmasıdır, [3].

2.2.2 Yarı-Öklid uzaylarının hiperyüzeyleri

Bu alt bölümde $\mathbb{E}_\nu^m$ yarı-Öklid uzaylarında, $\nu = 1$ ve $m = n + 1$ alınarak, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzaylarındaki M hiperyüzeyleri için, genel geometrik özellikler verilecektir:

Tanım 2.40. $M, \mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir hiperyüzey, $x: M \rightarrow \mathbb{E}_1^{n+1}$ bir izometrik daldırma ve N ise, bu hiperyüzeyin birim normal vektör alanı olsun. Eğer, M üzerindeki indirgenmiş metrik $g = \bar{g}|_M$, pozitif tanımlı (indisi bir) ise, x daldırması space-like (time-like) daldırma olarak adlandırılır. Diğer taraftan, M hiperyüzeyinin her bir noktasındaki birim normal vektör alanı N time-like (space-like) bir vektör alanı olması, yine x daldırmasının space-like (time-like) olmasına denktir. Ayrıca, eğer g indirgenmiş metriğinin indisi bir ise, x daldırmasına space-like daldırma denir, [50].

$\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayının n -boyutlu bir M^n hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve M^n hiperyüzeyi üzerinde bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n; N\}$ olsun. Öyle ki $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektör alanları, M hiperyüzeyine teğet; N ise bu hiperyüzeyin birim normal vektör alanı olsun.

Tez boyunca ε_j ile o anda söz konusu edilen ortonormal baz takımındaki e_j vektörünün normu gösterilecektir, yani aksi belirtilmedikçe $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$ dir. Özel olarak, eğer e_j vektör alanı; space-like ise, $\varepsilon_j = 1$, time-like ise, $\varepsilon_j = -1$ dir.

Diğer taraftan, $\{f_1, f_2, e_3, e_4, \dots, e_n\}$ ile

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} - 1, \langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} \quad i, j = 1, 2 \quad k, l = 3, \dots, n$$

olacak şekilde bir yerel sözde-ortonormal çatı alanı gösterilecektir.

Ayrıca $\langle N, N \rangle = \varepsilon$ olmak üzere,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & M \text{ time-like} \\ -1, & M \text{ space-like} \end{cases}$$

şeklindedir.

Şimdi ∇ ve $\tilde{\nabla}$ ile, sırasıyla, M^n hiperyüzeyinin ve $\mathbb{E}_1^{n+1}$ uzayının Levi-Civita konneksiyonları gösterilsin. $X, Y \in \chi(M)$ teğet vektörler ve $N \in \chi(M)^\perp$ normal vektör olmak üzere, Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (2.17)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -S_N(X) \quad (2.18)$$

şeklindedir. Burada, h ve S ile M hiperyüzeyinin, sırasıyla, ikinci temel formu ve şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) gösterilmektedir. Ayrıca, $\chi(M)^\perp$ 1-boyutlu olduğundan,

$h(X, Y) = \lambda N, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $S_N(X) = S X$ şeklinde de yazılabilir. S , şekil operatörü ve h , ikinci temel form arasındaki ilişki ise,

$$\langle S X, Y \rangle = \langle h(X, Y), N \rangle \quad (2.19)$$

şeklinde yazılır.

Tez boyunca, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzaylarındaki hiperyüzeyler için şekil operatörü S ile gösterilecektir.

Diğer taraftan, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki M hiperyüzeyleri için Gauss ve Codazzi denklemleri, sırasıyla,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle h(Y, Z), h(X, W) \rangle - \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle, \quad (2.20)$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) \quad (2.21)$$

şeklindedir.

Eğer, M hiperyüzeyi space-like ise, o zaman S , şekil operatörü köşegenleştirilebilir. Yani, $S e_i = k_i e_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olacak şekilde bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n; N\}$ yerel ortonormal çatı alanı mevcuttur. Burada e_i vektör alanlarına ve k_i diferensiyellenebilir fonksiyonlarına, sırasıyla, M hiperyüzeyinin *asli doğrultuları* ve *asli eğrilikleri* adı verilir. Ayrıca n -boyutlu M hiperyüzeyinin, ortalama eğriliği ve Gauss-Kronicker eğriliği, sırasıyla,

$$H = \frac{1}{n} \text{tr} S, \quad (2.22)$$

$$K = \det S \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, $\text{tr} S$ ve $\det S$, sırasıyla, S şekil operatörünün bir ortonormal baz alanına göre temsil matrisinin izi ve determinantıdır.

Diğer taraftan, eğer M hiperyüzeyi time-like ise, o zaman şekil operatörü köşegenleştirilemeyebilir. Bu durumda, S şekil operatörü aşağıdaki dört kanonik durumdan birini sağlar, (ayrıntılı bilgi için bkz. [43]):

Durum I. S , şekil operatörü köşegenleştirilebilir. Bu durumda, $S e_i = k_i e_i$, $i = 2, 3, \dots, n$ olacak şekilde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal çatı alanı vardır ve $\langle e_1, e_1 \rangle = -1, \langle e_i, e_i \rangle = 1$ şeklindedir.

Durum II. S , şekil operatörünün minimal polinomunda $(\lambda - k_1)^2$ varsa, bu durumda uygun seçilmiş bir $\{f_1, f_2, e_3, \dots, e_n\}$ sözde- ortonormal çatı alanı için, S şekil operatörünün matris temsili:

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & \rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

formundadır.

Durum III. S , şekil operatörünün minimal polinomunda $(\lambda - k_1)^3$ terimi varsa, bu durumda uygun seçilmiş bir $\{f_1, f_2, e_3, \dots, e_n\}$ sözde-ortonormal çatı alanı için, S şekil operatörünün matris temsili:

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

formundadır.

Durum IV. S , şekil operatörü karmaşık özdeğerlere sahip ise, bu durumda uygun seçilmiş bir $\{f_1, f_2, e_3, \dots, e_n\}$ sözde-ortonormal çatı alanı için, S şekil operatörünün matris temsili:

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & \eta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\eta & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

formundadır.

2.3 Yerel Frobenius Teoremi

Bu bölümde, öncelikle distribüsyonlar ile ilgili bazı temel kavramlar verilecek ve sonrasında tezin bazı bölümlerinde kullanılacak olan yerel Frobenius teoremi ve bu teoremin bazı önemli sonuçları verilecektir.

Tanım 2.41. $\overline{M}$ n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\overline{M}$ manifoldunun her noktasına, o noktadaki teğet uzayının r -boyutlu bir $\mathbf{D}_p$ altuzayını getiren $\mathbf{D}$ kuralına, M üzerinde bir r -boyutlu distribüsyon denir. Eğer $X_1, \dots, X_r$ diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektörleri için, $\mathbf{D} = \text{span}\{X_1, \dots, X_r\}$ olarak yazılabiliyorsa, $\mathbf{D}$ distribüsyonuna diferensiyellenebilir denir.

Örneğin, bir M manifoldu üzerinde bir vektör alanı 1-boyutlu bir distribüsyondur, [3, 40, 52].

Tanım 2.42. $\overline{M}$ n -boyutlu bir C^∞ -manifold ve $\mathbf{D}$, $\overline{M}$ üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $\forall X, Y \in \mathbf{D}$ için, $[X, Y] \in \mathbf{D}$ ise $\mathbf{D}$ distribüsyonuna involutiftir denir, [3, 40, 52].

Tanım 2.43. $\overline{M}$ n -boyutlu bir C^∞ -manifold ve $\mathbf{D}$, $\overline{M}$ üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. M , $\overline{M}$ manifoldunun r -boyutlu altmanifoldu olmak üzere, eğer M 'nin her p noktasında M altmanifoldunun tanjant uzayı ile $\mathbf{D}_p$ aynı ise, M manifolduna $\mathbf{D}$ distribüsyonun integral manifoldu denir. Eğer, $\mathbf{D}$ distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun maksimal integral manifoldu denir, [3, 40, 52].

Örneğin, bir vektör alanının integral eğrisi 1-boyutlu distribüsyon olan vektör alanının integral manifoldudur.

Tanım 2.44. $\overline{M}$ n -boyutlu bir C^∞ -manifold ve M , $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer, $\forall p \in M$ için $\mathbf{D}$ distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathbf{D}$ distribüsyonuna integrallenebilirdir denir, [3, 40, 52].

Bir integrallenebilir distribüsyonunun, involutif olduğu açıktır. Bunun terside aşağıdaki teoremdedir:

Teorem 2.45. (Yerel Frobenius Teoremi) $\overline{M}$ n -boyutlu bir C^∞ -manifold ve $\mathbf{D}$ bu manifold üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $\mathbf{D}$ distribüsyonu involütif ise, integrallenebilir, [3, 40, 52].

Yukarıdaki teoremin sonuçlarından ilki, [40] da aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Yardımcı Teorem 2.46. M n -boyutlu bir manifold olmak üzere, eğer $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{D}^\perp$, M manifoldunun her bir noktasında birbirini tamamlayan birer involütif distribüsyon iseler, o zaman M manifoldunun her bir noktasında, $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{D}^\perp$ distribüsyonlarının, sırasıyla, $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k)$ ve $(\partial/\partial x^{k+1}, \dots, \partial/\partial x^n)$ birer yerel baz olacak şekilde, y merkezli $(x^1, \dots, x^n)$ yerel koordinat sistemi vardır.

Şimdi, bu teoremin özel olarak $n = 2$ alınarak ifade edilecek ve ispat edilecektir:

Yardımcı Teorem 2.47. M 2-boyutlu bir manifold olsun. $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları,

1. X ve Y vektör alanları lineer bağımsız ve

2. $[X, Y] = 0$

koşullarını sağlıyor ise, o zaman $\exists(s, t) : X = \frac{\partial}{\partial s}, Y = \frac{\partial}{\partial t}$ yerel koordinat sistemi vardır.

İspat. Kabul edilsin ki, $\mathbf{D} = \text{span}\{X\}$ ve $\mathbf{D}^\perp = \text{span}\{Y\}$ olarak alınsın ve X, Y vektör alanları birer lineer bağımsız vektör ve $[X, Y] = 0$ olsun. Tanım 2.41 den açıktır ki, $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{D}^\perp$ distribüsyonlarının herbiri, involütiftir. Ayrıca M manifoldu 2-boyutlu olduğundan,

$$\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}^\perp = TM$$

şeklindedir. Dolayısıyla $n = 2$ için, Yardımcı Teorem 2.46 den, $\exists(s, t) : \mathbf{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\right\}$, $\mathbf{D}^\perp = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\right\}$ olacak şekilde bir yerel koordinat sistemi vardır. Şimdi kabul edilsin ki, $X = E(S, T)\frac{\partial}{\partial S}$ ve $Y = F(S, T)\frac{\partial}{\partial T}$ olsun. O zaman $[X, Y] = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$[X, Y] = EF_S \frac{\partial}{\partial T} - FE_T \frac{\partial}{\partial S} = 0$$

olur. Buradan, $F_S = 0$ ve $E_T = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $X = E(S)\frac{\partial}{\partial S}$ ve $Y = F(T)\frac{\partial}{\partial T}$ olur ve buradan, S ve T parametrelerinin uygun birer değişimi ile, $\exists(s, t) : X = \frac{\partial}{\partial s}, Y = \frac{\partial}{\partial t}$ olacak şekilde yerel koordinat sistemi elde edilmiş olur. ■

Bu bölümde son olarak, çalışmamızda kullanacağımız aşağıda ispatı ile verilen önemli bir teorem verilecektir:

Yardımcı Teorem 2.48. $M, \mathbb{E}_U^m$ yarı-Öklid uzayında bir space-like n -manifold ve $x : M \longrightarrow \mathbb{E}_U^m$ bir izometrik daldırma olsun. Bu taktirde, x^T x konum vektörünün teğet bileşeni olmak üzere, $U = \{p \in M : x^T \neq 0\}$ açık altcümlesi üzerinde tanımlı, $\mathbf{D} = \{X \in T_p U : \langle X, x^T \rangle = 0\}$ distribüsyonu integrallenebilirdir, [5].

İspat. Kabul edilsin ki U açık altcümlesi üzerinde, $\lambda = \|x^T\|$ olmak üzere $e_1 = x^T / \lambda$ olsun. Burada dejenere olmamış bu e_1 birim vektöründen yola çıkılarak, U üzerinde $e_1, \dots, e_n$ bir yerel ortonormal çatı alanına genişletilebilir. Ayrıca (2.2) ifadesinde $x^T = \lambda e_1$ olduğu göz önüne alınırsa, $j, k = 2, \dots, n$ için $\langle x, e_j \rangle = 0$ elde edilir. Son eşitlikte, e_k vektörü yönünde türev alınırsa,

$$0 = e_k \langle x, e_j \rangle = \delta_{jk} + \langle x, \nabla_{e_k} e_j \rangle + \langle x, h(e_k, e_j) \rangle \quad (2.24)$$

elde edilir. Burada $h(e_k, e_j) = h(e_j, e_k)$ olduğu göz önüne alınırsa, $\langle e_1, \nabla_{e_k} e_j \rangle = \langle e_1, \nabla_{e_j} e_k \rangle$ elde edilir. Son ifadede (2.1) göz önüne alınırsa, $\omega_{j1}(e_k) = \omega_{k1}(e_j)$ elde edilir, yani $[e_k, e_j] = \text{Span}\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Böylece Teorem 2.45 göz önüne alınarak, $\mathbf{D} = \text{Span}\{e_2, \dots, e_n\}$ distribüsyonunun U üzerinde integrallenebilir bir distribüsyon olduğu elde edilir. ■

3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayındaki Yüzeyler

Bu bölüm, dört alt bölüm olarak incelenecek olup, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzaylarında, sırasıyla, sabit açı (CAS) yüzeyleri, asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyler, sabit eğim (CSS) yüzeyleri ve son olarak da genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeylerinin sınıflandırılması problemleri incelenecektir.

M , $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında yönlendirilmiş, regüler bir yüzey ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4$ bir izometrik daldırma olsun. k , M üzerinde sabit bir vektör alanı olmak üzere,

$$k = k^T + k^\perp \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, k^T ve $k^\perp$ bileşenleri, sırasıyla, k sabit vektör alanının teğet ve normal bileşenleridir. Burada, $k = (1, 0, 0, 0)$ olarak alınacaktır. Ayrıca, M yüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklinde tanımlı ortonormal çatı alanı ve A şekil operatörü Bölüm 2.2.1 deki gibi tanımlansın.

M yüzeyinin normal konneksiyonu düz ise, Önerme 2.39 dan dolayı, e_3 ve e_4 birim normal vektörlerinin paralel olacağı göz önüne alınacaktır.

3.1 Sabit Açı Yüzeyleri

Bu alt bölümde, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki k sabit vektörü ile ilişkili olan CAS yüzeyleri incelenecektir. Kabul edilsin ki, M yüzeyi $k = (1, 0, 0, 0)$ vektörü ile ilişkili olan yönlendirilmiş regüler bir sabit açı (CAS) yüzeyi, $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4$ dönüşümü ise izometrik daldırma olsun. Böylece, (3.1) ayrışımı,

$$k = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_3, \quad \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta \neq 0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. Şimdi (3.2) ayrışımı göz önüne alınarak, aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir:

Yardımcı Teorem 3.1. M yüzeyinin, ∇ Levi-Civita konneksiyonu,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (3.3a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = h_{22}^3 \tan \theta e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -h_{22}^3 \tan \theta e_1 \quad (3.3b)$$

ve yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ bazına göre A şekil operatörü de

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^4 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

şeklindedir. Ayrıca, ikinci temel form katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$e_1(h_{22}^3) = -\tan \theta (h_{22}^3)^2, \quad (3.5a)$$

$$e_1(h_{22}^4) = -\tan \theta h_{22}^3 h_{22}^4, \quad (3.5b)$$

$$h_{11}^3 = 0, \quad h_{11}^4 = 0, \quad h_{12}^3 = 0, \quad h_{12}^4 = 0. \quad (3.5c)$$

Burada, θ değeri sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat. θ sıfırdan farklı bir sabit ve X, M üzerinde teğet bir vektör olmak üzere (3.2) ifadesinde, $\tilde{\nabla}_X k = 0$ ve e_3 birim normal vektörünün paralel bir vektör alanı olduğu göz önüne alınırsa,

$$0 = \cos \theta (\nabla_X e_1 + h(e_1, X)) - \sin \theta S_3 X \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu denklemde $X = e_1$ alınırsa,

$$h_{11}^3 = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0,$$

$$h_{11}^4 = 0$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.6) denkleminde $X = e_2$ alınırsa,

$$\nabla_{e_2} e_1 = \tan \theta h_{22}^3 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\tan \theta h_{22}^3 e_1,$$

$$h_{12}^3 = 0, \quad h_{12}^4 = 0,$$

olur. Böylece, (3.3), (3.4) ve (3.5c) ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla, M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$h(e_1, e_1) = 0, \quad h(e_1, e_2) = 0, \quad h(e_2, e_2) = h_{22}^3 e_3 + h_{22}^4 e_4 \quad (3.8)$$

şeklindedir. Sonuç olarak, (3.3) ve (3.8) eşitlikleri, (2.14) Codazzi denklemlerinde göz önüne alınırsa, doğrudan hesaplama ile (3.5a) ve (3.5b) denklemleri elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 3.2. M üzerinde $\theta \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ olmak üzere, sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu,

$$e_1(m) - \tan \theta h_{22}^3 m = 0 \quad (3.9)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman M üzerindeki indirgenmiş metrik tansör,

$$g = ds^2 + m^2 dt^2 \quad (3.10)$$

olacak şekilde $p \in M$ noktasının bir N_p komşuluğunda

$$e_1 = \partial_s, \quad e_2 = \frac{1}{m} \partial_t \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanan (s, t) yerel koordinat sistemi vardır.

İspat. (3.3) eşitliklerinden, $[e_1, e_2] = -\tan \theta h_{22}^3 e_2$ elde edilir. Böylece M üzerinde, (3.9) eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu için $[e_1, m e_2] = 0$ dır. Dolayısıyla, Yardımcı Teorem 2.47 den $e_1 = \partial_s$ ve $e_2 = \frac{1}{m} \partial_t$ olacak şekilde (s, t) yerel koordinat sistemi vardır ve M üzerindeki indirgenmiş metrik tansör (3.10) eşitliği ile ifade edilir. ■

Şimdi sınıflandırma teoremi verilecektir:

Teorem 3.3. M yüzeyi, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında yönlendirilmiş regüler bir yüzey olsun. O zaman, M yüzeyinin bir CAS yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin aşağıda verilen yüzeylerden birine denk olmasıdır:

1.

$$x(s, t) = s(\cos \theta, \alpha_j(t)) + \gamma(t), \quad j = 2, 3, 4 \quad (3.12a)$$

şeklindedir. Burada $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu,

$$\gamma(t) = \left(0, \int_{t_0}^t \alpha'_j(\tau) \Psi(\tau) d\tau\right) \quad (3.12b)$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{E}^4$ -değerli bir fonksiyon, $\Psi \in C^\infty(M)$ ve $\alpha(t) = (0, \alpha_j(t))$ ise, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki $S^3(1)$ küresinde yatan ve $\gamma'(t)$ vektörüne dik olan yay parametresi ile verilmiş bir eğridir.

2.

$$x(s, t) = s(\cos \theta, \alpha_j(t_0) \sin \theta) + \alpha(t), \quad j = 2, 3, 4 \quad (3.13)$$

ile parametrize edilen düz bir yüzeydir. Burada $\alpha(t_0) = (0, \alpha_j(t_0))$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $S^3(1)$ küresinde yatan ve $(1, 0, 0, 0)$ vektörüne dik olan sabit bir vektördür.

İspat. Gerek koşulun ispatı için, kabul edilsin ki M yüzeyi, $k = (1, 0, 0, 0)$ sabit vektör ile ilişkili bir CAS yüzeyi ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4$ dönüşümü bir izometrik daldırma olsun. Ayrıca, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yerel ortonormal çatı alanı ve M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları Yardımcı Teorem 3.1 deki gibi ve (s, t) yerel koordinat sistemi ise, Yardımcı Teorem 3.2 deki gibi tanımlansın. Şimdi (3.11) eşitliklerinden ilki, sırasıyla, (3.5a), (3.5b) ve (3.9) denklemlerinde göz önüne alınırsa,

$$(h_{22}^3)_s = -\tan \theta (h_{22}^3)^2, \quad (3.14)$$

$$(h_{22}^4)_s + \tan \theta h_{22}^3 h_{22}^4 = 0, \quad (3.15)$$

$$m_s m \tan \theta h_{22}^3 = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Buradan (3.14) denklemi çözülürse,

$$h_{22}^3(s, t) = \frac{1}{s \tan \theta + \Psi_2(t)} \quad (3.17)$$

bulunur. (3.17) denklemi, sırasıyla, (3.15) ve (3.16) denklemlerinde göz önüne alınırsa, bazı Ψ_1, Ψ_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için bu denklemlerin genel çözümleri;

$$\begin{aligned} h_{22}^4(s, t) &= \frac{\Psi_3(t)}{(s \tan \theta + \Psi_2(t))}, \\ m(s, t) &= \Psi_1(t) (s \tan \theta + \Psi_2(t)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklinde elde edilir. t -parametresinin uygun bir seçimi ile (3.18) denkleminin çözümü;

$$m(s, t) = s + \Psi(t), \Psi \in C^\infty(M), \quad (3.19a)$$

veya

$$m(s, t) = 1 \quad (3.19b)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi, m fonksiyonu için elde edilen bu çözümler göz önünde bulundurularak, sınıflandırma sonuçları ayrı ayrı incelenecektir:

Durum 1. m fonksiyonu (3.19a) eşitliğini sağlasın. (3.11) ifadesi (3.3) denklemlerinde göz önüne alınırsa,

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0, \quad \nabla_{\partial_s} \partial_t = \nabla_{\partial_t} \partial_s = \frac{m_s}{m} \partial_t, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_t = -mm_s \partial_s + \frac{m_t}{m} \partial_t$$

olur. Bu denklemler ile (3.8) ile verilen ikinci temel form katsayıları, (2.10) Gauss formülünde, birlikte göz önüne alınırsa

$$x_{ss} = 0, \quad (3.20)$$

$$x_{st} = \frac{1}{s + \Psi(t)} x_t, \quad (3.21)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.2) ayrışımından $\langle x_s, k \rangle = \cos \theta$ ve $\langle x_t, k \rangle = 0$ bulunur. Böylece, x parametrizasyonunun

$$x(s, t) = (s \cos \theta, x_2(s, t), x_3(s, t), x_4(s, t)) + \gamma(t) \quad (3.22)$$

şeklinde olduğu söylenebilir. Burada $\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t))$ fonksiyonu, $\mathbb{E}^4$ -değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca, (3.22) ifadesinde $\langle x_s, x_s \rangle = 1$ eşitliği ve (3.20) olduğu göz önüne alınırsa, x parametrizasyonu

$$x(s, t) = s(\cos \theta, \alpha_j(t)) + \gamma(t) \quad (3.23)$$

şeklindedir. Burada $\alpha(t) = (0, \alpha_j(t))$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $S^3(1)$ küresinde yatan bir eğridir. Ayrıca (3.23) ifadesinden,

$$x_s = (\cos \theta, \alpha_j(t)), \quad (3.24)$$

$$x_t = (0, s\alpha'_j(t) + \gamma'_j(t)) \quad (3.25)$$

şeklindedir. Burada $\langle x_s, x_t \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $\alpha(t)$ eğrisinin, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $S^3(1)$ küresinde yatan bir eğri olduğu ve $\langle \gamma'(t), \alpha(t) \rangle = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, (3.21) ve (3.25) ifadeleri, (3.23) ifadesinde birlikte göz önünde bulundurulursa, (3.12b) elde edilir. Son olarak, m düzgün fonksiyonunun (3.19a) eşitliği ile tanımlı olduğu, $\langle x_t, x_t \rangle = m^2$ eşitliğinde göz

önünde bulundurulursa, böylece $\alpha(t)$ fonksiyonunun yay-parametresi ile verildiği, $\langle \alpha', \gamma' \rangle = \Psi(t)$ ve $\|\gamma'(t)\| = \Psi(t)$ olduğu sonucuna varılır.

Dolayısıyla, teoremin Durum (1) için ispatı tamamlanmış olur.

Durum 2. Kabul edilsin ki m fonksiyonu, (3.19b) eşitliğini sağlasın. Bu durumda, (3.10) ile verilen metrik tansör,

$$g = ds^2 + dt^2$$

ifadesine dönüşür. Buradan (3.3) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa, M yüzeyinin Levi-civita konneksiyonları

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0, \quad \nabla_{\partial_s} \partial_t = 0, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_t = 0. \quad (3.26)$$

eşitliklerini sağlar ve (3.8) ile verilen ikinci temel form katsayıları,

$$h(\partial_s, \partial_s) = 0, \quad h(\partial_s, \partial_t) = 0, \quad h(\partial_t, \partial_t) = e_4 \quad (3.27)$$

şeklindedir. Sonuç olarak, (3.26) ve (3.27) eşitlikleri, (2.10) Gauss ve (2.11) Weingarten formüllerinde göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} x_{ss} &= 0, & x_{st} &= 0, & x_{tt} &= e_4, \\ (e_3)_s &= 0, & (e_3)_t &= 0, \\ (e_4)_s &= 0, & (e_4)_t &= -x_t, \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, M CAS yüzeyinin Teorem 3.3 de (3.13) ile parametrize edilen yüzey olduğu doğrudan hesaplama ile kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla teoremin gerek koşulu ispatlanmış olur. Yeter koşulu da, tersine doğrudan hesaplama ile elde edilir. ■

3.2 Asli Kanonik Doğrultuya Sahip Yüzeyler

Bu alt bölümde, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında k , sabit vektörü ile ilişkili olan CPD yüzeyleri incelenecektir.

