

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ HESAP OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA
SİNGÜLER KATSAYILI DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ökkeş ÖZTÜRK

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER

TEMMUZ - 2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ HESAP OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA SİNGÜLER
KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ökkeş ÖZTÜRK

(091121113)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20 Haziran 2011

TEMMUZ - 2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ HESAP OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA SİNGÜLER
KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ökkeş ÖZTÜRK

(091121113)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Haziran 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Temmuz 2011

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK (F.Ü)

TEMMUZ-2011

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER'e ve bölümümüzün değerli hocalarına üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ökkeş ÖZTÜRK

ELAZIĞ-2011

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ HESAP OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA SİNGÜLER KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Ökkeş ÖZTÜRK

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2011. Sayfa : IX+55

Dört bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın ilk bölümünde; Kesirli Türev ve İntegraller (*Diferintegraller*) kavramının başlangıcı, tarihi gelişimi ve literatür taraması ele alınmıştır.

İkinci bölümde; Diferintegraller için temel tanım ve teoremleri içeren bazı özellikler çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde; Diferintegraller ve diferintegraller ile ilgili bazı matematik teknikler ele alınmıştır.

Son bölümde; Kesirli hesap operatörleri yardımıyla singüler katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev ve İntegraller (*Diferintegraller*), Kesirli Hesap, Leibniz Formülü, N –kesirli hesap operatörü.

SUMMARY

Master of Arts

SOLUTION OF THE SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA FRACTIONAL CALCULUS OPERATORS

Ökkeş ÖZTÜRK

Firat University
Institute of Basic and Applied Sciences
Department of Mathematics
2011. Page : IX+55

In the first chapter of this thesis that consists of four chapters; beginning, historical development and literature review of Fractional Derivative and Integrals (*Differintegrals*) were examined.

In the second chapter; some properties including fundamental definitions and theorems for differintegrals were studied.

In the third chapter; differintegrals and some mathematics techniques related to differintegrals were examined.

In the last chapter; solutions of the singular differential equations with the help of the fractional calculus operators were given.

Key words: Fractional Derivative and Integrals (*Differintegrals*), Fractional Calculus, Leibniz Rule, N –fractional calculus operator.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
SEMBOLLER LİSTESİ	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kesirli Hesap Üzerine Yapılan Çalışmalar	4
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	16
2.1. Gamma Fonksiyonu	16
2.2. Beta Fonksiyonu	18
2.3. Laplace Dönüşümü	19
2.4. Mittag-Leffler Fonksiyonları	20
2.5. Kesirli Hesaplama Temel Teoremler	20
2.6. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri	24
3. METOT VE MATERYALLER	27
3.1. Grünwald Tanımı	27
3.2. Riemann-Liouville Tanımı	28
3.4. Diferintegralin Diğer Tanımları	29
3.4.1. Cauchy İntegral Formülü Yardımı ile Diferintegral Tanımı	29
3.4.2. Riemann Formülü.....	31
3.4.3. Genelleştirilmiş Leibniz Formülü	31
3.4.4. Laplace Dönüşümü Yardımı ile Diferintegral Tanımı	31
3.5. Diferintegrallerle İlgili Bazı Matematik Teknikler.....	32

3.5.1. Belirli İntegrallerin Alınması	32
3.5.2. Serilerin Toplamlarının Bulunması.....	33
4. KESİRLİ HESAP OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA SİNGÜLER KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ	34
4.1. Diferansiyel Denklemlerin Bir Sınıfı.....	34
4.2. N -Kesirli Hesap Operatörünün Singüler Katsayılı Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	38
KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Gamma fonksiyonu eğrisi	17
Şekil 3.1. Cauchy integral formülünün C yolu	30
Şekil 3.2. Diferintegral formülündeki C yolu	30

TABLÖLAR LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. Bazı n değerleri için gamma fonksiyonunun değerleri.	17

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
Γ	: Gamma fonksiyonu
∂	: Kısmi türev
$D^{\nu}f = f_{\nu}$	: $\nu \in \mathbb{Z}^+$ iken bilinen türev, $\nu \in \mathbb{R}$ iken kesirli türev (f bir fonksiyon)
$D^{-\nu}f = f_{-\nu}$	: $\nu \in \mathbb{Z}^+$ iken bilinen integral, $\nu \in \mathbb{R}$ iken kesirli integral (f bir fonksiyon)
${}_aD_b^{-\nu}$	: Riemann-Liouville kesirli integrali ($\nu \in \mathbb{R}$, a ; alt sınır ve b ; üst sınır)
∇	: Nabla
α	: Alfa
μ	: Mü
π	: Pi
θ, ϑ	: Teta
λ	: Lambda
τ	: Tau
β	: Beta
Φ, ϕ, φ	: Phi
ζ	: Zeta
ω	: Omega
η	: Eta
ρ	: Ro
γ	: Gamma
ψ, Ψ	: Psi
ν	: Nü

1. GİRİŞ

Bu çalışmada kesirli türev ve integraller (*diferintegraller*) kavramının ortaya çıkışı ve gelişimi, bu konu üzerine yapılan bazı çalışmalar, konunun daha iyi anlaşılır olması için gereken bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca kesirli hesap operatörleri yardımıyla singüler katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümleri amaçlanmıştır.

Bilindiği üzere, birçok bilim dalında problemleri çözmek için önce problem matematiksel ifadelerle formüle edilir. Bir f fonksiyonunun n . mertebeden türevinin, n pozitif bir tamsayı olmak üzere; $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ olduğunu biliyoruz. Aynı şekilde bir fonksiyonu iki ya da üç defa integre edebiliriz. Ancak, bazen problemler kesirli mertebeden türev veya integralleri içerebilir. Bu durumda bir fonksiyonun $\frac{1}{2}$ nci türevini nasıl alırız? Fonksiyonu $\frac{1}{2}$ defa integre edebilir miyiz? Bu şekilde mertebesi tamsayı olmayan türev ve integral kavramının başlangıcı geçmişe dayanır. 1695'te L'Hopital'ın Leibniz'e 'Eğer n pozitif bir tamsayı değil de bir kesir olursa $D^n f$ ifadesinden ne anlaşılır?' sorusunu sormasıyla başlayan kesirli hesaplama tekniği 300 yıldan daha fazla zamandır üzerine çalışılan bir konu olmuştur.

Kesirli türev ve integral konusu matematiksel analizin bir kolu olup, türev ve integralin tam olmayan derecelere genişletilmiş şeklidir. Kesirli türev ve integralin uygulamalarına fizik, kimya ve mühendislik bilimlerinde sıkça karşılaşılmaktadır. Konunun iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme birimi gibi pek çok konuda uygulamaları verilmiştir. Ayrıca bazı belirli integrallerin alınması, seri toplamalarının bulunması gibi konularda da yararlı bir tekniktir.

Bu konu Leibniz'in yanı sıra Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Holmgren, Lagrange, Grünwald ve Laurent gibi bir çok ünlü bilim adamının da dikkatini çekmiş ve çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu alandaki ilk sistematik çalışmalar ise 19. yüzyılın başlangıcında ve ortalarında kaydedilmiştir.

1832'de Liouville, üstel serileri genişletmiş ve q pozitif bir tamsayı olmak üzere böyle serilerin q . türevini tanımlamıştır. 1853'de Riemann, belirli bir integrali içeren ve üssü tamsayı olmayan kuvvet serilerine uygulanabilen farklı bir tanım ileri sürmüştür.

Riemann ve Liouville'un elde ettikleri sonuçları ilk kez birleştirenler Grünwald ve Krug olmuştur. 1867'de Grünwald, Liouville'un kısıtlı tanımlarından rahatsız olmuş ve bir başlangıç noktası olarak, limiti kullandığı bir türev tanımını benimsemiş ve q . türev için belirli integral formüllerine ulaşmıştır. 1890'da ise Krug, alışılmış türevler için Cauchy integral formülü üzerine çalışmıştır.

Bu teorik başlangıçlara paralel olarak, çeşitli problemlere uygulanabilen kesirli hesabın uygulanmasındaki gelişmeler devam etmiştir. 1823'de Abel, bir integral dönüşüm yardımı ile bazı integral denklemlerinin çözümünü elde etmiştir. 1844'de Boole, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için sembolik yöntemler geliştirerek, problemlerin çözümünde kesirli hesabı kullanmış ve bu alanda etkili çalışmalar kaydetmiştir. Bu çalışmaların temeli, kuvvet serileri ve diferansiyel denklemlerin çözümü olarak tanımlanan diferansiyel operatörün, keyfi bir $f(D)$ fonksiyonunun genel açılımına dayanır. Boole'nin bu metotları, f fonksiyonunun bazı sınıfları için dikkate değer görülmüş ve bir çok yönde kullanıma açık hale getirilmiştir.

1892'de Heaviside, elektromanyetik teorisinin bazı problemlerini çözmek için kesirli hesabı kullanmış ve ayrıca, genelleştirilmiş türevlerin uygulanmasında önemli bir adım atmıştır. 1920'de ise iletkenlik teorisinde, kesirli diferansiyelden yararlanmıştır. Bu çalışmadan yola çıkan Gemant 1936'da, esneklik problemlerinde kullanmak üzere kesirli diferansiyelden faydalanmıştır..

Başlangıcından bu yana hızla artan bir biçimde gelişen kesirli hesap tekniği, günümüzde hem teoride hem de uygulamada önemli ölçüde kullanılmaktadır. Mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar geçtiğimiz yüzyıl içerisinde gerçekleşebilmiştir. Bu tekniğin matematik uygulamalarının çoğu 20.y.y. bitmeden ortaya konmuştur. Weyl (1917), Hardy (1917), Littlewood (1925), Kober (1940) ve Kutner (1953), Lebesgue ve Lipschitz'in geliştirdikleri fonksiyonların diferintegrallerinin özelliklerini incelemişlerdir. Erdelyi (1939) ve Osler (1970), keyfi fonksiyonları içeren diferintegrallerin tanımlarını vermişlerdir. Riesz (1949), çok değişkenli fonksiyonlar için kesirli integral teorisi geliştirmiştir. Erdelyi (1964), integral denklemler için kesirli hesap tekniğine başvurmuştur ve Higgins (1967), diferansiyel denklemleri çözmek için kesirli integral operatörlerini kullanmıştır.

Kesirli hesap tekniği ile alakalı gelişmeler doğrultusunda 20.y.y. bitmeden çeşitli üniversitelerde konferanslar da düzenlenmiştir. 1974'te kesirli hesaplar üzerine ilk uluslararası konferans, ABD'de New Haven Üniversitesi'nde gerçekleştirilmiştir. Bu konferans, ilgilenenleri harekete geçirmiş ve çok miktarda yayın yapılmasına öncülük etmiştir. 1984'te 2.Uluslararası konferans, İskoçya'da Strathclyde Üniversitesi'nde gerçekleştirilmiştir. 1980 sonrasında kesirli hesaplar üzerine yapılan önemli gelişmeler, Japonya'da S.Owa, M.Saigo ve K.Nishimoto tarafından yapılan yayınlarla devam etmiştir. Sovyet Rusya, İngiltere, Hindistan, Kanada, Venezuela ve İskoçya gibi ülkelerin bazı matematikçileri de kesirli hesaplarla ilgilenmişlerdir. 1989'da 3.Uluslararası konferans, Tokyo'da Nihon Üniversitesi'nde düzenlendi.

1695'den bu yana, fen ve mühendislik bilimlerinin birçok teori ve uygulama alanlarında kullanılan kesirli hesap tekniği ve bu teknik üzerine yapılan çalışmalar; fizik, kimya ve mühendislik alanlarında çeşitli uygulamalara olanak sağlamıştır.

Kesirli türevlerin difüzyon teorisinde kullanımı, sürekli zamanda gelişigüzel dolaşım teorisi (continuous time random walk:CTRW) ile çalışan sıradışı difüzyon olaylarının aynı zamanda da,

$$\frac{\partial P(\vec{r}, t)}{\partial t} = k \vec{\nabla}^2 P(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

denkleminin,

$$\frac{\partial^{1+\alpha} P(\vec{r}, t)}{[\partial(t)]^{1+\alpha}} = k_\alpha \vec{\nabla}^2 P(\vec{r}, t), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilen diferintegrallli hali ile çalışabilmesidir. Bu yaklaşımla çözümü bilinen basit durumlar kolayca sıra dışı olaylara uyarlanabilmektedir.

Ayrıca,

$$\frac{\partial P(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} [k \vec{\nabla} P(\vec{r}, t) - \mu f(\vec{r}, t) P(\vec{r}, t)] \quad (1.3)$$

ile verilen Fokker-Planck denklemi olarak bilinen bu denklem,

$$\frac{\partial^{1+\alpha} P(\vec{r}, t)}{[\partial(t)]^{1+\alpha}} = \vec{\nabla} [k \vec{\nabla} P(\vec{r}, t) - \mu f(\vec{r}, t) P(\vec{r}, t)] \quad (1.4)$$

şeklinde zamana göre diferintegral operatörü cinsinden yazılabilir.

Bunlara ek olarak; iletim hatları teorisi, izafiyet teorisi, elektromanyetik teorisi, esneklik teorisi, ısı transferi, Schrödinger denklemi, dalga denklemi, malzeme birimi, sıvıların kimyasal analizi, insan kemiğinde yayılan ultrasonik dalgalar, ses dalgaları, mekanik problemleri, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketi, elektrokimyasal kinetikler vb. birçok uygulamada da diferintegralerden yararlanılmıştır [1-3].

