

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADVEKSİYON YAYILIM DENKLEMİNİN
SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tolga AKTÜRK

Anabilim Dalı: Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

2011

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADVEKSİYON YAYILIM DENKLEMİNİN
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tolga AKTÜRK

091121107

Ana Bilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11.07.2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 05.08.2011

Tez Danışmanı :

Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

Diğer Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

TEMMUZ-2011

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince beni yönlendiren, tez konusunun belirlenmesi, yazılması ve sonuçlandırılması aşamalarında yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT hocama sonsuz şükranlarımı sunarım.

Ayrıca Yüksek lisans eğitimim süresince yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocama ve Öğr. Gör. Yusuf UÇAR'a teşekkür ederim.

Tolga AKTÜRK

ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	V
TABLolar LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VII
KISALTMALAR	VII
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE METOD.....	7
2.1. Galerkin Metodu.....	7
2.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM).....	7
2.3. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)	10
3. UYGULAMALAR.....	14
3.1. Adveksiyon Yayılım Denkleminin GM, HPM ve ADM ile Sayısal Çözümü	14
3.1.1. Galerkin Metodu ile Sayısal Çözümü	14
3.1.2. Homotopi Pertürbasyon metodu ile Sayısal Çözümü.....	24
3.1.3. Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm	29
4. SONUÇ VE TARTIŞMA	32
5. ÖNERİLER.....	33
6. GALERKİN METODU İLE ÇÖZÜMÜN FORTRAN YAZILIMI	34
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ	49

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, bazı temel teorem ve tanımlar verildi.

İkinci bölümde, Galerkin Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu ve Adomian Ayrışım Metotları hakkında temel kavramlar ve bazı özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde, Galerkin Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu ve Adomian Ayrışım Metodu, başlangıç koşulu ile verilen adveksiyon yayılım denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için uygulandı. Elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri çizilerek irdelenmesi yapıldı.

Dördüncü bölümde, elde edilen sayısal verilerin tartışması yapıldı.

Beşinci bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlara bağlı kalarak Galerkin Metodunun, Homotopi Pertürbasyon Metodunun ve Adomian Ayrışım Metodunun bazı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanabilmesi önerilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Galerkin Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Adomian Ayrışım Metodu.

SUMMARY

Numerical Solution of The Advection Diffusion Equation by Using Finite Element Method

This study is constructed five chapters.

In chapter one, some fundamental definitions are given.

In chapter two, essential construction the Homotopy Perturbation Method, Adomian Decomposition Method and Galerkin Method are given.

In chapter three, With initial conditions are given of Advection Diffusion Equation Galerkin Method, Homotopy Perturbation Method and Adomian Decomposition Method was applied to find approximate solutions. We drawn graphics (2D and 3D) of approximate solutions and exact solution which are obtained for equations.

In chapter four, it is made conversation of obtained databases.

In chapter five, it is suggested to apply Galerkin Method, Homotopy Perturbation Method and Adomian Decomposition Method to some linear or nonlinear differential equations by depending on obtained solutions.

Key words: Galerkin Method, Homotopy Perturbation Method Adomian Decomposition Method

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) iki boyutlu görünümü	22
Şekil 1.2. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) üç boyutlu görünümü.....	22
Şekil 1.3. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) iki boyutlu görünümü	23
Şekil 1.4. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) üç boyutlu görünümü.....	24
Şekil 1.5. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile analitik çözümünün (HPM) iki boyutlu görünümü.....	27
Şekil 1.6. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü.....	28
Şekil 1.7. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ yaklaşık çözümü ile analitik çözümünün (HPM) iki boyutlu görünümü.....	28
Şekil 1.9. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) iki boyutlu görünümü.....	30
Şekil 1.10. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ yaklaşık çözümü ile analitik çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	31
Şekil 1.11. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) iki boyutlu görünümü.....	31

TABLolar LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.1. $t=0.5$, $v=1$ alınırsa elde edilen yaklaşık ve analitik çözümü, mutlak hata tablosu.....	21
Tablo 1.2. $t=0.1$, $v=1$ alınırsa elde edilen yaklaşık ve analitik çözümü, mutlak hata tablosu.....	23

SEMBOLLER LİSTESİ

$u(x,t)$	: Çözüm fonksiyonu
$\mathbf{R}$	: Reel sayı sistemi
λ	: Lamda
ε	: Ebsilon
Ω	: Omega
Γ	: Gama
ξ	: Xi
φ	: Phi
δ	: Delta
$\mathbf{N}$	: Doğal Sayı Sistemi
$\mathbf{Q}$	: Rasyonel Sayı Sistemi

KISALTMALAR

GM	: Galerkin Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
ADM	: Adomian Ayrışım Metodu

1. GİRİŞ

Sonlu elemanlar metodu, günümüzde karmaşık mühendislik problemlerinin hassas olarak çözülmesinde etkin olarak kullanılan bir sayısal metottur. İlk defa 1956 yılında uçak gövdelerinin gerilme analizi için geliştirilmiş olan bu metodun daha sonraki on yıl içerisinde uygulamalı bilimler ve mühendislik problemlerinin çözümünde de başarı ile kullanılabileceği anlaşılmıştır. Daha sonraki yıllarda ise sonlu elemanlar metodu ve çözüm teknikleri hızlı gelişmeler kaydetmiş ve günümüzde birçok pratik problemin çözümü için kullanılan en iyi metotlardan birisi olmuştur. Metodun değişik mühendislik alanları için bu kadar popüler olmasının ana nedenlerinden birisi genel bir bilgisayar programının giriş verilerini değiştirerek herhangi bir özel problemin çözümü için kullanılabilesidir.

Sonlu elemanlar metodundaki temel düşünce, karmaşık bir problemde, problemi basite indirgeyerek bir çözüm bulmaktır. Esas problemin daha basit bir probleme indirgenmiş olması nedeni ile kesin sonuç yerine yaklaşık bir sonuç elde edilmekte, ancak bu sonucun çözüm için daha fazla çaba harcayarak iyileştirilmesi ve kesin sonuca çok yaklaşılmaması, hatta kesin sonuca ulaşılması mümkün olmaktadır. Elde bulunan matematiksel araçların kesin sonucu, hatta yaklaşık bir sonucu dahi bulmakta yetersiz kalması durumunda ise sonlu elemanlar metodu kullanılabilecek tek metot olmaktadır.

Bir sonlu eleman yönteminin bir probleme uygulanmasında genellikle aşağıdaki yol izlenir:

- Çözüm bölgesi sonlu sayıda alt bölge veya aralığa ayrılır,
- Genelleştirilen bir aralık üzerinde verilen denklem türetilir,
- Çözüm bölgesinde tüm aralıklar birleştirilir,
- Elde edilen denklem sistemi çözülür.

Sonlu eleman yöntemlerinin integral formülasyonları temelde varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olarak iki farklı yoldan elde edilir. Varyasyonel yöntemler genellikle fonksiyonel olarak bilinen özel bir integral bağıntısının maksimum veya minimumu oluşturan noktasal parametreleri bulmayı amaçlar. Fonksiyonelin ekstremumunu üreten çözüm, sınır şartlarını sağlar ve Euler denklemi olarak bilinen bir

diferansiyel denklem sistemine dönüşür. Bundan dolayı fonksiyonelin bilinmesi durumunda fonksiyonele karşılık gelen Euler denklemini bulmak da zorlaşır. Ancak bu fonksiyonelin bulunması bazen oldukça zor olmakta bazen de mümkün olmamaktadır. Bu nedenle verilen diferansiyel denklemden integral formülasyonun yapıldığı farklı ağırlıklı kalan yöntemleri geliştirilmiştir [23].

Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade edebilmek için, Ω çözüm bölgesini göstermek üzere;

$$AU = f, \quad \Omega(a, b) \quad (1.1)$$

operatör denklemini göz önüne alalım. Burada A lineer veya lineer olmayan bir diferansiyel operatör ve f bağımsız değişkenlerin bilinen bir fonksiyonudur. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde U_N yaklaşık çözüm, δ_j belirlenmesi gereken serbest parametreler olmak üzere;

$$U_N = \sum_{j=1}^N \varphi_j \delta_j \quad (1.2)$$

olarak seçilir. Burada φ_j trial baz fonksiyonlarıdır. (1.2) yaklaşık çözümü (1.1) operatör denkleminde yerine yazılırsa,

$$R_N = AU_N - f \quad (1.3)$$

olarak tanımlanan R_N kalanı elde edilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde R_N kalanı seçilen φ_j fonksiyonları ve δ_j bilinmeyen parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu yöntemler yardımı ile δ_j parametrelerinin belirlenmesinde R_N kalanı ile bir Ψ_j ağırlık fonksiyonunun çarpımının Ω bölgesindeki integralinin sıfır olması istenir;

$$\int_{\Omega} \Psi_j R_N dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

(1.3) ile verilen R_N kalanı (1.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \Psi_i A \varphi_j dx \right) \delta_j = \int_{\Omega} \Psi_i f dx$$

ve

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \Psi_i A \varphi_j dx, \quad f_i = \int_{\Omega} \Psi_i f dx$$

olarak alınırsa

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \delta_j = f_i \quad (1.5)$$

bulunur. (1.5) denklem sistemi çözülerek δ_j parametreleri bulunur ve U_N yaklaşık çözümü elde edilir [23].