Kabul edilsin ki, M yüzeyi $k = (1, 0, 0, 0)$ vektörü ile ilişkili olan bir CPD yüzeyi olsun. Böylece, (3.1) ayrışımı,

$$k = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_3, \quad (3.28)$$

şeklinde yazılır. Burada θ , sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyondur. Şimdi (3.28) ayrışımı göz önünde bulundurularak, aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir:

Yardımcı Teorem 3.4. M yüzeyinin, ∇ Levi-Civita konneksiyonu,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (3.29a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \tan \theta h_{22}^3 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\tan \theta h_{22}^3 e_1, \quad (3.29b)$$

ve yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ bazına göre A şekil operatörleri

$$A_3 = \begin{pmatrix} -e_1(\theta) & 0 \\ 0 & h_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^4 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

şeklindedir. Yüzeyin ikinci temel form katsayıları,

$$e_1(h_{22}^3) = \tan \theta h_{22}^3 (h_{11}^3 - h_{22}^3), \quad (3.31a)$$

$$e_1(h_{22}^4) = -\tan \theta h_{22}^3 h_{22}^4, \quad (3.31b)$$

$$h_{11}^3 = -e_1(\theta), \quad h_{11}^4 = 0, \quad h_{12}^3 = 0, \quad h_{12}^4 = 0 \quad (3.31c)$$

denklemlerini sağlar. Ayrıca θ açısı fonksiyonu,

$$e_2(\theta) = 0 \quad (3.32)$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyondur.

İspat. θ sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyon olmak üzere, (3.28) ifadesinde, $\tilde{\nabla}_X k = 0$ ve e_3 birim normal vektörünün paralel bir vektör alanı olduğu göz önüne alınırsa,

$$0 = X(\cos \theta) e_1 + \cos \theta (\nabla_X e_1 + h(e_1, X)) + X(\sin \theta) e_3 - \sin \theta A_3 X \quad (3.33)$$

elde edilir. Burada X , M üzerinde teğet bir vektör alınırdır. Bu denklemde $X = e_1$ olarak alınırsa,

$$h_{11}^3 = -e_1(\theta), \quad (3.34)$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0,$$

$$h_{12}^3 = 0, \quad h_{11}^4 = 0$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.33) denkleminde $X = e_2$ alınırsa,

$$\nabla_{e_2} e_1 = \tan \theta h_{22}^3 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\tan \theta h_{22}^3 e_1,$$

$$h_{12}^4 = 0,$$

$$e_2(\theta) = 0$$

bulunur. Böylece, (3.29), (3.30) ve (3.31c) ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları;

$$h(e_1, e_1) = -e_1(\theta)e_3, \quad h(e_1, e_2) = 0, \quad h(e_2, e_2) = h_{22}^3 e_3 + h_{22}^4 e_4 \quad (3.35)$$

şeklindedir. Sonuç olarak, (3.29) ve (3.35) eşitlikleri, (2.14) Codazzi denkleminde göz önünde bulundurulursa, doğrudan hesaplama ile (3.31a) ve (3.31b) denklemleri elde edilir. ■

Açıklama 3.5. (3.34) ve (3.35) eşitliklerinden, $e_1(\theta) \equiv 0$ ise $h_{11}^3 = 0$ olduğu görülür. Ancak CPD hiperyüzeyleri için, Açıklama 1.5 den dolayı bu durum göz ardı edilecektir.

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki CPD yüzeylerinin sınıflandırılması verilmeden önce aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir:

Yardımcı Teorem 3.6. M CPD yüzeyi üzerinde sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu

$$e_1(m) - \tan \theta h_{22}^3 m = 0 \quad (3.36)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman, M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş metrik tansör

$$g = ds^2 + m^2 dt^2 \quad (3.37)$$

olacak şekilde $p \in M$ noktasının bir N_p komşuluğunda

$$e_1 = \partial_s, \quad e_2 = \frac{1}{m} \partial_t \quad (3.38)$$

şeklinde tanımlanan (s, t) yerel koordinat sistemi vardır.

İspat. Bu teoremin ispatı, Yardımcı Teorem 3.2 in ispatına benzer olarak elde edilir. ■

Dikkat edilirse, Tanım 1.4 den, θ açısının sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyon olduğu belirtilmişti. O halde, Açıklama 3.5 ve (3.32) eşitliği göz önünde bulundurulursa, $p \in M$ noktasında $e_1(\theta) \neq 0$ olmalıdır. (3.38) denklemleri göz önünde bulundurulursa, $\theta = \theta(s)$ olduğu sonucu ortaya çıkar.

Şimdi, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki CPD hiperyüzeyleri için elde edilecek olan sınıflandırma teoremi verilecektir:

Teorem 3.7. M yüzeyi, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında yönlendirilmiş regüler bir yüzey olsun. O zaman M yüzeyinin, sabit bir vektör ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip bir CPD yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin aşağıda verilen yüzeylerden birine denk olmasıdır:

1.

$$x(s, t) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(\tau) d\tau, \alpha_j(t) \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau \right) + \gamma(t), \quad j = 2, 3, 4 \quad (3.39a)$$

şeklindedir. Burada, $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu

$$\gamma(t) = \left(0, \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \alpha_j'(\tau) d\tau \right) \quad (3.39b)$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{E}^4$ -değerli bir fonksiyon, $\Psi \in C^\infty(M)$ ve $\alpha(t) = (0, \alpha_j(t))$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki $S^3(1)$ küresinde yatan ve $\gamma'(t)$ vektörüne dik olan yay parametresi ile verilmiş bir eğridir.

2.

$$x(s, t) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(\tau) d\tau, \alpha_j(t_0) \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau \right) + t_0 \alpha(t), \quad j = 2, 3, 4 \quad (3.40)$$

ile parametrize edilen düz bir yüzeydir. Burada, $t_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\alpha_0 = (0, \alpha_j(t_0))$ sabit vektörü ve $\alpha(t) = (0, \alpha_j(t))$ birim hızlı eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $S^3(1)$ küresinde yatmaktadır.

İspat. Gerek koşulun ispatı için, kabul edilsin ki M yüzeyi, $k = (1, 0, 0, 0)$ sabit vektör ile ilişkili bir CPD yüzey ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4$ dönüşümü bir izometrik daldırma olsun. Ayrıca, M yüzeyinin $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ yerel çatı alanı ve ikinci temel form katsayıları Yardımcı Teorem 3.4 deki gibi ve (s, t) yerel koordinat sistemi ise, Yardımcı Teorem 3.6 daki gibi tanımlansın. (3.38) eşitliklerinden ilki, sırasıyla, (3.31a), (3.31b) ve (3.36) eşitliklerinde göz önünde bulundurulursa,

$$(h_{22}^3)_s = -\tan \theta h_{22}^3 (\theta' + h_{22}^3), \quad (3.41)$$

$$(h_{22}^4)_s = -\tan \theta h_{22}^3 h_{22}^4, \quad (3.42)$$

$$m_s - m \tan \theta h_{22}^3 = 0, \quad (3.43)$$

elde edilir. Burada $\theta' = \frac{d\theta}{ds}$ dir. Buradan (3.41) ve (3.43) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$m_{ss} - \theta' \cot \theta m_s = 0$$

denklemini bulunur. Bazı Ψ_1, Ψ_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için son denklemin genel çözümü,

$$m(s, t) = \Psi_1(t) \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau + \Psi_2(t)$$

şeklindedir. t -parametresinin uygun bir seçimi ile bu çözüm;

$$m(s, t) = \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau + \Psi(t), \Psi \in C^\infty(M), \quad (3.44a)$$

veya

$$m(s, t) = m(t) \quad (3.44b)$$

olarak bulunur.

m fonksiyonu için elde edilen bu çözümleri göz önünde bulundurularak, sınıflandırma sonuçları ayrı ayrı incelenecektir:

Durum 1. m fonksiyonu (3.44a) eşitliğini sağlasın. Öncelikle (3.38), sırasıyla, (3.29) ve (3.35) eşitliklerinde göz önünde bulundurulursa,

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0, \quad \nabla_{\partial_s} \partial_t = \nabla_{\partial_t} \partial_s = \frac{m_s}{m} \partial_t, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_t = -mm_s \partial_s + \frac{m_t}{m} \partial_t, \quad (3.45)$$

$$h(\partial_s, \partial_s) = -\theta' e_3, \quad h(\partial_s, \partial_t) = h(\partial_t, \partial_s) = 0, \quad h(\partial_t, \partial_t) = \cot \theta \frac{m_s}{m} e_3 + \csc \theta \frac{m_t}{m} e_4, \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.45) ve (3.46) daki ilk iki eşitlikler, (2.10) Gauss formülünde birlikte göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$x_{ss} = -\theta' e_3, \quad (3.47)$$

$$x_{st} = \frac{\sin(\theta(s))}{\int^s \sin \theta(\tau) d\tau + \Psi(t)} x_t, \quad (3.48)$$

elde edilir. Diğer taraftan $e_1 = \partial_s$ ifadesi, (3.28) ayrışımında, göz önünde bulundurulursa,

$$k = \cos \theta x_s + \sin \theta e_3 \quad (3.49)$$

olur. Buradan $\langle x_s, k \rangle = \cos \theta$ ve $\langle x_t, k \rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece, x parametrizasyonu

$$x(s, t) = \left(\int^s \cos \theta(\tau) d\tau, x_2(s, t), x_3(s, t), x_4(s, t) \right) + \gamma(t) \quad (3.50)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t))$ fonksiyonu, $\mathbb{E}^4$ -değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca, (3.49) ifadesinde (3.47) denklemini ve $k = (1, 0, 0, 0)$ olduğu göz

önüne alınır,

$$(1, 0, 0, 0) = \cos \theta x_s - \frac{\sin \theta}{\theta'} x_{ss} \quad (3.51)$$

bulunur. (3.51) eşitliğinde, $\langle x_s, x_s \rangle = 1$ olduğu ve (3.50) formu göz önüne alınır, x parametrisasyonu

$$x(s, t) = \int_{s_0}^s \cos \theta(\tau) d\tau (1, 0, 0, 0) + \alpha(t) \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau + \gamma(t) \quad (3.52)$$

şeklinde elde edilir. Burada $j = 2, 3, 4$ olmak üzere $\alpha(t) = (0, \alpha_j(t))$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\mathbb{S}^3(1)$ küresinde yatan bir eğridir. (3.52) ifadesinden,

$$x_s = (\cos \theta, \alpha_j(t) \sin \theta), \quad (3.53)$$

$$x_t = (0, \alpha'_j(t) \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau + \gamma'_j(t)) \quad (3.54)$$

elde edilir. $\langle x_s, x_t \rangle = 0$ olduğundan, $\langle \gamma'(t), \alpha(t) \rangle = 0$ elde edilir. Diğer taraftan (3.53) de t -parametresine göre türev alınır, elde edilen ifade ve (3.54) ifadesi, (3.48) yerlerine yazılırsa, (3.39b) elde edilir. Son olarak, (3.39b), (3.44a) ve (3.54) ifadeleri, $\langle x_t, x_t \rangle = m^2$ eşitliğinde birlikte göz önüne alınırlarsa, $\alpha(t)$ fonksiyonunun yay-parametresi ile verildiği görülür.

Böylece, teoremin Durum (1) için ispatı tamamlanmış olur.

Durum 2. Kabul edilsin ki m fonksiyonu, (3.44b) eşitliğini sağlasın. Burada t -parametresinin uygun bir değişimiyle $m(s, t) = 1$ olarak alınabilir. Dolayısıyla (3.37) eşitliği,

$$g = ds^2 + dt^2$$

şeklinde olur. Buradan (3.29) da verilen M yüzeyinin Levi-civita konneksiyonu

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0, \quad \nabla_{\partial_s} \partial_t = 0, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_t = 0. \quad (3.55)$$

eşitliklerini sağlar ve (3.35) ile verilen ikinci temel form katsayıları,

$$h(\partial_s, \partial_s) = -\theta' e_3, \quad h(\partial_s, \partial_t) = 0, \quad h(\partial_t, \partial_t) = e_4, \quad (3.56)$$

şeklinde dir. Sonuç olarak (3.55) ve (3.56) eşitlikleri, sırasıyla, (2.10) ve (2.11) formüllerinde göz önüne alınır

$$x_{ss} = -\theta' e_3, \quad x_{st} = 0, \quad x_{tt} = e_4,$$

$$(e_3)_s = -\theta' x_s, \quad (e_3)_t = 0,$$

$$(e_4)_s = 0, \quad (e_4)_t = -x_t,$$

eşitlikleri bulunur. Buradan M , CPD yüzeyinin Teorem 3.7 de (3.40) ile verilen yüzey olduğu doğrudan hesaplama ile kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla teoremin gerek koşulu ispatlanmış olur. Yeter koşulu da, tersine doğrudan hesaplama ile elde edilir. ■

3.3 Sabit Eğim Yüzeyleri

Bu alt bölümde $\mathbb{E}^4$, Öklid uzayında sabit eğim (CSS) yüzeyleri incelenecektir.

M , $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir yüzey ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4$ bir izometrik daldırma olsun. x , M üzerinde aynı zamanda bir vektör alanı olarak düşünülebileceğinden,

$$x = x^T + x^\perp, \quad (3.57)$$

şeklinde ifade edilir. Burada x^T ve $x^\perp$ bileşenleri, sırasıyla, x vektör alanının teğet ve normal bileşenleridir. Ayrıca, M yüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ şeklinde tanımlı ortonormal çatı alanı ve A şekil operatörü Bölüm 2.2.1 deki gibi tanımlansın. Buradan (3.57) ile verilen ayrışım

$$x = \langle x, x^T \rangle x^T + \langle x, e_3 \rangle e_3 \quad (3.58)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer M yüzeyinin normal konneksiyonu düz ise ve Önerme 2.39 dan dolayı, e_3 ve e_4 birim normal vektörlerinin birer paralel vektör alanı olarak seçilir.

M , $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında yönlendirilmiş, regüler bir sabit eğim (CSS) yüzeyi, $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4$ dönüşümü ise, μ düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$\langle x, x \rangle = \mu^2, \quad (3.59)$$

koşulunu sağlayan bir izometrik daldırma ve ayrıca $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$, M yüzeyi üzerinde tanımlı ortonormal çatı alanı olsun. Böylece, (3.58) ayrışımı

$$x = \mu \cos \theta e_1 + \mu \sin \theta e_3, \quad (3.60)$$

şeklinde yazılır. Burada, Tanım 1.1 den, θ değeri sıfırdan farklı bir sabittir. Şimdi X , M yüzeyi üzerinde teğet bir vektör olmak üzere, $\langle x, x \rangle = \mu^2$ eşitliğinde $\widetilde{\nabla}_X x = X$ olduğu göz önüne alınırsa, $\langle X, x \rangle = \mu X(\mu)$ elde edilir. Bu ifadede, sırasıyla, $X = e_1$ ve $X = e_2$ alınır ve (3.60) ayrışımı da

göz önünde bulundurulursa,

$$e_1(\mu) = \cos \theta, \quad (3.61)$$

$$e_2(\mu) = 0 \quad (3.62)$$

olur. (3.60) eşitliğinde, elde edilen son iki denklem göz önüne alınırsa, aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 3.8. *M yüzeyinin ∇ , Levi-Civita konneksiyonu,*

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (3.63a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_1, \quad (3.63b)$$

ve yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ bazına göre A şekil operatörünün matris temsilleri,

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\sin \theta}{\mu}\right) & 0 \\ 0 & h_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^4 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

şeklindedir. Ayrıca, ikinci temel form katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$e_1(h_{22}^3) = \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} (h_{11}^3 - h_{22}^3), \quad (3.65a)$$

$$e_1(h_{22}^4) = -\frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} h_{22}^4, \quad (3.65b)$$

$$h_{11}^3 = -\left(\frac{\sin \theta}{\mu}\right), \quad h_{11}^4 = 0, \quad h_{12}^3 = 0, \quad h_{12}^4 = 0. \quad (3.65c)$$

Burada, $\theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$ olmak üzere bir sabittir.

İspat. $\theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$ bir sabit olmak üzere (3.60) ifadesinde, $\tilde{\nabla}_X x = X$ ve e_3 birim normal vektörünün paralel bir vektör alanı olduğu göz önüne alınırsa,

$$X = X(\mu) \cos \theta e_1 + \mu \cos \theta (\nabla_X e_1 + h(e_1, X)) + X(\mu) \sin \theta e_3 - \mu \sin \theta A_3 X \quad (3.66)$$

elde edilir. Burada X , M üzerinde bir teğet vektör alanıdır. Bu denklemde $X = e_1$ olarak alınır ve (3.61) denklemi göz önüne alınırsa,

$$h_{11}^3 = -\left(\frac{\sin \theta}{\mu}\right), \quad (3.67)$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0,$$

$$h_{12}^3 = 0, \quad h_{11}^4 = 0$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.66) denkleminde $X = e_2$ alınır ve (3.62) göz önüne alınırsa,

$$\nabla_{e_2} e_1 = \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_1, \quad h_{12}^4 = 0,$$

olur. Böylece, (3.63), (3.64) ve (3.65c) eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla, M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$h(e_1, e_1) = -\left(\frac{\sin \theta}{\mu}\right) e_3, \quad h(e_1, e_2) = 0, \quad h(e_2, e_2) = h_{22}^3 e_3 + h_{22}^4 e_4 \quad (3.68)$$

şeklindedir. Son olarak (3.63) ve (3.68) eşitlikleri, (2.14) Codazzi denkleminde göz önüne alınırsa, doğrudan hesaplama ile (3.65a) ve (3.65b) denklemleri elde edilir. ■

CSS yüzeylerinin sınıflandırılmasının yapılabilmesi için, aşağıdaki yardımcı teorem ve bir örnek verilecektir:

Yardımcı Teorem 3.9. M üzerinde $\theta \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ olmak üzere, sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu,

$$e_1(m) - \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} m = 0 \quad (3.69)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman M üzerindeki indirgenmiş metrik tansör,

$$g = \frac{1}{\cos^2 \theta} ds^2 + m^2 dt^2 \quad (3.70)$$

olacak şekilde $p \in M$ noktasının bir N_p komşuluğunda

$$e_1 = \cos \theta \partial_s, \quad e_2 = \frac{1}{m} \partial_t \quad (3.71)$$

şeklinde tanımlanan (s, t) yerel koordinat sistemi vardır.

İspat. (3.63) eşitliklerinden, $[e_1, e_2] = -\frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_2$ elde edilir. Böylece M üzerinde, (3.69) eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu için, $\left[\frac{1}{\cos \theta} e_1, m e_2\right] = 0$ dır. Böylece, Yardımcı Teorem 2.47 den, $e_1 = \cos \theta \partial_s$ ve $e_2 = \frac{1}{m} \partial_t$ olacak şekilde (s, t) yerel koordinat sistemi vardır. Dolayısıyla, M üzerindeki indirgenmiş metrik tansör (3.70) eşitliği ile ifade edilir. ■

Örnek 3.1. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında, M ve Π , sırasıyla, regüler bir yüzey ve bir hiperdüzlem olmak üzere, $c_2 = c_2(t)$ vektör değerli fonksiyonu, $0 < r \leq 1$ olmak üzere $S^2(r^2) = S^3(1) \cap \Pi$ üzerinde

yatan bir eğri ve c_0 sabit vektörü ise, bu hiperdüzlemin birim normal vektörü olsun. O zaman M yüzeyi, konum vektörü

$$x(s, t) = s \cos^2 \theta \partial_s + s \sin \theta e_3 \quad (3.72)$$

şeklinde ifade edilen ve

$$x(s, t) = s \cos u c_0 + s \sin u c_2(t) \quad (3.73)$$

ile parametrize edilen bir CSS yüzeyidir. e_3 paralel birim normal vektörü ise,

$$e_3 = \sin(\tilde{u})c_0 - \cos(\tilde{u})c_2(t) \quad (3.74)$$

şeklinde ifade edilir. Burada θ değeri, sıfırdan farklı bir sabit ve $\tilde{u} = \tilde{u}(s) = \theta + u(s)$ fonksiyonu, düzgün bir fonksiyondur.

Şimdi sınıflandırma teoremi verilecektir:

Teorem 3.10. $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4, \mathbb{E}^4$ Öklid uzayına daldırılmış regüler bir CSS yüzey olsun. Bu takdirde, M CSS yüzeyi (3.73) ile verilen yüzeye yerel olarak denktir.

İspat. Gerek koşulun ispatı için, kabul edilsin ki M yönlendirilmiş, regüler bir CSS yüzeyi ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4, \langle x, x \rangle = \mu^2$ koşulunu sağlayan bir izometrik daldırma olsun. M bir CSS yüzey olduğundan, x konum vektörü (3.60) ifadesi ile bellidir. Ayrıca $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ yerel ortonormal çatı alanı ve M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları Yardımcı Teorem 3.8 deki gibi ve (s, t) yerel koordinat sistemi ise, Yardımcı Teorem 3.9 deki gibi tanımlıdır. (3.71) eşitlikleri, sırasıyla, (3.61) ve (3.62) eşitliklerinde göz önüne alınırsa,

$$\mu_s = 1, \quad \mu_t = 0, \quad (3.75)$$

olur ve buradan $\mu = s + c$ sonucuna varılır. Burada, s -parametresinin uygun bir seçimi ile $c = 0$ olarak alınabilir. Elde edilen bu $\mu = s$ fonksiyonu, sırasıyla, (3.65a), (3.65b) ve (3.69) denklemlerinde göz önünde bulundurulursa,

$$s^2 \cos^2 \theta (h_{22}^3)_s + (\sin \theta + s h_{22}^3) (1 + s h_{22}^3 \sin \theta) = 0, \quad (3.76)$$

$$s \cos^2 \theta (h_{22}^4)_s + (1 + s h_{22}^3 \sin \theta) h_{22}^4 = 0, \quad (3.77)$$

$$s \cos^2 \theta m_s - m (1 + s h_{22}^3 \sin \theta) = 0, \quad (3.78)$$

bulunur. (3.76) denkleminde $h_{22}^3 = \frac{\sigma}{s}$ dönüşümü yapılırsa, bu denklem

$$s \cos^2 \theta \sigma_s = -\sin \theta (1 + 2\sigma \sin \theta + \sigma^2) \quad (3.79)$$

denklemine indirgenir. (3.79) diferensiyel denklemi çözülür ve θ değerinin sıfırdan farklı bir sabit olduğu düşünülürse,

$$\sigma(s, t) = \cos \theta \tan(\Phi(t) - u(s)) - \sin \theta$$

bulunur. Böylece h_{22}^3 fonksiyonu,

$$h_{22}^3(s, t) = \frac{1}{s} (\cos \theta \tan(\Phi(t) - u(s)) - \sin \theta) \quad (3.80)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$u(s) = \tan \theta \ln s \quad (3.81)$$

ve $\Phi = \Phi(t)$ fonksiyonu, sadece t -parametresine bağlı düzgün bir fonksiyondur. (3.80) ifadesi, (3.77) ve (3.78) denklemlerinde göz önünde bulundurulursa, bu denklemlerin çözümleri, sırasıyla,

$$h_{22}^4(s, t) = s \sec(\Phi(t) - u(s)) \varrho(t), \quad (3.82)$$

$$m(s, t) = s \cos(\Phi(t) - u(s)) \varrho(t), \quad (3.83)$$

şeklinde olur. Burada, $\varrho = \varrho(t)$ fonksiyonu düzgün bir fonksiyondur. Diğer taraftan, (3.71) de verilen e_1 in değeri (3.60) ayrışımında yerine yazılırsa,

$$x = s \cos^2 \theta x_s + s \sin \theta e_3 \quad (3.84)$$

elde edilir. Son eşitlik s -parametresine göre türevlenirse

$$x_s = \cos^2 \theta x_{ss} + s \cos^2 \theta x_{ss} + \sin \theta e_3 + s \sin \theta (e_3)_s$$

bulunur. $i = 1$ ve $\beta = 3$ için, (2.11) Weingarten formülünde $\mu = s$ ve (3.67) ifadeleri, birlikte göz önüne alınırsa $(e_3)_s = -\frac{\sin \theta}{s} \partial_s$ elde edilir. Bu ifade ve (3.84) son denklemde göz önüne alınırsa,

$$s^2 \cos^2 \theta x_{ss} - s \cos^2 \theta x_s + x = 0 \quad (3.85)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü olan x konum vektörü

$$x(s, t) = s \cos uc_1(t) + s \sin uc_2(t) \quad (3.86)$$

şeklindedir. Burada $c_1(t)$ ve $c_2(t)$; $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında vektör değerli fonksiyonlardır ve $u = u(s)$ fonksiyonu (3.81) deki gibidir.

İspatın tamamlanabilmesi için, burdan sonraki kısımda (3.86) ile verilen CSS yüzeyinin, (3.73) deki yüzey olduğu gösterilecektir. Bunun için, öncelikle $c_1(t)$ vektör değerli fonksiyonunun, sabit bir c_0 vektörü olduğunu göstermek gerekir.