1.1. Kesirli Hesap Üzerine Yapılan Çalışmalar

Kesirli hesap; kesirli türev ve integraller (*diferintegraller*) yardımı ile çeşitli problemlerin çözümünde kullanılmak üzere birçok bilim adamının dikkatini çekerek, farklı bilim dallarında yoğun olarak çalışılan bir konu olmuştur. Bu bilim adamları, konu ile alakalı bir çok tez ortaya atmış ve bazıları tezini ispatlarken, bazıları da bu başarıya ulaşamamıştır. Şimdi, başlangıcından bu yana kesirli hesap üzerine yapılan bu önemli çalışmaları verelim.

1695-G.W.Leibniz, ilk olarak, $d^{1/2}x$ ifadesinin $x^2\sqrt{dx}:x$ 'e eşit olabileceğini ve buradan elde edeceği sonuçlarla da faydalı çözümlemelere ulaşabileceğini düşünmüştür.

1697-G.W.Leibniz, diferansiyel hesaptan bahsetmiş ve $\frac{1}{2}$. mertebeden bir türevi göstermek için $d^{1/2}y$ notasyonunu kullanmıştır. Daha sonraları da sonsuz serilerin kesirli hesaplamayı ifade edebileceğini düşünmüştür. Ama sonsuz seriler, pozitif ve negatif tamsayı olan üsleri içermektedir.

1730-L.Euler, ' n pozitif bir tamsayı ve x 'in bir fonksiyonu da p olmak üzere, d^np 'nin dx^n 'e oranı, cebirsel olarak her zaman ifade edilebilir. Fakat, eğer n , kesirli bir ifade olursa nasıl bir oran oluşturmak gerekir? n pozitif bir tamsayı iken, sürekli diferansiyel yardımıyla d^n bulunabilir. Ancak bu yöntem, n kesirli bir ifade iken geçerli değildir. Dolayısıyla bu sorun, serilerin interpolasyonundan yararlanılarak kolaylaştırılabilir.' şeklinde düşünmüştür.

1772-J.L.Lagrange, geliştirmiş olduğu,

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y \quad (1.5)$$

şeklindeki mertebesi tamsayı olan diferansiyel operatörler için üsler kuralı ile bu konuya dolaylı olarak katkı sağlamıştır. Kesirli hesap teorisini bu yönde başlatmış, m ve n kesirli olduğunda, kuralın geçerli olup olmadığını sorgulamaya başlamıştır.

1812-P.S.Laplace, bir integral vasıtasıyla bazı kesirli türev ifadeleri tanımlamış ve ilk olarak 1819'da keyfi mertebeli bir türevden söz etmiştir.

1819-S.F.Lacroix, tümevarımdan faydalananak $y = x^m$ ve m pozitif bir tamsayı olmak üzere, x^m 'nin n . mertebeden türevini,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n \quad (1.6)$$

şeklinde geliştirmiştir. Daha sonra gamma fonksiyonunu kullanarak,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (1.7)$$

formülünü vermiştir. Buradan da $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olmak üzere, $y = x$ ve $n = 1/2$ alarak,

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.8)$$

tanımına ulaşmıştır. Ama, keyfi mertebeden bir türevin uygulaması konusunda bu metot tam bir ipucu sunmamıştır.

1822-J.B.J.Fourier, keyfi mertebeli türevlerden söz etmiştir. Onun bu tanımı,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha) dp \quad (1.9)$$

formülünden elde edilmiştir.

n bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x-\alpha) = p^n \cos \left[p(x-\alpha) + \frac{1}{2} n\pi \right] \quad (1.10)$$

şeklinde alıp, bunu da genelleştirip n yerine keyfi u değerini alarak,

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos \left[p(x-\alpha) + \frac{1}{2} u\pi \right] dp \quad (1.11)$$

tanımını vermiştir. Fourier, buradaki u sayısının pozitif veya negatif herhangi bir değer olabileceğini belirtmiştir.

1823-N.H.Abel, kesirli işlemleri ilk olarak kullanan bilim adamıdır. Abel, bir integral denklemin çözümünde kesirli hesabı kullanmıştır. Abel'in integral denklemi,

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt \quad (1.12)$$

şeklindedir. Abel, bu denklemin sağ tarafına $\sqrt{\pi}[d^{-1/2}/dx^{-1/2}]f(x)$ yazarak düzenleme yapmış ve

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x) \quad (1.13)$$

formülünü vermiştir. Abel, bu denklemde $f(x)$ 'i belirleyerek kesirli hesapta önemli bir başarı sağlamıştır.

1832-J.Liouville, kesirli hesaptaki ilk büyük çalışmayı gerçekleştirmiştir. $(d^{1/2}/dx^{1/2})e^{2x}$ ifadesini düşünmüş ve kesirli operatörleri kullanarak mekanik ve geometrinin bazı problemlerini çözmüştür.

Kesirli operatör tanımına eklemek için tamamlayıcı bir fonksiyonun varlığından da söz etmiştir. Bu tamamlayıcı fonksiyonun varlığını ispatlamaya çalışmıştır. Ancak başarılı bir sonuca ulaşamamıştır. Ayrıca, iki fonksiyonun çarpımının kesirli türevi için de bir metot geliştirmiştir.

1834-J.Liouville, izokron problemlerinden söz etmiştir. Ayrıca keyfi mertebeden türevler için,

$$D^v e^{ax} = a^v e^{ax} \quad (1.14)$$

tanımını geliştirmiştir. Liouville, kesirli bir türev için,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \operatorname{Re} a_n > 0 \quad (1.15)$$

$$D^v f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x} \quad (1.16)$$

formundaki seride, bir $f(x)$ fonksiyonunun keyfi türevinin açık olarak yazılabileceğini düşünmüştür. Liouville, ikinci bir tanım elde etmek için gamma fonksiyonu ile ilişkili,

$$\mathbb{I} = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \quad a > 0, \quad x > 0 \quad (1.17)$$

belirli integralini kullanmıştır. Burada $xu = t$ alarak,

$$\mathbb{I} = x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a) \quad (1.18)$$

veya

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \mathbb{I} \quad (1.19)$$

formüllerini vermiştir. Liouville, bu son denkleme D^v operatörünü uygulayarak da,

$$D^v x^{-a} = \frac{(-1)^v}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+v-1} e^{-xu} du \quad (1.20)$$

$$D^v x^{-a} = \frac{(-1)^v \Gamma(a+v)}{\Gamma(a)} x^{-a-v}, \quad a > 0 \quad (1.21)$$

tanımına ulaşmıştır. Ayrıca bahsettiği tamamlayıcı fonksiyon üzerine çalışmalarını devam ettirmiştir.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0 \quad (1.22)$$

integral denkleminin $y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ şeklinde tamamlayıcı bir çözüme sahip olduğunu belirtmiş ve keyfi u değeri için,

$$\frac{d^u y}{dx^u} = 0 \quad (1.23)$$

denkleminin de tamamlayıcı bir çözüme sahip olup olmadığını tartışmıştır.

1839-S.S.Greatheed, Liouville'un tanımını kullanarak, kesirli diferansiyel için bazı formüller geliştirmiştir. Bu çalışmasına, kesirli türevleri kullanarak Taylor teoremini de eklemiştir.

1841-D.F.Gregory, *operatörler hesabı* tanımının kurucusudur. Sembolik formu,

$$u(x, t) = Ae^{xap^{1/2}} + Be^{-xap^{1/2}} \quad (1.24)$$

şeklinde olan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.25)$$

ile tanımlanan ısı denklemini vermiştir. Bu form daha sonra, Heaviside tarafından da kullanılmıştır.

1842-A.De Morgan, kesirli operatör sistemlerinden bahsetmiş ve $D^u x^u$ şeklinde bir form geliştirmiştir.

1846-P.Kelland, daha önce Peacock tarafından da kullanılan, cebir için uygulanan eşdeğer formların süreklilik ilkesinin, bütün sembolik operatörler için geçerli olduğunu var saymıştır. Kelland, bu ilkenin sonucu olan cebirsel formüllerin, sembolik operatörlerin cebirsel sembollerle yer değiştirmesi ile doğru formlara dönüşeceğini düşünmüştür. Daha sonra ise bu düşüncesinde çeşitli hatalar saptanmıştır.

1847-B.Riemann, kesirli integral teorisi üzerine olan çalışmalarına öğrencilik yıllarında başlamıştır. Taylor serilerini genelleştirerek kesirli integral tanımını,

$$\frac{d^{-v}}{dx^{-v}} f(x) = D^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \quad (1.26)$$

şeklinde vermiştir. Bu tanıma tamamlayıcı bir fonksiyon eklemeyi uygun görmüştür.

Burada, integralin alt limiti olan c 'nin ve tamamlayıcı fonksiyonun değeri '0' alınarak, bugün, bu formül, yaygın bir şekilde kesirli integrasyon tanımına uygun olarak kullanılmaktadır.

1848-C.J.Hargreave, n pozitif bir tamsayı olmamak şartıyla, n . mertebeden genelleştirilmiş Leibniz türevi üzerine çalışmıştır .

Böylece,

$$D^v f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} D^n f(x) D^{v-n} g(x) \quad (1.27)$$

formülünü vermiştir. Burada, D^n n . mertebeden diferansiyel operatör, D^{v-n} kesirli bir operatör ve $\binom{v}{n}$ de $\Gamma(v+1)/n! \Gamma(v-n+1)$ şeklindedir.

1848-W.Center, kesirli operatörlerin tartışılan iki sistemini açıkça tanımlamıştır. İlki, Peacock tarafından geliştirilen,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\theta} x^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\theta+1)} x^{v-\theta}, \quad \theta > 0 \quad (1.28)$$

şeklinde, $v = 0$ iken sonlu sonuçlar veren sistemdir. İkincisi ise, $v = 0$ iken,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\theta} x^{-v} = \frac{(-1)^{\theta} \Gamma(v+\theta)}{\Gamma(v)} x^{-\theta-v}, \quad \theta > 0, \quad v+\theta > 0 \quad (1.29)$$

şeklindeki, Liouville tarafından geliştirilen sistemdir.

1859-H.R.Greer, başlangıç olarak, Liouville'un geliştirdiği,

$$D^v e^{ax} = a^v e^{ax} \quad (1.30)$$

eşitliğini kullanarak, $\sin x$ ve $\cos x$ 'in adi türevleri için çeşitli formüller üretmiştir. Ayrıca, $\frac{1}{2}$. mertebeden sonlu farklardan da bahsetmiştir.

1861-Z.Wastchenxo, Greer'in formüllerine çeşitli ekler yaparak çalışmıştır.

1865-H.Holmgren, adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli hesaplama tekniği ile ilgilenmiş ve çeşitli yazılar yazmıştır. Bu yazılarında, kendinden öncekilerin buldukları sonuçların kısıtlı olduğunu dile getirmiş ve amacının tam bir çözüm bulmak olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmaları doğrultusunda,

$$D^v y'' = D^v D^2 y = D^{v+2} y \quad (1.31)$$

kuralını tanımlamıştır. Her ne kadar v bir tamsayı olduğunda bu kural geçerli olsa da, modern matematikçiler v keyfi olduğunda da bu kuralın geçerli olup olmadığını ispatlamaya çalışmışlardır.

1867-A.K.Grünwald, kesirli operatörler üzerine yaptığı çalışmalar neticesinde,

$$\theta = \int_0^x (x-t)^v f(t) dt \quad (1.32)$$

formülünü elde etmiştir ki burada θ , x 'in bilinen fonksiyonudur.

1868-A.V.Letnikov, keyfi mertebeler için,

$$[D^q D^p f(x)]_{x_0}^x = [D^{q+p} f(x)]_{x_0}^x \quad (1.33)$$

formülünü ispatlamıştır. Liouville, Peacock ve Kelland'ın çalışmalarını da incelemiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Cauchy integral formülünün ana teması üzerine çalışmıştır. Böylece, bazı diferansiyel denklemlerin çözümü için kesirli hesap tekniğini kullanmıştır.

1880-A.Cayley, Riemann'ın 1847'deki tezine atıf yaparak, Riemann'ın teorisindeki en büyük sıkıntının, keyfi sabitlerin sonsuzluğunu içeren tamamlayıcı bir fonksiyonun tanımından kaynaklandığını ifade etmiştir. Tamamlayıcı bir fonksiyonun varlığı sorusu çok fazla karışıklığa sebep olmuştur. Tamamlayıcı fonksiyon konusunda, Liouville, Peacock ve Riemann, bu karışıklık karşısında hataya düşenler arasındadır.

1884-H.Laurent, Cauchy integral formülünü genelleştirmiştir. Genelleştirilmiş Leibniz çarpım kuralı üzerine çalışmış ancak, integral formda bir sonuç elde etmiştir.

1887-K.Nishimoto, Cauchy integral formülünden yararlanarak,

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega \quad (1.34)$$

tanımını vermiştir ve n yerine v yazarak,

$$D^v f(z) = \frac{\Gamma(v+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{v+1}} d\omega \quad (1.35)$$

formülünü elde etmiştir.

1888-P.A.Nekrassov, Liouville'un v . merteben diferansiyel için geliştirdiği,

$$D^v e^{ax} = a^v e^{ax} \quad (1.36)$$

formülünü kullanarak $(x - a)^q$ 'nın keyfi mertebeli türevini bulmuştur.