1.1. Temel Teorem ve Tanımlar

Tanım 1.1.1. U linealinde skaler çarpım tanımlanmışsa, bu durumda

$$\|u\|_U = \sqrt{(u, u)}, \quad u \in U \quad (1.1.1.1)$$

sayısına u elemanının normu,

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_U, \quad u, v \in U \quad (1.1.1.2)$$

sayısına da u ve v elemanları arasındaki *uzaklık* denir.

Bu tanımdan ve skaler çarpımın özelliklerinden yararlanarak $\rho(u, v)$ reel sayısının aşağıdaki özellikleri taşıdığını göstermek mümkündür [3]:

- i. $\rho(u, v) = \rho(v, u), \quad \forall u, v \in U;$
 - ii. $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v), \quad \forall w \in U;$
 - iii. $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v.$
- (1.1.1.3)

Tanım 1.1.2. U lineali (1.1.1.3) koşullarını sağlayan uzaklık kavramıyla donatılmışsa, bu durumda $\{U_n\} \subset U$ dizisinin limiti aşağıdaki gibi verilir:

$$\rho(u_n, u) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

ise, u elemanına $\{u_n\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ diye yazılır. Bu limitle donatılmış U linealine ise *metrik uzay* denir [3].

Tanım 1.1.3. $\forall u \in U$ elemanına karşılık aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde tanımlanmış bir $\|u\| \geq 0$ reel sayısı varsa, U uzayına *normlu uzay* denir [3]:

- i. $\|u\| \geq 0; \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0;$
 - ii. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in U;$
 - iii. $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|, \quad \forall \lambda \in R.$
- (1.1.1.4)

Tanım 1.1.4. Norm uzayda $\{u_n\} \subset U$ dizisinin limiti $\|u_n - u\|_U \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ biçimde tanımlanır. $u \in U$ ise, U 'ya *tam normlu uzay* ya da *Banach uzayı* denir [3].

Tanım 1.1.5. Norm skaler çarpım üzerinden tanımlanmışsa ve (1.1.1.3) koşulları sağlanıyorsa, (1.1.1.4) koşulları da sağlanır. Normu skaler çarpımla tanımlanmış Banach uzayına *Hilbert uzayı* denir [3].

Teorem 1.1.6. $u \in H: a(u, v) = I(v), \forall v \in H$ varyasyonel problemini ele alalım. Burada $a(u, v) = a(v, u), \forall u, v \in H$ olmayabilir. $\{\varphi_i\}, i = \overline{1, N}$ baz fonksiyonlarının oluşturduğu N boyutlu Hilbert uzayını H_N ile gösterelim: $H_N \subset H$. Bu durumda

$$u_N(x) \in H_N : a(u_N, v_N) = I(v_N), \quad \forall v_N \in H_N$$

probleminden $u_N \in H_N$ yaklaşık çözümünün bulunması yöntemine *Galerkin yöntemi* denir [3].

Tanım 1.1.7. f ve g bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına sürekli dönüşümler olsun. $I = [0, 1]$ R 'nin kapalı bir alt kümesi olmak üzere; $\forall x \in X$ için

$$H(x, 0) = f(x) \text{ ve } H(x, 1) = g(x)$$

eşitliklerini sağlayan sürekli bir $H : X \times I \rightarrow Y$ fonksiyonu varsa f, g 'ye homotopiktir denir. H dönüşümüne f ve g arasında bir *homotopi* denir ve H, f ve g arasında bir homotopi olduğunda $H : f \cong g$ ile gösterilir [8].

Tanım 1.1.8. Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferensiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir

Bir tek bağımsız değişken içeren diferensiyel denkleme *adi diferensiyel denklem* denir ve genel olarak n . *Mertebeden adi bir diferensiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde gösterilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferensiyel denkleme *kısmi diferensiyel denklem* denir ve n . *Mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0 \text{ olarak yazılır.}$$

Tanım 1.1.9. Bir diferensiyel denklem lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyorsa bu diferensiyel denkleme *lineer diferensiyel denklem* denir. Eğer bir diferensiyel denklem de bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik, yada logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferensiyel denklemlere *lineer olmayan diferensiyel denklem* denir.

Tanım 1.1.10. Bir değişkenin skaler bir fonksiyonu için Adomian polinomu aşağıdaki şekilde verilir. f fonksiyonunu n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde Adomian polinomları:

$$A_n = \frac{1}{n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} U_i \right)$$

formülü ile tanımlanır.

Tanım 1.1.11. Spline fonksiyonlar, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ sonlu parçalanışının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında k . dereceden uygun polinomlar olup, tanımlanan her alt aralıkta $(k - 1)$. mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlardır. Spline fonksiyonların temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylıdır.
- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilir.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Yeterince parçalara ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde her sürekli fonksiyona k . Dereceden spline fonksiyonlar yardımı ile iyi yaklaşımlar elde edilebilir.
- Spline fonksiyonlar yardımı ile sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir.
- Düşük dereceden spline fonksiyonlar polinomlarda ortaya çıkan salınımları sergilemezler.

- Nümerik analizde ve yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması durumunda matrisler ortaya çıkar. Bu matrisler uygun determinant özelliklerine sahiptir.

Tanım 1.1.12. $[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, x_m noktalarında $L_m(x)$ Lineer B-Spline fonksiyonları;

$$L_m(x) = \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x) & , \quad [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x) & , \quad [x_m, x_{m+1}] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Lineer B Spline fonksiyonlarıyla bir $[x_{m-1}, x_m]$ aralığı L_m ve L_{m+1} biçimindeki iki spline tarafından örtülür [23].

Tanım 1.1.13. $[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, x_m noktalarında $Q_m(x)$ Kuadratik B-spline fonksiyonları;

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 + 3[x_m - x]^2 & , \quad [x_{m-1}, x_m] \\ [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 & , \quad [x_m, x_{m+1}] \\ [x_{m+2} - x]^2 & , \quad [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve onun birinci mertebeden türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında kuadratik B-spline fonksiyonlarıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı Q_{m-1} , Q_m , Q_{m+1} gibi üç spline tarafından örtülür [23].

2. MATERYAL VE METOD

2.1. Galerkin Metodu

Galerkin metodu Rus matematikçi Boris Grigoryevich Galerkin (10 Şubat 1871-12 Temmuz 1945) tarafından geliştirilmiştir. Yöntemde Ψ_i ağırlık fonksiyonunun φ_j yaklaşım fonksiyonuna denk olarak seçilmesi, ağırlıklı kalan yöntemlerinde Galerkin metodu olarak adlandırılır. Galerkin yaklaşımının cebirsel denklemleri

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \delta_j = f_i \quad (2.1.1)$$

olarak hesaplanır. Burada A_{ij} ve f_i ;

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j A(\varphi_i) dx dy \quad \text{ve} \quad f_i = \int_{\Omega} \varphi_j (f - A(\varphi_0)) dx dy \quad (2.1.2)$$

dir. Buradan, $\delta_j(t)$ zamana bağlı bilinmeyen parametreleri, n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan denklem sisteminin çözülmesiyle bulunur [24].

2.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

Bu metodun temel fikrini açıklamak için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önüne alalım

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad (2.2.1)$$

(2.2.1) denklemi için sınır koşulu

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.2.2)$$

şeklinde belirlenir. Burada A genel diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ ise Ω ya bağımlı bir sınırdır.

Genel olarak A diferansiyel operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir ki burada L lineer, N ise lineer olmayan operatördür. (2.2.1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (2.2.3)$$

Buna göre homotopi tekniği ile bir homotopi oluşturulur.