Kabul edelim ki, $c'_1(t) \neq 0$ olsun. (3.86) ifadesinden,

$$x_s = \frac{1}{\cos \theta} [\cos(\tilde{u})c_1(t) + \sin(\tilde{u})c_2(t)], \quad (3.87)$$

$$x_t = s \cos uc'_1(t) + s \sin uc'_2(t), \quad (3.88)$$

elde edilir. Burada $\tilde{u}$ fonksiyonu, $\tilde{u} = \tilde{u}(s) = \theta + u(s)$ olarak tanımlı düzgün bir fonksiyondur. Diğer taraftan, (3.70) ile verilen metrik tansör ifadesinden

$$\langle x_s, x_s \rangle = \sec^2 \theta, \quad \langle x_s, x_t \rangle = 0, \quad \langle x_t, x_t \rangle = m^2, \quad (3.89)$$

şeklindedir. Yukarıdaki ilk eşitlikte, (3.87) ifadesi göz önüne alınırsa,

$$\cos^2 \tilde{u} \langle c_1(t), c_1(t) \rangle + \sin^2 \tilde{u} \langle c_2(t), c_2(t) \rangle + \sin 2\tilde{u} \langle c_1(t), c_2(t) \rangle = 1,$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\langle c_1(t), c_1(t) \rangle = \langle c_2(t), c_2(t) \rangle = 1, \quad \langle c_1(t), c_2(t) \rangle = 0 \quad (3.90)$$

sonucuna varılır, yani, c_1, c_2 vektörlerinin birbirlerine dik ve $\mathbb{S}^3(1)$ de yatan birer eğridir. Gerçekten, (3.90) eşitlikleri için, $\langle x, x \rangle = s^2$ koşulu sağlanır. Ayrıca (3.83) ve (3.88) ifadeleri, (3.89) de verilen son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$\langle c'_1(t), c'_1(t) \rangle = \varrho^2(t) \cos^2 \Phi(t), \quad (3.91a)$$

$$\langle c'_2(t), c'_2(t) \rangle = \varrho^2(t) \sin^2 \Phi(t), \quad (3.91b)$$

$$\langle c'_1(t), c'_2(t) \rangle = \varrho^2(t) \sin \Phi(t) \cos \Phi(t) \quad (3.91c)$$

elde edilir. Son olarak (3.89) de verilen ikinci eşitlikte, (3.87), (3.88) ve (3.90) ifadeleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$\langle c'_1(t), c_2(t) \rangle = \langle c_1(t), c'_2(t) \rangle = 0 \quad (3.92)$$

bulunur.

Kabul edilsin ki $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ vektörleri (3.90), (3.91) ve (3.92) koşullarını sağlasın ve

$$X_1 = c_1(t), \quad X_2 = c_2(t), \quad X_3 = \frac{c'_2(t)}{\varrho(t) \sin \Phi(t)}, \quad (3.93a)$$

$$\langle X_4, X_4 \rangle = 1 \quad \text{ve} \quad \langle X_4, X_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.93b)$$

olacak şekilde $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ sistemi, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir ortonormal çatı olsun. Dikkat edilirse $c'_1(t)$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında diğer bir vektör olduğundan, (3.93) de verilen bazdaki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak, yani, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$c'_1 = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4$$

şeklinde yazılabilir. Burada, (3.90), (3.92), (3.91b) ve (3.91c) eşitlikleri, sırasıyla, göz önünde bulundurulursa,

$$a = b = 0,$$

$$c'_1 = \cot \Phi(t) c'_2 + dX_4 \quad (3.94)$$

elde edilir. Ayrıca (3.91a) da, (3.91b), (3.93b) ve (3.94) birlikte göz önüne alınırsa, $d = 0$ bulunur. Buradan,

$$c'_2(t) = \tan \Phi(t) c'_1(t) \quad (3.95)$$

olur. Diğer taraftan, (3.88) de (3.95) yerine konulursa,

$$x_t = s \sec \Phi(t) \cos(\Phi(t) - u(s)) c'_1 \quad (3.96)$$

elde edilir.

Ayrıca $\beta = 4$ için, (2.11) Weingarten formülleri yazılırsa, doğrudan hesaplama ile

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_t} e_4 = -h_{22}^4 \partial_t, \quad (3.97a)$$

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_s} e_4 = 0, \quad (3.97b)$$

olur. (3.97a) da (3.82) ve (3.96) ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$(e_4)_t = -s^2 \varrho(t) \sec \Phi(t) c_1'(t) \quad (3.98)$$

bulunur. Sonuç olarak, (3.97) ve (3.98) denklemleri, $\partial_s \partial_t e_4 = \partial_t \partial_s e_4$ Schwarz eşitliğinde göz önüne alınırsa, $c_1'(t) = 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu ise, bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Yani, $c_1(t)$ vektörü, sabit c_0 vektörüne dönüşür. Ayrıca, $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ vektör değerli fonksiyonlarının (3.90), (3.91) ve (3.92) eşitliklerini sağladığı ve $\mathbb{S}^3(1)$ de yatan birer eğri olduğu elde edilmişti. Burada $c_1(t) = c_0$ sabit bir vektör olduğu, (3.90) ve (3.92) eşitliklerinde yeniden göz önünde bulundurulursa, sırasıyla,

$$\langle c_0, c_0 \rangle = 1, \quad (3.99a)$$

$$\langle c_2, c_2 \rangle = 1, \quad (3.99b)$$

$$\langle c_0, c_2 \rangle = 1, \quad (3.99c)$$

$$\langle c_2', c_0 \rangle = 1, \quad (3.99d)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.99c) ifadesinde, c_0 vektörünün sabit bir vektör olduğu göz önüne alınırsa, $c_2 = c_2(t)$ nin aynı zamanda, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki bir Π , hiperdüzleminde kaldığı söylenebilir. Böylece $c_2 = c_2(t)$, $0 < r \leq 1$ olacak şekilde $S^2(r^2) = S^3(1) \cap \Pi$ üzerinde yatan bir eğridir. Ayrıca, (3.99a) ve (3.99c) ifadelerinden de c_0 sabit vektörünün Π hiperdüzleminin birim normal vektörü olduğu sonucuna varılır. Böylece, (3.86) deki yüzey, gerçekten (3.73) ile verilen CSS yüzeyine dönüşür. Ayrıca, (3.81) ve (3.73) ifadeleri, (3.84) ayrışımında birlikte göz önüne alınırsa, buradan e_3 paralel birim normal vektör alanı (3.74) şeklinde elde edilir. Sonuç olarak, $e_1 = \cos \theta x_s$ olduğu (3.84) ayrışımında göz önünde bulundurulursa, (3.72) ifadesi doğrudan bulunur. Böylece, gerek koşul gösterilmiş olur. İspatın yeter koşulu ise, tersine doğrudan hesaplama ile gösterilebilir. ■

3.4 Genelleştirilmiş Sabit Oran Yüzeyleri

Bu alt bölümde, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyleri incelenecektir.

M , $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında yönlendirilmiş, regüler bir genelleştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeyi ve x ise, bu yüzeyin $\langle x, x \rangle = \mu^2$ koşulunu sağlayan konum vektörü olsun. Ayrıca M yüzeyi üzerindeki $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanı ve A şekil operatörü Bölüm 2.2.1 deki gibi tanımlansın. Tanım 1.6 da ifade edilen M , GCR yüzeyinin x konum vektörü ile e_3 birim normal vektör alanı arasındaki θ açısının, sabit olmadığını biliyoruz. Böylece, μ ve θ fonksiyonları sıfırdan farklı düzgün birer fonksiyonlar olmak üzere, M yüzeyinin x konum vektörü

$$x = \mu \cos \theta e_1 + \mu \sin \theta e_3, \quad (3.100)$$

şeklinde ifade edilir. X, M yüzeyi üzerinde teğet bir vektör olmak üzere, $\langle x, x \rangle = \mu^2$ eşitliğinde $\widetilde{\nabla}_X x = X$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$e_1(\mu) = \cos \theta, \quad (3.101)$$

$$e_2(\mu) = 0 \quad (3.102)$$

elde edilir. Bu denklemler (3.100) eşitliğinde göz önüne alınırsa, aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 3.11. M yüzeyinin, ∇ Levi-Civita konneksiyonu,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (3.103a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_1, \quad (3.103b)$$

ve yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ bazına göre A şekil operatörleri

$$A_3 = \begin{pmatrix} -(e_1(\theta) + \frac{\sin \theta}{\mu}) & 0 \\ 0 & h_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^4 \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

şeklindedir. Yüzeyin ikinci temel form katsayıları,

$$e_1(h_{22}^3) = \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} (h_{11}^3 - h_{22}^3), \quad (3.105a)$$

$$e_1(h_{22}^4) = -\frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} h_{22}^4, \quad (3.105b)$$

$$h_{11}^3 = -(e_1(\theta) + \frac{\sin \theta}{\mu}), \quad h_{11}^4 = 0, \quad h_{12}^3 = 0, \quad h_{12}^4 = 0 \quad (3.105c)$$

denklemlerini sağlar. Ayrıca θ açısı fonksiyonu,

$$e_2(\theta) = 0 \quad (3.106)$$

eşitliğini sağlayan düzgün bir fonksiyondur.

İspat. (3.100) ifadesinde, $\tilde{\nabla}_X x = X$ olduğu ve e_3 birim normal vektör alanının paralel olduğu göz önüne alınırsa,

$$X = X(\mu \cos \theta)e_1 + \mu(\cos \theta \nabla_X e_1 + \cos \theta h(e_1, X)) - \mu \sin \theta S_3 X + X(\mu \sin \theta)e_3 \quad (3.107)$$

elde edilir. Bu denklemde $X = e_1$ olarak alınır ve (3.101) denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= -\left(e_1(\theta) + \frac{\sin \theta}{\mu}\right), \\ \nabla_{e_1} e_1 &= 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \\ h_{12}^3 &= 0, \quad h_{11}^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.107) denklemine $X = e_2$ alınır ve (3.102) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} e_2(\theta) &= 0, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} e_1, \\ h_{12}^4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.109a)$$

olur. Dolayısıyla (3.103), (3.104) ve (3.105c) eşitlikleri elde edilir. Buradan M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$h(e_1, e_1) = -\left(e_1(\theta) + \frac{\sin \theta}{\mu}\right)e_3, \quad h(e_1, e_2) = 0, \quad h(e_2, e_2) = h_{22}^3 e_3 + h_{22}^4 e_4 \quad (3.110)$$

şeklinde bulunur. Son olarak, (3.103) ve (3.110) eşitlikleri, (2.14) Codazzi denklemlerinde ile birlikte düşünülürse, (3.105a) ve (3.105b) denklemleri elde edilir. ■

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki GCR yüzeylerini sınıflandırılmasının yapılabilmesi için, aşağıdaki yardımcı teorem ve bir örnek verilecektir:

Yardımcı Teorem 3.12. M üzerinde sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu,

$$e_1(m) - \frac{1 + \mu h_{22}^3 \sin \theta}{\mu \cos \theta} m = 0. \quad (3.111)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman, M üzerindeki indirgenmiş metrik tensör,

$$g = \frac{1}{\cos^2 \theta} ds^2 + m^2 dt^2 \quad (3.112)$$

olacak şekilde, $p \in M$ noktasının bir N_p komşuluğunda

$$e_1 = \cos \theta \partial_s, \quad e_2 = \frac{1}{m} \partial_t \quad (3.113)$$

şeklinde tanımlanan (s, t) yerel koordinat sistemi vardır.

İspat. Bu yardımcı teoremin ispatı, Yardımcı Teorem 3.9 nin ispatı için izlenen benzer yöntemle, kolayca gösterilebilir. ■

Dikkat edilirse Tanım 1.6 dan, θ 'nın sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyon olduğu belirtilmişti. O halde, (3.109a) eşitliği göz önünde bulundurulursa, $p \in M$ noktasında $e_1(\theta) \neq 0$ olacaktır. Buradan, $\theta = \theta(s)$ olduğu sonucu ortaya çıkar.

Örnek 3.2. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında, M ve Π , sırasıyla, regüler bir yüzey ve bir hiperdüzlem olmak üzere, $c_2 = c_2(t)$; $0 < r \leq 1$ olacak şekilde $S^2(r^2) = S^3(1) \cap \Pi$ üzerinde yatan bir eğri ve bu hiperdüzlemin birim normal vektörü ise, c_0 olsun. O zaman M yüzeyi, konum vektörü

$$x(s, t) = s \cos^2 \theta \partial_s + s \sin \theta e_3. \quad (3.114)$$

şeklinde ifade edilen ve

$$x(s, t) = s \cos u \varphi_0 + s \sin u \psi(t) \quad (3.115)$$

ile parametrize edilen bir GCR yüzeyidir.

Burada, $\theta = \theta(s)$ düzgün fonksiyonu,

$$\tan \theta = su', \quad (3.116)$$

eşitliğini sağlar.

Şimdi GCR yüzeyleri için sınıflandırma teoremi verilecektir:

Teorem 3.13. $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4, \mathbb{E}^4$ Öklid uzayına daldırılmış (3.100) ile verilen regüler bir GCR yüzeyi olsun. O zaman M , GCR yüzeyi (3.115) ile verilen yüzeye denktir.

İspat. Gerek koşulun ispatı için, M yönlendirilmiş bir GCR yüzeyi ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}^4$, $\langle x, x \rangle = \mu^2$ koşulunu sağlayan bir izometrik daldırma olsun. M bir GCR yüzeyi olduğundan x , (3.100) ifadesi ile bellidir. Burada, $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ yerel ortonormal çatı alanı ve M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları Yardımcı Teorem 3.11 deki gibi tanımlansın. (s, t) yerel koordinat sistemi de Yardımcı Teorem 3.9 deki gibi verilsin. Burada,

$$e_1 = \cos \theta x_s, \quad e_2 = \frac{1}{m} x_t \quad (3.117)$$

şeklindedir. Burada, $\theta = \theta(s)$. Ayrıca (3.117) eşitlikleri, sırasıyla, (3.101) ve (3.102) eşitliklerinde göz önünde bulundurulursa,

$$\mu_s = 1, \quad \mu_t = 0, \quad (3.118)$$

şeklindedir ve (3.118) eşitliklerinden $\mu = s + c$ elde edilir. Burada, s -parametresinin uygun bir seçimi ile $c = 0$ olarak alınabilir. Elde edilen $\mu = s$ fonksiyonu, sırasıyla, (3.105a), (3.105b) ve (3.111) denklemlerinde göz önünde bulundurulursa,

$$s^2 \cos^2 \theta (h_{22}^3)_s + (s \cos \theta \theta' + \sin \theta + s h_{22}^3) (1 + s h_{22}^3 \sin \theta) = 0, \quad (3.119)$$

$$s \cos^2 \theta (h_{22}^4)_s + (1 + s h_{22}^3 \sin \theta) h_{22}^4 = 0, \quad (3.120)$$

$$s \cos^2 \theta m_s - m (1 + s h_{22}^3 \sin \theta) = 0, \quad (3.121)$$

elde edilir. (3.119) denkleminde,

$$h_{22}^3(s, t) = \frac{\sigma \cos \theta - \sin \theta}{s}, \quad (3.122)$$

dönüşümü yapılırsa, denklem

$$s \cos \theta \sigma_s = -\sin \theta (1 + \sigma^2) \quad (3.123)$$

denklemine indirgenir. (3.123) denkleminin çözümü ise,

$$\sigma(s, t) = \tan(u(s) - \Phi(t))$$

şeklindedir. Burada $u = u(s)$ fonksiyonu, (3.116) denklemini sağlayan ve $\Phi = \Phi(t)$ ise, M yüzeyi üzerinde düzgün bir fonksiyondur. Buradan h_{22}^3 fonksiyonu,

$$h_{22}^3(s, t) = \frac{1}{s} (\cos \theta \tan(\Phi(t) - u(s)) - \sin \theta) \quad (3.124)$$

şeklindedir. (3.124) eşitliği, sırasıyla, (3.120) ve (3.121) denklemlerinde göz önünde bulundurulursa,

$$h_{22}^4(s, t) = s \sec(\Phi(t) - u(s)) \varrho(t), \quad (3.125)$$

$$m(s, t) = s \cos(\Phi(t) - u(s)) \varrho(t), \quad (3.126)$$

olarak elde edilir. Burada, $\varrho = \varrho(t)$ sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyondur. Diğer taraftan $\mu = s$, (3.113) ve (3.124) ifadeleri, (3.103) denklemlerinde göz önüne alınırsa, M yüzeyinin Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla,

$$\nabla_{\partial s} \partial s = \tan \theta \theta' \partial s, \quad \nabla_{\partial s} \partial t = \frac{m_s}{m} \partial t, \quad \nabla_{\partial t} \partial t = (-mm_s \cos^2 \theta) \partial s + \frac{m_t}{m} \partial t \quad (3.127)$$

şeklinde bulunur. (3.110), (3.117) ve (3.127) da verilen ilk eşitlikler, (2.10) Gauss formülünde birlikte göz önüne alınırsa,

$$x_{ss} = \tan \theta \theta' x_s - \left(\sec \theta \theta' + \sec \theta \frac{\tan \theta}{s} \right) e_3 \quad (3.128)$$

elde edilir. Son denklem, (3.100) ayrışımı göz önünde bulundurularak yeniden düzenlenirse,

$$s^2 \cos^2 \theta \sin \theta x_{ss} - (s^2 \cos \theta \theta' + s \cos^2 \theta \sin \theta) x_s + (\sin \theta + s \cos \theta \theta') x = 0 \quad (3.129)$$

şeklinde bulunur. Burada $x = \Psi(s, t) \cdot s$ dönüşümü yapılırsa, son denklem

$$s^2 \cos^2 \theta \sin \theta \Psi_{ss} + (s \cos^2 \theta \sin \theta - s^2 \cos \theta \theta') \Psi_s + \sin^3 \theta \Psi = 0 \quad (3.130)$$

olur. Bu ifade de (3.116) denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$\Psi_{uu} + \Psi = 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü yapılır ve $x = \Psi(s, t) \cdot s$ olduğu da göz önüne alınırsa, x konum vektörü

$$x(s, t) = s(\cos u \varphi(t) + \sin u \psi(t)), \quad (3.131)$$

şeklinde bulunur. Burada, $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonları $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında birer vektör değerli fonksiyonlardır. u fonksiyonu ise, (3.116) ile bellidir. Şimdi, (3.131) ile elde edilen yüzeyin, (3.115) da verilen bir GCR yüzeyi olduğu gösterilecektir. Bunun için, öncelikle $\varphi(t)$ 'nin sabit bir φ_0 vektörü olduğu gösterilecektir.

$\varphi' \neq 0$ olduğu varsayalım. Bu durumda (3.131) ifadesi, (3.112) de verilen metrik tansöründe göz önüne alınırsa,

$$\cos^2(\tilde{\theta}) \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle + \sin^2(\tilde{\theta}) \langle \psi(t), \psi(t) \rangle + \sin 2(\tilde{\theta}) \langle \varphi(t), \psi(t) \rangle = 1, \quad (3.132)$$

olduğu görülür. Burada $\tilde{\theta}$ fonksiyonu, $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(s) = \theta(s) + u(s)$ şeklindedir. (3.132) eşitliğinden,

$$\langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle = \langle \psi(t), \psi(t) \rangle = 1, \quad \langle \varphi(t), \psi(t) \rangle = 0 \quad (3.133)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\langle \varphi'(t), \varphi'(t) \rangle = \varrho^2(t) \cos^2 \Phi(t), \quad (3.134a)$$

$$\langle \psi'(t), \psi'(t) \rangle = \varrho^2(t) \sin^2 \Phi(t), \quad (3.134b)$$

$$\langle \varphi'(t), \psi'(t) \rangle = \varrho^2(t) \sin \Phi(t) \cos \Phi(t), \quad (3.134c)$$

$$\langle \varphi'(t), \psi(t) \rangle = \langle \varphi(t), \psi'(t) \rangle = 0, \quad (3.134d)$$

eşitlikleri vardır. Böylece (3.133) ve (3.134d) ifadelerinden, $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ vektör değerli fonksiyonlarının, $\mathbb{S}^3(1)$ de yatan birer eğri olduğu sonucuna varılır.

$\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ vektörlerinin, (3.133) ve (3.134) eşitliklerini sağladığı varsayalım. Bu durumda, $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ sistemi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında,

$$X_1 = \varphi(t), \quad X_2 = \psi(t), \quad X_3 = \frac{\psi'(t)}{\varrho(t) \sin \Phi(t)}, \quad (3.135a)$$

$$\langle X_4, X_4 \rangle = 1 \quad \text{and} \quad \langle X_4, X_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.135b)$$

olacak şekilde bir ortonormal çatıdır. Ayrıca $\varphi'(t)$ vektörü, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında diğer bir vektör olduğundan, (3.135) ile belirtilen bazdaki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\varphi' = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4$$

şeklinde yazılır. Burada, (3.133), (3.134c) ve (3.134d) eşitlikleri, sırasıyla, göz önüne alınırsa

$$a = b = 0,$$

$$\varphi' = \cot \Phi(t) \psi' + dX_4 \quad (3.136)$$

elde edilir. (3.134a) eşitliğinde, (3.134b) ve (3.136) eşitlikleri birlikte göz önünde bulundurulursa,

$$\varphi'(t) = \cot \Phi(t) \psi'(t). \quad (3.137)$$

olur. Diğer taraftan (3.131) ifadesinden,

$$x_t = s \cos u \varphi' + s \sin u \psi'$$

bulunur. Bu denklemde (3.137) ifadesi yerine konulursa,

$$x_t = (s \cos u + s \sin u \tan \Phi(t)) \varphi' \quad (3.138)$$

elde edilir.

Şimdi, e_4 birim normal vektörü için, (2.11) Weingarten formülleri yazılırsa,

$$\tilde{\nabla}_{\partial_t} e_4 = -h_{22}^4 \partial_t, \quad (3.139)$$

$$\tilde{\nabla}_{\partial_s} e_4 = 0 \quad (3.140)$$

şeklinde olur. (3.139) ifadesinde, (3.125) ve (3.138) ifadeleri yerlerine yazılırsa, Teorem 3.10 da CSS yüzeyin sınıflandırılması problemi için izlenen benzer bir yolla $\varphi'(t) = 0$ olarak elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $\varphi(t)$ vektörü, φ_0 sabit birim vektörüne dönüşür. Dolayısıyla (3.131) ile verilen yüzey, (3.115) ile verilen GCR yüzeyine dönüşür. Ayrıca (3.115) ve (3.117) ifadeleri, (3.100) ayrışımında birlikte göz önünde bulundurulursa, e_3 birim normal vektör alanı

$$e_3 = \sin(\tilde{\theta}) \varphi_0 - \cos(\tilde{\theta}) \psi(t) \quad (3.141)$$

olarak bulunur. Burada, $\tilde{\theta}(s) = \theta(s) + u(s)$ şeklindedir. Yine Teorem 3.10 nun ispatında izlenen benzer adımlarla ψ ve φ_0 vektörleri, Örnek 3.2 deki gibi elde edilebilir. Sonuç olarak, (3.117) ve (3.141) ifadeleri (3.100) de göz önünde bulundurulursa, (3.114) ifadesi doğrudan elde edilir. Böylece, ispatın gerek koşulu gösterilmiş olur. İspatın yeter kısmı, tersine doğrudan hesaplama ile gösterilebilir. ■

4 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayındaki Yüzeyler

Bu bölümde ilk olarak $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki dejenere olmamış bir CPD hiperyüzeyinin bazı geometrik özellikleri incelenecektir. Daha sonra, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayındaki CPD ve CAS yüzeyleri için bazı yeni sınıflandırmalar verilecektir. Bu bölümde CPD yüzeyleri için elde edilecek olan sonuçlar [37] makalesinde yayınlanmıştır.

$\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş, dejenere olmamış bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve hiperyüzeyin bu uzaydaki $k \neq 0$ sabit bir vektörü ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip olduğu varsayılınsın. Bu durumda,

$$k = k^T + k^\perp \quad (4.1)$$

olmak üzere, $S k^T = k_1 k^T$ denklemi sağlanır. Burada k^T ve $k^\perp$ bileşenleri, sırasıyla, k sabit vektör alanının teğet ve normal bileşenleridir. N , M hiperyüzeyinin birim normal vektörü olmak üzere, (4.1) denklemi

$$k = k^T + \langle N, N \rangle \langle k, N \rangle N \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bölümde, M hiperyüzeyi üzerindeki $\{e_1, \dots, e_n; N\}$ ortonormal çatı alanı ve S şekil operatörü Bölüm 2.2.2 deki gibi tanımlansın. İlk olarak, M hiperyüzeyinin aşağıdaki geometrik özelliği incelenecektir:

Önerme 4.1. M , $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş, dejenere olmamış bir hiperyüzey ve k ise, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında $k \neq 0$ ve $\langle k^T, k^T \rangle \neq 0$ koşullarını sağlayan sabit bir vektör olsun. $e_1 = \frac{k^T}{\langle k^T, k^T \rangle^{\frac{1}{2}}}$ olmak üzere, M hiperyüzeyinin k vektörü ile ilişkili olan bir CPD hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart e_1 vektör alanının tüm integral eğrilerinin, M hiperyüzeyinin jeodezikleri olmasıdır.

İspat. e_1 vektör alanının time-like ve space-like olma durumları ayrı ayrı incelenecektir:

Durum I. $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$ olsun. Dolayısıyla N , space-like bir vektördür. Bu durumda, (4.2) eşitliği,

$$k = -\langle k, e_1 \rangle e_1 + \langle k, N \rangle N$$

şeklinde yazılır. Son eşitlikte, $\widetilde{\nabla}_{e_1} k = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$0 = -\langle k, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 \rangle e_1 - \langle k, e_1 \rangle \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 - \langle k, S e_1 \rangle N - \langle k, N \rangle S e_1 \quad (4.3)$$

elde edilir. Şimdi, M hiperyüzeyinde $\langle X, e_1 \rangle = 0$ koşulunu sağlayan bir X teğet vektörü verilsin. Buradan (4.3) eşitliğinin her iki tarafı X ile çarpılırsa,

$$0 = -\langle k, e_1 \rangle \langle \nabla_{e_1} e_1, X \rangle - \langle k, N \rangle \langle S e_1, X \rangle \quad (4.4)$$

bulunur. Böylece son eşitlikten, $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ olması, $S e_1 = k_1 e_1$ anlamına gelir.