1892-O.Heaviside, kablolardaki elektrik akımının iletkenlik teorisindeki metotlarını kullanarak mühendislere çok fayda sağlamıştır.

a^2 bir sabit ve u ise sıcaklık olmak üzere bir boyutlu ısı denklemini,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.37)$$

olarak belirlemiştir ki eğer $\frac{\partial}{\partial t} = p$ alınırsa,

$$D^2 u = a^2 p \quad (1.38)$$

olur. Heaviside, $p^{1/2} = d^{1/2}/dx^{1/2} = D^{1/2}$ eşitlikleriyle doğru sonuçlar elde etmiştir.

1902-R.E.Moritz, yaptığı çalışmalarda anlaşılması güç olan yeni sembol ve terimler kullanmıştır.

1918-E.Schuyler,

$$(d^{1/2}/dx^{1/2})(d^{1/2}y/dx^{1/2}) = dy/dx \quad (1.39)$$

eşitliğini ispatlamaya ve bu ifadeyi yorumlamaya çalışmıştır. Bu problem 1919'da, Post tarafından da ele alınmış ve çözümü yapılmıştır.

1918-L.O'Shaughnessy,

$$d^{1/2}y/dx^{1/2} = y/x \quad (1.40)$$

denklemini çözmeye çalışmış ve bu problem de 1919'da, Post tarafından incelenip, çözülmüştür.

1919-E.Post, kesirli hesap operatörleri ile alakalı iki probleme iki farklı çözüm üretmeye çalışmıştır. İlk çözümünde,

$${}_c D_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \quad (1.41)$$

şeklindeki Liouville'un kesirli mertebeli integrasyon tanımını, $c = -\infty$ olarak kullanmıştır. İkinci çözümünde ise Riemann tanımından yararlanmıştır.

1919-M.T.Naraniengar,

$$D^{\frac{1}{2}}(x^n) = R(n)x^{n-\frac{1}{2}} \quad (1.42)$$

denklemini üzerine çalışmış ve $\Gamma(n+1)/\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ değerine karşılık gelen $R(n)$ katsayısını geliştirmiştir.

1919-T.J.I'a Bromwich, bazı fiziksel problemlerin çözümünde kesirli hesap operatörlerini kullanmayı amaçlamıştır.

1922-G.H.Hardy, özellikle toplam ve süreklilik teoremlerinin kesirli mertebeden integral özelliklerini, tamsayı mertebeli olanlarla benzerliklerini göz önünde bulundurarak incelemiştir.

1922-W.C.Brenke, fizikte kullanmak için,

$$Q(h) = c \int_0^h (h-t)^{\frac{1}{2}} f(t) dt \quad (1.43)$$

şeklindeki denklem ve bu denklemin uygulamaları üzerine çalışmıştır.

1923-P.Levy, e^{iz} ifadesinin kesirli türevini düşünmüş ve bunun üzerine çeşitli çalışmalar yapmıştır.

1924-H.T.Davis, bazı integral denklemlerin çözümüne uygulanmak için geliştirilen teori çalışmalarının eksiklerini gidermeye yönelik çalışmalar yapmıştır.

1925-E.Stephens, genel ve kesirli diferansiyeller ile alakalı bir kaynakça çalışması yapmıştır. Ancak bu kaynakçada pek çok hata ve eksikliğe rastlanmıştır.

1927-W.O.Pennell, kesirli hesap operatörleri üzerine bazı teoremler üretmiştir.

$$p^2y + xy = 1, p = d/dx \quad (1.44)$$

şeklindeki lineer bir denklemin çözümü için, p 'nin bir seriye nasıl genişletilebileceğini ayrıntılı bir şekilde açıklamıştır.

1927-H.T.Davis, kesirli hesap operatörlerini tanımlamada kullanılan çeşitli notasyonları ele almıştır. $\frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt$ 'yi tanımlamak için ${}_c D_x^{-v} f(x)$ notasyonunu kullanmıştır. ${}_c D_x^{\frac{1}{2}} u + \lambda u = f(x)$ gibi kesirli üsse sahip bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için de bu notasyonu uygulamıştır.

1928-G.H.Hardy ve J.E.Littlewood, standart sınıftan bazı fonksiyonların keyfi mertebeli türev ve integrali için tanımlanan Riemann-Liouville tanımını geliştirmeyi amaçlamışlardır.

1933-K.S.Cole, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketini incelemede, kesirli hesaptan yararlanmıştır.

1935-A.Zygmund, Weyl tarafından ortaya atılan ve trigonometrik seriler için çok uygun olan bir kesirli integrasyon tanımı üzerine çalışmıştır.

1936-H.Poritsky, $p = d/dx$ olmak üzere, $p^{\frac{1}{2}}$ 'nin doğru bir yorumlamasının nasıl olabileceğini düşünmüştür. Bunun, tamsayı üsleri ihmal ederek, $p^{\frac{1}{2}}$ 'nin kuvvetlerini genişleterek elde edilebileceğini iddia etmiştir. Ancak, Heaviside tarafından keşfedilen bu yöntemi ispatlayamamıştır.

1936-W.Fabian, kesirli integrallerin özellikleri üzerine çalışmış, integral ve serilerin toplamından bazı sonuçlar elde etmiştir. Riemann tanımını genişleterek, kompleks düzlemde herhangi bir eğri boyunca kesirli integrasyon kavramı üzerine çalışmıştır.

1940-H.Kober, Hardy ve Littlewood'un bulduğu bazı sonuçları genişletmiş, Mellin dönüşümlerinden ve

$$g(x) = \int_{\alpha}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.45)$$

denkleme çözüm için bir teoremden bahsetmiştir.

1941-D.V.Widder, kesirli integraller ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiyi ele almıştır.

1949-M.Riesz, Hagstrom ile işbirliği yaparak, kesirli hesabın temel yönlerini vermiştir. Riemann uzayındaki dalga denklemi, izafiyet teorisi, Lorenz uzayı ve olasılık teorisinde,

$$I^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\alpha}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (1.46)$$

şeklindeki kesirli integralin çeşitli yönlerinden bahsetmiştir.

1950-N.Stuloff,

$$\Delta^\alpha x_n = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{\alpha}{v} x_{n+v} \quad (1.47)$$

eşitliği ile kesirli mertebenin farklarını ele almıştır.

1953-B.Kuttner,

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} f(t) dt \quad (1.48)$$

ve

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_x^1 (t-x)^{n-k-1} f(t) dt \quad (1.49)$$

şeklindeki iki integral arasındaki ilişkiyi düşünmüştür.

1954-A.Erdelyi, kesirli integraller ile alakalı bir kaynakça çalışması yapmış ve Heaviside'ın $(d/dt)^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki operatörünü ele almıştır. Kesirli integrasyon ve ikili integral denklemler üzerine de bazı çalışmalar yapmıştır.

1959-J.L.Lions, Navier-Stokes denklemlerinin açık bir çözümü olarak bir $u(t)$ fonksiyonu belirlemiş ve bu çözümün, t ile ilgili kesirli bir türeve sahip olup olmayacağı sorusunu ortaya atmıştır.

1961-M.A.Bassam, Holmgren ve Riesz tarafından verilen, keyfi mertebeden iki belirli integral arasındaki eşitliği göstermiştir. Böylece, birleştirilmiş tek bir tanım elde etmiş ve 'Holmgren-Riesz Dönüşümleri' adlı bir tez yazmıştır.

1964-I.M.Gelfand ve G.E.Shilov, hipergeometrik ve Bessel fonksiyonları gibi bir çok özel fonksiyonu, elemanter fonksiyonların keyfi mertebeli türevleri olarak yazmışlardır.

1964-R.G.Buschman, sınır-değer problemlerinin analizinde, J alışılmış Bessel fonksiyonu olmak üzere; $\int_0^\infty y^p J_u(xy) f(y) dy = g(x)$ ve $\int_0^\infty y^s J_v(xy) f(y) dy = h(x)$ gibi iki integral denklemini tek bir denkleme indirgemek için, kesirli hesap operatörlerini kullanmış ve $\int_0^\infty y^t J_\lambda(xy) f(y) dy = F(x)$ denklemini elde etmiştir.

1967-R.N.Kesarwani, Buschman'ın çalışmasını genişletmiş ve kesirli integrasyon ve bazı ikili integral denklemler üzerine çalışmıştır.

1967-M.Caputo, kesirli hesap tekniği ile alakalı,

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n - 1 \leq \alpha < n) \quad (1.50)$$

şeklindeki formülü tanımlamıştır.

1967-T.P.Higgins, homojen olmayan diferansiyel denklemlerin bazı uygulamalarını ele almış ve kesirli hesap operatörleriyle elde edilen sonuçların, formüller üzerinde basit sadeleştirmeler yapılarak, diğer alışılmış yöntemlerle de elde edilebileceğini iddia etmiştir.

1968-G.V.Welland, $[1/\Gamma(\beta)] \int_{-\infty}^x (x - t)^{\beta-1} f(t) dt$ kesirli integrasyonu için Liouville'un tanımından yararlanmış ve Zygmund'un bazı çalışmalarını genişletmiştir.

1970-K.B.Oldham ve J.Spainer, adi diferansiyel olarak adlandırdıkları, $\frac{1}{2}$ mertebeli $d^{\frac{1}{2}} f(t)/dt^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki operatör yardımıyla elektrokimyasal kinetikleri açıklayabilecekleri yeni bir yöntem bulduklarını iddia etmişlerdir.

1970-T.J.Osler, çarpım durumundaki iki fonksiyonun türevi için, Leibniz kuralının bazı genellemelerini incelemiş ve bunları, bazı sonsuz serilerin açılımında kullanmıştır. Genelleştirilmiş bir zincir kuralı elde etmiş ve bu kuralın bazı özel durumlarını araştırmıştır. Genelleştirilmiş Cauchy integral formülünden faydalananarak, kesirli bir türev tanımlamıştır.

1971-E.R.Love, kesirli diferansiyeli, mertebenin sadece imajiner olduğu durumlar için tanımlamış ve alışılmış tanımları da imajiner mertebe durumlarına genişletmiştir.

1971-M.Shinbrot, Lions'un çalışmalarını ilerletmiş ve mertebesi $\frac{1}{2}$ olan kesirli diferansiyelleri ispatlamaya çalışmıştır.

1972-T.R.Prabhakar, kesirli integrasyonu kullanarak, iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonları içeren bazı integral denklemler üzerine çalışmıştır.

1993-K.S.Miller ve B.Ross, kesirli hesaplar üzerine yapmış oldukları çalışmalar neticesinde,

$$D^{\bar{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (1.51)$$

eşitliğini vermişlerdir [1,2,4].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonları bütün x değerleri için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N! N^x}{x[x+1][x+2] \dots [x+N]} \right\}. \quad (2.1)$$

Ancak, $x > 0$ değerleri ile sınırlı olsa da,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

tanımı da çok kullanışlıdır. Bu tanıma kısmi integrasyon yönteminin uygulanmasıyla, gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biri olan,

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (2.3)$$

formülü elde edilir. Bu formül, x sıfırdan büyük ve tamsayı değerler aldığı zaman,

$$n = 1$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (2.4)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

eşitliklerini verir. Gamma fonksiyonunu sıfırdan küçük tamsayı değerler için de tanımlayabiliriz:

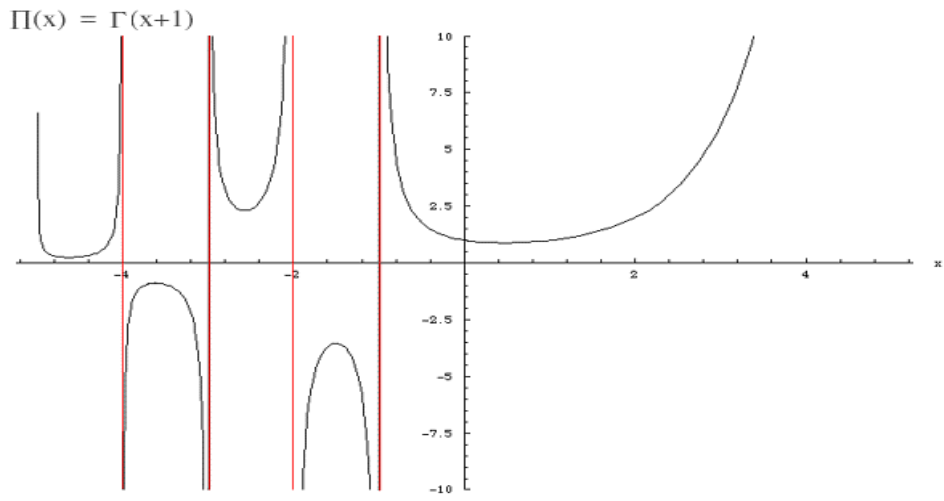
$$\Gamma(x-1) = \frac{1}{(x-1)} \Gamma(x) \quad (2.5)$$

ifadesi, $\Gamma(0), \Gamma(-1)$ ve diğer bütün negatif tamsayılar için gamma fonksiyonunun değerinin sonsuz olduğunu gösterir. Ancak oranları sonludur:

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} = [-N][-N+1] \dots [-N-2][-N-1] = [-1]^{N-n} \frac{N!}{n!}. \quad (2.6)$$

Tablo 2.1. Bazı n değerleri için gamma fonksiyonunun değerleri [1].