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$$

olmak üzere,

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega \quad (2.2.4)$$

dir. Burada $p \in [0, 1]$ bir parametre ve u_0 ise (2.2.1) denkleminin bir başlangıç koşuludur. O halde

$$\begin{aligned} H(v, p) &= L(v) - L(u_0) - pL(v) + pL(u_0) + pA(v) - pf(r) = 0 \\ &= L(v) - L(u_0) - p[L(v) - L(u_0) - A(v) + f(r)] = 0 \\ &= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v) - A(v) + f(r)] = 0 \end{aligned}$$

olup (2.2.1) den $A(u) - f(r) = 0$ dir. Böylece

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v)] = 0 \quad (2.2.5)$$

elde ederiz ve buradan (2.2.3) eşitliğini kullanarak

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \Rightarrow L(u) = -N(u) + f(r) \quad (2.2.6)$$

denklemini bulunur. Bulunan (2.2.6) denklemini (2.2.5) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[-N(v) + f(r)] = 0$$

olur. Böylece (2.2.4) denklemini

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.2.7)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $p \in [0, 1]$, başlangıç koşulu u_0 ve

$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ dir. (2.2.4) ve (2.2.7) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.2.8)$$

$$H(v,1)=A(v)-f(r)=0 \quad (2.2.9)$$

dir. Burada $p=0$ olduğunda (2.2.4) denklemi lineer bir denklem haline gelir; $p=1$ olduğunda lineer olmayan orijinal bir denklem olur. Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi, $L(v)-L(u_0)=0$ denklemini $A(v)-f(r)$ denklemine dönüştürür. $L(v)-L(u_0)=0$ aşikâr problemi 0'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi, sürekli olarak $A(v)-f(r)=0$ problemine deforme oluyorsa bu topolojide *deforme* olarak adlandırılır. $L(v)-L(u_0)=0$ ve $A(v)-f(r)$ ifadelerine ise *homotopiktirler* denir. Homotopi Pertürbasyon Metodu gereğince, ilk olarak yerleştirilen parametre p 'yi küçük parametre olarak kabul ederek (2.2.4) ve (2.2.7) denklemlerinin çözümü

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n \quad (2.2.10)$$

olacak şekilde p parametresinin kuvvet serisi

$$p^0 : f(v_0) - f(x_0) = 0, \quad (2.2.11)$$

$$p^1 : f'(v_0) v_1 + f(x_0) = 0, \quad (2.2.12)$$

$$p^2 : f'(v_0) v_2 + \frac{1}{2!} f''(v_0) v_1^2 = 0, \quad (2.2.13)$$

$$p^3 : f'(v_0) v_3 + \frac{1}{2!} f''(v_0) 2v_1 v_2 + \frac{1}{3!} f'''(v_0) v_1^3 = 0, \quad (2.2.14)$$

yazılır. (2.2.11)-(2.2.14) denklemlerinin v_1 , v_2 ve v_3 için çözülmesiyle

$$v_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(v_0)}, \quad (2.2.15)$$

$$v_2 = -\frac{f''(v_0) v_1^2}{2! f'(v_0)} = -\frac{f''(v_0)}{2! f'(v_0)} \left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)} \right)^2, \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= -\frac{f''(v_0)v_1v_2}{f'(v_0)} - \frac{f'''(v_0)v_1^3}{3!f'(v_0)} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3 + \frac{f'''(v_0)}{6f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

(2.2.10) serisinin v_1 , v_2 ve v_3 bileşenleri elde edilir. Elde edilen (2.2.15)-(2.2.17) denklemleri, (2.2.10) denkleminde $p=1$ alınarak yeniden yazılırsa (2.2.1) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}
u &= \lim_{p \rightarrow 1} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots) \\
&= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} v_n
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

şeklinde elde edilir. [7-11] Homotopi pertürbasyon metodu geleneksel pertürbasyon metodunun tüm özelliklerine sahiptir. (2.2.10) serisi lineer olmayan $A(v)$ operatörüne bağlı olduğu oranda yakınsamaktadır. (Aşağıdaki görüş; He [9] tarafından önerilmektedir)

(1) V ile ilgili olarak $N(V)$ nin ikinci türevi, göreceli olarak olabildiğince küçük değerlere sahip olmalıdır. $p \rightarrow 1$ gibi.

(2) $L^{-1}(\partial N / \partial V)$ nin normu ise serilere yaklaşım diye çok küçük olmalıdır.

2.3. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Ayrışım yönteminin, bir seri metodu olduğu, birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel olarak bu metottan bahsedecek olursak; kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferensiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(x) \tag{2.3.1}$$

olsun. Böylece L - verilen diferensiyel denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türev operatörünü, R - lineer operatörün kalan kısmını ve N - ise lineer olmayan terimi göstermek üzere (2.3.1) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{2.3.2}$$

şeklinde yazalım. L bir lineer operatör ve L^{-1} tersi de mevcut olsun. (2.3.2) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (2.3.3)$$

şeklinde yazılabilir ve (2.3.3) eşitliğinin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.3.4)$$

elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (2.3.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.3.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.3.5) ile elde edilen eşitlikteki $N(u)$ lineer olmayan terim

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n Adomian polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (2.3.5) eşitliğindeki u ; ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur.

Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.3.6)$$

yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (2.3.5) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.3.7)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (2.3.7) eşitliği açık şekilde

$$\begin{aligned}
u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\
u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\
&\vdots \\
u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 ise u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 ve u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (2.3.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0) \\
A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) \\
A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) \\
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{n!} \cdot \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

ile verilmektedir [1]. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.3.9) genel formülünün kullanılması, (2.3.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \quad n \geq 0 \tag{2.3.10}$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x,t) \tag{2.3.11}$$

ifadesi (2.3.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (2.3.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Y.Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir [5].

3. UYGULAMALAR

3.1. Adveksiyon Yayılım Denkleminin GM, HPM ve ADM ile Sayısal Çözümü

3.1.1. Galerkin Metodu ile Sayısal Çözümü

Bu bölümde,

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.1.1.1)$$

Adveksiyon yayılım denklemini

$$u(x, 0) = e^{-50x^2}, \quad s = 1 + 200vt \quad (3.1.1.2)$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alalım [21](v: yayılım hızı, s: yayılım alanı). Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-50 \frac{(x-t)^2}{s}\right)$$

dir. Bu problemin yaklaşık çözümleri bulunurken gerekli olan sınır şartları problemin tam çözümünden alındı.

Bu kısımda (3.1.1.1) denkleminin kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin sonlu elemanlar metodu ile yaklaşık sonuçları elde edildi. Problemin $U(x, t)$ tam çözümüne karşılık gelen yaklaşım çözümü kuadratik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \delta_j(t) Q_j(x) \quad (3.1.1.3)$$

aranacaktır. Burada δ_j zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. Kuadratik B-spline fonksiyonlarına $[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ olacak şekilde

$h = x_{m+1} - x_m$ uzunluğundaki parçalara ayrılmasıyla $[x_m, x_{m+1}]$ tanımlı aralığında

$\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq h$ dönüşümü yapıldığında;

$$Q_{m-1} = 1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2} \quad (3.1.1.4)$$

$$Q_m = 1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2} \quad (3.1.1.5)$$

$$Q_{m+1} = \frac{\xi^2}{h^2} \quad (3.1.1.6)$$

elde edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde diğer tüm spline değerleri sıfır olduğundan kuadratik baz fonksiyonları cinsinden $U_N(x, t)$ yaklaşımı

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j(t) Q_j(x) \quad (3.1.1.7)$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.1.4) – (3.1.1.6) kuadratik B-spline fonksiyonları ve (3.1.1.7) yaklaşımı kullanılırsa $x = x_m$ noktasında U_m ve x' e birinci mertebeden türevlerinin δ_j parametrelerine göre noktasal değerleri;

$$U_m(x_m) = \delta_{m-1} + \delta_m$$

$$U'_m(x_m) = \frac{2}{h}(\delta_{m-1} - \delta_m)$$

şeklinde yazılır. Burada $m = 0, 1, \dots, N-1, N$ dir.

Şimdi Adveksiyon yayılım denkleminin ağırlıklı integral formunu oluşturmak için ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve sonra bölge üzerinden integrali alınırsa

$$\int_0^1 \Psi(U_t + U_x - U_{xx}) dx = 0 \quad (3.1.1.8)$$

elde edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde ağırlıklı integral formu

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \Psi(U_t + U_x - U_{xx}) dx = 0 \quad (3.1.1.9)$$

olarak bulunur. (3.1.1.9) ağırlıklı integral formu

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \Psi U_t dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} \Psi U_x dx - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \Psi U_{xx} dx = 0 \quad (3.1.1.10)$$

şeklinde düzenlenir ve $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \Psi U_{xx} dx$ terimine kısmi integrasyon uygulandığında

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (\Psi U_t + \Psi U_x + \Psi_x U_x) dx = \Psi U_x|_{x_m}^{x_{m+1}} \quad (3.1.1.11)$$

bulunur.

Galerkin metoduna göre (3.1.1.11) denkleminde $\Psi = Q_i$ seçilir ve U yerine U_N yaklaşık çözümü alınırsa, $i = m-1, m, m+1$ olmak üzere,