Durum II. $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ olsun. Bu durumda (4.2) eşitliği,

$$k = \langle k, e_1 \rangle e_1 + \varepsilon \langle k, N \rangle N \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır. Buradaki ε değeri, M CPD hiperyüzeyinin time-like veya space-like olması durumlarına göre, sırasıyla, 1 veya -1 değerini alır. Durum I in ispatına benzer olarak doğrudan gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

$\mathbb{E}_1^{n+1}$, Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir M , CPD hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve bu hiperyüzeyin şekil operatörünün köşegenleştirilebilir olduğu varsayılınsın. M CPD hiperyüzeyinin birim normal vektörü N , asli doğrultuları $e_1, e_2, \dots, e_n$ ve bunlara karşılık gelen asli eğrilikler, sırasıyla, $k_1, k_2, \dots, k_n$ olsun. Ayrıca, $\langle k^T, k^T \rangle \neq 0$ ve $e_1 = \frac{k^T}{\langle k^T, k^T \rangle^{\frac{1}{2}}}$ olsun. M hiperyüzeyinin space-like ve time-like olma durumları ayrı ayrı incelenerek, bu hiperyüzeyin CPD olması için gerek ve yeter koşul elde edilecek ve daha sonrasında CPD hiperyüzeyleri için bazı geometrik özellikler incelenerek önemli karakterizasyonlar elde edilecektir:

Açıklama 4.2. [19, 48] makalelerinde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3–uzayındaki $k = (0, 0, 1)$ time-like sabit vektörü ile ilişkili CPD yüzeylerinin sınıflandırması yapılmıştır. Bu kısımda, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3–uzayındaki CPD yüzeylerinin sınıflandırılması tamamlanacaktır.

Açıklama 4.2 de bahsedildiği gibi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3–uzayındaki k sabit vektörünün time-like olma durumu incelenmiş olduğundan burada bu durum göz ardı edilecektir. Burada daha

genel olarak, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki bir k sabit vektörünün space-like ve light-like olma durumları için ayrı ayrı inceleme yapılacaktır:

Durum A. k sabit vektörü space-like olsun. Bu durumda, $k = (1, 0, \dots, 0)$ olarak alınacaktır. Şimdi, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki M , CPD hiperyüzeylerinin space-like veya time-like olma durumları için ayrı ayrı inceleme yapılacaktır:

Durum A1. M bir space-like CPD hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, $\langle N, N \rangle = -1$ olur ve böylece e_1 teğet vektörü space-like bir vektördür. θ düzgün bir açı fonksiyonu olmak üzere, Tanım 2.35 göz önüne alınarak (4.2) eşitliği,

$$k = \cosh \theta e_1 + \sinh \theta N \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $\tilde{\nabla}_{e_i} k = 0$ olduğu son eşitlikte göz önünde bulundurulursa,

$$0 = e_i(\cosh \theta) e_1 + \cosh \theta \tilde{\nabla}_{e_i} e_1 + e_i(\sinh \theta) N - \sinh \theta S e_i$$

elde edilir. Buradan Önerme 4.1 göz önüne alınırsa,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad (4.7a)$$

$$e_1(\theta) = k_1, \quad (4.7b)$$

$$e_j(\theta) = 0, \quad (4.7c)$$

$$\nabla_{e_j} e_1 = \tanh \theta k_j e_j, \quad j = 2, \dots, n \quad (4.7d)$$

eşitlikleri bulunur.

Durum A2. M time-like bir CPD hiperyüzeyi olsun. Böylece, $\langle N, N \rangle = 1$ olur. Fakat bu durumda, e_1 vektörü space-like veya time-like olabileceğinden iki farklı durum söz konusudur:

Durum A2.1. e_1 teğet vektörü space-like olsun. Bu taktirde, Tanım 2.37 göz önüne alınarak (4.2) eşitliği, düzgün bir θ fonksiyonu için,

$$k = \sin \theta e_1 + \cos \theta N \quad (4.8)$$

şeklinde yazılır. Son eşitlikte $i = 1, \dots, n$ olmak üzere, $\tilde{\nabla}_{e_i} k = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$0 = e_i(\sin \theta) e_1 + \sin \theta \tilde{\nabla}_{e_i} e_1 + e_i(\cos \theta) N - \cos \theta S e_i$$

elde edilir. Buradan, yine Önerme 4.1 göz önüne alınırsa,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad (4.9a)$$

$$e_1(\theta) = k_1, \quad (4.9b)$$

$$e_j(\theta) = 0, \quad (4.9c)$$

$$\nabla_{e_j} e_1 = \cot \theta k_j e_j, \quad j = 2, \dots, n \quad (4.9d)$$

eşitlikleri elde edilir.

Durum A2.2. e_1 teğet vektörü time-like olsun. Bu taktirde, Tanım 2.37 göz önüne alınarak (4.2) eşitliği, düzgün bir θ fonksiyonu için,

$$k = \sinh \theta e_1 + \cosh \theta N \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. Son eşitlikte yine $i = 1, \dots, n$ olmak üzere, $\tilde{\nabla}_{e_i} k = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$0 = e_i(\sinh \theta) e_1 + \sinh \theta \tilde{\nabla}_{e_i} e_1 + e_i(\cosh \theta) N - \cosh \theta S e_i$$

elde edilir. Böylece,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad (4.11a)$$

$$e_1(\theta) = -k_1, \quad (4.11b)$$

$$e_j(\theta) = 0, \quad (4.11c)$$

$$\nabla_{e_j} e_1 = \coth \theta k_j e_j, \quad j = 2, \dots, n \quad (4.11d)$$

eşitlikleri yazılır.

Durum B. k sabit vektörü light-like olsun. Bu durumda, $k = (1, 0, \dots, 0, 1)$ olarak alınacaktır. Böylece, ϕ sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyon olmak üzere, (4.1) eşitliği

$$(1, 0, \dots, 0, 1) = \varepsilon \tilde{\phi}(e_1 - N) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle N, N \rangle = \varepsilon$. Eğer $\phi = \varepsilon \tilde{\phi}$ olarak alınırsa, (4.12) eşitliği

$$(1, 0, \dots, 0, 1) = \phi(e_1 - N) \quad (4.13)$$

şeklinde olur. Buradan, $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $\tilde{\nabla}_{e_i} k = 0$ olduğu, son eşitlikte göz önünde bulundurulursa,

$$0 = \tilde{\nabla}_{e_i}(\phi)(e_1 - N) + \phi(\tilde{\nabla}_{e_i} e_1 + S e_i)$$

elde edilir. Buradan,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (4.14a)$$

$$e_1(\phi) = -\phi k_1, \quad (4.14b)$$

$$e_j(\phi) = 0, \quad (4.14c)$$

$$\nabla_{e_j} e_1 = -k_j e_j, \quad j = 2, \dots, n \quad (4.14d)$$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{e_1(\phi)}{\phi} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix} \quad (4.14e)$$

şeklindedir.

Sonuç olarak, yukarıda elde edilen tüm hesaplamalar göz önünde bulundurularak aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 4.3. M , $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında dejenere olmamış bir hiperyüzey olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin bu uzaydaki sabit bir k vektörü ile ilişkili bir CPD hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşul Y , M hiperyüzeyinde teğet bir vektör olmak üzere $\langle Y, k^T \rangle = 0$ koşulunu sağlayan tüm Y vektörleri için, $Y(\theta) = 0$ olmasıdır. Burada θ ; (4.6) (sırasıyla, (4.8) ve (4.10)) eşitliğinde tanımlanan açt fonksiyonudur.

İspat. Kabul edilsin ki M , $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında dejenere olmamış bir CPD hiperyüzey ve k ise, bu uzaydaki sabit bir vektör olsun. Bu durumda k sabit vektörü, sırasıyla, (4.6), (4.8) veya (4.10) ile belirlidir. Gerek koşulun ispatı doğrudan, sırasıyla, (4.7c), (4.9c) veya (4.11c) eşitliklerinden görülmektedir. Tersisi de doğrudan hesaplama ile gösterilebilir. ■

4.1 Asli Kanonik Doğrultuya Sahip Yüzeyler

$\mathbb{E}^3$ Öklid 3-uzayındaki CPD yüzeylerinin sınıflandırılması [47] da verilmiştir. Ayrıca, [19, 48] makalelerinde $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki M , CPD yüzeylerinin, sadece $k = (0, 0, 1)$ time-like sabit vektörü göz önünde bulundurularak, kısmi bir sınıflandırması yapılmıştır. Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki M , CPD yüzeylerinin sınıflandırılması tamamlanacaktır. Dolayısıyla bunu yapabilmek için, bir önceki kısımda incelediğimiz k sabit vektörünün space-like ve light-like durumları göz önüne alınarak, bu iki farklı durum için sınıflandırma yapılacaktır:

4.1.1 Space-like asli kanonik doğrultuya sahip yüzeyler

Bu alt bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında k , space-like sabit vektörü ile ilişkili olan CPD yüzeyleri incelenecektir.

Kabul edilsin ki, M yüzeyi $k = (1, 0, 0)$ vektörü ile ilişkili olan space-like bir CPD yüzeyi olsun. Burada, N time-like bir vektördür ve böylece (4.1) eşitliği, (4.6) eşitliğine dönüşür. Bu durumda θ açısı fonksiyonu Önerme 4.3 deki gibi tanımlıdır. Ayrıca, $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ olacak şekilde space-like bir e_2 teğet vektör alanı vardır. Böylece $n = 2$ için, (4.7) denklemleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 4.4. M yüzeyinin, ∇ Levi-Civita konneksiyonu ve S şekil operatörü,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (4.15a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \tanh \theta k_2 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\tanh \theta k_2 e_1, \quad (4.15b)$$

$$S = \begin{pmatrix} e_1(\theta) & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad (4.15c)$$

şeklinde dir. Ayrıca k_2 fonksiyonu,

$$e_1(k_2) = \tanh \theta k_2 (e_1(\theta) - k_2) \quad (4.16)$$

denklemini sağlar. Burada, θ sıfırdan farklı düzgün bir açısı fonksiyonudur.

İspat. (4.15) denklemleri, $n = 2$ için; (4.7) denklemlerinden doğrudan elde edilir. Ayrıca elde edilen bu denklemler; $X = e_1$ ve $Y = Z = e_2$ alınarak, (2.20) Codazzi denklemi ile birlikte düşünülürse, (4.16) denklemi doğrudan hesaplanır. ■

Açıklama 4.5. (4.7b), (4.9b) ve (4.11b) eşitliklerinden, $e_1(\theta) \equiv 0$ ise, $k_1 = 0$ olur. Ancak bu durumda CPD hiperyüzeyleri, Açıklama 1.5 ten dolayı bir CAS yüzeyine dönüşecektir. [19, 24] makalelerinde bu durum incelendiğinden, dolayısıyla sınıflandırma yapılırken bu durum göz ardı edilecektir.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe, $e_1(\theta) \neq 0$ olarak alınacaktır. M , space-like CPD yüzeylerinin sınıflandırılması verilmeden önce aşağıdaki Yardımcı Teorem verilecektir:

Yardımcı Teorem 4.6. M , space-like CPD yüzeyi üzerinde sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu

$$e_1(m) - \tanh \theta k_2 m = 0 \quad (4.17)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman, M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş metrik tansör

$$g = ds^2 + m^2 dt^2 \quad (4.18)$$

olacak şekilde $p \in M$ noktasının bir N_p komşuluğunda

$$e_1 = \partial_s, \quad e_2 = \frac{1}{m} \partial_t \quad (4.19)$$

şeklinde tanımlanan (s, t) yerel koordinat sistemi vardır.

İspat. (4.15) eşitliklerinden, $[e_1, e_2] = -\tanh \theta k_2 e_2$ elde edilir. Böylece, eğer M , CPD yüzeyi üzerinde (4.17) eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu varsa, o zaman $[e_1, m e_2] = 0$ dır. Böylece Yardımcı Teorem 2.47 den, $e_1 = \partial_s$ ve $e_2 = \frac{1}{m} \partial_t$ olacak şekilde (s, t) yerel koordinat sistemi vardır ve böylece, M CPD yüzeyi üzerindeki indirgenmiş metrik tansör (4.18) eşitliği ile ifade edilir. ■

Şimdi $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki space-like CPD hiperyüzeyleri için sınıflandırma sonuçlarından ilki verilecektir:

Teorem 4.7. M yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında yönlendirilmiş space-like bir yüzey olsun. O zaman M yüzeyinin, space-like sabit bir vektör ile ilişkili bir CPD yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul bu yüzeyin aşağıda verilen yüzeylerden birine denk olmasıdır:

1.

$$x(s, t) = \int^s \cosh \theta(\tau) d\tau (1, 0, 0) + \int^s \sinh \theta(\tau) d\tau (0, \sinh t, \cosh t) + \gamma(t) \quad (4.20a)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada, $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu

$$\gamma(t) = \left(0, \int^t \Psi(\tau) \cosh \tau d\tau, \int^t \Psi(\tau) \sinh \tau d\tau \right) \quad (4.20b)$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{E}_1^3$ -değerli bir fonksiyondur ve $\Psi \in C^\infty(M)$.

2.

$$x(s, t) = \int^s \cosh \theta(\tau) d\tau (1, 0, 0) + \int^s \sinh \theta(\tau) d\tau (0, \sinh t_0, \cosh t_0) + (0, t \cosh t_0, t \sinh t_0) \quad (4.21)$$

ile parametrize edilen düz bir yüzeydir. Burada, t_0 bir sabittir.

İspat. Gerek koşulun ispatı için, kabul edilsin ki M yüzeyi, $k = (1, 0, 0)$ space-like sabit vektör ile ilişkili space-like bir CPD yüzey ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dönüşümü bir izometrik daldırma olsun. Ayrıca, e_1, e_2 , M yüzeyinin asli doğrultuları ve k_1, k_2 bu doğrultulara karşılık gelen asli eğrilikler Yardımcı Teorem 4.4 teki gibi ve (s, t) yerel koordinat sistemi ise, Yardımcı Teorem 4.6 daki gibi tanımlansın. Böylece Önerme 4.3 ten, θ açı fonksiyonunun $\theta = \theta(s)$ olduğu görülebilir. Yardımcı Teorem 4.6 dan,

$$e_1 = x_s \quad (4.22)$$

şeklindedir. Son ifade, (4.16) ve (4.17) eşitliklerinde göz önünde bulundurulursa, sırasıyla,

$$(k_2)_s = (\theta' - k_2) \tanh \theta k_2, \quad (4.23)$$

$$m_s - m \tanh \theta k_2 = 0, \quad (4.24)$$

olur. Burada $\prime$ ile adi diferensiyel gösterilmektedir. Ayrıca, (4.22) ve (4.24) eşitlikleri (4.15c) ifadesinde göz önüne alınırsa, M yüzeyinin S şekil operatörünün matris temsili,

$$S = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ 0 & \coth \theta \frac{m_s}{m} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

şeklindedir. Buradan ikinci temel form katsayıları;

$$h(\partial_s, \partial_s) = -\theta' N, \quad h(\partial_s, \partial_t) = 0, \quad h(\partial_t, \partial_t) = -\coth \theta \frac{m_s}{m} N \quad (4.26)$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, (4.23) ve (4.24) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$m_{ss} - \theta' \coth \theta m_s = 0$$

denklemini elde edilir. Bazı Ψ_1, Ψ_2 düzgün fonksiyonları için, son denklemin genel çözümü,

$$m(s, t) = \Psi_1(t) \int_{s_0}^s \sinh \theta(\tau) d\tau + \Psi_2(t)$$

şeklindedir. t -parametresinin uygun bir seçimi ile bu çözüm,

$$m(s, t) = \int_{s_0}^s \sinh \theta(\tau) d\tau + \Psi(t), \Psi \in C^\infty(M), \quad (4.27a)$$

veya

$$m(s, t) = 1 \quad (4.27b)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi, m fonksiyonun elde edilen bu çözümleri göz önünde bulundurularak, sınıflandırma sonuçları ayrı ayrı incelenecektir:

Durum 1. m fonksiyonu (4.27a) eşitliğini sağlasın. Öncelikle (4.22) ifadesi, (4.15a) denklemlerinin ilkinde göz önünde bulundurulursa,

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0$$

elde edilir. Bu denklem ile (4.26) da verilen ikinci temel form katsayılarından ilki, $X = Y = \partial_s$ alınarak (2.17) Gauss formülünde yerlerine yazılırsa,

$$x_{ss} = -\theta' N \quad (4.28)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.6) ayrışımında (4.22) ifadesi göz önünde bulundurulursa,

$$k = \cosh \theta x_s + \sinh \theta N \quad (4.29)$$

bulunur. Buradan, $\langle x_s, k \rangle = \cosh \theta$ ve $\langle x_t, k \rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece, x parametrisasyonu

$$x(s, t) = \left(\int^s \cosh \theta(\tau) d\tau, x_2(s, t), x_3(s, t) \right) + \gamma(t) \quad (4.30)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada $\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ fonksiyonu, $\mathbb{E}_1^3$ -değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca (4.29) ifadesinde, (4.28) eşitliği ve $k = (1, 0, 0)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(1, 0, 0) = \cosh \theta x_s - \frac{\sinh \theta}{\theta'} x_{ss} \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) eşitliğinde, $\langle x_s, x_s \rangle = 1$ olduğu ve (4.30) formu birlikte göz önüne alınırsa, böylece x parametrizasyonu

$$x(s, t) = \int^s \cosh \theta(\tau) d\tau (1, 0, 0) + \int^s \sinh \theta(\tau) d\tau (0, \sinh \varphi(t), \cosh \varphi(t)) + \gamma(t) \quad (4.32)$$

olur. Burada $\varphi = \varphi(t)$ düzgün bir fonksiyondur. (4.32) den,

$$\begin{aligned} x_s &= \cosh \theta(s) (1, 0, 0) + \sinh \theta(s) (0, \sinh \varphi(t), \cosh \varphi(t)), \\ x_t &= \varphi'(t) \int^s \sinh \theta(\tau) d\tau (0, \cosh \varphi(t), \sinh \varphi(t)) + (0, \gamma'_2(t), \gamma'_3(t)) \end{aligned} \quad (4.33)$$

olur. Buradan, $\langle x_s, x_t \rangle = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa, $f = f(t)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$(0, \gamma'_2(t), \gamma'_3(t)) = f(t) (0, \cosh \varphi(t), \sinh \varphi(t)) \quad (4.34)$$

elde edilir. Böylece, (4.33) ifadesi

$$x_t = \left(\varphi'(t) \int^s \sinh \theta(\tau) d\tau + f(t) \right) (0, \cosh \varphi(t), \sinh \varphi(t))$$

haline gelir. Son olarak, m düzgün fonksiyonunun (4.27a) eşitliği ile tanımlı olduğu $\langle x_t, x_t \rangle = m^2$ eşitliğinde göz önünde bulundurulursa, buradan $\varphi(t) = t$ ve $f(t) = \Psi(t)$ elde edilir. Elde edilen bu fonksiyonlar (4.34) eşitliğinde yerlerine yazılır ve bu ifadelerin t -parametresine göre integrali alınırsa, (4.20b) fonksiyonu elde edilir. Dolayısıyla M , space-like CPD yüzeyi (4.20) ile parametrizasyonu verilen yüzeydir. Böylece teoremin Durum (1) için ispatı tamamlanmış olur.

Durum 2. m fonksiyonu, (4.27b) eşitliğini sağlasın. Bu taktirde, (4.18) ve (4.19) eşitlikleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} g &= ds^2 + dt^2, \\ e_1 &= \partial_s, \quad e_2 = \partial_t, \end{aligned} \quad (4.35)$$

eşitliklerine dönüşür ve böylece M yüzeyinin Levi-civita konneksiyonu

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0, \quad \nabla_{\partial_s} \partial_t = 0, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_t = 0 \quad (4.36)$$

eşitliklerini sağlar ve (4.15c) ile verilen S şekil operatörünün matris temsili ise,

$$S = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

olur. Buradan ikinci temel form katsayıları,

$$h(\partial_s, \partial_s) = -\theta' N, \quad h(\partial_s, \partial_t) = 0, \quad h(\partial_t, \partial_t) = 0, \quad (4.38)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, (4.36) ve (4.38) deki ilgili denklemler, (2.17) Gauss ve (2.18) Weingarten formüllerinde birlikte göz önünde bulundurulursa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} x_{ss} &= -\theta' N, & x_{st} &= 0, & x_{tt} &= 0, \\ N_s &= -\theta' x_s, & N_t &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, M CPD yüzeyinin Teorem 4.7 de (4.28) ile parametrize edilen yüzey olduğu doğrudan hesaplama ile kolayca gösterilir. Dolayısıyla teoremin gerek koşulu ispatlanmış olur. Yeter koşulu da, tersine doğrudan hesaplama ile elde edilir. ■

Teorem 4.7 nin doğrudan bir sonucu olarak, maximal CPD yüzeylerinin bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir:

Önerme 4.8. $\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında space-like sabit bir vektör ile ilişkili maximal CPD yüzeyi; ya bir düzlemin açık bir parçasıdır veya

$$x(s, t) = \frac{1}{c} \left(\ln \left(cs + \sqrt{1 + c^2 s^2} \right), \sqrt{1 - c^2 s^2} \sinh t, \sqrt{1 - c^2 s^2} \cosh t \right) \quad (4.39)$$

şeklinde verilen yüzeye denktir. Burada, c sıfırdan farklı bir sabittir ve θ açt fonksiyonu,

$$\theta(s) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - cs}{1 + cs} \right) \quad (4.40)$$

şeklinde dir.

İspat. Kabul edilsin ki M yüzeyi space-like bir CPD yüzey olsun. Eğer, M bir CPD yüzeyi ise, o zaman Teorem 4.7 den, M yüzeyinin (4.20) ile verilen yüzeye denk olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, bu M yüzeyinin S şekil operatörünün matris temsili, (4.25) ile bellidir. (4.25) ifadesinde maximallik koşulu yani, $\text{tr} S = 0$ eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$\theta' + \coth \theta \frac{m_s}{m} = 0$$

elde edilir. Buradan, c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, son denklemin çözümü

$$\theta(s) = \ln \left(\left(\frac{1}{cm} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{cm} \right)^2 - 1} \right) \quad (4.41)$$

şeklindedir. Burada c sıfırdan farklı bir sabit olduğundan, m fonksiyonunun sadece s -parametresine bağlı olduğu sonucuna varılır. Bu sonuç, (4.27a) da göz önüne alınırsa, $\Psi(t) = 0$ olur ve böylece $m(s) = \int^s \sinh \theta(\tau) d\tau$ dır. Elde edilen bu m fonksiyonu, (4.41) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\theta' = -\frac{1}{c} \cosh^2 \theta$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü ise, (4.40) eşitliği ile bellidir. Son olarak elde edilen bu θ çözümü ve $\Psi(t) = 0$ olduğu, (4.20) de göz önüne alınırsa, (4.39) parametrisasyonu bulunur.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Bu bölümün geri kalan kısmında, M yüzeyi $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $k = (1, 0, 0)$ sabit vektör ile ilişkili asli kanonik bir doğrultuya sahip time-like bir (CPD) yüzeyi olarak alınacaktır. Fakat M yüzeyi bir time-like yüzey olduğunda, S şekil operatörü köşegenleştirilemeyebilir. Şimdi öncelikle, M time-like yüzeyinin S şekil operatörünün köşegenleştirilemeyeceği varsayalım. Bu durumda, M yüzeyinin teğet demetindeki $\{e_1, e_2\}$ sözde ortonormal çatı alanı olmak üzere yüzeyinin, S şekil operatörü Bölüm 2.2.2 de verildiği gibi

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & \mu \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

şeklindedir. Bu durumda, (4.1) ayrışımı

$$k = e_1 + N \quad (4.43)$$

şeklinde yazılır. Burada k sabit bir vektör olduğundan, $k_1 = 0$ olduğu doğrudan görülür. Böylece M yüzeyi düz, minimal B-scroll yüzeyidir. Bu yüzey [27] da aşağıdaki gibi parametrize edilen,

$$x(s, t) = \left(\frac{s^2}{2} + t, \frac{(2s-1)^{3/2}}{3}, \frac{s^2}{2} - s + t \right) \quad (4.44)$$

yüzeyidir.

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.9. M , $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında köşegenleştirilemeyen şekil operatörüne sahip, yönlendirilmiş bir time-like yüzey olsun. Eğer M yüzeyi, space-like sabit bir vektör ile ilişkili bir CPD yüzeyi ise, o zaman M time-like yüzeyi (4.44) parametrisasyonu ile verilen yüzeye denktir.

Şimdi, space-like sabit bir vektör ile ilişkili M time-like yüzeyinin S şekil operatörünün köşegenleştirilebilir olduğu varsayalım. Ayrıca, M yüzeyinin teğet demetindeki yerel ortonormal çatı alanı, $\{e_1, e_2\}$ ve $e_1 = \frac{k^T}{\langle k^T, k^T \rangle^{\frac{1}{2}}}$ olsun. Bu durumda (4.2) ayrışımı; e_1 vektörünün space-like ve time-like olma durumlarından, sırasıyla, (4.8) ve (4.10) ile bellidir.

Yardımcı Teorem 4.4 de izlenen benzer bir yolla aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 4.10. M yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki bir $k = (1, 0, 0)$ sabit vektörü ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip time-like bir CPD yüzey ve bu yüzeyin asli doğrultuları e_1 ve e_2 vektörleri olsun. Bu taktirde aşağıdaki durumlar verilebilir:

1. Eğer e_1 vektörü space-like ise, o zaman M yüzeyinin ∇ Levi-Civita konneksiyonu ve S şekil operatörü, sırasıyla,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (4.45a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \cot \theta k_2 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = \cot \theta k_2 e_1 \quad (4.45b)$$

$$S = \begin{pmatrix} e_1(\theta) & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad (4.45c)$$

şeklindedir. Ayrıca k_2 fonksiyonu

$$e_1(k_2) = \cot \theta k_2 (e_1(\theta) - k_2) \quad (4.46)$$

eşitliğini sağlar.

2. Eğer e_1 vektörü time-like ise, o zaman M yüzeyinin ∇ Levi-Civita konneksiyonu ve S şekil operatörü, sırasıyla,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (4.47a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \coth \theta k_2 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = \coth \theta k_2 e_1, \quad (4.47b)$$

$$S = \begin{pmatrix} -e_1(\theta) & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad (4.47c)$$

şeklindedir. Ayrıca k_2 fonksiyonu

$$e_1(k_2) = \coth \theta k_2 (e_1(\theta) - k_2) \quad (4.48)$$

eşitliğini sağlar.