$\Gamma(-3/2) = (4/3)\sqrt{\pi}$	$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(-1) = \pm\infty$	$\Gamma(3/2) = (1/2)\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$	$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma(0) = \pm\infty$	$\Gamma(5/2) = (3/4)\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(3) = 2$



Şekil 2.1. Gamma fonksiyonu eğrisi [1].

Gamma fonksiyonunun özellikleri arasında,

$$\Gamma(-x) = \frac{-\pi \csc(\pi x)}{\Gamma(x+1)} \quad (2.7)$$

$$\Gamma(2x) = \frac{4^x \Gamma(x) \Gamma[x + (1/2)]}{2\sqrt{\pi}} \quad (2.8)$$

$$\Gamma(nx) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{n^x}{\sqrt{2\pi}} \right]^n \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma[x + (k/n)] \quad (2.9)$$

ifadeleri de yazılabilir.

Uygulamalarda çok karşılaşılan,

$$\frac{\Gamma(i-q)}{\Gamma(-q)}, \frac{\Gamma(i-q)}{\Gamma(i+1)} \quad (2.10)$$

oranlarının hesaplanmasında çok faydalı olan,

$$\frac{\Gamma(i-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(i+1)} \quad (2.11)$$

oranı ise,

$$\frac{\Gamma(i-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(i+1)} = \binom{i-q-1}{i} = [-1]^i \binom{q}{i} \quad (2.12)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca burada,

$$\sum_{i=0}^n \binom{i-q-1}{i} = \binom{n-q}{n} \quad (2.13)$$

şeklindeki eşitlik de ileriki konularda faydalı olacaktır [1,5,6].

2.2. Beta Fonksiyonu

$p, q > 0$ olmak üzere beta fonksiyonunun tanımı,

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (2.14)$$

ile verilir. $t = 1 - x$ değişken dönüşümü ile beta fonksiyonu argümanlarına göre simetrik olup en belirgin özelliği,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p) \quad (2.15)$$

şeklindedir [7].

2.3. Laplace Dönüşümü

Bütün v değerleri için $\frac{d^v f}{dx^v}$ diferintegralinin Laplace dönüşümünü bulmak mümkündür. Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dx^n}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{d^n f}{dx^n} dx \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir. v 'nün tamsayı değerler aldığı durumlarda türev ve integralin Laplace dönüşümleri,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dx^n}\right\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^n f}{dx^n}(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{-n} f}{dx^{-n}}\right\} = s^{-n} \mathcal{L}\{f\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

olarak verilir. Bu iki denklem tek bir ifade ile,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^N f}{dx^N}\right\} = s^N \mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{N-1} s^k \frac{d^{N-1-k} f}{dx^{N-1-k}}(0), \quad N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.19)$$

şeklinde gösterilir. Burada üst limit, $N - 1$ sayısından büyük herhangi bir tamsayı ile değiştirilebilir. En son verilen ifade, v 'nün bütün değerleri için,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^v f}{dx^v}\right\} = s^v \mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{v-1-k} f}{dx^{v-1-k}}(0) \quad (2.20)$$

şeklindedir. Burada n tamsayısı, $n - 1 < v \leq n$ olacak şekilde seçilmiştir [1,8].

2.4. Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli diferansiyel yönteminde oldukça yaygın kullanım alanına sahiptir. Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.21)$$

ile verilir. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.22)$$

seri açılımı ile verilir.

Bu denklemde $\alpha = 1$ ve $\beta = 1, 2, \dots, m$ alırsak, en genel haliyle,

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right\} \quad (2.23)$$

eşitliği elde edilir. Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı özel durumları ise,

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (2.24)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k + 1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (2.25)$$

şeklindedir [1,9].

2.5. Kesirli Hesaplama Temel Teoremler

$Rev > 0$ ve f fonksiyonu, $J = [0, \infty)$ aralığının herhangi sonlu alt aralığında integrallenebilir ve $J' = (0, \infty)$ aralığında parçalı-süreklili bir fonksiyon olsun. Böylece $t > 0$ için, v mertebeli f fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali,

$${}_0D_x^{-v}f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \quad (2.26)$$

şeklinde verilir. Bu tanımdan fonksiyonların bir $\mathbf{C}$ sınıfından bahsedilebilir. Örneğin, $f(t) = |t-a|^\lambda, \lambda > -1, 0 < a < t$ şeklindeki bir fonksiyonu içerecek şekilde $\mathbf{C}$ sınıfını belirleyebiliriz [2].

2.5.1. Teorem: f fonksiyonu, $J = [0, \infty)$ aralığında sürekli ve $\mu, v > 0$ olsun. Böylece her t için,

$$D^{-v}[D^{-\mu}f(t)] = D^{-(\mu+v)}f(t) = D^{-\mu}[D^{-v}f(t)] \quad (2.27)$$

eşitliği yazılabilir [2].

2.5.2. Teorem: f fonksiyonu, $J = [0, \infty)$ aralığında sürekli ve $v > 0$ olsun. Böylece:

a) Eğer $Df \in \mathbf{C}$ sınıfından ise,

$$D^{-v-1}[Df(t)] = D^{-v}f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(v+1)} t^v \quad (2.28)$$

b) Eğer $Df \in J'$ de sürekli ise, böylece $t > 0$ için,

$$D[D^{-v}f(t)] = D^{-v}[Df(t)] + \frac{f(0)}{\Gamma(v)} t^{v-1} \quad (2.29)$$

eşitlikleri yazılabilir [2].

2.5.3. Teorem: p pozitif bir tamsayı olsun. $D^{p-1}f$ fonksiyonu J' de sürekli ve $v > 0$ olsun. Böylece:

a) Eğer $D^p f \in \mathbf{C}$ sınıfından ise,

$$D^{-v}f(t) = D^{-v-p}[D^p f(t)] + Q_p(t, v) \quad (2.30)$$

b) Eğer $D^p f \in J'$ de sürekli ise, böylece $t > 0$ için,

$$D^p[D^{-v}f(t)] = D^{-v}[D^p f(t)] + Q_p(t, v-p) \quad (2.31)$$

eşitlikleri yazılabilir ki burada,

$$Q_p(t, v) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^{v+k}}{\Gamma(v+k+1)} D^k f(0) \quad (2.32)$$

şeklindedir [2].

2.5.4. Teorem: f fonksiyonu J' de sürekli bir türeve sahip olsun. p pozitif bir tamsayı ve $v > p$ olsun. Böylece her $t \in J$ için,

$$D^p[D^{-v}f(t)] = D^{-(v-p)}f(t) \quad (2.33)$$

eşitliği yazılabilir [2].

2.5.5. Teorem: p ve q pozitif tamsayılar, μ ve v de pozitif sayılar olmak üzere,

$$p - v = q - \mu \quad (2.34)$$

eşitliği sağlansın. $r = \max(p, q)$ olacak şekilde, f fonksiyonu J' de r sürekli türevlerine sahip olsun.

Böylece her $t \in J$ için,

$$D^{-v}[D^p f(t)] = D^{-\mu}[D^q f(t)] + \text{sgn}(q - p) \sum_{k=s}^{r-1} \frac{t^{v-p+k}}{\Gamma(v-p+k+1)} D^k f(0) \quad (2.35)$$

olur ki burada $s = \min(p, q)$ olup, her $t \in J'$ için,

$$D^q[D^{-\mu}f(t)] = D^p[D^{-v}f(t)] \quad (2.36)$$

eşitliği yazılabilir [2].

2.5.6. Teorem: $P(z; p)$ ve $Q(z; q)$ iki polinom, p ve q da z 'nin dereceleri olmak üzere bu iki polinom sırasıyla,

$$\begin{aligned}
P(z; p) &= \sum_{k=0}^p a_k z^{p-k} \\
&= a_0 \prod_{j=1}^p (z - z_j), \quad a_0 \neq 0, p \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ve

$$Q(z; q) = \sum_{k=0}^q b_k z^{q-k}, \quad b_0 \neq 0, q \in \mathbb{N} \tag{2.38}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, verilen f fonksiyonu için $f_{-v} \neq 0$ durumu mevcut olsun.

Böylece,

$$\begin{aligned}
P(z; p)\phi_\mu(z) + \left[\sum_{k=1}^p \binom{v}{k} P_k(z; p) + \sum_{k=1}^q \binom{v}{k-1} Q_{k-1}(z; q) \right] \phi_{\mu-k}(z) \\
+ \binom{v}{q} q! b_0 \phi_{\mu-q-1}(z) = f(z), \quad \mu, v \in \mathbb{R}; p, q \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

şeklindeki homojen olmayan lineer adi kesirli diferintegral denklem,

$$\phi(z) = \left[\left(\frac{f_{-v}(z)}{P(z; p)} e^{H(z; p, q)} \right)_{-1} e^{-H(z; p, q)} \right]_{v-\mu+1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \tag{2.40}$$

formunda özel bir çözüme sahiptir. Burada,

$$H(z; p, q) = \int_z^{\zeta} \frac{Q(\zeta; q)}{P(\zeta; p)} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \tag{2.41}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
P(z; p)\phi_\mu(z) + \left[\sum_{k=1}^p \binom{v}{k} P_k(z; p) + \sum_{k=1}^q \binom{v}{k-1} Q_{k-1}(z; q) \right] \phi_{\mu-k}(z) \\
+ \binom{v}{q} q! b_0 \phi_{\mu-q-1}(z) = 0, \quad \mu, v \in \mathbb{R}; p, q \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

şeklindeki homojen lineer adi kesirli diferintegral denklem,

$$\phi(z) = K(e^{-H(z;p,q)})_{v-\mu+1} \quad (2.43)$$

formunda özel bir çözüme sahiptir. Burada $H(z; p, q)$, (2.41)'de tanımlandığı gibidir [10].

2.6. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri

i) Lineerlik

$f(z)$ ve $g(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olmak üzere, f_η ve g_η mevcut ise,

$$\left. \begin{aligned} [h_1 f(z)]_\eta &= h_1 f_\eta(z) \\ [h_1 f(z) + h_2 g(z)]_\eta &= h_1 f_\eta(z) + h_2 g_\eta(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

dir. Burada, h_1 ve h_2 sabitler, $\eta \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{C}$ 'dir [6].

ii) Homojenlik

C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\frac{d^v(Cf)}{d(x-a)^v} = C \frac{d^v f}{d(x-a)^v} \quad (2.45)$$

şeklindedir [1].

iii) Ölçek Değişikliği

Bir fonksiyonun alt limit α 'ya göre ölçek değişikliği,

$$x \rightarrow \beta(x - \alpha) + \alpha \quad (2.46)$$

şeklindedir. Buradaki β ölçek faktörü olup sabittir. Eğer alt limit sıfır ise,

$$x \rightarrow \beta x \quad (2.47)$$

olur.

Alt limitin sıfırdan farklı olduğu durumlarda ölçek değişikliğinin diferintegrale etkisi,

$$\frac{d^\mu f(\beta(x - \alpha) + \alpha)}{[d(\beta(x - \alpha))]^\mu} = \beta^{-\mu} \frac{d^\mu f(\beta(x - \alpha) + \alpha)}{[d(x - \alpha)]^\mu} \quad (2.48)$$

şeklinde verilir. $\alpha = 0$ olduğu durumlardaki ölçek değişikliği,

$$\frac{d^\mu f(\beta x)}{[d(\beta x)]^\mu} = \beta^{-\mu} \frac{d^\mu f(\beta x)}{[dx]^\mu} \quad (2.49)$$

olarak verilir [1].

iv) Bir Serinin Diferintegrali

Düzgün yakınsak bir serinin diferintegral operatörünün doğrusallık özelliğinden, bütün v değerleri için serinin diferintegrali,

$$\frac{d^v}{d(x - a)^v} \sum_{j=0}^{\infty} f_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^v f_j}{d(x - a)^v} \quad (2.50)$$

şeklinde alınır ki bu seri de düzgün yakınsak olur [1].

v) Birleşme Özelliği

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha \quad (2.51)$$

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta} \quad (2.52)$$

$$D^\alpha f = g \rightarrow f = D^{-\alpha} g \quad (2.53)$$

şeklindeki işlemler belirli durumlarda geçerlidir. α ve β pozitif tamsayılar olmak üzere $\alpha - \beta < 0$ olduğu zaman,

$${}_a D_t^\alpha \left[{}_a D_t^{-\beta} f(t) \right] = {}_a D_t^{\alpha-\beta} \quad (2.54)$$

durumu geçerlidir. Fakat önce türevin sonra da integralin alındığı durumlarda ise,

$${}_aD_t^{-\beta} [{}_aD_t^\alpha f(t)] = {}_aD_t^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{k=\beta-\alpha}^{\beta-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(\alpha+k-\beta)}(a) \quad (2.55)$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca bu özelliklerden hareketle, diferintegrallerin indis kanunu; $f(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyon olmak üzere, $(f_\rho)_\eta$ ve $(f_\eta)_\rho$ mevcut ise,

$$[f_\rho(z)]_\eta = f_{\rho+\eta}(z) = [f_\eta(z)]_\rho \quad (2.56)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\rho, \eta \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$ ve $\left| \frac{\Gamma(\rho+\eta+1)}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(\eta+1)} \right| < \infty$ şeklindedir.