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j \delta_j' \right) + \int_0^h Q_i Q_j' \delta_j' + \int_0^h Q_i' Q_j' \delta_j = \sum_{j=m-1}^{m+1} Q_i Q_j' \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} \quad (3.1.1.12)$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$A^e_{ij} = \int_0^h Q_i Q_j d\xi$$

$$B^e_{ij} = \int_0^h Q_i Q_j' d\xi$$

$$C^e_{ij} = \int_0^h Q_i' Q_j' d\xi$$

$$D^e_{ij} = Q_i Q_j' \Big|_0^h$$

olarak alınırsa (3.1.1.12) denklem sistemi matris formunda

$$A^e \delta + B^e \delta + C^e \delta = D^e \delta \quad (3.1.1.13)$$

biçiminde yazılabilir. Kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak $A^e_{ij}, B^e_{ij}, C^e_{ij}, D^e_{ij}$ eleman matrisleri hesaplandığında;

$$A_{11} = \int_0^h \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2} \right)^2 d\xi = \frac{h}{5}$$

$$A_{12} = \int_0^h \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2} \right) \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2} \right) d\xi = \frac{13h}{30}$$

$$A_{13} = \int_0^h \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2} \right) \left(\frac{\xi^2}{h^2} \right) d\xi = \frac{h}{30}$$

$$A_{21} = \int_0^h \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2}\right) d\xi = \frac{13h}{30}$$

$$A_{22} = \int_0^h \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right)^2 d\xi = \frac{9h}{5}$$

$$A_{23} = \int_0^h \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(\frac{\xi^2}{h^2}\right) d\xi = \frac{13h}{30}$$

$$A_{31} = \int_0^h \frac{\xi^2}{h^2} \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2}\right) d\xi = \frac{h}{30}$$

$$A_{32} = \int_0^h \frac{\xi^2}{h^2} \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right) d\xi = \frac{13h}{30}$$

$$A_{33} = \int_0^h \left(\frac{\xi^2}{h^2}\right)^2 d\xi = \frac{h}{5}$$

$$B_{11} = \int_0^h \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2}\right) d\xi = -\frac{1}{2}$$

$$B_{12} = \int_0^h \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2}\right) d\xi = \frac{1}{3}$$

$$B_{13} = \int_0^h \left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(2\frac{\xi}{h^2}\right) d\xi = 1$$

$$B_{21} = \int_0^h \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2}\right) d\xi = -\frac{4}{3}$$

$$B_{22} = \int_0^h \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2}\right) d\xi = 0$$

$$B_{23} = \int_0^h \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right) \left(2\frac{\xi}{h^2}\right) d\xi = \frac{1}{6}$$

$$B_{31} = \int_0^h \frac{\xi^2}{h^2} \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{1}{6}$$

$$B_{32} = \int_0^h \frac{\xi^2}{h^2} \cdot \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{1}{3}$$

$$B_{33} = \int_0^h \frac{\xi^2}{h^2} \left(2\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = \frac{1}{2}$$

$$C_{11} = \int_0^h \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2} \right)^2 d\xi = \frac{4}{3h}$$

$$C_{12} = \int_0^h \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2} \right) \cdot \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{2}{3h}$$

$$C_{13} = \int_0^h \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2} \right) \cdot \left(2\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{2}{3h}$$

$$C_{21} = \int_0^h \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2} \right) \cdot \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{2}{3h}$$

$$C_{22} = \int_0^h \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2} \right)^2 d\xi = \frac{4}{3h}$$

$$C_{23} = \int_0^h \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2} \right) \cdot \left(2\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{2}{3h}$$

$$C_{31} = \int_0^h \left(2\frac{\xi}{h^2} \right) \cdot \left(-\frac{2}{h} + 2\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{2}{3h}$$

$$C_{32} = \int_0^h \left(2\frac{\xi}{h^2} \right) \cdot \left(\frac{2}{h} - 4\frac{\xi}{h^2} \right) d\xi = -\frac{2}{3h}$$

$$C_{33} = \int_0^h \left(2\frac{\xi}{h^2} \right)^2 d\xi = \frac{4}{3h}$$

elde edilir. Buradan;

$$A^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C^e = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^e = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisler elde edilir. A^e, B^e, C^e ve D^e eleman matrislerinin birleştirilmesi ile elde edilen A, B, C ve D birleştirilmiş matrislerin genelleştirilmiş satırları

$$A: \frac{h}{30} (1, 26, 66, 26, 1)$$

$$B: \frac{1}{6} (-1, -10, 0, 10, 1)$$

$$C: \frac{2}{3h} (-1, -2, 6, -2, -1)$$

$$D: \frac{2}{h} (0, 0, 0, 0, 0)$$

elde edilir. (3.1.1.13) ifadesinde birleştirilmiş matrislerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} A\delta + \delta(B + C - D) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1.14)$$

bulunur. (3.1.1.14) denkleminde δ yerine

$$\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$$

ileri sonlu fark yaklaşımı ve δ yerine de

$$\delta = \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2}$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa;

$$A + \frac{\Delta t}{2}(B + C - D)\delta^{n+1} = \left[A - \frac{\Delta t}{2}(B + C - D) \right] \delta^n \quad (3.1.1.15)$$

denklem sistemi bulunur.

δ_m^n parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 başlangıç vektörünün hesaplanması gerekmektedir. δ^0 vektörü problemler ile verilen $U(x, 0)$ başlangıç ve sınır şartları kullanılarak hesaplanacaktır.

Başlangıç parametrelerinin hesaplanabilmesi için U_N yaklaşımı

$$U_N(x, 0) = \sum_{j=-1}^N \delta_j^0 Q_j$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada δ_j^0 belirlenecek parametrelerdir.

Böylece

$$U_N(x, 0) = U(x_j, 0), \quad j = 0, \dots, N$$

değerleri kullanılarak δ_j^0 parametreleri

$$U(x_0, 0) = \delta_{-1} + \delta_0$$

$$U(x_1, 0) = \delta_0 + \delta_1$$

$$U(x_2, 0) = \delta_1 + \delta_2$$

.

$$U(x_{N-1}, 0) = \delta_{N-2} + \delta_{N-1}$$

$$U(x_N, 0) = \delta_{N-1} + \delta_N$$

olarak bulunur. Bu sistemde $N + 1$ denklem $N + 2$ bilinmeyen vardır.

Yardımcı şart olarak

$$U'(x_j) = \frac{2}{h}(\delta_j - \delta_{j-1})$$

türevli sınır şartı kullanılırsa

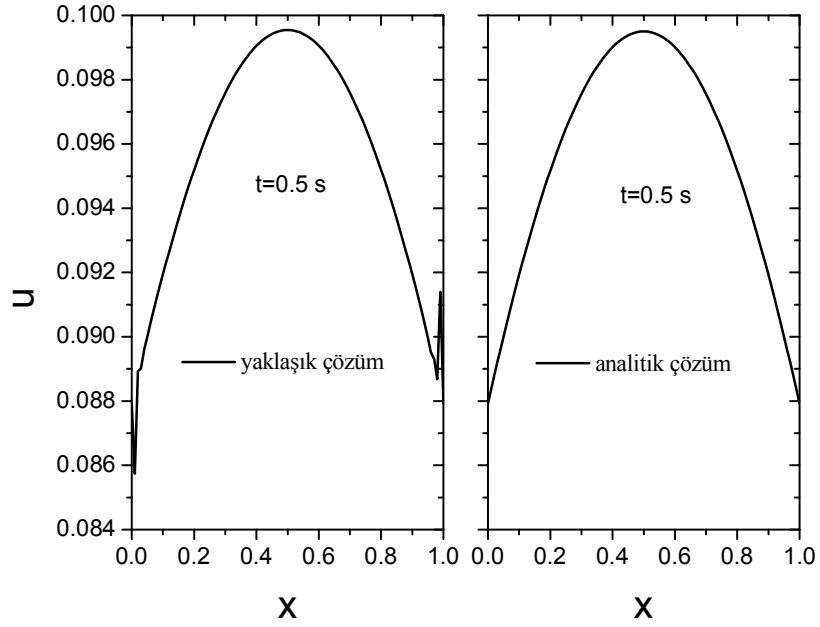
$$U'(x_0) = U'_0 = \frac{2}{h}(\delta_0 - \delta_{-1})$$

elde edilir. δ_{-1} parametresi yok edilirse $N + 1$ bilinmeyenli $N + 1$ adet denklemden oluşan bir sistem elde edilir.

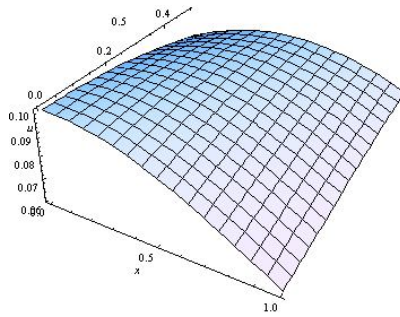
Elde edilen bu bilgiler ile fortran ve mathematica programları yardımıyla Adveksiyon yayılım denklemi için Galerkin metodu kullanılarak Kuadratik B-Spline fonksiyonlar ile elde edilen yaklaşık çözümler, analitik çözümler ve mutlak hata veri tabloları aşağıda belirtilmiştir.