3. Her iki durumda da θ açısı fonksiyonu

$$e_2(\theta) = 0 \quad (4.49)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (4.8) ve (4.10) ayrışimleri, sırasıyla, göz önüne alınırsa, Yardımcı Teorem 4.4 ün ispatında izlenen yolla tamamen benzer olarak, sırasıyla, (4.45), (4.46) ve (4.47), (4.48) ifadeleri elde edilir. Böylece, Yardımcı Teorem'in 1. ve 2. durumları elde edilir. Son olarak her iki durum için de Önerme 4.3 ten, (4.49) vardır. ■

Yardımcı Teorem 4.11. M , $k = (1, 0, 0)$ sabit vektörü ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip time-like bir (CPD) yüzey ve bu yüzeyin asli doğrultuları e_1 ve e_2 vektörleri olsun. O halde M yüzeyi üzerindeki sıfırdan farklı düzgün bir m fonksiyonu için,

$$e_1 = \partial_s, \quad e_2 = \frac{1}{m} \partial_t \quad (4.50)$$

olacak şekilde $p \in M$ noktasının bir N_p komşuluğu vardır. Eğer,

1. e_1 vektörü space-like ise, N_p deki indirgenmiş metrik tansör,

$$g = ds^2 - m^2 dt^2 \quad (4.51)$$

şeklindedir ve m fonksiyonu

$$e_1(m) - \cot \theta k_2 m = 0 \quad (4.52)$$

denklemini sağlar.

2. e_1 vektörü time-like ise, o zaman N_p deki indirgenmiş metrik tensör,

$$g = -ds^2 + m^2 dt^2 \quad (4.53)$$

şeklindedir ve m fonksiyonu

$$e_1(m) - \coth \theta k_2 m = 0 \quad (4.54)$$

denklemini sağlar.

İspat. Teoremin ispatı, Yardımcı Teorem 4.6 nın ispatına benzer bir şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.12. $M, \mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip yönlendirilmiş bir time-like yüzey olsun. O zaman, M yüzeyinin space-like sabit bir vektör ile ilişkili bir CPD yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul $\theta = \theta(s)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere, yüzeyin aşağıda verilen yüzeylerden birine denk olmasıdır:

1.

$$x(s, t) = \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau (1, 0, 0) + \int_{s_0}^s \cos \theta(\tau) d\tau (0, \cosh t, \sinh t) + \gamma(t) \quad (4.55a)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu

$$\gamma(t) = \left(0, \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \sinh(\tau) d\tau, \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \cosh(\tau) d\tau \right) \quad (4.55b)$$

$\mathbb{E}_1^3$ -değerli bir fonksiyondur ve $\Psi \in C^\infty(M)$.

2. t_0 bir sabit olmak üzere,

$$x(s, t) = \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau (1, 0, 0) + \int_{s_0}^s \cos \theta(\tau) d\tau (0, \cosh t_0, \sinh t_0) + (0, t \sinh(t_0), t \cosh(t_0)) \quad (4.56)$$

şeklinde parametrize edilen düz bir yüzeydir.

3.

$$x(s, t) = \int_{s_0}^s \sinh \theta(\tau) d\tau (-1, 0, 0) + \int_{s_0}^s \cosh \theta(\tau) d\tau (0, \sinh t, \cosh t) + \gamma(t) \quad (4.57a)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu

$$\gamma(t) = \left(0, \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \cosh(\tau) d\tau, \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \sinh(\tau) d\tau \right) \quad (4.57b)$$

$\mathbb{E}_1^3$ -değerli bir fonksiyondur ve $\Psi \in C^\infty(M)$.

4. t_0 bir sabit olmak üzere,

$$x(s, t) = \int_{s_0}^s \sinh \theta(\tau) d\tau (-1, 0, 0) + \int_{s_0}^s \cosh \theta(\tau) d\tau (0, \sinh t_0, \cosh t_0) + (0, t \cosh t_0, t \sinh t_0), \quad (4.58)$$

şeklinde parametrize edilen düz bir yüzeydir.

İspat. Gerek koşulu ispatlamak için, M yüzeyinin, $k = (1, 0, 0)$ vektör ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip time-like bir (CPD) yüzey olduğu varsayalım. Dolayısıyla, $\langle N, N \rangle = 1$ dir. Böylece, bu yüzeyin asli doğrultuları e_1, e_2 ve bunlara karşılık gelen asli eğrilikleri k_1, k_2 , Yardımcı Teorem 4.10 daki gibi ve (s, t) yerel koordinat sistemi ise, Yardımcı Teorem 4.11 deki gibi tanımlıdır. Burada teoremin ispatı, e_1 teğet vektörünün space-like ve time-like durumları için ayrı ayrı incelenecektir:

Durum A. e_1 teğet vektörü space-like olsun. Bu durumda, (4.45), (4.46), (4.49), (4.51) ve (4.52) eşitliklerine sahibiz. Ayrıca N space-like olduğundan, M yüzeyindeki bir diğer e_2 teğet vektörü time-like olacaktır. (4.50) eşitliklerinden ilki, (4.46) ve (4.52) denklemlerinde, sırasıyla, göz önünde bulundurulursa,

$$(k_2)_s - \cot \theta k_2(\theta' - k_2) = 0, \quad (4.59a)$$

$$m_s - \cot \theta k_2 m = 0 \quad (4.59b)$$

denklemleri elde edilir. $e_1 = \partial_s$ ve (4.59b) eşitliği, (4.45c) ifadesinde göz önünde bulundurulursa, buradan M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$h(\partial_s, \partial_s) = \theta' N, \quad h(\partial_s, \partial_t) = 0, \quad h(\partial_t, \partial_t) = -mm_s \tan \theta N \quad (4.60)$$

olarak elde edilir. Şimdi, (4.59b) denkleminde s -parametresine göre türev alınırsa ve burada (4.59a) denklemi göz önüne alınırsa,

$$m_{ss} + \theta' \tan \theta m_s = 0$$

elde edilir. Düzgün bir $\Psi = \Psi(t)$ fonksiyonu için, bu denklemin çözümü

$$m(s, t) = \int^s \cos \theta(\xi) d\xi + \Psi(t), \quad (4.61a)$$

veya

$$m(s, t) = 1 \quad (4.61b)$$

şeklinde dir.

Şimdi, m düzgün fonksiyonunun yukarıda elde edilen iki farklı çözümü için ayrı ayrı inceleme yapılacaktır:

Durum A1. Kabul edilsin ki m fonksiyonu, (4.61a) eşitliğini sağlasın. Bu durumda, (4.50) eşitlikleri (4.45) ifadelerinde göz önüne alınır ve elde edilen ifadeler ile (4.60) denklemleri, (2.17) Gauss denkleminde birlikte göz önüne alınırsa,

$$x_{ss} = \theta' N, \quad (4.62a)$$

$$x_{st} = \frac{m_s}{m} x_t, \quad (4.62b)$$

$$x_{tt} = mm_s x_s + \frac{m_t}{m} x_t - mm_s \tan \theta N \quad (4.62c)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.8) ayrışımından, $\langle x_s, k \rangle = \sin \theta$ ve $\langle x_t, k \rangle = 0$ dır. Böylece yüzey,

$$x(s, t) = \left(\int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau, x_2(s, t), x_3(s, t) \right) + \gamma(t) \quad (4.63)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada $\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ fonksiyonu, $\mathbb{E}_1^3$ -değerli düzgün bir fonksiyondur. Ayrıca (4.8) ayrışımında, $k = (1, 0, 0)$ ve (4.62a) ifadeleri göz önüne alınırsa,

$$(1, 0, 0) = \sin \theta x_s + \frac{\cos \theta}{\theta'} x_{ss} \quad (4.64)$$

yazılır. Buradan, $j = 2, 3$ olmak üzere $(x_j)_s = f_j(t) \cos \theta$ elde edilir. Diğer taraftan $\langle x_s, x_s \rangle = 1$ olduğu, (4.63) eşitliğinde göz önünde bulundurulursa, $(f_2(t))^2 - (f_3(t))^2 = 1$ elde edilir. Buradan, düzgün bir $\varphi = \varphi(t)$ fonksiyonu için, $f_2(t) = \cosh \varphi(t)$ ve $f_3(t) = \sinh \varphi(t)$ olarak seçilebilir. Böylece, (4.63) parametrizasyonu

$$x(s, t) = \int^s \sin \theta(\tau) d\tau (1, 0, 0) + \int^s \cos \theta(\tau) d\tau (0, \cosh \varphi(t), \sinh \varphi(t)) + \gamma(t), \quad (4.65)$$

şeklinde bulunur. Teorem 4.7 de Durum (1) in ispatı için izlenen benzer bir yolla, (4.51) ve (4.65) ifadeleri göz önünde bulundurularak, $\varphi(t) = t$ ve (4.55b) ifadeleri elde edilir. Sonuç olarak elde edilen bu ifadeler, (4.65) de göz önüne alınırsa, M yüzeyi (4.55a) ile parametrize edilen bir CPD yüzey olduğu görülür. Böylece Durum (A1) için ispat tamamlanmıştır.

Durum A2. m fonksiyonu (4.61b) eşitliğini sağlasın. Bu durumda, (4.50) ve (4.51) ifadeleri, sırasıyla,

$$e_1 = \partial_s, \quad e_2 = \partial_t,$$

$$g = ds^2 - dt^2$$

olur. Böylece, (4.45) eşitliklerinde verilen Levi-civita konneksiyonları,

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0, \quad \nabla_{\partial_s} \partial_t = 0, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_t = 0$$

şeklindedir ve m bir sabit olduğundan, (4.60) da verilen M yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$h(\partial_s, \partial_s) = \theta' N, \quad h(\partial_s, \partial_t) = 0, \quad h(\partial_t, \partial_t) = 0$$

şeklindedir. Buradan yukarıda elde edilen yüzeyin Levi-civita konneksiyonları ve ikinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, (2.17) Gauss ve (2.18) Weingarten formülleri yazılırsa

$$\begin{aligned} x_{ss} &= \theta' N, & x_{st} &= 0, & x_{tt} &= 0, \\ N_s &= -\theta' x_s, & N_t &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece M yüzeyi doğrudan hesaplama ile Teorem 4.12 de (4.56) ile parametrize edilen yüzeye karşılık gelir.

Şimdi, Teorem 4.12 de (4.57) ve (4.58) ile parametrize edilen yüzeyler elde edilecektir:

Durum B. e_1 teğet vektörü, time-like olsun. Bu durumda, (4.47), (4.48), (4.49), (4.50), (4.53) ve (4.54) eşitliklerine sahibiz. Durum (A) nın ispatı için izlenen benzer bir yolla, (4.54) eşitliğini sağlayan m fonksiyonu, $\Psi = \Psi(t)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$m(s, t) = \int^s \cosh \theta(\xi) d\xi + \Psi(t) \quad (4.66)$$

veya

$$m(s, t) = 1 \quad (4.67)$$

şeklindedir.

Eğer m fonksiyonu (4.66) eşitliğini sağlarsa, Durum (A1) in ispatı ile tamamen benzer yolla (4.57) ile verilen parametrizasyon elde edilir. Diğer taraftan $m(s, t) = 1$ ise, bu taktirde M yüzeyi yine Durum (A2) de izlenen benzer yolla, (4.58) de verilen yüzeye karşılık geldiği gösterilir. Böylece, teoremin ispatı için gerek koşul tamamlanmış olur. İspatın yeter koşulu tersine olarak doğrudan hesaplama ile gösterilebilir. ■

Sonuç 4.13. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip düz, minimal time-like CPD yüzeyi yoktur.

İspat. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında düz CPD yüzeyleri (4.56) ve (4.57b) ile parametrize edilir. Diğerleri için ispat benzer olcağından, (4.56) için ispat yapılacaktır.

Kabul edilsin ki, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip düz M CPD yüzeyi (4.56) ile parametrize edilsin. Bu yüzeyin S şekil operatörü

$$S = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

şeklindedir. Böylece M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul $\theta' = 0$ olmasıdır. Fakat Açıklama 4.5 den bu koşulu sağlayan yüzeylerin bir CAS yüzeyi olduğundan bahsedilmişti. Böylece $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip düz, minimal time-like CPD yüzeyi yoktur. ■

Yukarıda verilen sonuç göz önüne alınarak, Teorem 4.12'in doğrudan bir sonucu olarak, minimal CPD yüzeylerinin bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir:

Önerme 4.14. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, time-like sabit bir vektör ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip bir minimal yüzey; ya bir düzlemin parçasıdır ya da aşağıda verilen yüzeylerden birine denktir:

1. c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$x(s, t) = \frac{1}{c} \left(\ln \left(cs + \sqrt{c^2 s^2 + 1} \right), \sqrt{c^2 s^2 + 1} \cosh t, \sqrt{c^2 s^2 + 1} \sinh t \right) \quad (4.69)$$

şeklinde verilen bir yüzeydir. Burada θ açısı fonksiyonu,

$$\theta(s) = \cot^{-1}(cs) \quad (4.70)$$

ile tanımlıdır.

2. c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$x(s, t) = \frac{1}{c} \left(-\ln \left(\sqrt{c^2 s^2 - 1} + cs \right), \sqrt{c^2 s^2 - 1} \sinh t, \sqrt{c^2 s^2 - 1} \cosh t \right) \quad (4.71)$$

şeklinde verilen bir yüzeydir. Burada θ açısı fonksiyonu,

$$\theta(s) = \ln \left(\frac{1 + cs}{1 - cs} \right) \quad (4.72)$$

şeklindedir.

İspat. Kabul edilsin ki M yüzeyi, time-like bir CPD yüzey olsun. Eğer M yüzeyi minimal ise, bu takdirde Sonuç 4.13 göz önüne alınarak, M CPD yüzeyinin (4.55) veya (4.57) ile parametrize edilen yüzeylerden birine denk olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla iki farklı durum incelenecektir:

Durum 1. Kabul edilsin ki M yüzeyi (4.55) ile parametrize edilen yüzeye denk olsun. Bu durumda, (4.61a) ile verilen m fonksiyonu için, M yüzeyinin S şekil operatörünün temsili matrisi

$$S = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ 0 & \tan \theta \frac{m_s}{m} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

şeklindedir. Böylece M yüzeyi için minimallik koşulu, yani, $\text{tr} S = 0$ olacağı göz önünde bulundurulursa,

$$\theta' + \tan \theta \frac{m_s}{m} = 0$$

denklemini elde edilir. c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere bu denklemin çözümü

$$\theta(s) = \ln \left(\left(\frac{1}{cm} \right) + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{cm} \right)^2} \right) \quad (4.74)$$

şeklindedir. Burada c bir sabit olduğundan, $m = m(s)$ sonucuna varılır. Böylece (4.61a) eşitliğindeki $\Psi = 0$ olup,

$$m(s) = \int^s \cos \theta(\xi) d\xi$$

haline gelir. Bu ifade (4.74) eşitliğinde yerine yazılırsa, (4.70) elde edilir. Elde edilen bu sonuçlar (4.55) yüzeyinde yerlerine yazılırsa, (4.69) yüzeyi bulunur.

Durum 2. M yüzeyi, (4.57) ile verilen yüzeye denk olsun. Bu durumda, (4.66) ile verilen m fonksiyonu için, M yüzeyinin S şekil operatörünün temsili matrisi,

$$S = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ 0 & \tanh \theta \frac{m_s}{m} \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

şeklindedir. Durum (1) dekine tamamen benzer yolla, (4.71) yüzeyi ve (4.72) fonksiyonu doğrudan hesaplama ile elde edilir. ■

4.1.2 Light-like asli kanonik doğrultuya sahip yüzeyler

Bu alt bölümde, $k = (1, 0, 1)$ light-like sabit vektörü ile ilişkili asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri sınıflandırılacaktır.

Teorem 4.15. M yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip yönlendirilmiş bir yüzey olsun. O zaman, M yüzeyinin light-like sabit vektörü ile ilişkili bir CPD yüzey olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin aşağıda verilen yüzeye denk olmasıdır:

$$x(s, t) = \left(\int_{s_0}^s \frac{1}{2\phi(\xi)^2} d\xi \right) (1, 0, 1) + s(\gamma_0(t), \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, \gamma_0(t) - \varepsilon) + \int_{t_0}^t b(\xi) (\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(\xi)+1}, -\varepsilon, \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(\xi)+1}) d\xi. \quad (4.76)$$

Burada, $b(t), \gamma_0(t)$ düzgün fonksiyonlar, s_0, t_0 değerleri birer sabit, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ve $\phi = \phi(s)$ fonksiyonu ise, kendisi ve türevi sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyondur. Ayrıca, $\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon$ olacak şekilde $(1, 0, 1)^T = \phi(s)e_1$ teğet vektör alanı (4.76) ile verilen yüzeyinin asli bir doğrultusudur.

İspat. Kabul edilsin ki N , $\varepsilon = -\langle N, N \rangle$ olacak şekilde M yüzeyinin birim normal vektör alanı ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dönüşümü bir izometrik daldırma olsun. Ayrıca, e_1 birim teğet vektör alanı $k^T = (1, 0, 1)^T$ ile orantılı ve e_2 space-like birim vektör alanı $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ eşitliğini sağlasın. Böylece, sıfırdan farklı bir $\phi = \phi(s)$ fonksiyonu için, Bölüm 4 de verilen (4.1) ayrışımı

$$(1, 0, 1) = \phi(e_1 - N) \quad (4.77)$$

şeklinde yazılır ve $n = 2$ için, (4.14) eşitliklerine sahibiz. Buradan, M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları,

$$h(e_1, e_1) = -k_1 N, \quad h(e_1, e_2) = 0, \quad h(e_2, e_2) = -\varepsilon k_2 N \quad (4.78)$$

şeklinde elde edilir. Buradan $X = e_1, Y = Z = e_2$ ve $X = e_2, Y = Z = e_1$ için, (2.20) Codazzi denklemleri, sırasıyla,

$$e_1(k_2) = k_2^2 - k_1 k_2 \quad \text{ve} \quad e_2(k_1) = 0 \quad (4.79)$$

şeklinde elde edilir. Açıklama 1.5 den, (4.14b) eşitliği gösterir ki M üzerinde $e_1(\phi)$ ifadesi sıfırdan farklı olduğu sonucuna varılır.

Şimdi kabul edilsin ki $p \in M$ olsun. Light-like sabit doğrultu ile ilişkili CPD yüzeylerinin sınıflandırılmasını yapabilmek için, öncelikle aşağıda verilen iddia ispatlanacaktır:

İddia 4.16. M yüzeyi üzerinde $a(t), b(t)$ birer düzgün fonksiyon ve sıfırdan farklı düzgün bir $\phi(s)$ fonksiyonu için,

$$e_1 = \phi \partial_s, \quad e_2 = \frac{1}{a(t)s + b(t)} \partial_t$$

ve

$$k_1(s) = -\phi'(s) \quad (4.80)$$

olacak şekilde p noktasının bir N_p komşuluğu vardır. Ayrıca, N_p deki indirgenmiş metrik tansör,

$$g = \frac{\varepsilon}{\phi(s)^2} ds^2 + (a(t)s + b(t))^2 dt^2 \quad (4.81)$$

şeklindedir. Burada, $\varepsilon = \langle e_1, e_1 \rangle = -\langle N, N \rangle$ dir.

İddia 4.16'nın ispatı. (4.14a) ve $n=2$ için, (4.14d) eşitliklerinden, $[e_1, e_2] = k_2 e_2$ dir. Burada, $n=2$ için, (4.14c) ifadesi ve

$$e_1(G) = -k_2 G \quad (4.82)$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir G fonksiyonu için, $\left[\frac{1}{\phi} e_1, G e_2 \right] = 0$ olarak elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 2.47 den, $e_1 = \phi \partial_s$ ve $e_2 = \frac{1}{G} \partial_t$ olacak şekilde (s, t) yerel koordinat sistemi vardır. Dolayısıyla M üzerindeki indirgenmiş metrik tansör,

$$g = \frac{\varepsilon}{\phi^2} ds^2 + G^2 dt^2 \quad (4.83)$$

şeklindedir. (4.14b), (4.14c) ve (4.79) denklemlerinden, doğrudan hesaplama ile $k_1 = k_1(s)$ olduğu sonucuna varılır ve ayrıca (4.80) denklemi elde edilir. Ayrıca, $e_1 = \partial_s$ olduğu ve (4.80) ifadesi, (4.79) deki ilk denklemde ve (4.82) denkleminde göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$\phi(k_2)_s = k_2(k_2 + \phi') \quad (4.84)$$

ve

$$\phi G_s = -k_2 G \quad (4.85)$$

olur. Son denklemde s -parametresine göre türev alınırsa,

$$\phi' G_s + \phi G_{ss} = -(k_2)_s G - k_2 G_s \quad (4.86)$$

elde edilir. Bu denklemde, (4.80), (4.84) ve (4.85) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa, $\phi G_{ss} = 0$ bulunur. Buradan düzgün $a(t), b(t)$ fonksiyonları için, $G(s, t) = a(t)s + b(t)$ şeklinde olur ve böylece (4.83) ifadesi (4.81) ifadesine dönüşür.

Dolayısıyla, İddia 4.16 ispatlanmıştır. ■

Kabul edilsin ki M , light-like sabit doğrultu ile ilişkili bir CPD yüzeyi ve üzerindeki (s, t) yerel koordinat sistemi İddia 4.16 deki gibi, yani,

$$e_1 = \phi x_s, \quad e_2 = \frac{1}{a(t)s + b(t)} x_t \quad (4.87)$$

şeklinde tanımlansın. Yukarıdaki ilk ifade göz önünde bulundurularak, (4.14a) ve (4.78) eşitliklerindeki ilk ifadeler, $X = Y = \phi x_s$ alınarak (2.17) Gauss formülünde yerlerine yazılırsa,

$$\widetilde{\nabla}_{\phi \partial_s}(\phi \partial_s) = -k_1 N$$

elde edilir. Bu denklemde (4.80) denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$N = \frac{1}{\phi'} (\phi \phi' x_s + \phi^2 x_{ss}) \quad (4.88)$$

olarak bulunur. (4.88) ifadesi ve $e_1 = \phi x_s$ olduğu (4.77) ayrışımında göz önüne alınırsa,

$$(1, 0, 1) = \phi \left(\phi x_s - \frac{1}{\phi'} (\phi \phi' x_s + \phi^2 x_{ss}) \right)$$

yazılır. Bu denklem düzenlenirse,

$$x_{ss} = -\frac{\phi'}{\phi^3} (1, 0, 1)$$

elde edilir. Son denklem s parametresine göre integrallenirse,

$$x_s = \frac{1}{2\phi^2} (1, 0, 1) + \gamma(t) \quad (4.89)$$

olarak elde edilir. Burada $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu, $\mathbb{E}_1^3$ -değerli düzgün bir fonksiyondur. Ayrıca (4.89) eşitliği, $\langle x_s, x_s \rangle = \frac{\varepsilon}{\phi^2}$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\langle (1, 0, 1), \gamma(t) \rangle - \varepsilon}{\phi(s)^2} + \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 0$$

elde edilir. Burada $\phi(s)$ fonksiyonunun sabit olmadığı göz önünde bulundurulursa, $\langle (1, 0, 1), \gamma(t) \rangle = \varepsilon$ ve $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 0$ olduğu sonucuna varılır. Böylece doğrudan hesaplama ile $\gamma(t)$ fonksiyonu, düzgün bir $\gamma_0(t)$ fonksiyonu için

$$\gamma(t) = \left(\gamma_0(t), \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t) + 1}, \gamma_0(t) - \varepsilon \right)$$

şeklinde elde edilir. Son eşitlik (4.89) de yerine yazılırsa,

$$x_s = \frac{1}{2\phi^2}(1, 0, 1) + (\gamma_0(t), \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, \gamma_0(t)-\varepsilon) \quad (4.90)$$

olur. Bu ifade, (4.87) ifadelerinin ilkinde ve ayrıca (4.88) eşitliğinde göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$e_1 = \phi x_s = \frac{1}{2\phi(s)}(1, 0, 1) + \phi(s)(\gamma_0(t), \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, \gamma_0(t)-\varepsilon), \quad (4.91a)$$

$$N = -\frac{1}{2\phi(s)}(1, 0, 1) + \phi(s)(\gamma_0(t), \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, \gamma_0(t)-\varepsilon) \quad (4.91b)$$

elde edilir. Böylece $\{e_1, e_2; N\}$ yerel ortonormal çatı olduğundan,

$$e_2 = \frac{1}{a(t)s+b(t)}x_t = (\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, -\varepsilon, \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}) \quad (4.91c)$$

olur. Son olarak, (4.90) eşitliğinde s -parametresine göre integral alınırsa,

$$x(s, t) = \int_{s_0}^s \frac{d\xi}{2\phi(\xi)^2}(1, 0, 1) + s(\gamma_0(t), \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, \gamma_0(t)-\varepsilon) + \Gamma(t) \quad (4.92)$$

bulunur. Burada $\Gamma = \Gamma(t)$ fonksiyonu $\mathbb{E}_1^3$ -değerli düzgün bir fonksiyondur. Şimdi (4.92) ifadesinde t -parametresine göre türev alınır ve (4.91c) de yerine yazılırsa,

$$\Gamma'(t) = \left(\left(a(t) - \frac{\gamma_0'(t)}{\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}} \right) s + b(t) \right) (\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, -\varepsilon, \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1})$$

elde edilir. Buradan

$$a(t) = \frac{\gamma_0'(t)}{\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}}$$

olduğu sonucuna doğrudan varılır ve böylece

$$\Gamma'(t) = b(t) (\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}, -\varepsilon, \sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1})$$

olur. Son denklem integrallenir ve bulunan ifade (4.92) da yerine yazılırsa, (4.76) ile parametrize edilen yüzey elde edilir. Böylece gerek koşulun ispatı tamamlanmıştır.