Diferintegrallerin diğer bazı özellikleri ise;

$$(e^{\lambda z})_\eta = \lambda^\eta e^{\lambda z} \quad (\lambda \neq 0; \eta \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}) \quad (2.57)$$

$$(e^{-\lambda z})_\eta = e^{-i\pi\eta} \lambda^\eta e^{-\lambda z} \quad (\lambda \neq 0; \eta \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}) \quad (2.58)$$

$$(z^\lambda)_\eta = e^{-i\pi\eta} \frac{\Gamma(\eta-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} z^{\lambda-\eta} \quad \left(\eta \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}; \left| \frac{\Gamma(\eta-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} \right| < \infty \right) \quad (2.59)$$

şeklindedir. Burada, λ değeri sabittir [1,2,11].

3. METOT VE MATERYALLER

3.1. Grünwald Tanımı

Gamma fonksiyonlarının,

$$(-1)^i \binom{n}{i} = \binom{i-n-1}{i} = \frac{\Gamma(i-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(i+1)} \quad (3.1)$$

ilişkisi kullanılarak, tamsayı değerler için türev ve integral tek bir formül ile,

$$\frac{d^n f}{d(x-a)^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-n}}{\Gamma(-n)} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma(i-n)}{\Gamma(i+1)} f\left(x - i \frac{x-a}{N}\right) \right] \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir. Son eşitlikte n yerine bütün değerleri alabilen v yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{d^v f}{d(x-a)^v} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-v}}{\Gamma(-v)} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma(i-v)}{\Gamma(i+1)} f\left(x - i \frac{x-a}{N}\right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{N}{x-a}\right)^v \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma(i-v)}{\Gamma(-v)\Gamma(i+1)} f\left(x - i \frac{x-a}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde Grünwald'ın diferintegral tanımını elde ederiz. Bu tanımın en büyük avantajı; verilen bir fonksiyonun diferintegralinin o fonksiyonun türevlerine veya integrallerine ihtiyaç kalmadan, sadece kendisinin aldığı değerler ile bulunabilmesidir. Bu formülde $\Gamma(-v)$, q 'nun pozitif değerleri için sonsuz, ancak $\frac{\Gamma(i-v)}{\Gamma(-i)}$ oranı sonlu bir sayıdır [1,5].

3.2. Riemann-Liouville Tanımı

Kesirli diferansiyel denklemlerin ifadelerinde kullanılan en önemli tanım Riemann-Liouville tanımıdır. Bu tanım en genel haliyle,

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \text{Re } \nu > 0, t > 0 \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada $c = 0$ için denklem,

$${}_0 D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \text{Re } \nu > 0, t > 0 \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. Aynı şekilde $c = -\infty$ için denklem,

$$_{-\infty} D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \text{Re } \nu > 0, t > 0 \quad (3.6)$$

formundadır. Buradaki $D^{-\nu}$, ν . dereceden kesirli integral operatörüdür. Riemann-Liouville diferintegralinin tanımı,

$$\frac{d^\nu f}{d(x-a)^\nu} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^x (x-t)^{-(n-\nu)-1} f(t) dt \right], \quad n-1 \leq \nu < n, \nu \geq 0 \quad (3.7)$$

ve $\nu < 0$ için ise,

$$\frac{d^\nu f}{d(x-a)^\nu} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt \quad (3.8)$$

şeklinde verilmektedir [1,2].

3.3. Caputo Kesirli Türevi

Kesirli diferansiyel tekniğin Riemann-Liouville tanımları, diferintegraller ve uygulamaları ile ilgili matematiksel çalışmalarda çok büyük rol oynamıştır. Bununla beraber modern teknolojinin gelişimi matematiğin uygulama ve ele alınış şeklini de etkilemiştir.

Kesirli diferansiyel tekniğinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n - 1 \leq \alpha < n) \quad (3.9)$$

ile verilir. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerdekiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Başka bir ifadeyle $t = a$ alt limitinde, bilinen bir fonksiyonun tam derece türevlerinin limit değerlerini içermesidir [6].

3.4. Diferintegralin Diğer Tanımları

3.4.1. Cauchy İntegral Formülü Yardımı ile Diferintegral Tanımı

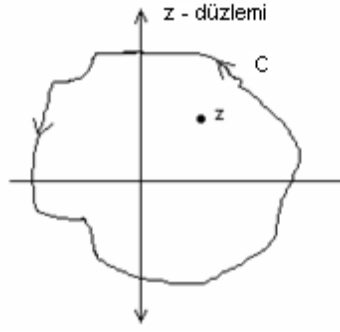
C yolu üzerinde ve içinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonunun n . dereceden türevi,

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z)^{n+1}} \quad (n \geq 0, n \in \mathbb{Z}) \quad (3.10)$$

şeklinde olup, z' , C kapalı yolu üzerindeki bir noktayı ve z de C içinde herhangi bir noktayı göstermektedir. Burada, z noktası reel eksen üzerindeki bir nokta olarak alınırsa, herhangi bir v değeri için,

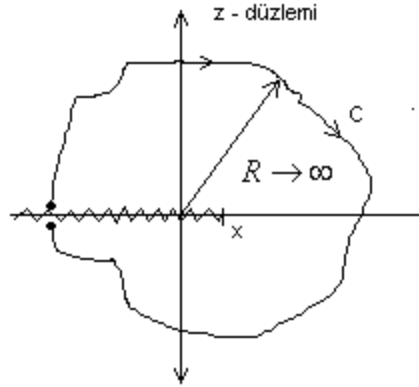
$$\frac{d^v f(x)}{dz^v} = \frac{\Gamma(v + 1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - x)^{v+1}} \quad (3.11)$$

formülü yazılır.



Şekil 3.1. Cauchy integral formülünün C yolu [1].

Bu formül, Şekil (3.1)'de gösterilen C yolu için ve v 'nün pozitif tamsayı değerleri için geçerlidir. v 'nün negatif tamsayı olduğu durumlarda ise, $\Gamma(q + 1)$ fonksiyonu sonsuz olacağından tanımsızdır. v 'nün negatif ve tamsayıdan farklı değerleri için ise, diferintegral tanımı olarak kullanılabilir. Ancak, bu durumda x dal noktası olacağından kesik çizgisinin yönüne dikkat etmek gerekecek ve C yolu da artık Şekil (3.1)'deki gibi olmayacaktır.



Şekil 3.2. Diferintegral formülündeki C yolu [1].

Kesik çizgisini dal noktasının solunda ve reel eksen üzerinde sonsuza kadar uzanacak şekilde seçer ve C yolunu da Şekil (3.2)'de gösterildiği gibi alırsak,

$$\frac{d^v f(x)}{dz^v} = \frac{\Gamma(v + 1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - x)^{v+1}} \quad v < 0, \neq \mathbb{Z} \quad (3.12)$$

formülünü v 'nün negatif ve tamsayıdan farklı değerleri için diferintegral tanımı olarak kullanabiliriz. Burada, C yolunun yarı çapının sonsuza gittiği durumda saat yönünde hesaplanacaktır [1].

3.4.2. Riemann Formülü

Bütün v değerleri için geçerli olan Riemann formülü,

$$\frac{d^v x^\mu}{dx^v} = \frac{\Gamma(\mu + 1)x^{\mu-v}}{\Gamma(\mu - v + 1)}, \quad \mu > -1 \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanır. Bu formül, m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\frac{d^m x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \quad (3.14)$$

formülünün, $\mu > -1$ şartı altındaki bir genellemesidir [1].

3.4.3. Genelleştirilmiş Leibniz Formülü

$f(z)$ ve $g(z)$ n -katlı diferansiyellenebilir, analitik ve tek değerli fonksiyonlar olmak üzere, Leibniz formülü bu iki fonksiyonun çarpımının, herhangi bir mertebeden türev ve integralini ifade eder. Leibniz formülü:

$$D^\eta [f(z)g(z)] = [f(z)g(z)]_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\eta}{n} [D^{\eta-n} f(z)][D^n g(z)] \quad (3.15)$$

$$[f(z)g(z)]_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\eta + 1)}{\Gamma(\eta - n + 1)\Gamma(n + 1)} f_{\eta-n}(z)g_n(z) \quad (3.16)$$

formundadır. Burada, $\eta \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{C}$ ve $\left| \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-n+1)\Gamma(n+1)} \right| < \infty$ şeklindedir [1,2].

3.4.4. Laplace Dönüşümü Yardımı ile Diferintegral Tanımı

Diferintegral, Laplace dönüşümü yardımı ile negatif v değerleri için,

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \mathcal{L}^{-1}[s^v \tilde{f}(s)], \quad v < 0 \quad (3.17)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\tilde{f}(s)$, $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. $v > 0$ değerleri için ise, Laplace dönüşümü yardımı ile diferintegral tanımı,

$$\left[\frac{d^v f}{dx^v}\right]_L = \mathcal{L}^{-1} \left[s^v \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{v-1-k} f}{dx^{v-1-k}}(0) \right], \quad v > 0 \quad (3.18)$$

şeklinde verilir. Burada, $v > 0$ ve n tamsayısı da $n - 1 < v \leq n$ olacak şekilde seçilmelidir [1].

3.5. Diferintegrallerle İlgili Bazı Matematik Teknikler

3.5.1. Belirli İntegrallerin Alınması

Bazı belirli integralleri hesaplamak için diferintegrallerden de yararlanabiliriz. x^v fonksiyonunun diferintegralini Riemann-Liouville tanımı ve

$$x' = x - x\lambda \quad (3.19)$$

dönüşümü ile yazarsak,

$$\frac{d^v x^v}{dx^v} = \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_0^1 \frac{[1-\lambda]^v d\lambda}{\lambda^{v+1}} = \Gamma(v+1) \quad (3.20)$$

bulunur. Burada,

$$t = -\ln(\lambda) \quad (3.21)$$

olacak şekilde bir dönüşüm daha yaparsak,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{[\exp(t) - 1]^{-v}} = \Gamma(-v)\Gamma(v+1) = \pi \csc(v\pi) \quad (3.22)$$

elde ederiz. Riemann-Liouville tanımında (3.19) dönüşümünü herhangi bir fonksiyon için yaparsak,

$$\int_0^{x-a} f(x - x\lambda) d(\lambda^{-v}) = \Gamma(1-v)x^v \frac{d^v f}{dx^v}, \quad v < 0 \quad (3.23)$$

bulunur. Ayrıca, $\lambda^{-v} \rightarrow t$ ve $-1/v \rightarrow \mu$ değişimlerini yaparak (v pozitifdir ancak, tamsayı olmak zorunda değildir.) bazı belirli integrallerin alınmasında çok yararlı olan,

$$\int_0^{x^{1/\mu}} f(x - xt^\mu) dt = \Gamma\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) x^{-1/\mu} \frac{d^{-1/\mu} f}{dx^{-1/\mu}} \quad (3.24)$$

formülü elde edilir.

Özel olarak $x = 1$ seçilirse,

$$\int_0^{x^{1/\mu}} f(1 - t^\mu) dt = \Gamma\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) \frac{d^{-1/\mu} f}{dx^{-1/\mu}} \Big|_{x=1} \quad (3.25)$$

bulunacaktır [1].

3.5.2. Serilerin Toplamlarının Bulunması

1970 yılında Osler tarafından verilen ve Leibniz kuralının seri şekli olan,

$$\begin{aligned} \frac{d^v[f(x)g(x)]}{dx^v} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \binom{v}{n+\gamma} \frac{d^{v-n-\gamma} f}{dx^{v-n-\gamma}} \frac{d^{\gamma+n} g}{dx^{\gamma+n}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-n-\gamma+1)\Gamma(\gamma+n+1)} \frac{d^{v-\gamma-k} f}{dx^{v-\gamma-k}} \frac{d^{\gamma+k} g}{dx^{\gamma+k}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

formülü, bazı serilerin toplamlarının bulunmasını sağlar. Burada, γ herhangi bir sayıdır [1].

4. KESİRLİ HESAP OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA SİNGÜLER KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, kesirli hesap operatörü yardımıyla singüler katsayılı bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmamıza yarayan teoremler vereceğiz. Bu konuyla ilgili; Tu Chyan, Srivastava [10] kesirli hesap teorisini kullanarak adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin özel çözümlerini bulmamıza yarayan teorik çalışmalar yapmışlardır. Bazı singüler katsayılı diferansiyel denklemlerin özel çözümlerini, Nishimoto [12], Nishimoto, Romero [13], Romero, Srivastava [14], Srivastava, Owa, Nishimoto [15], Lin, Tu, Srivastava [16], Lin, Tsai, Wang [17], Yilmazer [18] çalışmalarında elde etmişlerdir. Ayrıca, Nishimoto [19-24] çalışmalarında, kesirli diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklemlerin bazı sınıflarının çözümlerini bulmak için bir takım teoriler geliştirmiştir.

4.1. Diferansiyel Denklemlerin Bir Sınıfı

$f(z)$ bir fonksiyon, $\varphi(z) = \frac{\alpha}{z}$, $\psi(z) = \lambda + \frac{\beta}{z} + \frac{\tau}{z^2}$ ve $\alpha, \lambda, \beta, \tau$ parametreler olmak üzere,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \varphi(z) \frac{dy}{dz} + \psi(z)y(z) = f(z), \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}), \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmış diferansiyel denklemlerin genel bir sınıfını ele alalım. Eğer (4.1) diferansiyel denkleminde,

$$\alpha = 0, \quad \tau = \frac{1}{4} - \gamma^2 \quad (4.2)$$

yazarsak,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\lambda + \frac{\beta}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \gamma^2}{z^2} \right) y(z) = f(z) \quad (4.3)$$

şeklinde homojen olmayan Whittaker denklemlerinin bir ailesini,

$$\beta = 2, \quad \gamma = \ell + \frac{1}{2}, \quad f(z) \equiv 0 \quad (4.4)$$

yazarsak Hidrojen atomu denklemi olarak bilinen,

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\lambda + \frac{2}{z} - \frac{\ell(\ell + 1)}{z^2} \right) y(z) = 0 \quad (4.5)$$

şeklinde homojen diferansiyel denklem elde ederiz. Burada, ℓ pozitif tamsayı veya sıfırdır.