Tablo 1.1. $t=0.5$, $v=1$ alınırsa elde edilen yaklaşık ve analitik çözümü, mutlak hata tablosu

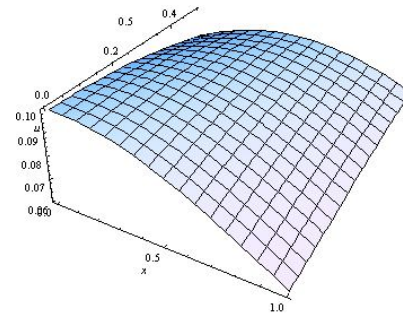
X	N=10		N=50		N=100		Analitik Çözüm
	$\Delta t=0.1$		$\Delta t=0.01$		$\Delta t=0.001$		
	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	
0	0.087920	0.000000	0.087920	0.000000	0.087920	0.000000	0.087920
0.1	0.109628	0.017702	0.091845	0.000081	0.091926	0.000000	0.091926
0.2	0.148191	0.053023	0.095191	0.000023	0.095168	0.000000	0.095168
0.3	0.090619	0.006933	0.097586	0.000033	0.097553	0.000000	0.097553
0.4	0.074360	0.024652	0.099054	0.000042	0.099013	0.000000	0.099012
0.5	0.090479	0.009025	0.099550	0.000046	0.099504	0.000000	0.099504
0.6	0.104313	0.005300	0.099059	0.000046	0.099013	0.000000	0.099012
0.7	0.105524	0.007972	0.097594	0.000041	0.097553	0.000000	0.097553
0.8	0.104834	0.009666	0.095200	0.000032	0.095168	0.000000	0.095168
0.9	0.063865	0.028061	0.092048	0.000122	0.091926	0.000000	0.091926
1.0	0.087920	0.000000	0.087920	0.000000	0.087920	0.000000	0.087920



Şekil 1.1. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) iki boyutlu görünümü



(a) Yaklaşık Çözümü

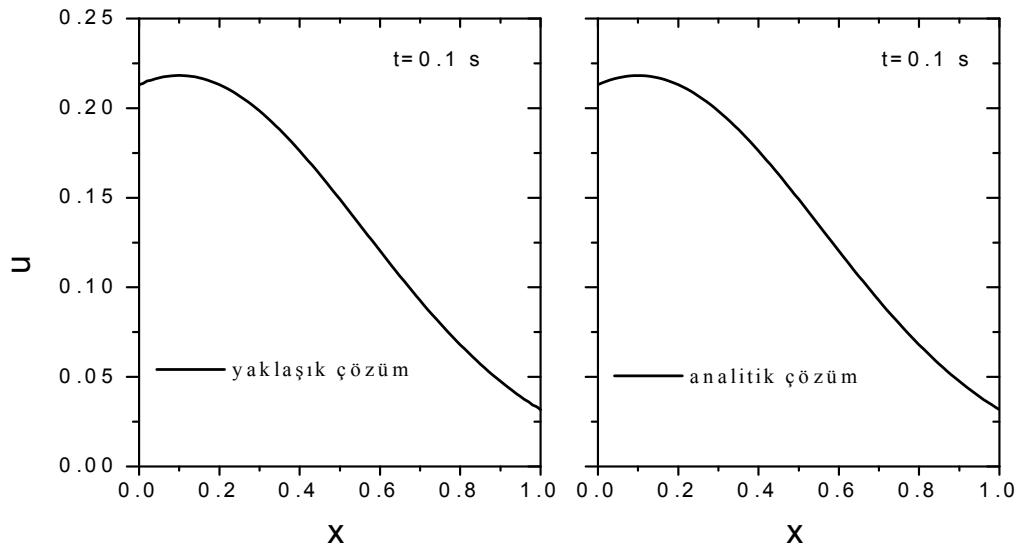


(b) Analitik Çözümü

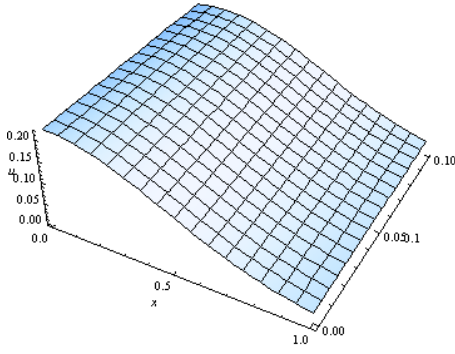
Şekil 1.2. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) üç boyutlu görünümü

Tablo 1.2. $t=0.1$, $v=1$ alınırsa elde edilen yaklaşık ve analitik çözümü, mutlak hata tablosu

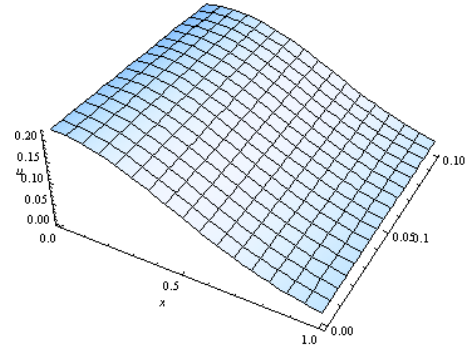
X	N=10		N=50		N=100		Analitik Çözüm
	Δt=0. 1		Δt=0.01		Δt=0.001		
	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	
0	0.213084	0.000000	0.213084	0.000000	0.213084	0.000000	0.213084
0.1	0.401675	0.183457	0.218567	0.000349	0.218228	0.000010	0.218218
0.2	0.585590	0.372507	0.214861	0.001778	0.213102	0.000018	0.213084
0.3	0.477521	0.279127	0.200576	0.002182	0.198419	0.000025	0.198394
0.4	0.326996	0.150868	0.178749	0.002622	0.176157	0.000029	0.176128
0.5	0.218895	0.069806	0.151716	0.002627	0.149118	0.000030	0.149089
0.6	0.145931	0.025599	0.122704	0.002371	0.120359	0.000027	0.120332
0.7	0.096035	0.003430	0.094507	0.001901	0.092627	0.000021	0.092606
0.8	0.063160	0.004794	0.069269	0.001315	0.067969	0.000015	0.067954
0.9	0.034098	0.004794	0.048149	0.000603	0.047552	0.000007	0.047545
1.0	0.031719	0.000000	0.031719	0.000000	0.031719	0.000000	0.031719



Şekil 1.3. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) iki boyutlu görünümü



(a) Yaklaşık Çözümü



(b) Analitik Çözümü

Şekil 1.4. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (GM) üç boyutlu görünümü

3.1.2. Homotopi Pertürbasyon metodu ile Sayısal Çözümü

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3.1.2.1)$$

$$u(x,0) = e^{-50x^2}, \quad s = 1 + 200vt \quad (3.1.2.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan (3.1.2.1) denklemini göz önüne alalım. Bu denklem için aşağıdaki gibi bir Homotopi kurulabilir

$$(1-p)[\dot{Y} - \dot{U}] + p[\dot{Y} - Y'' + Y'] = 0. \quad (3.1.2.3)$$

Burada $\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}$, $Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y' = \frac{\partial Y}{\partial x}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (3.1.2.3) denkleminin genel açılımı yapılması halinde

$$\dot{Y} - \dot{U}_0 + p\dot{U}_0 - pY'' + pY' = 0 \quad (3.1.2.4)$$

denklemini elde edilir. (3.1.2.1) denkleminin çözümü;

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P^n Y_n(x,t) \quad (3.1.2.5)$$

$$Y'' = Y_0'' + pY_1'' + p^2Y_2'' + p^3Y_3'' + p^4Y_4'' + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P^n Y_n''(x,t) \quad (3.1.2.6)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P^n \dot{Y}_n(x,t) \quad (3.1.2.7)$$

$$Y' = Y_0' + pY_1' + p^2Y_2' + p^3Y_3' + p^4Y_4' + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P^n Y_n'(x, t) \quad (3.1.2.8)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.1.2.5) – (3.1.2.8) denklemlerinin (3.1.2.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \dot{Y} - \dot{U}_0 + p\dot{U}_0 - pY'' + pY' &= 0 \\ [\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4] - \dot{U}_0 + p\dot{U}_0 \\ -p[Y_0'' + pY_1'' + p^2Y_2'' + p^3Y_3'' + p^4Y_4''] \\ +p[Y_0' + pY_1' + p^2Y_2' + p^3Y_3' + p^4Y_4'] &= 0 \\ \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 - \dot{U}_0 + p\dot{U}_0 - pY_0'' - p^2Y_1'' - p^3Y_2'' - p^4Y_3'' \\ +pY_0' + p^2Y_1' + p^3Y_2' + p^4Y_3' &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0: \dot{Y}_0 - \dot{U}_0 = 0 \quad (3.1.2.9)$$

$$p^1: \dot{Y}_1 + \dot{U}_0 - Y_0'' + Y_0' = 0 \quad (3.1.2.10)$$

$$p^2: \dot{Y}_2 - Y_1'' + Y_1' = 0 \quad (3.1.2.11)$$

$$p^3: \dot{Y}_3 - Y_2'' + Y_2' = 0 \quad (3.1.2.12)$$

$$p^4: \dot{Y}_4 - Y_3'' + Y_3' = 0 \quad (3.1.2.13)$$

⋮

bulunur. (3.1.2.9) – (3.1.2.13) denklemlerinin çözümü ile

$$\begin{aligned} p^0: \dot{Y}_0 - \dot{U}_0 = 0 &\Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{U}_0 \\ \Rightarrow Y_0 &= e^{-50x^2} \end{aligned} \quad (3.1.2.14)$$

$$\begin{aligned} p^1: \dot{Y}_1 + \dot{U}_0 - Y_0'' + Y_0' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_1 = -\dot{U}_0 + Y_0'' - Y_0' \\ \Rightarrow Y_1 &= \int_0^t [-\dot{U}_0 + Y_0'' - Y_0'] dt \\ \Rightarrow Y_1 &= 100e^{(-50x^2)} t (-1 + x + 100x^2), \end{aligned} \quad (3.1.2.15)$$