Tersine; kabul edilsin ki M yüzeyi (4.76) ile parametrize edilsin ve M üzerindeki ortonormal çatı $\{e_1, e_2; N\}$ olarak tanımlansın. Ayrıca, $(1, 0, 1)^T = \phi e_1$ bu yüzeyin bir asli doğrultusu olsun. Böylece doğrudan hesaplama ile M yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \left(\frac{\varepsilon}{2\phi(s)} - \varepsilon\phi(s)\gamma_0(t), -\varepsilon\phi(s)\sqrt{1-2\varepsilon\gamma_0(t)}, \varepsilon(-\phi(s))\gamma_0(t) + \frac{\varepsilon}{2\phi(s)} + \phi(s) \right)$$

şeklindedir ve ayrıca M yüzeyinin asli doğrultuları

$$e_1 = \phi(s)\partial s \quad \text{ve} \quad e_2 = \frac{\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}}{s\gamma'_0(t)+b(t)\sqrt{-2\varepsilon\gamma_0(t)+1}}\partial t \quad (4.93)$$

şeklindedir. Gerçekten, $\langle e_2, (1,0,1) \rangle = 0$ eşitliği sağlanır ve bu da $(1,0,1)^T$ vektörünün M yüzeyinin bir asli doğrultusu olduğunu gösterir. Böylece, yeter koşul da ispatlanmış oldu. ■

Şimdi $k = (1,0,1)$ sabit vektörü yerine, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında keyfi bir light-like vektör alındığında bu light-like vektörün teğet vektörünü asli kanonik doğrultu (CPD) kabul eden yüzey aşağıdaki şekilde elde edilir:

Açıklama 4.17. (4.76) ile parametrize edilen, $(1,0,1)$ light-like vektörü ile ilişkili M CPD yüzeyi göz önüne alınsın. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında keyfi bir $\tilde{k}$ light-like vektörü düşünölsün. Kabul edilsin ki, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki l_1, l_2 vektörleri

$$\langle l_1, l_1 \rangle = \langle l_1, l_2 \rangle = \langle \tilde{k}, l_2 \rangle = 0, \quad \langle \tilde{k}, l_1 \rangle = -1, \quad \langle l_2, l_2 \rangle = 1$$

eşitliklerini sağlasın. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\tilde{x}(s,t) = Lx(s,t)$ ile verilen $\tilde{M}$ yüzeyi göz önüne alınsın. Burada $x(s,t)$; M yüzeyinin konum vektörü ve L ise,

$$L(1,0,1) = \tilde{k}, \quad L\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = l_1, \quad L(0,1,0) = l_2 \quad (4.94)$$

ile verilen bir lineer izometridir. Buradan M yüzeyindeki light-like k sabit vektörünün (4.77) den,

$$(1,0,1) = \phi(e_1 - N)$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz. Son ifade L izometrisi altında,

$$L(1,0,1) = \phi(Le_1 - LN) \quad (4.95)$$

şeklinde yazılır. Gerçekten, (4.87) ile verilen eşitliklerinden ilki göz önünde bulundurularak, $\tilde{M}$ yüzeyi için; $\tilde{e}_1 = Le_1$ vektörünün bir teğet vektör olduğu elde edilir. Ayrıca $\tilde{N} = LN$ vektörü de $\tilde{M}$ yüzeyinin birim normal vektörüüdür. Son olarak (4.95) ifadesinde, $\tilde{e}_1 = Le_1$, $\tilde{N} = LN$ olduğu ve (4.94) deki ifadelerden ilki göz önünde bulundurulursa,

$$\tilde{k} = \phi(\tilde{e}_1 - \tilde{N})$$

olarak elde edilir. Böylece, $\tilde{M}$ yüzeyinin $\tilde{k}$ light-like vektörü ile ilişkili bir CPD yüzeyi olduğu elde edilir.

Teorem 4.15 ün doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilecektir:

Önerme 4.18. M , (4.76) ile parametrize edilen bir CPD yüzey olsun. O zaman M yüzeyinin (s, t) yerel koordinat sistemine göre S şekil operatörü,

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon\phi'(s) & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon\phi(s)\gamma_0'(t)}{\sqrt{1-2\varepsilon\gamma_0(t)b(t)+s\gamma_0'(t)}} \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

şeklindedir.

Bu kısımda son olarak, Önerme 4.18 nin doğrudan birer sonucu olarak, aşağıdaki sonuçlar verilecektir:

Sonuç 4.19. M CPD yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında light-like sabit bir vektör ile ilişkili asli kanonik doğrultuya ve köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip düz bir yüzey ise, o zaman, M aşağıda verilen yüzeye denktir:

$$x(s, t) = \left(cs + \sqrt{1-2c\varepsilon t} + \int_{s_0}^s \frac{1}{2\phi(\xi)^2} d\xi, -\varepsilon t + s\sqrt{1-2c\varepsilon}, \right. \\ \left. s(c-\varepsilon) + \sqrt{1-2c\varepsilon t} + \int_{s_0}^s \frac{1}{2\phi(\xi)^2} d\xi \right). \quad (4.97)$$

Burada s_0 bir sabit, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ve $\phi = \phi(s)$ fonksiyonu kendisi ve türevi sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyondur.

İspat. Kabul edilsin ki M , (4.76) ile parametrize edilen bir CPD yüzey olsun. $\phi = \phi(s)$ fonksiyonu kendisi ve türevi sıfırdan farklı düzgün bir fonksiyon olduğundan, M düz bir yüzey ise, yani (4.96) de verilen S şekil operatörü için, $\det S = 0$ ise, buradan $\gamma_0'(t) = 0$ sonucuna varılır. Böylece c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $\gamma_0(t) = c$ elde edilir. Bu ifade (4.76) de yerine yazılırsa, (4.97) yüzeyi doğrudan hesaplama ile elde edilebilir. ■

Sonuç 4.20. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında light-like sabit bir vektör ile ilişkili asli kanonik doğrultuya (CPD) ve köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip minimal (maximal) yüzey,

$$x(s, t) = \left(\frac{(c_1 + s)^3}{c_2} + c_1 t, (s - c_1)\sqrt{1-2t\varepsilon}, \frac{(c_1 + s)^3}{c_2} + c_1 t + s(t - \varepsilon) \right) \quad (4.98)$$

şeklinde parametrize edilen bir yüzeye denktir. Burada, $c_2 > 0, c_1$ keyfi sabitler ve $\varepsilon = -1$ ($\varepsilon = 1$).

İspat. Kabul edilsin ki M , (4.76) ile parametrize edilen minimal (maximal) bir CPD yüzey olsun.

Eğer M minimal (maximal) bir CPD yüzeyi aynı zamanda düz bir yüzey olmadığı Sonuç 4.13 de belirtilmişti. Böylece M minimal (maksimal) bir CPD yüzeyi için, $\det S \neq 0$ olmalıdır. Bu taktirde Sonuç 4.19 den, $\gamma'_0(t) \neq 0$ dır. Burada t -parametresinin uygun bir değişimiyle, $\gamma_0(t) = t$ olarak alınabilir. Bu ifade (4.96) de yerine yazılırsa,

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon\phi'(s) & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon\phi(s)}{\sqrt{1-2\varepsilon t}b(t)+s} \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

olur. Minimallik (maksimallik) koşulundan, yani $\text{tr}S = 0$ özelliğinden,

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon t}b(t)+s} = 0 \quad (4.100)$$

elde edilir. Son ifade de t -parametresine göre türev alınırsa,

$$b(t) = \frac{c_1}{\sqrt{1-2\varepsilon t}} \quad (4.101)$$

bulunur. Burada c_1 sıfırdan farklı bir sabittir. Son olarak bu ifade (4.100) denkleminde yerine yazılırsa, c_2 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\phi(s) = \frac{c_2}{c_1 + s} \quad (4.102)$$

şeklinde elde edilir ve böylece $\gamma_0(t) = t$, (4.101) ve (4.102) ifadeleri, (4.76) de göz önünde bulundurulursa, (4.98) yüzeyi elde edilir. ■

4.2 Sabit Açık Yüzeyleri

Bu alt bölümde, Tanım 1.2 ve Açıklama 1.5 göz önünde bulundurularak, c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $k = (c, 0, c)$ light-like sabit vektörü ile ilişkili CAS yüzeyleri sınıflandırılacaktır.

Teorem 4.21. M , $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip yönlendirilmiş bir yüzey olsun. O zaman, M yüzeyinin light-like sabit vektörü ile ilişkili bir CAS yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin aşağıda verilen yüzeye denk olmasıdır:

$$x(s, t) = s \left(\frac{c}{2}(1 - \varepsilon - \varepsilon t^2) + \frac{\varepsilon}{c}, t, \frac{c}{2}(1 - \varepsilon - \varepsilon t^2) \right) + \int_0^t a(\tau) (-c\varepsilon\tau, 1, -c\varepsilon\tau) d\tau \quad (4.103)$$

Burada, $a(t)$ düzgün bir fonksiyon, c sıfırdan farklı bir sabit ve $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Ayrıca, $\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon = -\langle N, N \rangle$ olmak üzere, $(c, 0, c)^T = \phi(s)e_1$ teğet vektör alanı (4.103) ile verilen yüzeyin asli bir doğrultusudur.

İspat. Kabul edilsin ki N , $\varepsilon = -\langle N, N \rangle$ olacak şekilde M yüzeyinin birim normal vektör alanı ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dönüşümü bir izometrik daldırma olsun. Ayrıca, e_1 birim teğet vektör alanı $k^T = (c, 0, c)^T$ ile orantılı ve e_2 space-like birim teğet vektör alanı $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda (4.1) ayrışımı

$$(c, 0, c) = \varepsilon(e_1 - N) \quad (4.104)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon$ dur.

Gerek koşulu ispatlamak için e_1 teğet vektörü, M yüzeyinde k_1 asli eğriliğine karşılık gelen asli doğrultu olarak alınsın. Böylece (4.104) eşitliğinde, $\tilde{\nabla}_X(1, 0, 1) = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$0 = \varepsilon \nabla_X e_1 + \varepsilon h(e_1, X) + \varepsilon S X, \quad (4.105)$$

elde edilir. Burada X vektörü M yüzeyine teğet bir vektördür. (4.105) ifadesinde $X = e_1$ olarak alınırsa,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad (4.106a)$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (4.106b)$$

$$S e_1 = 0, \quad (4.106c)$$

$$h(e_1, e_1) = 0 \quad (4.106d)$$

elde edilir. Eğer (4.105) ifadesinde $X = e_2$ alınırsa,

$$\nabla_{e_2} e_1 = -k_2 e_2, \quad (4.106e)$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \varepsilon k_2 e_1, \quad (4.106f)$$

$$S e_2 = k_2 e_2, \quad (4.106g)$$

$$h(e_1, e_2) = 0 \quad (4.106h)$$

elde edilir. Burada $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olmak üzere, e_2 vektörü M yüzeyinde k_2 asli eğriliğine karşılık gelen diğer bir asli doğrultudur. Ayrıca Codazzi denklemleri,

$$e_1(k_2) = k_2^2 \quad \text{ve} \quad e_2(k_1) = 0 \quad (4.107)$$

şeklindedir.

Kabul edilsin ki $p \in M$ olsun. Light-like sabit doğrultu ile ilişkili CAS yüzeylerinin sınıflandırılmasını yapabilmek için, öncelikle aşağıda verilen iddia ispatlanacaktır.

İddia 4.22. M üzerinde $a(t)$ ve $b(t)$ düzgün fonksiyonları için,

$$e_1 = \partial_s, e_2 = \frac{1}{b(t)(a(t) + s)} \partial_t$$

olacak şekilde p noktasının bir N_p komşuluğu vardır. Ayrıca, N_p deki indirgenmiş metrik tensör,

$$g = \varepsilon ds^2 + b^2(t)(a(t) + s)^2 dt^2 \quad (4.108)$$

şeklindedir.

İddia 4.22'nin ispatı. (4.106a) ve (4.106e) eşitliklerinden, $[e_1, e_2] = k_2 e_2$ olur. Ayrıca, bu eşitlik

$$e_1(G) = -k_2 G \quad (4.109)$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir G fonksiyonu için, $[e_1, G e_2] = 0$ haline dönüşür. Bu da demektir ki Yardımcı Teorem 2.47 den, $e_1 = \partial_s$ ve $e_2 = \frac{1}{G} \partial_t$ olacak şekilde bir (s, t) yerel koordinat sistemi vardır. Böylece, M üzerindeki indirgenmiş metrik tensör,

$$g = \varepsilon ds^2 + G^2 dt^2 \quad (4.110)$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan, $e_1 = \partial_s$ olduğu, (4.107) deki ilk denklemde ve (4.109) denkleminde göz önünde bulundurulursa, sırasıyla,

$$(k_2)_s = k_2^2 \quad (4.111)$$

ve

$$G_s = -k_2 G \quad (4.112)$$

olur. Şimdi (4.112) denkleminde s -parametresine göre türev alınır ve burada (4.111) denklemi göz önüne alınırsa, $G_{ss} = 0$ elde edilir. Buradan $a(t)$ ve $b(t)$ birer düzgün fonksiyonlar olmak üzere, $G(s, t) = b(t)(a(t) + s)$ dir ve bu ifade (4.110) da yerine yazılırsa, (4.108) ifadesi elde edilir.

Dolayısıyla, İddia 4.22 ispatlanmıştır. ■

Kabul edilsin ki M , light-like sabit doğrultu ile ilişkili bir CAS yüzeyi ve üzerindeki (s, t) yerel koordinat sistemi İddia 4.22 deki gibi tanımlansın. O zaman

$$e_1 = x_s, \quad e_2 = \frac{1}{b(t)(a(t) + s)} x_t \quad (4.113)$$

şeklidedir. Yukarıdaki gibi tanımlı (s, t) koordinat sistemi, (4.106) ifadelerinde göz önüne alınır ve ilgili denklemler Gauss formülünde yerlerine yazılırsa,

$$x_{ss} = 0, \quad (4.114a)$$

$$x_{st} = \frac{1}{s + a(t)} x_t \quad (4.114b)$$

elde edilir. Şimdi (4.104) ayrışımında, $e_1 = x_s$ olduğu göz önüne alınırsa, $\langle x_s, (c, 0, c) \rangle = \varepsilon$ ve $\langle x_t, (c, 0, c) \rangle = 0$ olduğu kolayca görülür. Böylece x parametrizasyonu

$$x(s, t) = \left(x_3(s, t) + \frac{\varepsilon}{c} s, x_2(s, t), x_3(s, t) \right) \quad (4.115)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, son denklemde (4.114a) denklemi göz önüne alınırsa,

$$x(s, t) = s \left(\beta_1(t) + \frac{\varepsilon}{c}, \beta_2(t), \beta_1(t) \right) + \gamma(t) \quad (4.116)$$

olur. Burada β_1, β_2 bazı düzgün fonksiyonlar ve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ ise, $\mathbb{E}_1^3$ -değerli düzgün bir fonksiyondur. Şimdi $\langle x_s, x_s \rangle = \varepsilon$ olduğu, (4.116) eşitliğinde göz önünde bulundurulursa, bu eşitlik

$$x(s, t) = s \left(\frac{c}{2} - \frac{\varepsilon c}{2} - \frac{\varepsilon c}{2} \beta_2^2(t) + \frac{\varepsilon}{2} \beta_2(t), \frac{c}{2} - \frac{\varepsilon c}{2} - \frac{\varepsilon c}{2} \beta_2^2(t) \right) + \gamma(t) \quad (4.117)$$

ifadesine dönüşür. Genelleği bozmaksızın, $\beta_2(t) = t$ olarak alınır ve (4.117) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$x(s, t) = s \left(\frac{c}{2} (1 - \varepsilon - \varepsilon t^2) + \frac{\varepsilon}{c}, t, \frac{c}{2} (1 - \varepsilon - \varepsilon t^2) \right) + \gamma(t) \quad (4.118)$$

elde edilir. Bu denklemde (4.114b) ifadesi göz önünde bulundurulursa, γ fonksiyonu doğrudan hesaplama ile

$$\gamma(t) = \int_0^t a(\tau) (-c\varepsilon\tau, 1, -c\varepsilon\tau) d\tau \quad (4.119)$$

olarak elde edilir. Son olarak (4.119) ifadesi, (4.118) ifadesinde yerine yazılırsa, (4.103) yüzeyi bulunur. Dolayısıyla, teoremin ispatının gerek koşulu ispatlanmış olur.

Yeter koşulunun ispatı, tersine doğrudan hesaplama ile gösterilebilir. ■

5 $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski Uzayındaki Genelleştirilmiş Sabit Oran Hiperyüzeyleri

$\mathbb{E}^3$, Öklid 3–uzayındaki GCR yüzeylerinin sınıflandırılması [21] de, $\mathbb{E}^n$, Öklid uzayındaki GCR hiperyüzeylerinin sınıflandırılması [55] de ve $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3–uzayındaki GCR yüzeyler sınıflandırılması da [16, 22, 56] makalelerinde verilmiştir. Bu bölümde öncelikle [16] makalesinde elde edilen, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzaylarındaki GCR hiperyüzeylerinin bazı geometrik özellikleri verilecek ve daha sonrasında $\mathbb{E}_1^4$, Minkowski uzayındaki space-like GCR hiperyüzeylerinin sınıflandırılması problemi çalışılacaktır.

$\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında dejenere olmamış bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve x bu yüzeyin konum vektörü olsun. Bu taktirde x vektör alanı,

$$x = x^T + x^\perp, \quad (5.1)$$

şeklinde ayrıştırılır. Burada x^T ve $x^\perp$ ifadeleri, sırasıyla, x 'in teğet ve normal bileşenleridir.

Açıklama 5.1. Eğer $x^T = 0$ ise, bu taktirde x konum vektörü, hiperyüzeyin normal uzayındadır. Dolayısıyla $r \neq 0$ bir sabit olmak üzere, $\langle x, x \rangle = r^2$ dir. Böylece $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki bir M hiperyüzeyi, r sabitinin işaretine göre, $\mathbb{S}_1^n(r^2)$ ve $\mathbb{H}^n(-r^2)$ yarı-Riemann uzay formlarının açık bir parçası olur. Eğer $x^\perp = 0$ ise, bu taktirde x vektör alanı hiperyüzeye teğettir. Dolayısıyla $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki M hiperyüzeyi, bir hiperdüzlemin açık bir parçasından ibarettir.

Bu bölümde bu durumlar göz ardı edilecek, yani, $x^T \neq 0$ ve $x^\perp \neq 0$ durumları incelenecektir.

Teorem 5.2. M , $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında bir dejenere olmamış GCR hiperyüzeyi olsun. Bu taktirde, x konum vektörünün teğet bileşeni, x^T light-like vektör olamaz.

İspat. Kabul edilsin ki M GCR hiperyüzeyinin, x konum vektörünün teğet bileşeni $x^T = f_1$ light-like bir teğet vektör olsun. Bu taktirde, M bir time-like yüzeydir ve

$$x = f_1 + \langle x, x \rangle N \quad (5.2)$$

şeklindedir. M bir GCR hiperyüzey olduğundan, f_1 teğet vektör alanı M yüzeyinin bir öz-vektörü olacaktır. Yani, k_1 diferensiyellenebilir fonksiyonu için, $S f_1 = k_1 f_1$ dir. Ayrıca M bir time-like yüzey olduğundan, $\langle f_1, f_2 \rangle = -1$ olacak şekilde f_2 light-like teğet vektör alanı vardır ve böylece $\langle S f_1, f_2 \rangle = -k_1$ dir. Ayrıca (2.19) denkleminde, $h(f_1, f_2) = -k_1 N$ bulunur. (5.2) eşitliğinde, f_2 teğet vektörü yönünde türev alınır ve $\widetilde{\nabla}_{f_2} x = f_2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$f_2 = \nabla_{f_2} f_1 + h(f_1, f_2)N + f_2(\langle x, x \rangle)N - \langle x, x \rangle S f_2 \quad (5.3)$$

elde edilir. Bu eşitliğin normal kısmı;

$$k_1 = f_2(\langle x, x \rangle) = -2$$

olur ve teğet kısmından ise,

$$-1 = \langle x, x \rangle \langle S f_2, f_1 \rangle$$

şeklinde bulunur. Elde edilen son iki eşitlikten, $\langle x, x \rangle = -\frac{1}{2}$ dir. Böylece M hiperyüzeyi, $\mathbb{H}^n(-2)$ hiperyüzeyinin açık bir parçasıdır. Fakat bu durum Açıklama 5.1 ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Böylece M GCR hiperyüzeyleri için, x^T teğet vektörü lightlike olamaz. ■

Açıklama 5.3. Açıklama 5.1 ve Teorem 5.2'den dolayı, bu bölüm boyunca M , GCR hiperyüzeyinin x konum vektörünün, x^T teğet bileşeni için, $\langle x^T, x^T \rangle \neq 0$ olarak kabul edilecektir.

Aşağıdaki önerme Yardımcı Teorem 2.48 un doğrudan bir sonucudur:

Önerme 5.4. M , $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında bir space-like GCR hiperyüzey olsun. M üzerinde, $\mathbf{D} = \text{Span}\{e_2, \dots, e_n\}$ ve $\mathbf{D}^\perp = \text{Span}\{e_1\}$ distribüsyonları integrallenebilir.

Aşağıdaki önerme ile GCR hiperyüzeylerinin bir geometrik özelliği elde edilecektir.

Önerme 5.5. $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve x ise, bu hiperyüzeyin konum vektörü olsun. $e_1 = \frac{x^T}{\varepsilon \langle x^T, x^T \rangle^{\frac{1}{2}}}$ olmak üzere, M hiperyüzeyinin bir GCR hiperyüzey olması için gerek ve yeter koşul e_1 vektör alanının tüm integral eğrilerinin, M hiperyüzeyinin jeodezikleri olmasıdır.

İspat. x^T 'nin time-like ve space-like olma durumları ayrı ayrı incelenecektir:

Durum I. Kabul edilsin ki, x^T time-like vektör olsun. Bu durumda, $e_1 = x^T / (-\langle x^T, x^T \rangle)^{1/2}$ time-like vektördür ve M bir time-like hiperyüzeydir. Böylece, x konum vektörü

$$x = -\langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, N \rangle N$$

şeklinde yazılır. $\widetilde{\nabla}_{e_1} x = e_1$ olduğu, son eşitlikte göz önünde bulundurulursa,

$$e_1 = (1 - \langle x, N \rangle \langle S e_1, e_1 \rangle) e_1 - \langle x, e_1 \rangle \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 + \langle x, S e_1 \rangle N - \langle x, N \rangle S e_1,$$

elde edilir. Ayrıca M , GCR hiperyüzey olduğundan, $S e_1 = k_1 e_1$ dir. Dolayısıyla son eşitlikten, $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ olur. Yani, e_1 in integral eğrileri jeodeziktir. Tersine, $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ olsun. Son denklemden, bazı k_1 diferensiyellenebilir fonksiyonları için, $S e_1 = k_1 e_1$ bulunur. Dolayısıyla, M bir GCR hiperyüzeydir.

Durum II. Kabul edilsin ki, x^T space-like vektör olsun. Bu durumda, $e_1 = x^T / (\langle x^T, x^T \rangle)^{1/2}$ space-like vektördür. Böylece,

$$x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \varepsilon \langle x, N \rangle N, \quad (5.4)$$

olacaktır. Burada, ε değeri M yüzeyinin time-like veya space-like olması durumlarına göre, sırasıyla, 1 veya -1 dir. Durum I dekine benzer şekilde, $S e_1 = k_1 e_1$ olması için gerek ve yeter şart $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. ■

$\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş space-like bir M GCR hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve bu hiperyüzeyin x konum vektörü, $\mu = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ koşulunu sağlasın. M bir space-like hiperyüzey olduğundan, N birim normal vektör alanı time-like bir vektördür, yani, $\langle N, N \rangle = -1$ dir. $i = 1, \dots, n$ olmak üzere, e_i teğet vektörleri ve k_i diferensiyellenebilir fonksiyonları, M GCR hiperyüzeyinin, sırasıyla, asli doğrultuları ve bunlara karşılık gelen asli eğrilikler olsun. Ayrıca, $\langle x^T, x^T \rangle \neq 0$ ve $e_1 = \frac{x^T}{\langle x^T, x^T \rangle^{1/2}}$ olduğu varsayılınsın. Ayrıca M hiperyüzeyi space-like olduğundan, yerel olarak $\mu \neq 0$ olduğu kabul edilebilir. Böylece M hiperyüzeyinin x konum vektörü için, $\langle x, x \rangle = \mu^2$ veya $\langle x, x \rangle = -\mu^2$ olacak şekilde iki farklı durum söz konusu olacaktır:

Durum A. $\langle x, x \rangle = \mu^2$ olsun. Bu durumda, (5.1) eşitliği bazı düzgün θ ve μ fonksiyonları için,

$$x = \mu \cosh \theta e_1 - \mu \sinh \theta N \quad (5.5)$$

şeklinde yazılır. $\langle x, x \rangle = \mu^2$ olduğundan,

$$e_1(\mu) = \cosh\theta, \quad (5.6a)$$

$$e_j(\mu) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (5.6b)$$

olur. (5.5) ayrışımında, (5.6) eşitlikleri ve ayrıca $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad (5.7a)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\cosh^2\theta + \mu \sinh\theta e_1(\theta) + k_1 \mu \sinh\theta) e_1 \\ &\quad (-k_1 \mu \cosh\theta - \sinh\theta \cosh\theta - \mu \cosh\theta e_1(\theta)) N, \end{aligned} \quad (5.7b)$$

$$\begin{aligned} e_j &= \mu \sinh\theta e_j(\theta) e_1 + \mu \cosh\theta \nabla_{e_j} e_1 \\ &\quad - \mu \cosh\theta e_j(\theta) N + k_j \mu \sinh\theta e_j, \quad j = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (5.7c)$$

elde edilir. Buradan,

$$k_1 = -e_1(\theta) - \frac{\sinh\theta}{\mu}, \quad (5.8a)$$

$$e_j(\theta) = 0, \quad (5.8b)$$

$$\nabla_{e_j} e_1 = \frac{1 - k_j \mu \sinh\theta}{\mu \cosh\theta} e_j \quad (5.8c)$$

olur.