2.5.6.Teoremi yardımıyla, (4.1) ile verilen homojen olmayan diferansiyel denklemin özel çözümlerini bulmak için,

$$y(z) = z^{\vartheta} e^{mz} \phi(z) \quad (4.6)$$

dönüşümünü alırsak,

$$\frac{dy}{dz} = z^{\vartheta-1} e^{mz} \left[z \frac{d\phi}{dz} + (\vartheta + mz)\phi(z) \right] \quad (4.7)$$

ve

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = z^{\vartheta-2} e^{mz} \left[z^2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} + 2(\vartheta + mz)z \frac{d\phi}{dz} + \{m^2 z^2 + 2\vartheta mz + \vartheta(\vartheta - 1)\}\phi(z) \right] \quad (4.8)$$

olur. (4.6), (4.7) ve (4.8) eşitliklerini, (4.1) ile verilen homojen olmayan diferansiyel denklemde yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned} z \frac{d^2 \phi}{dz^2} + [\alpha + 2\vartheta + 2mz] \frac{d\phi}{dz} + [z^{-1}(\vartheta(\vartheta + \alpha - 1) + \tau) + z(m^2 + \lambda) \\ + (m(\alpha + 2\vartheta) + \beta)]\phi(z) = z^{1-\vartheta} e^{-mz} f(z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

denklemini elde ederiz. (4.9) denkleminde,

$$\begin{aligned} \alpha + 2\vartheta &= 0, \\ \vartheta(\vartheta + \alpha - 1) + \tau &= 0, \\ m^2 + \lambda &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

olacak şekilde alırsak,

$$\vartheta = -\frac{1}{2}\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\tau}}{2}, \quad (4.11)$$

ve

$$m = \pm\sqrt{\lambda}i \quad (4.12)$$

bulunur.

(4.10)'daki eşitliklerin, (4.9)'daki homojen olmayan diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla denklemimiz,

$$z \frac{d^2\phi}{dz^2} + 2mz \frac{d\phi}{dz} + \beta\phi(z) = z^{1-\vartheta} e^{-mz} f(z), \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (4.13)$$

şekline indirgenmiş olur. Burada, ϑ ile m , (4.11) ve (4.12)'de belirtildiği gibidir.

2.5.6.Teoreminde,

$$\mu = 2, \quad p = q = 1, \quad a_0 = h \neq 0, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = n \neq 0 \quad \text{ve} \quad b_1 = r \quad (4.14)$$

alırsak,

$$P(z; 1) = hz, \quad P_1(z; 1) = h \quad (4.15)$$

ve

$$Q(z; 1) = nz + r, \quad Q_1(z; 1) = n \quad (4.16)$$

olur. Böylece (2.41) tanımından,

$$H(z; 1,1) = \int^z \frac{Q(\zeta; 1)}{P(\zeta; 1)} d\zeta = \int^z \frac{n\zeta + r}{h\zeta} d\zeta = \ln[(hz)^{r/h} e^{nz/h}] \quad (4.17)$$

eşitliğini elde ederiz.

4.1.1. Teorem: Eğer, f fonksiyonu, $|f_v(z)| < \infty, v \in \mathbb{R}$ ve $f_{-v} \neq 0$ ile verilmişse,

$$hz \frac{d^2\phi}{dz^2} + (nz + vh + r) \frac{d\phi}{dz} + vn\phi(z) = f(z), \quad (h \neq 0, v \in \mathbb{R}) \quad (4.18)$$

şeklindeki homojen olmayan lineer adi diferansiyel denklemi,

$$\phi(z) = \left[(f_{-v}(z)(hz)^{(r-h)/h} e^{nz/h})_{-1} (hz)^{-r/h} e^{-nz/h} \right]_{v-1} \quad (4.19)$$

formunda özel bir çözüme sahiptir.

Ayrıca, K keyfi bir sabit olmak üzere,

$$hz \frac{d^2 \phi}{dz^2} + (nz + vh + r) \frac{d\phi}{dz} + vn\phi(z) = 0, \quad (h \neq 0, v \in \mathbb{R}) \quad (4.20)$$

şeklindeki homojen lineer adi diferansiyel denklemi,

$$\phi(z) = K \left[(hz)^{-r/h} e^{-nz/h} \right]_{v-1} \quad (4.21)$$

formunda çözümlere sahiptir.

(4.18)'de,

$$h = 1, \quad n = 2m, \quad r = -v, \quad v = \frac{\beta}{2m} \quad \text{ve} \quad f(z) \rightarrow z^{1-\vartheta} e^{-mz} f(z) \quad (4.22)$$

yazarsak (4.13) denklemini elde ederiz. Böylece, (4.13)'deki homojen olmayan lineer adi diferansiyel denklemin özel bir çözümünü,

$$\phi(z) = \left\{ \left[(z^{1-\vartheta} e^{-mz} f(z))_{-v} z^{-v-1} e^{2mz} \right]_{-1} z^v e^{-2mz} \right\}_{v-1} \quad (4.23)$$

şeklinde elde ederiz. Aynı şekilde,

$$z \frac{d^2 \phi}{dz^2} + 2mz \frac{d\phi}{dz} + \beta \phi(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (4.24)$$

homojen lineer adi diferansiyel denklemi,

$$\phi(z) = K(z^v \cdot e^{-2mz})_{v-1} \quad (4.25)$$

şeklindeki çözümlere sahiptir. Burada ϑ, m ve v , (4.11), (4.12) ve (4.22)'de verildiği gibidir. Böylece, tersine işlemle, (4.1) ile verilen homojen olmayan lineer adi diferansiyel denklemin,

$$\begin{aligned}
y(z) &= z^\vartheta e^{mz} \phi(z) \\
&= z^\vartheta e^{mz} \left\{ \left[\left(z^{1-\vartheta} e^{-mz} f(z) \right)_{-v} z^{-v-1} e^{2mz} \right]_{-1} z^v e^{-2mz} \right\}_{v-1}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

formunda özel bir çözüme sahip olduğu görülür.

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{\alpha}{z} \frac{dy}{dz} + \left(\lambda + \frac{\beta}{z} + \frac{\tau}{z^2} \right) y(z) = 0 \tag{4.27}$$

homojen lineer adi diferansiyel denklemin çözümleri ise,

$$y(z) = z^\vartheta e^{mz} \phi(z) = K z^\vartheta e^{mz} (z^v \cdot e^{-2mz})_{v-1}. \tag{4.28}$$

şeklindedir.

4.2. N-Kesirli Hesap Operatörünün Singüler Katsayılı Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

4.2.1. Teorem: $\varphi \in \{\varphi: 0 \neq |\varphi_\mu| < \infty; \mu \in \mathbb{R}\}$ ve $f \in \{f: 0 \neq |f_\mu| < \infty; \mu \in \mathbb{R}\}$ olsun.

$$L[\varphi, \zeta, \gamma, \tau] = \varphi_2 + \varphi \left\{ \frac{1}{4} + \frac{\tau}{\zeta} + \frac{(1/4 - \gamma^2)}{\zeta^2} \right\} = f \quad (\zeta \neq 0) \tag{4.29}$$

homojen olmayan Whittaker denklemi,

$$\begin{aligned}
\varphi^I &= \zeta^{1/2+\gamma} e^{-i\zeta/2} \\
&\cdot \left(\left[\left(f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{i\zeta/2} \right)_{-\gamma-(1/2)-i\tau} e^{-i\zeta} \zeta^{(\gamma-(1/2)-i\tau)} \right]_{-1} e^{i\zeta} \zeta^{(-\gamma-(1/2)+i\tau)} \right)_{\gamma-(1/2)+i\tau}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{II} &= \zeta^{1/2+\gamma} e^{i\zeta/2-\gamma} \\
&\cdot \left(\left[\left(f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{-i\zeta/2} \right)_{-\gamma-(1/2)+i\tau} e^{i\zeta} \zeta^{(\gamma-(1/2)+i\tau)} \right]_{-1} e^{-i\zeta} \zeta^{(-\gamma-(1/2)-i\tau)} \right)_{\gamma-(1/2)-i\tau}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{III} &= \zeta^{1/2-\gamma} e^{-i\zeta/2} \\
&\cdot \left(\left[\left(f \zeta^{(1/2)+\gamma} e^{i\zeta/2} \right)_{\gamma-(1/2)-i\tau} e^{-i\zeta} \zeta^{(-\gamma-(1/2)-i\tau)} \right]_{-1} e^{i\zeta} \zeta^{(\gamma-(1/2)+i\tau)} \right)_{-\gamma-(1/2)+i\tau}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\varphi^{IV} = \zeta^{1/2-\gamma} e^{i\zeta/2}$$

$$\cdot \left(\left[\left(f \zeta^{(1/2)+\gamma} e^{-i\zeta/2} \right)_{\gamma-(1/2)+i\tau} e^{-i\zeta} \zeta^{(-\gamma-(1/2)+i\tau)} \right]_{-1} e^{i\zeta} \zeta^{(\gamma-(1/2)-i\tau)} \right)_{-\gamma-(1/2)-i\tau} \quad (4.33)$$

formundaki özel çözümlere sahiptir. Burada, $\varphi_2 = \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2}$, $f = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ ve γ, τ sabitlerdir.

Not: Burada, $\gamma = 0$ olması halinde, (4.32) ve (4.33) çözümleri sırasıyla, (4.30) ve (4.31) çözümleri ile çıkarılır.

İspat: $\Phi = \Phi(\zeta)$ olmak üzere,

$$\varphi = \zeta^v \Phi \quad (\zeta \neq 0) \quad (4.34)$$

olsun.

Böylece,

$$\varphi_1 = v \zeta^{v-1} \Phi + \zeta^v \Phi_1 \quad (4.35)$$

ve

$$\varphi_2 = v(v-1) \zeta^{v-2} \Phi + 2v \zeta^{v-1} \Phi_1 + \zeta^v \Phi_2 \quad (4.36)$$

olur. (4.34), (4.35) ve (4.36)'yı (4.29)'da yerine yazarsak;

$$\zeta^{v-2} v(v-1) \Phi + 2v \zeta^{v-1} \Phi_1 + \zeta^v \Phi_2 + \zeta^v \Phi \left\{ \frac{1}{4} + \frac{\tau}{\zeta} + \frac{(1/4-\gamma^2)}{\zeta^2} \right\} = f \quad (4.37)$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki yanını ζ^{1-v} ile çarpıp gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$\Phi_2 \zeta + 2v \Phi_1 + \Phi \left\{ \left(v^2 - v + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right) \zeta^{-1} + \frac{1}{4} \zeta + \tau \right\} = f \zeta^{1-v} \quad (4.38)$$

bulunur. v 'yi,

$$v^2 - v + \frac{1}{4} - \gamma^2 = 0 \quad (4.39)$$

olacak şekilde seçelim.

Böylece,

$$v = \gamma \pm 1/2 \quad (4.40)$$

olur.

1.Durum: $v = \gamma + 1/2$ olsun. Bu değeri (4.34) ve (4.38) eşitliklerinde yerine yazarsak,

$$\varphi = \zeta^{\gamma+1/2} \Phi \quad (4.41)$$

ve

$$\Phi_2 \zeta + \Phi_1 (2\gamma + 1) + \Phi \left\{ \tau + \frac{1}{4} \zeta \right\} = f \zeta^{(1/2)-\gamma} \quad (4.42)$$

elde ederiz.

Şimdi de $\Psi = \Psi(\zeta)$ olmak üzere,

$$\Phi = e^{\lambda \zeta} \Psi \quad (\zeta \neq 0) \quad (4.43)$$

dönüşümünü ele alalım. Φ 'nin bu değerini (4.42) eşitliğinde yerine yazarsak;

$$(e^{\lambda \zeta} \Psi)_2 \zeta + (e^{\lambda \zeta} \Psi)_1 (2\gamma + 1) + e^{\lambda \zeta} \Psi \left\{ \tau + \frac{1}{4} \zeta \right\} = f \zeta^{(1/2)-\gamma} \quad (4.44)$$

olur. (4.44)'deki türevleri hesaplırsak;

$$(e^{\lambda \zeta} \Psi)_1 = \lambda e^{\lambda \zeta} \Psi + e^{\lambda \zeta} \Psi_1 = e^{\lambda \zeta} (\lambda \Psi + \Psi_1) \quad (4.45)$$

ve

$$(e^{\lambda \zeta} \Psi)_2 = \lambda e^{\lambda \zeta} (\lambda \Psi + \Psi_1) + e^{\lambda \zeta} (\lambda \Psi_1 + \Psi_2) = e^{\lambda \zeta} (\lambda^2 \Psi + 2\lambda \Psi_1 + \Psi_2) \quad (4.46)$$

olarak elde ederiz. (4.45) ve (4.46)'daki eşitlikleri (4.44)'de yerine yazarsak;

$$\Psi_2 \zeta + \Psi_1 (2\gamma + 1 + 2\lambda \zeta) + \Psi \left[\left(\lambda^2 + \frac{1}{4} \right) \zeta + \lambda (2\gamma + 1) + \tau \right] = f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{-\lambda \zeta} \quad (4.47)$$

olur.