$$p^2: \dot{Y}_2 - Y_1'' + Y_1' = 0 \Rightarrow \dot{Y}_2 = Y_1'' - Y_1'$$

$$\Rightarrow Y_2 = \int_0^t [Y_1'' - Y_1'] dt$$

$$[Y_1'' - Y_1'] Y_2 = 50e^{(-50x^2)} t^2 (299 - 600x - 59900x^2 + 20000x^3 + 1000000x^4),$$

$$(3.1.2.16)$$

$$p^3: \dot{Y}_3 - Y_2'' + Y_2' = 0 \Rightarrow \dot{Y}_3 = Y_2'' - Y_2'$$

$$\Rightarrow Y_3 = \int_0^t [Y_2'' - Y_2'] dt$$

$$\Rightarrow Y_3 = \frac{5000}{3} e^{(-50x^2)} t^3 (-1491 + 4497x + 448200x^2 - 299900x^3)$$

$$+ \frac{5000}{3} e^{(-50x^2)} t^3 (-14970000x^4 + 3000000x^5 + 10000000x^6), \quad (3.1.2.17)$$

$$p^4: \dot{Y}_4 - Y_3'' + Y_3' = 0 \Rightarrow \dot{Y}_4 = Y_3'' - Y_3'$$

$$\Rightarrow Y_4 = \int_0^t [Y_3'' - Y_3'] dt$$

$$\Rightarrow Y_4 = \frac{1250}{3} e^{(-50x^2)} t^4 (1041003 - 4194 \cdot 10^3 x - 4173000600x^2)$$

$$+ \frac{1250}{3} e^{(-50x^2)} t^4 (4196 \cdot 10^5 x^3 + 2091001 \cdot 10^4 x^4 - 8396 \cdot 10^6 x^5)$$

$$+ \frac{1250}{3} e^{(-50x^2)} t^4 (-2794 \cdot 10^8 x^6 + 4 \cdot 10^{10} x^7 + 10^{12} x^8), \quad (3.1.2.18)$$

şeklinde (3.1.2.5) serisinin ilk dört terimi elde edilmiş olur. (3.1.2.14) – (3.1.2.18) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.1.2.5) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.2.2) denkleminin yaklaşık çözümü

$$U(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots$$

$$= e^{(-50x^2)} + 100e^{(-50x^2)} t (-1 + x + 100x^2) +$$

$$e^{(-50x^2)} t^2 (299 - 600x - 59900x^2 + 210^4 x^3 + 10^6 x^4) +$$

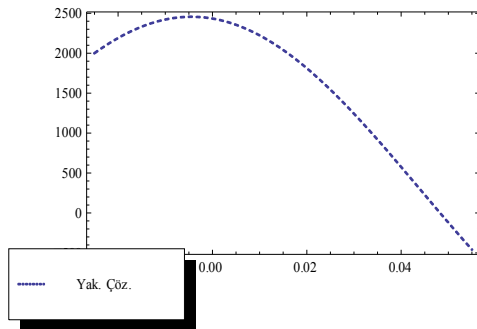
$$\begin{aligned}
& e^{(-50x^2)} t^2 (299 - 600x - 59900x^2 + 210^4x^3 + 10^6x^4) + \frac{5000}{3} e^{(-50x^2)} t^3 - \\
& (1491 + 4497x + 448200x^2 - 299900x^3 - 149710^4x^4 + 3.10^6x^5 + 10^8x^6 + \\
& \frac{1250}{3} e^{(-50x^2)} t^4 (1041003 - 4194.10^3x - 4173000600x^2 + 4196.10^5x^3) + \\
& 2091001.10^4x^4 + \frac{1250}{3} e^{(-50x^2)} t^4 (-8396.10^6x^5 - 2794.10^8x^6 \\
& + 4.10^{10}x^7 + 10^{12}x^8)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

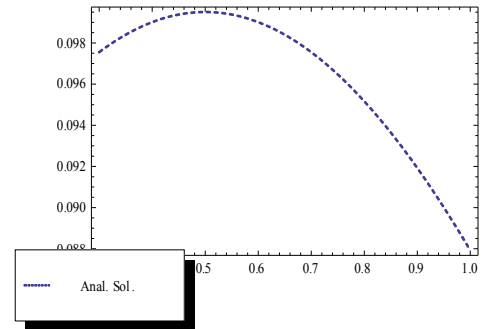
Böylece (3.1.2.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-50 \frac{(x-t)^2}{s}\right)$$

dir. Elde edilen sonuçlara göre verilen adveksiyon yayılım denkleminin HPM ile $t = 0.5$ ve $t = 0.1$ değerleri için 2D-3D grafikleri aşağıda belirtilmiştir.

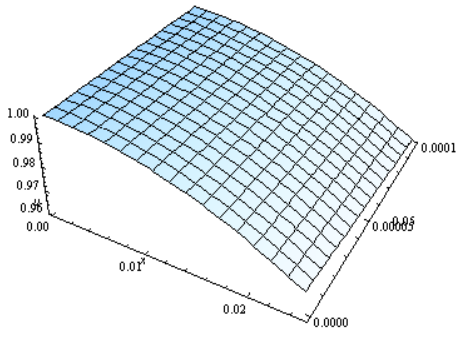


(a) Yaklaşık çözüm

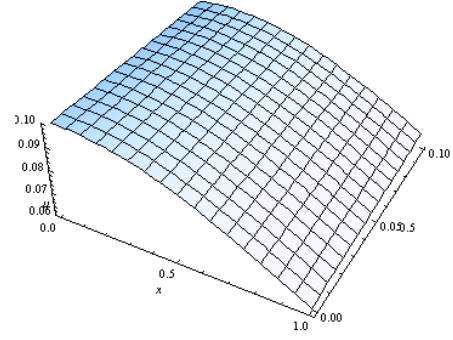


(b) Analitik çözüm

Şekil 1.5. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x, t)$ analitik çözümü ile analitik çözümünün (HPM) iki boyutlu görünümü

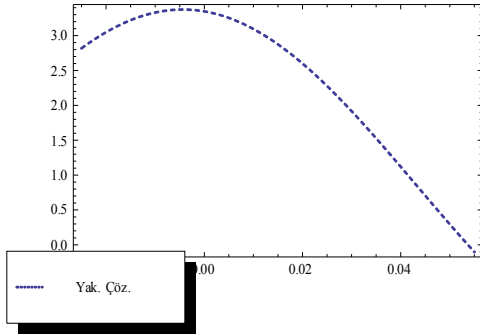


(a) Yaklaşık çözüm

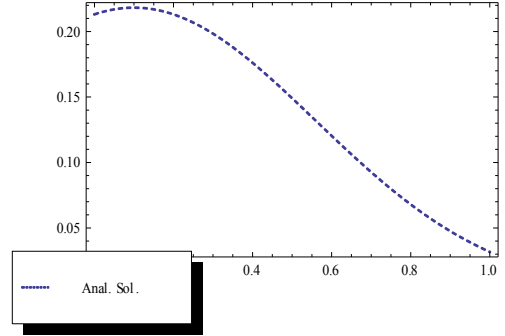


(b) Analitik çözüm

Şekil 1.6. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü

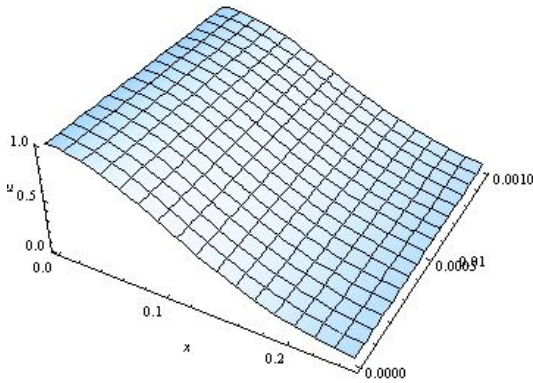


(a) Yaklaşık çözüm

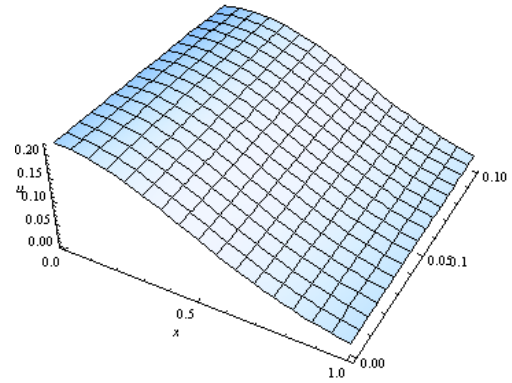


(b) Analitik çözüm

Şekil 1.7. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ yaklaşık çözümü ile analitik çözümünün (HPM) iki boyutlu görünümü



(a) Yaklaşık çözüm



(b) Analitik çözüm

Şekil 1.8. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ yaklaşık çözümü ile analitik çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü

3.1.3. Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm

(3.1.1.1) ve (3.1.1.2) eşitlikleri ile verilen adveksiyon yayılım denklemini göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_t + L_x u - L_{xx} u = 0 \quad (3.1.3.1)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ve $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dir. Burada L_t^{-1}

integral operatörü olup $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ şeklinde gösterilir. (3.1.3.1) denkleminin her iki

tarafına soldan L_t^{-1} uygulanırsa

$$L_t^{-1} [L_t u] = -L_t^{-1} [L_x u - L_{xx} u] \quad (3.1.3.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) - L_t^{-1} [L_x u - L_{xx} u] \quad (3.1.3.3)$$

olur. (3.1.3.3) denklemi için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0 = e^{-50x^2}, \quad s = 1 + 200vt, \\ u_{k+1}(x, t) = -\int_0^t [L_x u_k(x, t) - L_{xx} u_k(x, t)] dt, \quad k \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.3.4)$$

elde edilen (3.1.3.4) rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned} u_1 &= -L_t^{-1} (L_x u_0 - L_{xx} u_0) = -\int_0^t [L_x u_0(x, t) - L_{xx} u_0(x, t)] dt \\ &= 100e^{-50x^2} t (-1 + x + 100x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -L_t^{-1} (L_x u_1 - L_{xx} u_1) = -\int_0^t [L_x u_1(x, t) - L_{xx} u_1(x, t)] dt \\ &= 50e^{-50x^2} t^2 (299 - 600x - 59900x^2 + 2 \cdot 10^4 x^3 + 10^6 x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -L_t^{-1} (L_x u_2 - L_{xx} u_2) = -\int_0^t [L_x u_2(x, t) - L_{xx} u_2(x, t)] dt \\ &= \frac{5000}{3} e^{-50x^2} t^3 (-1491 + 4497x + 448200x^2 - 299900x^3 - 1497 \cdot 10^4 x^4 + 3 \cdot 10^6 x^5 + 10^8 x^6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= -L_t^{-1}(L_x u_3 - L_{xx} u_3) = -\int_0^t [L_x u_3(x, t) - L_{xx} u_3(x, t)] dt \\
&= \frac{1250}{3} e^{-50x^2} t^4 (1041003 - 419000x - 417300600x^2 + 4196 \cdot 10^5 x^3 + 2091001 \cdot 10^4 x^4) \\
&+ \frac{1250}{3} e^{-50x^2} t^4 (-8396 \cdot 10^6 x^5 - 2794 \cdot 10^8 x^6 + 4 \cdot 10^{10} x^7 + 10^{12} x^8) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

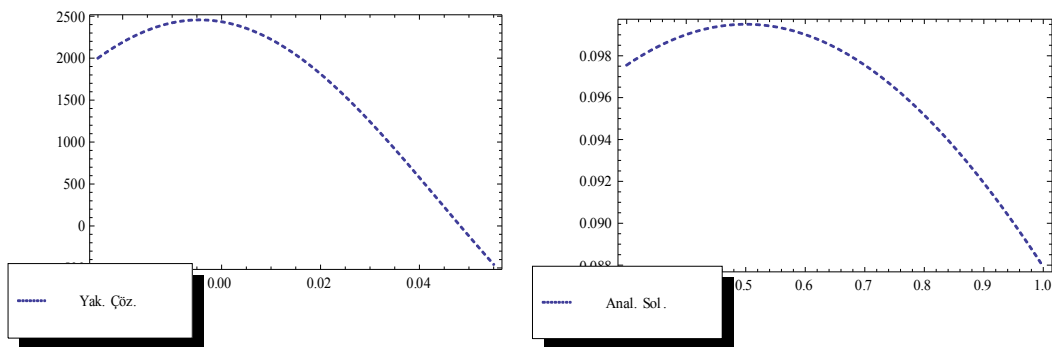
olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 , terimleri (2.3.6) eşitliğinde yazılarak (3.1.3.1) adveksiyon yayılım denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\
&= e^{-50x^2} + 100e^{-50x^2} t (-1 + x + 100x^2) + 50e^{-50x^2} t^2 (299 - 600x - 59900x^2 + 2 \cdot 10^4 x^3 + 10^6 x^4) \\
&+ \frac{5000}{3} e^{-50x^2} t^3 (-1491 + 4497x + 448200x^2 - 299900x^3 - 1497 \cdot 10^4 x^4 + 3 \cdot 10^6 x^5 + 10^8 x^6) + \dots
\end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. Böylece (3.1.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-50 \frac{(x-t)^2}{s}\right) \text{dir.}$$

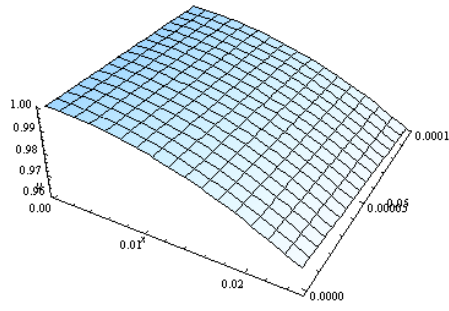
Elde edilen sonuçlara göre verilen adveksiyon yayılım denkleminin ADM ile $t = 0.5$ ve $t = 0.1$ değerleri için 2D-3D grafikleri aşağıda belirtilmiştir.



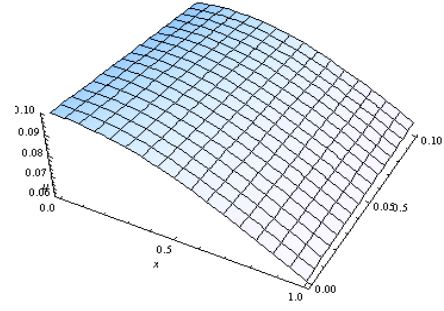
(a) Yaklaşık çözüm

(b) Analitik çözüm

Şekil 1.9. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) iki boyutlu görünümü

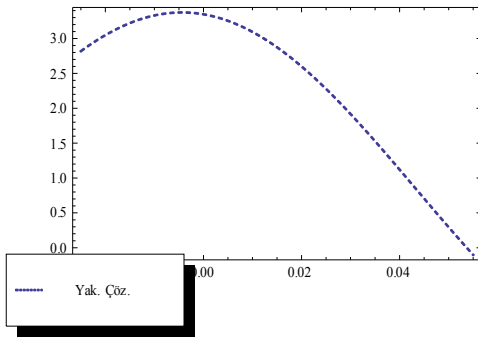


(a) Yaklaşık çözüm

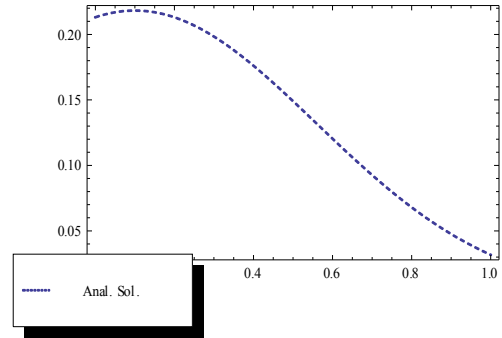


(b) Analitik çözüm

Şekil 1.10. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.5$ anındaki $u(x,t)$ yaklaşık çözümü ile analitik çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü

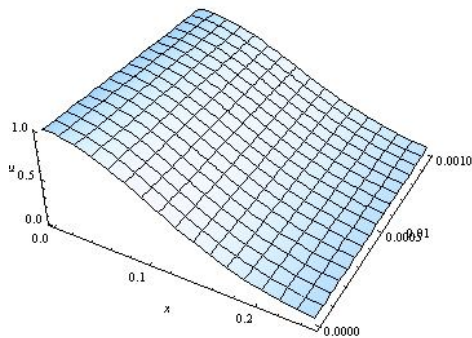


(a) Yaklaşık çözüm

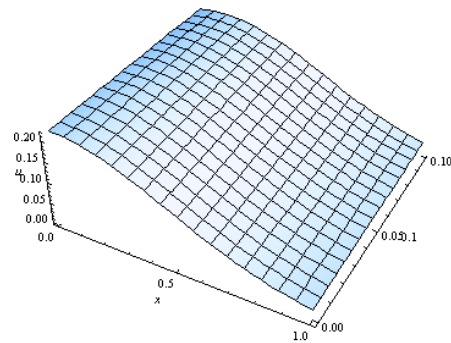


(b) Analitik çözüm

Şekil 1.11. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) iki boyutlu görünümü



(a) Yaklaşık çözüm



(b) Analitik çözüm

Şekil 1.12. Adveksiyon Difüzyon Denkleminin, $t=0.1$ anındaki $u(x,t)$ yaklaşık çözümü ile analitik çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Adveksiyon yayılım denkleminde Galerkin metodu, Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Adveksiyon yayılım denkleminin Galerkin metodu ile $t = 0.5, v = 1$ ve $\Delta t = 0.1$ alınarak yaklaşık çözümü yapıldığında mutlak hatanın yeterince küçük olduğu görülmektedir. Ancak $\Delta t = 0.01$ veya $\Delta t = 0.001$ alarak yaklaşık çözüm yapıldığında yaklaşık çözümün analitik çözüme çok yakın olduğu görülmektedir. Benzer şekilde $t = 0.1, v = 1, \Delta t = 0.1, \Delta t = 0.01, \Delta t = 0.001$ alındığında yaklaşık çözümün analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca $t = 0.5$ ile $t = 0.1$ değerleri için Tablo 1.1. ve Tablo 1.2. incelendiğinde t nin büyük değerleri ve Δt nin küçük değerleri için Galerkin metodu ile yapılan yaklaşık çözümün analitik çözüme çok daha yakın olduğu görülmektedir. Galerkin metodu için Fortran, Mathematica ve Origin 8 programları, Adomian ayrışım metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu için Mathematica programı kullanılarak elde edilen çözüm fonksiyonlarının, iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir. Bu çalışmada her üç metot ile bulunan çözümlerin, analitik çözüme çok yakın değerler aldığı görülmektedir. Adveksiyon yayılım denkleminde Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu uygulanarak elde edilen sayısal ve analitik çözümler için Mathematica programı kullanılarak, çözüm grafiklerinin hemen hemen aynı olduğu görülmektedir.