Durum B. $\langle x, x \rangle = -\mu^2$ olsun. Bu durumda, (5.1) eşitliği bazı düzgün θ ve μ fonksiyonları için,

$$x = \mu \sinh\theta e_1 - \mu \cosh\theta N \quad (5.9)$$

şeklinde yazılır. $\langle x, x \rangle = -\mu^2$ olduğundan,

$$e_1(\mu) = -\sinh\theta, \quad (5.10a)$$

$$e_l(\mu) = 0, \quad l = 2, 3, \dots, n \quad (5.10b)$$

olur. (5.9) ayrışımında, (5.10) eşitlikleri ve ayrıca $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ olduğu göz önünde bulunduru-

lursa,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sinh^2 \theta + \mu \cosh \theta e_1(\theta) + k_1 \mu \cosh \theta) e_1 \\ &\quad (-k_1 \mu \sinh \theta - \sinh \theta \cosh \theta - \mu \sinh \theta e_1(\theta)) N, \end{aligned} \quad (5.11b)$$

$$\begin{aligned} e_l &= \mu \cosh \theta e_l(\theta) e_1 + \mu \sinh \theta \nabla_{e_l} e_1 \\ &\quad - \mu \sinh \theta e_l(\theta) N + k_l \mu \cosh \theta e_l, \quad l = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (5.11c)$$

elde edilir. Buradan,

$$k_1 = -e_1(\theta) - \frac{\cosh \theta}{\mu}, \quad (5.12a)$$

$$e_l(\theta) = 0, \quad (5.12b)$$

$$\nabla_{e_l} e_1 = \frac{1 - k_l \mu \cosh \theta}{\mu \sinh \theta} e_l \quad (5.12c)$$

olur. Ayrıca her iki durum için de M space-like bir hiperyüzey olduğundan, S şekil operatörü köşegenleştirilebileceği, yani, $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $S(e_i) = k_i e_i$ ifadeleri göz önünde bulundurularak, (2.20) Codazzi denklemleri (j, i, j) ve (i, j, k) üçlülere için, sırasıyla,

$$e_i(k_j) = \omega_{ij}(e_j)(k_i - k_j), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

ve

$$\omega_{ij}(e_k)(k_i - k_j) = \omega_{ik}(e_j)(k_i - k_k), \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad (5.14)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, yukarıda elde edilen tüm hesaplamalar göz önünde bulundurularak aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 5.6. $M, \mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında dejenere olmamış space-like bir hiperyüzey ve x , bu hiperyüzeyin konum vektörü olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin bir GCR hiperyüzey olması için gerek ve yeter koşul Y , M hiperyüzeyinde teğet bir vektör olmak üzere; $\langle Y, x^T \rangle = 0$ koşulunu sağlayan tüm Y vektörleri için, $Y(\theta) = 0$ olmasıdır. Burada θ ; (5.5) (sırasıyla, (5.9)) eşitliğinde tanımlanan açı fonksiyonudur.

İspat. Kabul edilsin ki, M space-like bir GCR hiperyüzey ve x ise, bu hiperyüzeyin konum vektörü olsun. Bu durumda, x konum vektörü, (5.5) veya (5.9) ile belirtilen ayrışımardan biridir. Gerek koşulun ispatı, sırasıyla, (5.8b) veya (5.12b) eşitliklerinden doğrudan görülmektedir. Terside de doğrudan hesaplama ile gösterilir. ■

Ayrıca, (5.8) ve (5.12) eşitliklerinin doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilir:

Önerme 5.7. M , $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında space-like bir GCR hiperyüzey ve e_1 , x^T teğet vektörü boyunca birim teğet vektör alanı olsun. O zaman $e_1 = \partial_{\hat{s}}$ olacak şekilde bir $\hat{s}$ yerel koordinat fonksiyonu vardır.

İspat. $\langle x, x \rangle > 0$ için benzer şekilde olacağından, sadece $\langle x, x \rangle < 0$ durumu için ispatı yeterli olacaktır:

Kabul edilsin ki; $e_1, \dots, e_n$ ortonormal bazının dual bazı $\omega_1, \dots, \omega_n$ olsun. (5.11a) ve (5.12a) eşitliklerinden, $d\omega_1 = 0$ elde edilir. Böylece, ω_1 kapalıdır. Poincare Lemmasından (bkz. [8]), ω_1 lokal olarak tamdır, yani, $\omega_1 = d\hat{s}$ olacak şekilde $\hat{s}$ yerel koordinat fonksiyonu vardır. ■

Bundan sonraki kısımlarda, aksi belirtilmedikçe M hiperyüzeyi $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında (2.22) Gauss-Kronicker eğriliği sıfır olan space-like bir GCR hiperyüzey olarak alınacaktır ve bu hiperyüzeyleri için sınıflandırılma yapılacaktır. Dolayısıyla bunu yapabilmek için, Teorem 5.2 göz önünde bulundurularak, M space-like GCR hiperyüzeyinin x konum vektörünün space-like ve time-like olacak şekilde iki farklı durumu incelenecektir:

5.1 Space-like konide yatan hiperyüzeyler

Bu alt bölümde, $\langle x, x \rangle = \mu^2$ şartını sağlayan M hiperyüzeyleri incelenecektir. Bu durumda, x konum vektörü daha önce tanımlanan θ , μ düzgün fonksiyonları için, (5.5) eşitliğindeki gibi ifade edilir. Dolayısıyla, $n = 3$ için, (5.6)-(5.8), (5.13) ve (5.14) denklemleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki yardımcı teorem doğrudan verilir:

Yardımcı Teorem 5.8. M GCR hiperyüzeyinin ∇ , Levi-Civita konneksiyonu,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \omega_{23}(e_1)e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -\omega_{23}(e_1)e_2, \quad (5.15a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \omega_{12}(e_2)e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\omega_{12}(e_2)e_1 + \omega_{23}(e_2)e_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = -\omega_{23}(e_2)e_2, \quad (5.15b)$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = \omega_{13}(e_3)e_3, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -\omega_{23}(e_3)e_3, \quad \nabla_{e_3} e_3 = -\omega_{13}(e_3)e_1 - \omega_{23}(e_3)e_2 \quad (5.15c)$$

eşitliklerini sağlar. Burada $l = 2, 3$ olmak üzere, $\omega_{1l}(e_l) = \frac{1 - \mu \sinh \theta k_l}{\mu \cosh \theta}$ dir. Ayrıca $i, j, k = 1, 2, 3$ için, k_1, k_2, k_3 asli eğrilik fonksiyonları,

$$\omega_{23}(e_1)(k_2 - k_3) = 0, \quad (5.16a)$$

$$e_2(k_1) = e_3(k_1) = 0, \quad (5.16b)$$

$$e_1(k_2) = \omega_{12}(e_2)(k_1 - k_2), \quad e_3(k_2) = \omega_{23}(e_2)(k_2 - k_3), \quad (5.16c)$$

$$e_1(k_3) = \omega_{13}(e_3)(k_1 - k_3), \quad e_2(k_3) = \omega_{23}(e_3)(k_2 - k_3), \quad (5.16d)$$

denklemlerini sağlar.

Şimdi, M space-like GCR hiperyüzeyleri için, sınıflandırma teoremi verilmeden önce aşağıdaki örnekler verilecektir:

Örnek 5.1. $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında bir $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ hipersilindiri göz önüne alınsın. Böylece M hipersilindirinin parametrisasyonu,

$$x(s, t, u) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t), u)$$

şeklinde ve normali $N(s, t) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t), 0)$ dir. Dolayısıyla, $x = u \frac{\partial}{\partial u} + N$ olarak yazılır. Bununla birlikte $\frac{\partial}{\partial u}$ teğet vektörü, $k_1 = 0$ asli eğriliğine karşı gelen asli doğrultudur. Sonuç olarak, M hipersilindiri Gauss-Kronicker eğriliği sıfır olan bir GCR hiperyüzeyidir.

Örnek 5.2. $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{S}_1^3(1) \subset \mathbb{E}_1^4$ birim hızlı bir eğri ve $F_1(u), F_2(u)$; bu α eğrisinin normal uzayını geren iki ortonormal vektör olsun, yani,

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \alpha \rangle = \langle F_1, \alpha' \rangle = \langle F_2, \alpha \rangle = \langle F_2, \alpha' \rangle = 0, \quad (5.17)$$

$$\langle F_1, F_1 \rangle = \langle F_2, F_2 \rangle = 1 \quad (5.18)$$

eşitliklerini sağlasın. c , sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında parametrisasyonu

$$x(s, t, u) = s\alpha(u) - c \left(F_1(u) \cosh\left(\frac{t}{c}\right) + F_2(u) \sinh\left(\frac{t}{c}\right) \right) \quad (5.19)$$

olan M hiperyüzeyi göz önüne alınsın. Bu durumda, doğrudan hesaplama ile M hiperyüzeyinin birim normali, $N = \left(F_1(u) \cosh\left(\frac{t}{c}\right) + F_2(u) \sinh\left(\frac{t}{c}\right) \right)$ ve asli doğrultuları ise, sırasıyla, $0, \frac{1}{c}, k_3$ asli eğriliklerine karşılık gelen $e_1 = \partial_s = \alpha(u)$, $e_2 = \partial_t$, $e_3 = \frac{1}{\|x_u\|} \partial_u$ vektörleridir. Ayrıca

birinci asli eğriliği $k_1 = 0$ olduğu göz önüne alınır, hiperyüzeyin Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır olan bir GCR hiperyüzeyidir.

Örnek 5.3. $\Lambda, \mathbb{R}^2$ de bir açık cümle olmak üzere, $y : \Lambda \longrightarrow \mathbb{S}_1^3(1) \subset \mathbb{E}_1^4$ regüler bir yüzey ve N ise; y yüzeyinin $\mathbb{S}_1^3(1)$ deki birim normal vektör alanı olsun. c , sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında

$$\begin{aligned} x : I \times \Lambda &\longrightarrow \mathbb{E}_1^4, \\ x(s, t, u) &= sy(t, u) - cN(t, u) \end{aligned} \quad (5.20)$$

ile parametrize edilen M hiperyüzeyi göz önüne alınsın. Burada N vektörü y yüzeyinin küresel normalidir olduğundan,

$$\langle y_t, N \rangle = \langle y_s, N \rangle = \langle y, N \rangle = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece (5.20) ifadesinde yukardaki eşitlikler önüne alınır, doğrudan hesaplama ile

$$\langle x_t, N \rangle = \langle x_s, N \rangle = \langle x_u, N \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan N vektörünün, aynı zamanda M hiperyüzeyinin de birim normalidir olduğu sonucuna varılır. Ayrıca (5.20) ifadesinden, $x_{ss} = 0$, $\langle x_{st}, N \rangle = 0$ ve $\langle x_{tt}, N \rangle = 0$ olur. Buradan, M üzerindeki her X teğet vektör alanı için $h(\partial_s, X) = 0$ olur, bu da demektir ki $S(\partial_s) = 0$ dır. Böylece, M yüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği sıfırdır ve $\partial_s = y(t, u)$; bu hiperyüzeyin bir asli doğrultusudur. Dolayısıyla, M bir GCR hiperyüzeyidir.

Bu bölümün geri kalan kısmında aşağıdaki teorem ispatlanacaktır:

Teorem 5.9. $M, \mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır olan space-like bir hiperyüzey olsun. Eğer M , GCR hiperyüzeyi ise, bu taktirde bu hiperyüzey aşağıdaki üç hiperyüzeyden birine denktir:

1. Örnek 5.1 de verilen hipersilindirin açık bir parçasıdır,
2. Örnek 5.2 de, (5.19) ile parametrize edilen bir hiperyüzeydir,
3. Örnek 5.3 de, (5.20) ile parametrize edilen bir hiperyüzeydir.

Teoremin ispatının yapılabilmesi için aşağıdaki önerme ve bu önermenin önemli bir sonucu ispatlanacaktır:

Önerme 5.10. $M, \mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında space-like bir GCR hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır ise, bu taktirde hiperyüzeyin k_1 , birinci asli eğriliği sıfırdır, yani,

$$e_1(\theta) = -\frac{\sinh \theta}{\mu} \quad (5.21)$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında M bir space-like GCR hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve bu hiperyüzeyin Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır, yani düz bir hiperyüzey olsun.

Kabul edilsin ki, bir $p \in M$ noktasında asli eğrilikleri, sırasıyla, k_1, k_2, k_3 ve birinci asli eğriliği sıfırdan farklı olsun. O zaman, $p \in M$ noktasının bir $\mathcal{N}_p$ komşuluğunda $k_1 \neq 0$ dır. M bir space-like GCR hiperyüzey olduğundan, S şekil operatörü köşegenleştirilebilirdir ve ayrıca hiperyüzey düz olduğundan, $\det S = k_1 k_2 k_3 = 0$ dır. Burada $k_1 \neq 0$ olarak alındığından, $\mathcal{N}_p$ üzerindeki her noktada $k_2 = 0$ veya $k_3 = 0$ olur.

Genelliği bozmaksızın, $k_2 = 0$ olduğu varsayılınsın. Bu durumda Yardımcı Teorem 5.8 'den $l = 2$ için, $\omega_{12}(e_2) = \frac{1}{\mu \cosh \theta}$ olur. Diğer taraftan, (5.16c) denklemlerin ilkinden ise, $\mathcal{N}_p$ üzerinde $0 = \frac{1}{\mu \cosh \theta} k_1$ elde edilir ki, bu sonuç bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır ve böylece $k_1 = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak bu eşitlik, (5.12a) da yerine yazılırsa, (5.21) denklemi elde edilir. ■

Sonuç 5.11. $M, \mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında space-like bir GCR hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır ise, (5.5) ile verilen x konum vektörü,

$$x = f e_1 - c N \quad (5.22)$$

ayrışımına dönüşür. Buradaki f fonksiyonu,

$$e_1(f) = 1, \quad e_2(f) = e_3(f) = 0 \quad (5.23)$$

eşitliklerini sağlayan düzgün bir fonksiyon ve c , sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat. Kabul edilsin ki, M space-like GCR hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır, yani, (5.21) ifadesini sağlasın. Bu taktirde bu ifade ve $n = 3$ için, (5.6) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$e_1(\mu \cosh \theta) = \cosh \theta \cosh \theta + \mu \sinh \theta \left(-\frac{\sinh \theta}{\mu} \right) = 1, \quad (5.24a)$$

$$e_1(\mu \sinh \theta) = \cosh \theta \sinh \theta + \mu \cosh \theta \left(-\frac{\sinh \theta}{\mu} \right) = 0 \quad (5.24b)$$

olur. Bu eşitlikler (5.5) ayrışımında göz önüne alınırsa, (5.23) ile tanımlı düzgün bir f fonksiyonu için, doğrudan hesaplama ile (5.22) ayrışımı elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.9'un ispatı. Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır olan bir M GCR hiperyüzeyinin x konum vektörü, (5.22) ile bellidir. Dikkat edilirse, $j = 2, 3$ olmak üzere, $\omega_{1j}(e_j) = \frac{1 - \mu \sinh \theta k_j}{\mu \cosh \theta}$ olduğundan, (5.24) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\omega_{1j}(e_j) = \frac{1 - ck_j}{f}, j = 2, 3 \quad (5.25)$$

olur. Ayrıca, (5.15) eşitlikleri göz önüne alınırsa, $[e_2, e_3] = -\omega_{23}(e_2)e_2 - \omega_{23}(e_3)e_3$ olur. Dolayısıyla Tanım 2.42 den, $\mathbf{D}^\perp = \text{Span}\{e_2, e_3\}$ distribüsyonu involutiftir ve ayrıca $\mathbf{D} = \text{Span}\{e_1\}$ distribüsyonunun involutif olduğu açıktır. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.46 den, $\mathbf{D} = \text{Span}\{\partial_s\}$ ve $\mathbf{D}^\perp = \text{Span}\{\partial_t, \partial_u\}$ olacak şekilde (s, t, u) koordinat sistemi vardır. Diğer taraftan, Önerme 5.10 da bahsedildiği gibi M hiperyüzeyi düz olduğundan, birinci asli eğriliğinin sıfır olduğunu biliyoruz. Böylece doğrudan hesaplama ile $\widetilde{\nabla}_{e_1} N = 0$ ve $\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = 0$ elde edilir. Buradan, $e_1 = e_1(t, u)$ ve $N = N(t, u)$ sonucuna varılır. Ayrıca (5.23) eşitliklerinden, $f = f(s)$ elde edilir. Böylece elde edilen bu ifadeler, (5.22) ayrışımında yerlerine yazılırsa, x konum vektörü

$$x(s, t, u) = f(s)e_1(t, u) - cN(t, u) \quad (5.26)$$

haline gelir.

Dikkat edilirse, GCR hiperyüzeylerinin sınıflandırması yapılırken, (5.15) eşitliklerinde verilen $\nabla_{e_2} e_1$ ve $\nabla_{e_3} e_1$ Levi-Civita konneksiyonlarının sıfır olup olmadığı durumlar göz önünde bulundurulacağından, 3 farklı durum ortaya çıkacaktır. Şimdi, bu durumlar ayrı ayrı incelenecektir:

Durum 1. $\nabla_{e_2} e_1 = 0$ ve $\nabla_{e_3} e_1 = 0$ olsun. Bu durumda, (5.15b) ve (5.15c) deki ilk eşitliklerden doğrudan $l = 2, 3$ için, $\omega_{1l}(e_l) = 0$ elde edilir. Böylece (5.25) eşitliklerinden, $k_2 = k_3 = \frac{1}{c}$ elde edilir. Dolayısıyla M GCR hiperyüzeyi, asli eğrilikleri $0, 1/c, 1/c$ olan space-like bir izoparametrik hiperyüzeydir. Dolayısıyla Örnek 5.1 de verilmiş olan $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ hipersilindirin açık bir parçasıdır, (bkz. [49]). Sonuç olarak, Teoremde (1) ile verilmiş olan hiperyüzey elde edilmiş olur.

Durum 2. $\nabla_{e_2} e_1 = 0$ ve $\nabla_{e_3} e_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda, (5.15b) ve (5.15c) deki ilk eşitliklerden, sırasıyla, $\omega_{12}(e_2) = 0$ ve $\omega_{13}(e_3) \neq 0$ elde edilir. Bu eşitliklerden ilki, $j = 2$ için (5.25) de yerine yazılırsa, $k_2 = \frac{1}{c}$ elde edilir. Ayrıca bu durumda $k_2 \neq k_3$ tür ve bu ifade, (5.16a) ve (5.16c) eşitliklerinde göz önüne alınırsa, sırasıyla, $\omega_{23}(e_1) = 0$ ve $\omega_{23}(e_2) = 0$ elde edilir. Böylece (5.15) eşitliklerinden doğrudan hesaplama ile $[e_2, e_3] = \omega_{23}(e_3)e_3$, $[e_1, e_2] = 0$ ve $[e_1, e_3] = -\omega_{13}(e_3)e_3$ bulunur. Diğer taraftan, $\mathbf{D} = S \text{ pan} \{\partial_s\}$ ve $\mathbf{D}^\perp = S \text{ pan} \{\partial_t, \partial_u\}$ olduğu için,

$$e_1 = a_{11} \frac{\partial}{\partial s}, \quad (5.27a)$$

$$e_2 = a_{22} \frac{\partial}{\partial t} + a_{23} \frac{\partial}{\partial u} \quad (5.27b)$$

$$e_3 = a_{32} \frac{\partial}{\partial t} + a_{33} \frac{\partial}{\partial u}, \quad (5.27c)$$

olacak şekilde $a_{11}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$ düzgün fonksiyonları vardır. Böylece $[e_1, e_2] = 0$ ve $[e_1, e_3] = -\omega_{13}(e_3)e_3$ eşitliklerinden, sırasıyla,

$$a_{11} \left((a_{22})_s \frac{\partial}{\partial t} + (a_{23})_s \frac{\partial}{\partial u} \right) - \left(a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} + a_{23} \frac{\partial a_{11}}{\partial u} \right) = 0 \quad (5.28)$$

ve

$$a_{11} \left((a_{32})_s \frac{\partial}{\partial t} + (a_{33})_s \frac{\partial}{\partial u} \right) - \left(a_{32} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} + a_{33} \frac{\partial a_{11}}{\partial u} \right) = -\omega_{13}(e_3)e_3 \quad (5.29)$$

elde edilir. Son iki eşitliklerinden,

$$(a_{22})_s = (a_{23})_s = 0, \quad (5.30)$$

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_{11})_t \\ (a_{11})_u \end{pmatrix} = 0 \quad (5.31)$$

bulunur. Ayrıca e_2 ve e_3 vektörleri lineer bağımsız olduğundan,

$$\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$$

olur ve dolayısıyla, (5.30) den $(a_{11})_t = 0$ ve $(a_{11})_u = 0$ elde edilir. Buradan,

$$e_1 = a_{11}(s) \frac{\partial}{\partial s}, \quad (5.32a)$$

elde edilir. (5.30) ifadesi (5.27b) de göz önüne alınırsa,

$$e_2 = a_{22}(t, u) \frac{\partial}{\partial t} + a_{23}(t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (5.32b)$$

elde edilir. Şimdi $S = \Phi(s), T = \Psi_1(t, u), U = \Psi_2(t, u)$ olacak şekilde bir koordinat değişimi, yani,

$$\frac{\partial}{\partial s} = \Phi' \frac{\partial}{\partial S}, \quad (5.33a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = (\Psi_1)_t \frac{\partial}{\partial T} + (\Psi_2)_t \frac{\partial}{\partial U}, \quad (5.33b)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} = (\Psi_1)_u \frac{\partial}{\partial T} + (\Psi_2)_u \frac{\partial}{\partial U}, \quad (5.33c)$$

ifadeleri göz önüne alınsın. Buradan (5.33a) dönüşümü (5.32a) de göz önüne alınırsa, $e_1 = a_{11}(s) \Phi'(s) \frac{\partial}{\partial S}$ olur. Diğer taraftan (5.33b) ve (5.33c) dönüşümleri (5.32b) de göz önüne alınırsa,

$$e_2 = (a_{22}(\Psi_1)_t + a_{23}(\Psi_1)_u) \frac{\partial}{\partial T} + (a_{22}(\Psi_2)_t + a_{23}(\Psi_2)_u) \frac{\partial}{\partial U}$$

haline gelir. Burada Φ fonksiyonu $a_{11}(s) \Phi'(s) = 1$ denklemini ve Ψ_1, Ψ_2 fonksiyonları ise,

$$a_{22}(\Psi_1)_t + a_{23}(\Psi_1)_u = 1,$$

$$a_{22}(\Psi_2)_t + a_{23}(\Psi_2)_u = 0,$$

denklem sistemini sağlayacak şekilde seçilirse, (5.27) sistemi

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial S}, \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial T} \\ e_3 &= \tilde{a}_{32} \frac{\partial}{\partial T} + \tilde{a}_{33} \frac{\partial}{\partial U}, \end{aligned}$$

haline gelir. Durum 2'nin ispatının geri kalan kısmında, notasyon suistimal edilerek $S = s$, $T = t$, $U = u$, $\tilde{a}_{32} = a_{32}$ ve $\tilde{a}_{33} = a_{33}$ olarak alınacaktır.

Şimdi, yukarıda elde edilen sistem ve $\widetilde{\nabla}_{e_1}N = 0$, $\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 = 0$, $\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 = 0$ ve $\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1 \neq 0$ ifadeleri göz önüne alınırsa, $e_1 = e_1(u)$ ve $N = N(t, u)$ olduğu sonucuna varılır ve böylece (5.23) eşitliklerinden, parametrenin uygun bir seçimi ile $f = s$ alınabilir. Elde edilen bu sonuçlar, (5.26) ayrışımında yerlerine yazılırsa, M hiperyüzeyinin x konum vektörü,

$$x(s, t, u) = se_1(u) - cN(t, u) \quad (5.34)$$

haline gelir. Ayrıca hiperyüzeyin e_2 teğet vektörüne karşılık gelen asli eğriliği $k_2 = \frac{1}{c}$ olduğundan, doğrudan hesaplama ile $\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2 = x_{tt} = -\frac{N}{c}$ olur. Son ifadede $x_{tt} = -cN_{tt}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$c^2N_{tt} - N = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$N(t, u) = F_1(u) \cosh\left(\frac{t}{c}\right) + F_2(u) \sinh\left(\frac{t}{c}\right) \quad (5.35)$$

şeklinde. Burada N , hiperyüzeyin birim normali olduğundan, $F_1(u)$ ve $F_2(u)$

$$\langle F_1, F_1 \rangle = -1, \quad \langle F_2, F_2 \rangle = 1, \quad \langle F_1, F_2 \rangle = 0 \quad (5.36)$$

eşitliklerini sağlayan vektör değerli fonksiyonlardır ve $\langle N, e_1 \rangle = 0$ dır. Diğer taraftan, (5.34) ifadesinde $x_u = e_1'$ olur ve böylece $\langle N, x_u \rangle = 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu eşitlikler (5.35) ile birlikte göz önünde bulundurulursa,

$$\langle F_1, e_1 \rangle = \langle F_2, e_1 \rangle = 0, \quad \langle e_1', F_1 \rangle = \langle e_1', F_2 \rangle = 0 \quad (5.37)$$

olur. Burada, $\prime$ ile adi türev ifade edilmektedir. Böylece, (5.36) ve (5.37) eşitliklerini sağlayan $\{e_1, e_1'; F_1, F_2\}$ sistemi, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında bir ortonormal çatı tanımlar. Burada $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ ve $\langle e_1, e_1' \rangle = 0$ olduğundan $e_1 = e_1(u)$, gerçekten Örnek 5.2 de verilen α eğrisine karşılık gelir. Ayrıca (5.36) ve (5.37) eşitliklerinden, $\{F_1, F_2\}$ sistemi α eğrisinin normal uzayının bir bazıdır. Sonuç olarak Teoremden (2) ile verilmiş olan hiperyüzey elde edilmiş olur.