λ değerini,

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad (4.48)$$

olacak şekilde seçersek,

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}i \quad (4.49)$$

elde ederiz.

(i) $\lambda = -\frac{1}{2}i$ durumunu ele alalım. Böylece (4.43), (4.47) sırasıyla,

$$\Phi = e^{-i\zeta/2}\Psi \quad (4.50)$$

ve

$$\Psi_2\zeta + \Psi_1(-i\zeta + 2\gamma + 1) + \Psi\left(-i\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) + \tau\right) = f\zeta^{(1/2)-\gamma}e^{i\zeta/2} \quad (4.51)$$

şeklinde yazılırlar. (4.51) eşitliğinin her iki yanına N^μ operatörünü uygularsak,

$$[\Psi_2\zeta]_\mu + [\Psi_1(-i\zeta + 2\gamma + 1)]_\mu + \left[\Psi\left(-i\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) + \tau\right)\right]_\mu = [f\zeta^{(1/2)-\gamma}e^{i\zeta/2}]_\mu \quad (4.52)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$N^\mu(\Psi_m\zeta^n) = (\Psi_m\zeta^n)_\mu \quad (n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \quad (4.53)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{\mu}{k} (\Psi_m)_{\mu-k} (\zeta^n)_k \quad (4.54)$$

şeklinde tanımlanan Leibniz formülü yardımıyla,

$$(\Psi_2\zeta)_\mu = \Psi_{2+\mu}\zeta + \mu\Psi_{1+\mu} \quad (4.55)$$

ve

$$(\Psi_1(-i\zeta + 2\gamma + 1))_\mu = (-i\zeta + 2\gamma + 1)\Psi_{1+\mu} - i\mu\Psi_\mu \quad (4.56)$$

bulunur. Bu eşitlikleri (4.52)'de yerine yazıp düzenlersek;

$$\begin{aligned} \Psi_{2+\mu}\zeta + \Psi_{1+\mu}(-i\zeta + 2\gamma + 1 + \mu) + \Psi_{\mu}\left(\tau - i\left(\gamma + \frac{1}{2} + \mu\right)\right) \\ = (f\zeta^{(1/2)-\gamma}e^{i\zeta/2})_{\mu} \end{aligned} \quad (4.57)$$

elde ederiz.

$$\tau \text{ değerini, } \tau - i\left(\gamma + \frac{1}{2} + \mu\right) = 0 \text{ olacak şekilde seçersek,}$$

$$\mu = -i\tau - \gamma - (1/2) \quad (4.58)$$

bulunur.

(4.57)'de μ 'nün değerini yerine yazarak,

$$\begin{aligned} (\Psi_{1+-i\tau-\gamma-(1/2)})_1 \zeta + \Psi_{1+-i\tau-\gamma-(1/2)}\left(-i(\zeta + \tau) + \gamma + \frac{1}{2}\right) \\ = [f\zeta^{(1/2)-\gamma}e^{i\zeta/2}]_{-i\tau-\gamma-(1/2)} \end{aligned} \quad (4.59)$$

elde ederiz.

$$\Psi_{1+-i\tau-\gamma-(1/2)} = u = u(\zeta) \quad (4.60)$$

olsun. Bu eşitliği (4.59)'da yerine yazarsak;

$$u_1 + u\left[-i + \left(\gamma + \frac{1}{2} - i\tau\right)\zeta^{-1}\right] = [f\zeta^{(1/2)-\gamma}e^{i\zeta/2}]_{-i\tau-\gamma-(1/2)}\zeta^{-1} \quad (4.61)$$

elde ederiz. (4.61) ile verilen denklem birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemdir. Bu denklemi çözersek;

$$u = \left[(f\zeta^{(1/2)-\gamma}e^{i\zeta/2})_{-i\tau-\gamma-(1/2)}\zeta^{-1}e^{-i\zeta}\zeta^{\left(\gamma+\frac{1}{2}-i\tau\right)} \right]_{-1} e^{i\zeta}\zeta^{\left(i\tau-\gamma-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.62)$$

elde ederiz.

φ^1 'i bulmak için tersine işlemlerle,

$$\Psi = u_{\gamma-(1/2)+i\tau} \quad (4.63)$$

bulunur. Böylece,

$$\varphi = \zeta^{1/2+\gamma} e^{-i\zeta/2}$$

$$\cdot \left(\left[\left(f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{i\zeta/2} \right)_{-\gamma-i\tau-(1/2)} e^{-i\zeta} \zeta^{\left(\gamma-i\tau-\frac{1}{2}\right)} \right]_{-1} e^{i\zeta} \zeta^{\left(-\gamma+i\tau-\frac{1}{2}\right)} \right)_{\gamma-(1/2)+i\tau} \quad (4.64)$$

şeklinde bir özel çözüm elde edilir.

(ii) (4.41) ve (4.42)'de olduğu gibi benzer bir yol izlersek; $\lambda = \frac{1}{2}i$ durumu için,

$$\Phi = e^{i\zeta/2} \Psi \quad (4.65)$$

ve

$$\Psi_2 \zeta + \Psi_1 (2\gamma + 1 + i\zeta) + \Psi \left(\tau + i \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \right) = f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{-i\zeta/2} \quad (4.66)$$

elde ederiz. (4.66) eşitliğinin her iki yanına N^μ operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned} \Psi_{2+\mu} \zeta + \Psi_{1+\mu} (i\zeta + 2\gamma + 1 + \mu) + \Psi_\mu \left[\tau + i \left(\gamma + \frac{1}{2} + \mu \right) \right] \\ = \left[f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{-i\zeta/2} \right]_\mu \end{aligned} \quad (4.67)$$

olur. μ değerini, $\tau + i \left(\gamma + \frac{1}{2} + \mu \right) = 0$ olacak şekilde seçersek,

$$\mu = i\tau - \gamma - (1/2) \quad (4.68)$$

bulunur. Bu değeri yerine yazıp,

$$\Psi_{i\tau-\gamma+(1/2)} = w = w(\zeta) \quad (4.69)$$

eşitliğini kullanırsak (4.67)'den,

$$w_1 + w \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} - i(\zeta + \tau) \right) \zeta^{-1} \right] = (f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{-i\zeta/2})_{i\tau-\gamma-(1/2)} \zeta^{-1} \quad (4.70)$$

elde ederiz. Buradan, (4.70) denkleminin özel bir çözümü,

$$w = \left[= (f \zeta^{(1/2)-\gamma} e^{-i\zeta/2})_{i\tau-\gamma-(1/2)} \zeta^{-1} e^{i\zeta \left(\gamma + \frac{1}{2} + i\tau \right)} \right]_{-1} e^{-i\zeta \zeta^{-\left(i\tau + \gamma + \frac{1}{2} \right)}} \quad (4.71)$$

şeklinde bulunur. Böylece, (4.71), (4.69), (4.65) ve (4.41)'den (4.31)'i elde ederiz.

2.Durum: $v = -\gamma + 1/2$ olsun. İlk durumda olduğu gibi benzer yol ile (4.32) ve (4.33)'deki çözümleri elde ederiz.

4.2.2. Teorem: $\varphi \in \{\varphi: 0 \neq |\varphi_\mu| < \infty; \mu \in \mathbb{R}\}$ olsun.

$$L[\varphi, \zeta, \gamma, \tau] = \varphi_2 + \varphi \left\{ \frac{1}{4} + \frac{\tau}{\zeta} + \frac{(1/4 - \gamma^2)}{\zeta^2} \right\} = 0 \quad (\zeta \neq 0) \quad (4.72)$$

homojen Whittaker denklemi $\gamma \neq 0$ için,

$$\varphi^{(I)} = K \zeta^{1/2+\gamma} e^{-i\zeta/2} \left(e^{i\zeta \zeta^{(-\gamma-(1/2)+i\tau)}} \right)_{\gamma-(1/2)+i\tau} \quad (4.73)$$

$$\varphi^{(II)} = K \zeta^{1/2+\gamma} e^{i\zeta/2} \left(e^{-i\zeta \zeta^{(-\gamma-(1/2)-i\tau)}} \right)_{\gamma-(1/2)-i\tau} \quad (4.74)$$

$$\varphi^{(III)} = K \zeta^{1/2-\gamma} e^{-i\zeta/2} \left(e^{i\zeta \zeta^{(\gamma-(1/2)+i\tau)}} \right)_{-\gamma-(1/2)+i\tau} \quad (4.75)$$

$$\varphi^{(IV)} = K \zeta^{1/2-\gamma} e^{i\zeta/2} \left(e^{-i\zeta \zeta^{(\gamma-(1/2)-i\tau)}} \right)_{-\gamma-(1/2)-i\tau} \quad (4.76)$$

formundaki çözümlere sahiptir. Burada, K keyfi bir sabittir.

Not: Burada, $\gamma = 0$ olması halinde, (4.75) ve (4.76) çözümleri sırasıyla, (4.73) ve (4.74) çözümleri ile çakışır.

İspat: $f = 0$ olduğunda, $v = \gamma + 1/2$ ve $\lambda = \pm(1/2)i$ değerleri için,

$$u_1 + u \left[-i + \left(\gamma + \frac{1}{2} - i\tau \right) \zeta^{-1} \right] = 0 \quad (4.77)$$

ve

$$w_1 + w \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} + i\tau \right) \zeta^{-1} \right] = 0 \quad (4.78)$$

bulunur. Böylece, (4.77)'den (4.73); (4.78)'den ise (4.74) çözümlerini elde ederiz. Aynı zamanda, $v = -\gamma + 1/2$ değeri göz önüne alındığında, (4.77) ve (4.78)'de γ yerine $-\gamma$ gelir. Buradan, (4.75) ve (4.76) çözümlerini elde ederiz.

4.2.3. Teorem: $\phi \in \{\phi: 0 \neq |\phi_\eta| < \infty; \eta \in \mathbb{R}\}$ ve $f \in \{f: 0 \neq |f_\eta| < \infty; \eta \in \mathbb{R}\}$ olsun.

$$L[\phi, r; \beta, n] = \phi_2(1 - r^2) - \phi_1(2\beta + 1)r + \phi n(n + 2\beta) = f \quad (r \neq \{-1, 1\}) \quad (4.79)$$

şeklindeki homojen olmayan Gegenbauer diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} \phi^I = & \left\{ \left[f \frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1} (1-r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(4\beta^2-1)+2n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right)} \right]_{-1} \right. \\ & \left. \cdot (1-r^2)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta+1)^2+2n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right)} \right\}_{-\left(\frac{(2\beta+1)+n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right)} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \phi^{II} = & (1-r)^{\frac{1-2\beta r}{1+r}} \left\{ \left(\left[f(1-r)^{\frac{2\beta r-1}{1+r}} \right]_{\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) (1-r^2)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(4\beta^2-1)+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)} \right) \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{1+r}{1-r} \right) (1-r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta^2-1)^2+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)} \right\}_{-\left(\frac{(1-2\beta)+n(n+2\beta)}{1-2\beta} \right)} \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \phi^{III} = & (1+r)^{\frac{1+2\beta r}{1-r}} \left\{ \left(\left[f(1+r)^{\frac{2\beta r+1}{1-r}} \right]_{\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}} \left(\frac{1+r}{1-r} \right) (1-r^2)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(4\beta^2-1)+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)} \right) \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{1-r}{1+r} \right) (1-r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta^2-1)^2+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)} \right\}_{-\left(\frac{(1-2\beta)+n(n+2\beta)}{1-2\beta} \right)} \end{aligned} \quad (4.82)$$

formundaki özel çözümlere sahiptir. Burada, $\phi_n = \frac{d^n \phi}{dr^n}$ ($n = 0, 1, 2$), $\phi_0 = \phi = \phi(r)$, $f = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, β ve n sabitler olup $\beta \neq \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ dir.

İspat:

(i) (4.79) eşitliğinin her iki yanına N^η operatörünü doğrudan uygularsak,

$$[\phi_2(1-r^2)]_\eta - [\phi_1(2\beta+1)r]_\eta + [\phi n(n+2\beta)]_\eta = (f)_\eta \quad (4.83)$$

olur.

(2.44), (2.56) ve (3.16)'yı kullanırsak,

$$[\phi_2(1-r^2)]_\eta = \phi_{2+\eta}(1-r^2) - 2\eta\phi_{1+\eta}r \quad (4.84)$$

ve

$$[\phi_1(2\beta+1)r]_\eta = (2\beta+1)\phi_{1+\eta}r + (2\beta+1)\eta\phi_\eta \quad (4.85)$$

bulunur. (4.84) ve (4.85)'i kullanırsak, (4.83) eşitliğini,

$$\phi_{2+\eta}(1-r^2) - \phi_{1+\eta}[(2\eta+2\beta+1)r] + \phi_\eta[n^2+2\beta n - (2\beta+1)\eta] = f_\eta \quad (4.86)$$

şeklinde elde ederiz. η değerini, $n^2+2\beta n - (2\beta+1)\eta = 0$ olacak şekilde seçersek,

$$\eta = \frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1} \quad (4.87)$$

bulunur. Bu değeri (4.86)'da yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaptığımızda,

$$\begin{aligned} \phi_{2+\frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1}} - \phi_{1+\frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1}} \left[\left(\frac{(2\beta+1)^2 + 2n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right) \frac{r}{1-r^2} \right] \\ = f_{\frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1}} (1-r^2)^{-1} \end{aligned} \quad (4.88)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\phi_{1+\frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1}} = y = y(r) \quad \left(\phi = (y)_{-1-\frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1}} \right) \quad (4.89)$$

şeklinde alıp bu eşitliği (4.88)'de yerine yazarsak,

$$y_1 - y \left[\left(\frac{(2\beta + 1)^2 + 2n(n + 2\beta)}{2\beta + 1} \right) \frac{r}{1 - r^2} \right] = f_{\frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1}}(1 - r^2)^{-1} \quad (4.90)$$

formunda birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem elde ederiz.

(4.90) denkleminin özel çözümü,

$$y = \left[f_{\frac{n(n+2\beta)}{2\beta+1}}(1 - r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(4\beta^2 - 1) + 2n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right)} \right]_{-1} (1 - r^2)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta+1)^2 + 2n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right)} \quad (4.91)$$

şeklinde bulunur. Böylece, (4.89) ve (4.91)'den (4.80) çözümünü elde ederiz. Burada, (4.91)' in (4.90) eşitliğini sağladığı açıkça görülmektedir. Yani, (4.88) denkleminin bir çözümü (4.80)'dir. Sonuç olarak, (4.80) eşitliği (4.79) denkleminin bir çözümüdür.

(ii) İkinci çözümü bulabilmek için,

$$\phi = (1 - r)^\tau \psi, \quad \psi = \psi(r) \quad (4.92)$$

dönüşümünü yazarsak,

$$\phi_1 = -\tau(1 - r)^{\tau-1} \psi + (1 - r)^\tau \psi_1 \quad (4.93)$$

ve

$$\phi_2 = \tau(\tau - 1)(1 - r)^{\tau-2} \psi - 2\tau(1 - r)^{\tau-1} \psi_1 + (1 - r)^\tau \psi_2 \quad (4.94)$$

olur. (4.92), (4.93) ve (4.94)'ü (4.79)'da yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$(1 - r^2)\psi_2 - [(2\tau + 2\beta + 1)r + 2\tau]\psi_1 + \{[\tau(\tau - 1)(1 + r) + \tau(2\beta + 1)r](1 - r)^{-1} + n(n + 2\beta)\}\psi = f(1 - r)^{-\tau} \quad (4.95)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada, τ değerini, $\tau(\tau - 1)(1 + r) + \tau(2\beta + 1)r = 0$ olacak şekilde seçersek,

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{1 - 2\beta r}{1 + r}$$

bulunur.

$\tau_1 = 0$ durumunda, (i)'de bulduğumuz çözümün aynısını elde ederiz. $\tau_2 = \frac{1-2\beta r}{1+r}$ olsun. Böylece, (4.92) ve (4.95)'den,

$$\phi = (1-r)^{\frac{1-2\beta r}{1+r}} \psi \quad (4.96)$$

ve

$$(1-r^2)\psi_2 - [(2\beta-1)r-2]\psi_1 + [n(n+2\beta)]\psi = f(1-r)^{\frac{2\beta r-1}{1+r}} \quad (4.97)$$

yazarız.

(4.97)'nin her iki yanına N^η operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned} (1-r^2)\psi_{2+\eta} - [(2\beta-2\eta-1)r-2]\psi_{1+\eta} + [(2\beta-1)\eta + n(n+2\beta)]\psi_\eta \\ = \left[f(1-r)^{\frac{2\beta r-1}{1+r}} \right]_\eta \end{aligned} \quad (4.98)$$

elde ederiz. η değerini, $(2\beta-1)\eta + n(n+2\beta) = 0$ olacak şekilde seçersek,

$$\eta = \frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta} \quad (4.99)$$

olur. (4.99)'u (4.98)'de yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\begin{aligned} \psi_{2+\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}} + \left[\left(\frac{(2\beta-1)^2 + 2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right) \frac{r}{1-r^2} - \frac{2}{1-r^2} \right] \psi_{1+\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}} \\ = \left[f(1-r)^{\frac{2\beta r-1}{1+r}} \right]_{\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}} (1-r^2)^{-1} \end{aligned} \quad (4.100)$$

elde ederiz.

$$\psi_{1+\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}} = g = g(r) \quad \left(\psi = (g)_{-1-\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}} \right) \quad (4.101)$$

şeklinde alıp bu eşitliği (4.100)'de yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
g_1 + g \left[\left(\frac{(2\beta - 1)^2 + 2n(n + 2\beta)}{2\beta - 1} \right) \frac{r}{1 - r^2} - \frac{2}{1 - r^2} \right] \\
= \left[f(1 - r)^{\frac{2\beta r - 1}{1 + r}} \right]_{\frac{n(n + 2\beta)}{1 - 2\beta}} (1 - r^2)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

formunda birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem elde ederiz.

(4.102) denkleminin özel çözümü,

$$\begin{aligned}
g = \left\{ \left[f(1 - r)^{\frac{2\beta r - 1}{1 + r}} \right]_{\frac{n(n + 2\beta)}{1 - 2\beta}} \left(\frac{1 - r}{1 + r} \right) (1 - r^2)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(4\beta^2 - 1) + 2n(n + 2\beta)}{2\beta - 1} \right)} \right\}_{-1} \\
\cdot \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right) (1 - r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta^2 - 1)^2 + 2n(n + 2\beta)}{2\beta - 1} \right)}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

olur.

Böylece, (4.96), (4.101) ve (4.103)'den (4.81) çözümünü elde ederiz. Burada, (4.103)'ün (4.102)'yi sağladığı açıkça görülmektedir. O zaman,

$$\psi = (g)_{-1 - \frac{n(n + 2\beta)}{1 - 2\beta}}$$

eşitliği de (4.100)'ü sağlar. Sonuç olarak, (4.92) dönüşümünü kullanarak (4.81) eşitliğinin (4.79) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterdik.

(iii) (4.82) çözümünü bulabilmek için,

$$\phi = (1 + r)^{\tau} \psi, \quad \psi = \psi(r) \tag{4.104}$$

dönüşümünü yazıp, (ii)'deki adımlara benzer bir yol izleyerek,

$$\begin{aligned}
h_1 + h \left[\left(\frac{(2\beta - 1)^2 + 2n(n + 2\beta)}{2\beta - 1} \right) \frac{r}{1 - r^2} + \frac{2}{1 - r^2} \right] \\
= \left[f(1 + r)^{\frac{2\beta r + 1}{r - 1}} \right]_{\frac{n(n + 2\beta)}{1 - 2\beta}} (1 - r^2)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.105}$$

formunda birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem elde ederiz.

(4.105) denkleminin özel çözümü,

$$h = \left\{ \left[f(1+r)^{\frac{2\beta r+1}{r-1}} \right]_{\frac{n(n+2\beta)}{1-2\beta}}^{\left(\frac{1+r}{1-r} \right) (1-r^2)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(4\beta^2-1)+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)}} \right\}_{-1}^{\left(\frac{1-r}{1+r} \right) (1-r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta^2-1)^2+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)}} \quad (4.106)$$

olur.

Burada, (4.106)'nın (4.105)'i sağladığı açıkça görülmektedir. Sonuç olarak, (4.104) dönüşümünü kullanarak (4.82) eşitliğinin (4.79) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterdik.

4.2.4. Teorem:

$$L[\phi, r; \beta, n] = \phi_2(1-r^2) - \phi_1(2\beta+1)r + \phi n(n+2\beta) = 0 \quad (r \neq \{-1, 1\}) \quad (4.107)$$

şeklindeki homojen Gegenbauer diferansiyel denklemi,

$$\phi^{(I)} = k \left[(1-r^2)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta+1)^2+2n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right)} \right]_{-\left(\frac{(2\beta+1)+n(n+2\beta)}{2\beta+1} \right)} \quad (4.108)$$

$$\phi^{(II)} = k(1-r)^{\frac{1-2\beta r}{1+r}} \left[\left(\frac{1+r}{1-r} \right) (1-r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta^2-1)^2+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)} \right]_{-\left(\frac{(1-2\beta)+n(n+2\beta)}{1-2\beta} \right)} \quad (4.109)$$

$$\phi^{(III)} = k(1+r)^{\frac{1+2\beta r}{1-r}} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right) (1-r^2)^{\frac{1}{2} \left(\frac{(2\beta^2-1)^2+2n(n+2\beta)}{2\beta-1} \right)} \right]_{-\left(\frac{(1-2\beta)+n(n+2\beta)}{1-2\beta} \right)} \quad (4.110)$$

formundaki çözümlere sahiptir. Burada, k keyfi sabittir.

İspat: 4.2.3.Teoreminde $f = 0$ olduğunda, (4.90), (4.102) ve (4.105) eşitliklerinden,

$$y_1 - y \left[\left(\frac{(2\beta + 1)^2 + 2n(n + 2\beta)}{2\beta + 1} \right) \frac{r}{1 - r^2} \right] = 0, \quad (4.111)$$

$$g_1 + g \left[\left(\frac{(2\beta - 1)^2 + 2n(n + 2\beta)}{2\beta - 1} \right) \frac{r}{1 - r^2} - \frac{2}{1 - r^2} \right] = 0 \quad (4.112)$$

ve

$$h_1 + h \left[\left(\frac{(2\beta - 1)^2 + 2n(n + 2\beta)}{2\beta - 1} \right) \frac{r}{1 - r^2} + \frac{2}{1 - r^2} \right] \quad (4.113)$$

denklemlerini elde ederiz.

Böylece, (4.111)'den (4.108); (4.112)'den (4.109) ve (4.113)'den ise (4.110)'u elde ederiz.

KAYNAKLAR

- [1] **Bayın, S., 2006**, Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley Interscience New Jersey.
- [2] **Miller, K.S., Ross, B., 1993**, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation, Wiley Interscience, New York.
- [3] **Oldham, K.B., Spainer, J., 1974**, The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- [4] **Carpinteri, A., Mainardi, F. (Editors), 1997**, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Wien and New York.
- [5] **Oldham, K.B., Spainer, J., 1974**, The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- [6] **Podlubny, I., 1999**, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, NewYork, London, Tokyo and Toronto.
- [7] **Güngör, F., 1995**, Diferansiyel Denklemler, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., Çağaloğlu-İstanbul.
- [8] **Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., 1993**, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications Translated from the Russian: Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications (Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987), Gordon and Breach Science Publishers, Reading, Tokyo, Paris, Berlin and Langhorne (Pennsylvania).
- [9] **Kiryakova, V., 1994**, Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 301, Longman Scientific and Technical, Harlow.
- [10] **Tu, S.-T., Chyan, D.-K., Srivastava, H.M., 2001**, Some Families of Ordinary and Partial Fractional Differintegral Equations, Integral Transform. Spec. Funct., No.3, 291-302.

- [11] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies, vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York.
- [12] Nishimoto, K., 1997, Kummer's Twenty-Four Functions and N-Fractional Calculus, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, No.2, **30** 1271-1282.
- [13] Nishimoto, K., de Romero, S. S., 1996, N- Fractional Calculus Operator N^ν method to nonhomogeneous and homogeneous Whittaker Equations, J. Fract. Calc. **9**, 17-22.
- [14] de Romero, S. S., Srivastava, H.M., 2000, An Application of the N – Fractional Calculus Operator method to a Modified Whittaker Equation, Appl. Math. and Comp. **115**, 11-21.
- [15] Srivastava, H. M., Owa, S., Nishimoto, K., 1985, Some Fractional Differintegral Equations, J. Math. Anal. Appl. **106**, 360-366.
- [16] Lin, S.-D., Tu, S.-T., Srivastava H.M., 2003, A Unified Presentation of Certain Families of Non-Fuchsian Differential Equations via Fractional Calculus Operators, Computers and Mathematics with Applications **45**, 1861-1870.
- [17] Lin, S.-D., Tsai, Y.-S., Wang, P.-Y., 2007, Explicit Solutions of a Certain Class of Associated Legendre Equations by means of Fractional Calculus, Applied Mathematics and Computation **187**, 280-289.
- [18] Yilmazer, R., 2010, N – Fractional Calculus Operator N^μ Method to a Modified Hydrogen Atom Equation, Mathematical Communications, vol 15, **2**, 489-501.
- [19] Nishimoto, K., 1984, Fractional Calculus, vol. I, Descartes Press, Koriyama.
- [20] Nishimoto, K., 1987, Fractional Calculus, vol. II, Descartes Press, Koriyama.
- [21] Nishimoto, K., 1989, Fractional Calculus, vol. III, Descartes Press, Koriyama.
- [22] Nishimoto, K., 1991, Fractional Calculus, vol. IV, Descartes Press, Koriyama.

[23] **Nishimoto, K., 1996**, Fractional Calculus, vol. V, Descartes Press, Koriyama.

[24] **Nishimoto, K., 1991**, An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21 st Century), Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Descartes Press, Koriyama.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Gaziantep'in İslahiye ilçesinde doğdu. 1997 yılında Cevdet Paşa İlköğretim Okulu'ndan ve 2004 yılında Opet Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne kayıt yaptırdı. 2009 yılında mezun olup, aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2010 yılında ise Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve halen görevine devam etmektedir.