Durum 3. $\nabla_{e_2}e_1 \neq 0$ ve $\nabla_{e_3}e_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda (5.12a) denkleminde, $\nabla_{e_2}e_1$ ve $\nabla_{e_3}e_1$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\sigma : \mathbf{D}^\perp \longrightarrow \mathbf{D}^\perp,$$

$$\sigma(X) = \nabla_X e_1$$

ile verilen σ tasviri $1 - 1$ dir. Bu durumdan dolayı, $\frac{\partial(e_1)}{\partial t}$ ve $\frac{\partial(e_1)}{\partial u}$ vektörleri lineer bağımsızdır. Ayrıca $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ olduğu için,

$$y : \Lambda \longrightarrow \mathbb{S}_1^3(1) \subset \mathbb{E}_1^4,$$

$$y(t, u) = e_1(t, u)$$

tasviri regüler bir yüzey parametrizasyonu olur. Diğer taraftan, $\langle x_s, N \rangle = \langle x_t, N \rangle = \langle x_u, N \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $\langle y, N \rangle = \langle y_t, N \rangle = \langle y_u, N \rangle = 0$ bulunur. Böylece $N = N(t, u)$ vektör alanı, $y = y(t, u)$ yüzeyinin $\mathbb{S}_1^3(1)$ de Sitter uzayındaki normalidir. Bulunan sonuçlar (5.26) ayrışımında yerlerine yazılırsa,

$$x(s, t, u) = sy(t, u) + cN(t, u)$$

olur. Sonuç olarak, Teoremden (3) ile verilmiş olan hiperyüzey elde edilmiş olur.

5.2 Time-like konide yatan hiperyüzeyler

Bu alt bölümde, $\langle x, x \rangle = -\mu^2$ şartını sağlayan M space-like GCR hiperyüzeyleri incelenecektir. Bu durumda, x konum vektörü daha önce tanımlanan θ, μ düzgün fonksiyonları için, (5.9) eşitliğindeki gibi ifade edilir. Dolayısıyla $n = 3$ için, (5.10)-(5.12), (5.13) ve (5.14) denklemleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki Yardımcı Teorem doğrudan elde edilir:

Yardımcı Teorem 5.12. M hiperyüzeyinin, ∇ Levi-Civita konneksiyonu,

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \omega_{23}(e_1)e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -\omega_{23}(e_1)e_2, \quad (5.38a)$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \omega_{12}(e_2)e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\omega_{12}(e_2)e_1 + \omega_{23}(e_2)e_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = -\omega_{23}(e_2)e_2, \quad (5.38b)$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = \omega_{13}(e_3)e_3, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -\omega_{23}(e_3)e_3, \quad \nabla_{e_3} e_3 = -\omega_{13}(e_3)e_1 - \omega_{23}(e_3)e_2 \quad (5.38c)$$

eşitliklerini sağlar. Burada $l = 2, 3$ olmak üzere, $\omega_{1l}(e_l) = \frac{1 - \mu \sinh \theta k_l}{\mu \cosh \theta}$ şeklindedir. Ayrıca $i, j, k = 1, 2, 3$ için, k_1, k_2, k_3 asli eğrilik fonksiyonları,

$$\omega_{23}(e_1)(k_2 - k_3) = 0, \quad (5.39a)$$

$$e_2(k_1) = e_3(k_1) = 0, \quad (5.39b)$$

$$e_1(k_2) = \omega_{12}(e_2)(k_1 - k_2), \quad e_3(k_2) = \omega_{23}(e_2)(k_2 - k_3), \quad (5.39c)$$

$$e_1(k_3) = \omega_{13}(e_3)(k_1 - k_3), \quad e_2(k_3) = \omega_{23}(e_3)(k_2 - k_3), \quad (5.39d)$$

denklemlerini sağlar.

Şimdi, M space-like GCR hiperyüzeyleri için, sınıflandırma teoremi verilmeden önce aşağıdaki örnekler verilecektir:

Örnek 5.4. $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında bir $M = \mathbb{S}^2(\frac{1}{c^2}) \times \mathbb{E}^1$ hipersilindiri göz önüne alınsın. Böylece M hipersilindirin parametrisasyonu,

$$x(s, t, u) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t), u)$$

şeklinde ve normal $N(s, t) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t), 0)$ dır. Dolayısıyla, $x = u \frac{\partial}{\partial u} + N$ olarak yazılır. Bununla birlikte $\frac{\partial}{\partial u}$ teğet vektörü, $k_1 = 0$ asli eğriliğine karşı gelen asli doğrultudur. Sonuç olarak, M hipersilindiri Gauss-Kronicker eğriliği sıfır olan bir GCR hiperyüzeyidir.

Örnek 5.5. $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_1^4$ birim hızlı bir eğri ve $F_1(u), F_2(u)$; bu eğrinin normal uzayını geren iki ortonormal vektör olsun, yani,

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \alpha \rangle = \langle F_1, \alpha' \rangle = \langle F_2, \alpha \rangle = \langle F_2, \alpha' \rangle = 0, \quad (5.40)$$

$$\langle F_1, F_1 \rangle = \langle F_2, F_2 \rangle = 1 \quad (5.41)$$

eşitlikleri sağlansın. c , sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında parametrisasyonu

$$x(s, t, u) = s\alpha(u) - c\left(F_1(u) \cosh\left(\frac{t}{c}\right) + F_2(u) \sinh\left(\frac{t}{c}\right)\right) \quad (5.42)$$

olan M hiperyüzeyi göz önüne alınsın. Bu durumda, doğrudan hesaplama ile M hiperyüzeyinin birim normali, $N = \left(F_1(u) \cosh\left(\frac{t}{c}\right) + F_2(u) \sinh\left(\frac{t}{c}\right)\right)$ ve asli doğrultuları ise, sırasıyla, $0, \frac{1}{c}, k_3$ asli eğriliklerine karşılık gelen $e_1 = \partial_s, e_2 = \partial_t, e_3 = \frac{1}{\|x_u\|} \partial_u$ vektörleridir. Ayrıca, birinci asli eğriliği $k_1 = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, M hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır olur ve $\partial_s = \alpha(u)$ bu hiperyüzeyin bir asli doğrultusudur. Böylece M bir GCR hiperyüzeyidir.

Örnek 5.6. $\Lambda, \mathbb{R}^2$ de açık bir cümle olmak üzere, $y : \Lambda \longrightarrow \mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_1^4$ bir düzgün yüzey parametrisasyonu ve N ise; y yüzeyinin $\mathbb{H}_1^3(-1)$ deki birim normal alanı olsun. c , sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında

$$x : I \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{E}_1^4,$$

$$x(s, t, u) = sy(t, u) - cN(t, u) \quad (5.43)$$

ile parametrize edilen M hiperyüzeyi göz önüne alınsın. Buradan, $\langle y_t, N \rangle = \langle y_s, N \rangle = \langle y, N \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınır, doğrudan hesaplama ile $\langle x_t, N \rangle = \langle x_s, N \rangle = \langle x_u, N \rangle = 0$ elde edilir. Böylece N , M hiperyüzeyinin de birim normalidir. (5.43) ifadesinden, $x_{ss} = 0$, $\langle x_{st}, N \rangle = 0$ ve $\langle x_{tt}, N \rangle = 0$ olur. Buradan M hiperyüzeyi üzerindeki her X teğet vektör alanı için $h(\partial_s, X) = 0$ olur, yani $S(\partial_s) = 0$ bulunur. Bu da demektir ki, M hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği sıfırdır ve $\partial_s = y(t, u)$ bu hiperyüzeyin bir asli doğrultusudur. Dolayısıyla, M bir GCR hiperyüzeyidir.

Bu bölümün geri kalan kısmında aşağıdaki teorem ispatlanacaktır:

Teorem 5.13. M , $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır olan, space-like bir hiperyüzey olsun. Eğer M GCR hiperyüzeyi ise, o zaman hiperyüzey aşağıdaki üç hiperyüzeyden birine denktir:

1. Örnek 5.4 de verilen hipersilindirin bir açık parçasıdır,
2. Örnek 5.5 de (5.42) ile parametrize edilen bir hiperyüzeydir,
3. Örnek 5.6 de (5.43) ile parametrize edilen bir hiperyüzeydir.

Şimdi teoremin sınıflandırmasını yapabilabilmesi için, aşağıdaki önerme ve bu önermenin önemli bir sonucu ispatlanacaktır:

Önerme 5.14. M , $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında time-like konide yatan space-like bir GCR hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği sıfır ise, bu taktirde hiperyüzeyin k_1 birinci asli eğriliği, özdeş olarak sıfırdır, yani,

$$e_1(\theta) = -\frac{\cosh \theta}{\mu} \quad (5.44)$$

dür.

İspat. Önerme 5.10 nun ispatına tamamen benzer olarak gösterilebilir. ■

Sonuç 5.15. M , $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında time-like konide yatan space-like bir GCR hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği sıfır ise, (5.9) ile verilen x konum vektörü,

$$x = f e_1 - c N \quad (5.45)$$

ayrışımına dönüşür. Buradaki f fonksiyonu,

$$e_1(f) = 1, \quad e_2(f) = e_3(f) = 0 \quad (5.46)$$

eşitliklerini sağlayan düzgün bir fonksiyon ve c , sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat. Kabul edilsin ki M space-like GCR hiperyüzeyinin Gauss-Kronicker eğriliği sıfır olsun. O zaman $n = 3$ için, (5.10) denklemleri ve (5.44) denklemi birlikte göz önüne alınırlarsa,

$$e_1(\mu \cosh \theta) = -\sinh \theta \cosh \theta - \mu \left(-\frac{\cosh \theta}{\mu} \right) \sinh \theta = 0, \quad (5.47a)$$

$$e_1(\mu \sinh \theta) = -\sinh \theta \sinh \theta - \mu \left(-\frac{\sinh \theta}{\mu} \right) \cosh \theta = 1 \quad (5.47b)$$

olur. Bu eşitlikler (5.9) ayrışımında göz önüne alınırsa, (5.46) ile tanımlı düzgün bir f fonksiyonu için, (5.45) ayrışımı doğrudan bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.13'ün ispatı. Böylece Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır olan M GCR hiperyüzeyinin x konum vektörü, (5.45) ile bellidir. Dikkat edilirse, $l = 2, 3$ olmak üzere, $\omega_{1l}(e_l) = \frac{1 - \mu \sinh \theta k_l}{\mu \cosh \theta}$ olduğundan, (5.47) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\omega_{1l}(e_l) = \frac{1 - ck_l}{f}, l = 2, 3 \quad (5.48)$$

olur. Ayrıca, (5.38) eşitlikleri göz önüne alınırsa, $[e_2, e_3] = -\omega_{23}(e_2)e_2 - \omega_{23}(e_3)e_3$ olur. Dolayısıyla Tanım 2.42 den, $\mathbf{D}^\perp = \text{Span}\{e_2, e_3\}$ distribüsyonu involutiftir ve ayrıca $\mathbf{D} = \text{Span}\{e_1\}$ distribüsyonunun involutif olduğu açıktır. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.46 den, $\mathbf{D} = \text{Span}\{\partial_s\}$ ve $\mathbf{D}^\perp = \text{Span}\{\partial_t, \partial_u\}$ olacak şekilde (s, t, u) koordinat sistemi vardır. Diğer taraftan, Önerme 5.14 da bahsedildiği gibi M hiperyüzeyi düz olduğundan, birinci asli eğriliğinin sıfır olduğunu biliyoruz. Böylece doğrudan hesaplama ile $\widetilde{\nabla}_{e_1} N = 0$ ve $\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = 0$ elde edilir. Buradan, $e_1 = e_1(t, u)$ ve $N = N(t, u)$ sonucuna varılır. Ayrıca (5.46) eşitliklerinden, $f = f(s)$ elde edilir. Böylece elde edilen bu ifadeler, (5.45) ayrışımında yerlerine yazılırsa, x konum vektörü

$$x(s, t, u) = f(s)e_1(t, u) - cN(t, u) \quad (5.49)$$

haline gelir.

Dikkat edilirse, GCR hiperyüzeylerinin sınıflandırması yapılırken, (5.38) eşitliklerinde verilen $\nabla_{e_2}e_1$ ve $\nabla_{e_3}e_1$ Levi-Civita konneksiyonlarının sıfır olup olmadığı durumlar göz önünde bulundurulacağından, 3 farklı durum ortaya çıkacaktır Bu durumların ispatı, Teorem 5.9 in ispatında izlenen yolla tamamen benzer olarak, ispatlanır.



6 SONUÇLAR VE İRDELEME

Bu tez çalışmasında, öncelikle Öklid ve yarı-Öklid uzaylarındaki karşıt boyut iki olan altmanifoldlar ve sonrasında ise, karşıt boyut bir olan altmanifoldlar ele alındı.

İlk olarak, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzaylarında karşıt boyut iki olan, sırasıyla, sabit açı (CAS) yüzeyleri, asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri, sabit eğim (CSS) yüzeyleri ve son olarak ise, geliştirilmiş sabit oran (GCR) yüzeylerinin geometrik özellikleri incelenerek elde edilen sonuçlar kullanılarak, bazı sınıflandırma sonuçları verildi. İleride, Öklid uzaylarındaki karşıt boyut iki olan bu yüzeyler için e_3 normal vektör alanının paralel olmaması durumu incelenerek yeni sınıflandırma ve karakterizasyon sonuçları elde edilebilir.

Diğer taraftan, bu tez çalışmasında $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) hiperyüzeyleri için bazı geometrik özellikler incelenmiştir. Sonrasında, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında asli kanonik doğrultuya sahip (CPD) yüzeyleri incelenerek, sırasıyla, space-like ve light-like asli doğrultu ile ilişkili olan CPD yüzeyleri için sınıflandırma elde edilmiştir. Space-like CPD yüzeylerinin köşegenleştirilebilir bir şekil operatörüne sahip olduğu göz önünde bulundurularak, maksimal CPD yüzeyleri için bir karakterizasyon elde edildi. Time-like CPD yüzeyleri için ise, köşegenleştirilemeyen şekil operatörüne sahip olduğu durumda, [27] da verilen, düz, minimal B-scroll yüzeyine karşılık geldiğini, köşegenleştirilebilir bir şekil operatörüne sahip olduğu durumda ise, space-like CPD yüzeyleri için verilen sınıflandırmaya benzer bir sınıflandırma elde edildi. Ayrıca, bu yüzeyler için de minimal olma durumları incelenmiş ve bir karakterizasyon verilmiştir. Daha ileride, köşegenleştirilemeyen şekil operatörüne sahip yüksek boyuttaki time-like CPD yüzeylerinin, sınıflandırılma problemi çalışılabilir. Bu tez çalışmasında, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında incelenen bir diğer yüzey, sabit açı (CAS) yüzeyleridir. Tez çalışması sürecinde literatürde bu konuda açık olduğu fark edilip, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayındaki light-like sabit doğru ile ilişkili sabit açı (CAS) yüzeyleri için yeni bir sınıflandırma verildi ve ayrıca bu yüzeylerin düz, minimal (maksimal) olma durumları incelenerek, yeni karakterizasyonlar elde edildi.

Son olarak, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki genelleştirilmiş sabit oran (GCR) hiperyüzeyleri için bazı genel geometrik özellikler incelenmiştir. Sonrasında, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzaylarında, Gauss-Kronicker eğriliği özdeş olarak sıfır olan space-like genelleştirilmiş sabit oran (GCR) hiperyüzeyleri incelenmiş yüksek boyutta elde edilen sonuçlara bağlı olarak space-like ve time-like konide yatan hiperyüzeyler için sınıflandırma elde edildi. Daha ileride, Gauss-Kronicker eğriliği sıfırdan farklı olan GCR hiperyüzeyleri incelenebilir ve böylece sınıflandırma teoremleri daha da genişletilebilir.



Kaynaklar

- [1] **Boyadzhiev K. N.**, 2007. Equiangular surfaces, self-similar surfaces, and geometry of seashells, *Coll. Math. J.*, 38, no. 4, 265-271.
- [2] **Cermelli P. and Di Scala A.J.**, 2007. Constant angle surfaces in liquid crystals, *Philos. Magazine*, 87, 1871-1888.
- [3] **Chen, B. Y.**, 1973. Geometry of submanifolds, M.Dekker, New York.
- [4] **Chen, B. Y.**, 2001. Constant-ratio hypersurfaces, *Soochow J. Math.*, **27**, no. 4, 353-362.
- [5] **Chen, B. Y.**, 2002. Geometry of position functions of Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean space, *Journal of Geometry*, **74**, 61-77.
- [6] **Chen, B. Y.**, 2003. Constant-ratio spacelike submanifolds in pseudo-Euclidean space, *Houstin J. Math.*, **29**, no. 2, 281-294.
- [7] **Chen, B. Y.**, 2003. When Does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane ?, *Amer. Math. Monthly*, **110**(2), 147-152.
- [8] **Chen B. Y.**, 2011. Pseudo-Riemannian Geometry, δ -Invariants and Applications, World Scientific, Hackensack, NJ.
- [9] **Di Scala A. J. and Rui-Hernandez G.**, 2009. Helix submanifolds of euclidean spaces, *Monatsh Math.*, **157**: 205-215.
- [10] **Dillen F., Fastenakels J., Van der Veken J. and Vrancken L.**, 2007. Constant angle surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Monaths Math.*, **152**, 89-96.
- [11] **Dillen F. and Munteanu M. I.**, 2009. Constant angle surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Bull. Braz. Math. Soc.*, New Series, **40**(1), 85-97.
- [12] **Dillen F., Fastenakels J. and Van der Veken J.**, 2009. Surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ with a canonical principal direction, *Ann. Global Anal. Geom.*, **35**, no 4, 381-396.

- [13] **Dillen F., Munteanu M. I. and Nistor A. I.**, 2011. Canonical coordinates and principal directions for surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Taiwanese J. Math.*, **15**(5), 2265–2289.
- [14] **Do Carmo, M. P.**, 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Englewood Cliffs., pp. 503, New Jersey.
- [15] **Do Carmo, M. P.**, 1992. Riemannian Geometry, Birkhauser, Boston.
- [16] **Ergüt M., Kelleci A. and Turgay N. C.**, 2016. On space-like generalized constant ratio hypersurfaces in Minkowski spaces, see arXiv:1603.08415.
- [17] **Fastenakels J., Munteanu M.I. and J. Van der Veken**, 2011. Constant angle surfaces in the Heisenberg group, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **27**(4), 747-756.
- [18] **Fu Y. and Yang D.**, 2012. On constant slope space-like surfaces in 3-dimensional Minkowski space, *J. Math. Analysis Appl.*, **385**, 1, 208-220.
- [19] **Fu Y. and Nistor A. I.**, 2013. Constant Angle Property and Canonical Principal Directions for Surfaces in $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}_1$, *Mediterr. J. Math.*, **10**, 1035-1049.
- [20] **Fu Y. and Wang X.**, 2013. Classification of Timelike Constant Slope Surfaces in 3-dimensional Minkowski Space, *Results in Mathematics*, **63**, 3-4, 1095-1108.
- [21] **Fu Y. and Munteanu M. I.**, 2014. Generalized constant ratio surfaces in $\mathbb{E}^3$, *Bull. Braz. Math. Soc., New Series* **45**, 73-90.
- [22] **Fu Y. and Yang D.**, 2016. On Lorentz GCR surfaces in Minkowski 3-space, *Bull. Korean Math. Soc.*, **53**, 1, 227-245.
- [23] **Garnica E., Palmas O. and Ruiz-Hernandez G.**, 2012. Hypersurfaces with a canonical principal direction, *Differential Geom. Appl.*, **30**, 382-391.
- [24] **Güler F., Şaffak G. and Kasap E.**, 2011. Timelike Constant Angle Surfaces in Minkowski Space $\mathbb{R}_1^3$, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol **6**, no 44, 2189-2200.
- [25] **Hacısalihoglu, H. H.**, 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları.

- [26] **Haesen S., Nistor A. I. and Verstraelen L.**, 2012. On growth and Form and Geometry. I, *Kragujevac Journal of Mathematics*, Vol. **36**, Number 1, 5-25.
- [27] **Kim Y. H. and Turgay N. C.**, 2017. On the Gauss map of surfaces in $\mathbb{E}_1^3$ concerning Cheng-Yau operator (accepted), *J. Korean Math Soc.*, DOI: 10.4134/JKMS.j150757.
- [28] **Kelleci A., Turgay N. C. and Ergüt M.**, 2016. Surfaces endowed with canonical principal direction in Minkowski 3-space, *14th International Geometry Symposium-PAU*, Denizli/Turkey, 25-28 May.
- [29] **Kelleci A., Ergüt M. and Turgay N. C.**, 2016. A note on timelike surfaces in Minkowski 3-spaces, *The International Workshop on Theory of Submanifolds-IWTS2016*, İstanbul/Turkey, Haziran.
- [30] **Kelleci A.**, 2016. On the Generalized Constant Ratio submanifolds in Minkowski spaces, *XIX GEOMETRICAL SEMINAR*, Zlatibor/Serbia, August 28-September 4.
- [31] **Kelleci A., Turgay N. C. and Ergüt M.**, 2017. A new characterization of constant angle surface in Minkowski 3-space, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017)*, Şanlıurfa / Turkey, 11-13 May, .
- [32] **Kelleci A., Turgay N. C. and Ergüt M.**, 2017. Geometrical properties of surfaces endowed with a canonical principal direction in 3-dimensional Minkowski space, *International Workshop 'Differential Geometry'*, IMPAN Banach Center, Bedlewo / Poland, 18-24 June.
- [33] **Kelleci A., Turgay N. C. and Ergüt M.**, 2017. On the position Vector of Space-Like Surfaces in 3-dimensional Minkowski Space, *15th International Geometry Symposium*, Amasya / Turkey, 3-6 July.
- [34] **Kelleci A., Ergüt M. and Turgay N. C.**, 2017. Geometrical Properties of Surfaces Endowed with a Canonical Principal Direction in the 4-dimensional Euclidean Space, *Second International Conference 'Mathematics Days in Sofia'*, Sofia / Bulgaria, 10-14 July.

- [35] **Kelleci A. and Ergüt M.**, 2017. Space-like surfaces in 3-dimensional Minkowski space, *6th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS-2017)*, Astana / Kazakhstan 2-10 October.
- [36] **Kelleci, A. and Ergüt, M.**, 2017. A Short Survey on Surfaces Endowed with a Canonical Principal Direction, *Proceedings Book of International Workshop on Theory of Submanifolds*, Volume:1, DOI: 10.24064/iwts2016.2017.6.
- [37] **Kelleci A., Ergüt M. and Turgay N. C.**, 2017. New classification results on surfaces with a canonical principal direction in the Minkowski 3-space, *Filomat*, **31**:19, 6023-6040.
- [38] **Kelleci A., Turgay N. C. and Ergüt M.**, 2018. On generalized constant ratio surfaces with higher codimension, see arXiv:1804.00721.
- [39] **Kelleci A., Turgay N. C. and Ergüt M.**, 2018. On surfaces endowed with canonical principal direction in Euclidean spaces, see arXiv:1804.04705.
- [40] **Kobayashi S. and Nomizu K.**, 1963. Foundations of Differential Geometry, vol. 1., Wiley, New York.
- [41] **Kuhnel, W.**, 2002. Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, Student Mathematical Library Vol. 16, American Mathematical Society.
- [42] **Lopez R. and Munteanu M. I.**, 2011. Constant angle surfaces in Minkowski space, *Bull. Belg. Math. Soc.*, Simon Stevin, **18**, 271-286.
- [43] **Magid M. A.**, 1985. Lorentzian isoparametric hypersurfaces, *Pacific J. Math.*, **118**, 165-197.
- [44] **Mendonça B. and Tojeiro R.**, 2014. Umbilical submanifolds of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, *Canad. J. Math.*, **66**, no. 2, 400-428.
- [45] **Munteanu M. I. and Nistor A. I.**, 2009. A new approach on Constant Angle Surfaces in $\mathbb{E}^3$, *Turk J. Math.*, **33**, 169-178.
- [46] **Munteanu, M. I.**, 2010. From golden spirals to constant slope surfaces, *J. Math. Phys.*, **51**(7), 073507.

- [47] **Munteanu M. I. and Nistor A. I.**, 2011. Complete classification of surfaces with a canonical principal direction in the Euclidean space $\mathbb{E}^3$, *Cent. Eur. J. Math.*, **9**(2), 378-389.
- [48] **Nistor A. I.**, 2013. A note on spacelike surfaces in Minkowski 3-space, *Filomat*, **27**(5), 843-849.
- [49] **Nomizu K.**, 1981. On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms, *Japan J. Math.*, vol. **7**, No. 1.
- [50] **O'Neill B.**, 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, World Scientific, New York.
- [51] **O'Neill B.**, 1997. Elementary differential geometry, Academic Press, New York.
- [52] **Şahin, B.**, 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayınları.
- [53] **Thompson D'A.**, 1948. On growth and form, Cambridge Univ. Press.
- [54] **Tojeiro R.**, 2010. On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, *Bull. Braz. Math. Soc.*, (N. S.) **41**, no. 2, 199-209.
- [55] **Turgay N. C.**, 2015. Generalized constant ratio hypersurfaces in Euclidean spaces, [arxiv/papers/1504/07757v1](https://arxiv.org/abs/1504.07757v1).
- [56] **Yang D., Fu Y. and Li L.**, 2017. Geometry of spacelike generalized constant ratio surfaces in Minkowski 3-space, *Front. Math., China*, **12**, 2, 459-480.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Hatay 'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Hatay 'da tamamladım. 2006 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2010 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisansa başladım ve ders aşamasını tamamladım. 2012 yılında tez aşamasındayken, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalına, Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı (ÖYP) kapsamında Araştırma Görevlisi olarak atandım ve Geometri Anabilim dalında yeniden yüksek lisansa başladım. 2014 yılında yüksek lisansımı tamamladım. Halen, adı geçen üniversitede Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.