5. ÖNERİLER

Adveksiyon yayılım denklemini Galerkin metodu ile çözümünde bölüntü sayısını (N) arttırarak ve Δt değerini azaltarak analitik çözüme çok yakın sonuçları elde etmek mümkündür. Ayrıca Adomian ayrışım metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak herhangi bir varsayım ve sınırlama olmadan sadece bir başlangıç koşulunun verilmesi ile lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Bu nedenle Adveksiyon yayılım denklemine ve buna benzer denklemlere Galerkin metodu, Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu kolaylıkla uygulanabilir.

6. GALERKİN METODU İLE ÇÖZÜMÜN FORTRAN YAZILIMI

```
PROGRAM Galerkin

PARAMETER (N=100)

DOUBLE PRECISION A,B,C,U,G,G1,AA, BB, X

DOUBLE PRECISION FF, TIME, H,xc, D,alfa, lmd

DOUBLE PRECISION TF, T,TM, Ua, Ua_dt, uax

DIMENSION A(-1:N,-1:N),B(-1:N,-1:N),FF(-1:N)

DIMENSION C(-1:N,-1:N),D(-1:N,-1:N)

DIMENSION TM(1:N,1:N),xc(1:n)

DIMENSION U(0:N),AA(-1:N,-1:N),BB(-1:N,-1:N)

DIMENSION G(-1:N),G1(-1:N),Ua(0:N),Ua_dt(0:N)

double precision tpu, enbu, ss, vv

INTEGER NN

OPEN(10,FILE='galsonuc_05.txt',STATUS='UNKNOWN')

OPEN(11,FILE='galsonuchata. txt',STATUS='UNKNOWN')

vv=1.

alfa=1.

lmd=1.

TIME=0.001D0

C H=0.005D0

TF=0.1

H=0.01

NN=100

T=0.0D0
```

```

*   cr=alfa*TIME/H
*   P=alfa*H/lmd

ss=1.+200.*vv*T

x=0.D0

uax=(-100./(sqrt(ss**3)))*exp((-50.*(x-T)**2)/ss)

x=0.D0

c  WRITE(10,*)'BASLANGIC SARTLARI'

DO 1 I=0,N

U(I)=exp(-50.*x**2)

Ua(I)=(1./(sqrt(ss)))*exp((-50.*(x-T)**2)/ss)


write(10,39)x,u(i),ua(i),abs(ua(i)-u(i))

X=X+H

1  CONTINUE


G(-1)=(1./2)*(U(0)-(h/2.)*Uax)

G(0)=(1./2)*(U(0)+(h/2.)*Uax)


*   G(-1)=U(0)/2.
*   G(0)=U(0)/2.

DO 3 I=1,N

3  G(I)=U(I)-G(I-1)

A(-1,-1)=6.*H/30.

A(-1,0)=13.*H/30.

A(-1,1)=1.*H/30.

```

$$A(0,-1)=13.*H/30.$$

$$A(0,0)=60.*H/30.$$

$$A(0,1)=26.*H/30.$$

$$A(0,2)=1.*H/30.$$

$$A(N,N)=6.*H/30.$$

$$A(N,N-1)=13.*H/30.$$

$$A(N,N-2)=1.*H/30.$$

$$A(N-1,N)=13.*H/30.$$

$$A(N-1,N-1)=60.*H/30.$$

$$A(N-1,N-2)=26.*H/30.$$

$$A(N-1,N-3)=1.*H/30.$$

$$\text{DO } 4 \text{ } I=1,N-2$$

$$A(I,I-2)=1.*H/30.$$

$$A(I,I-1)=26.*H/30.$$

$$A(I,I)=66.*H/30.$$

$$A(I,I+1)=26.*H/30.$$

$$A(I,I+2)=1.*H/30.$$

4 CONTINUE

$$B(-1,-1)=-3./6$$

$$B(-1,0)=2./6$$

$$B(-1,1)=1./6$$

$$B(0,-1)=-8./6$$

$$B(0,0)=-3./6$$

$$B(0,1)=10./6$$

$$B(0,2)=1./6$$

$$B(N,N)=3./6$$

$$B(N,N-1)=-2./6$$

$$B(N,N-2)=-1./6$$

$$B(N-1,N)=8./6$$

$$B(N-1,N-1)=3./6$$

$$B(N-1,N-2)=-10./6$$

$$B(N-1,N-3)=-1./6$$

DO 11 I=1,N-2

$$B(I,I-2)=-1./6$$

$$B(I,I-1)=-10./6$$

$$B(I,I)=0.$$

$$B(I,I+1)=10./6$$

$$B(I,I+2)=1./6$$

11 CONTINUE

$$C(-1,-1)=4./(3.*H)$$

$$C(-1,0)=-2./(3.*H)$$

$$C(-1,1)=-2./(3.*H)$$

$$C(0,-1)=-2./(3.*H)$$

$$C(0,0)=8./(3.*H)$$

$$C(0,1)=-4./(3.*H)$$

$$C(0,2)=-2./(3.*H)$$

$$C(N,N)=4./(3.*H)$$

$$C(N,N-1)=-2./(3.*H)$$

$$C(N,N-2)=-2./(3.*H)$$

$$C(N-1,N)=-2./(3.*H)$$

$$C(N-1,N-1)=8./(3.*H)$$

$$C(N-1,N-2)=-4./(3.*H)$$

$$C(N-1,N-3)=-2./(3.*H)$$

DO 6 I=1,N-2

$$C(I,I-2)=-2./(3.*H)$$

$$C(I,I-1)=-4./(3.*H)$$

$$C(I,I)=12./(3.*H)$$

$$C(I,I+1)=-4./(3.*H)$$

$$C(I,I+2)=-2./(3.*H)$$

6 CONTINUE

$$D(-1,-1)=2./H$$

$$D(-1,0)=-2./H$$

$$D(-1,1)=0.$$

$$D(0,-1)=2./H$$

$$D(0,0)=-2./H$$

$$D(0,1)=0.$$

$$D(0,2)=0.$$

$$D(N,N)=2./H$$

$$D(N,N-1)=-2./H$$

```

D(N,N-2)=0.
D(N-1,N)=2./H
D(N-1,N-1)=-2./H
D(N-1,N-2)=0.
D(N-1,N-3)=0.
DO 61 I=1,N-2
D(I,I-2)=0.
D(I,I-1)=0.
D(I,I)=0.
D(I,I+1)=0.
D(I,I+2)=0.
61  CONTINUE

DO 9 K=1,NN
T=K*TIME
write(*,38)T
ss=1.+200.*vv*T
x=0.D0
DO 141 I=0,N
Ua_dt(I)=(1./(sqrt(ss)))*exp((-50.*(x-T)**2)/ss)
X=X+H
141  CONTINUE

DO 116 J=-1,1
AA(-1,J)=A(-1,J)+(TIME/2.)*(alfa*B(-1,J)+lmd*C(-1,J)-lmd*D(-1,J))

```

BB(-1,J)=A(-1,J)-(TIME/2.)*(alfa*B(-1,J)+lmd*C(-1,J)-lmd*D(-1,J))

116 continue

DO 117 J=N-2,N

AA(N,J)=A(N,J)+(TIME/2.)*(alfa*B(N,J)+lmd*C(N,J)-lmd*D(N,J))

BB(N,J)=A(N,J)-(TIME/2.)*(alfa*B(N,J)+lmd*C(N,J)-lmd*D(N,J))

117 continue

DO 16 J=-1,2

AA(0,J)=A(0,J)+(TIME/2.)*(alfa*B(0,J)+lmd*C(0,J)-lmd*D(0,J))

BB(0,J)=A(0,J)-(TIME/2.)*(alfa*B(0,J)+lmd*C(0,J)-lmd*D(0,J))

16 CONTINUE

DO 17 J=N-3,N

AA(N-1,J)=A(N-1,J)+

* (TIME/2.)*(alfa*B(N-1,J)+lmd*C(N-1,J)-lmd*D(N-1,J))

BB(N-1,J)=A(N-1,J)-

* (TIME/2.)*(alfa*B(N-1,J)+lmd*C(N-1,J)-lmd*D(N-1,J))

17 CONTINUE

DO 18 I=1,N-2

DO 19 J=I-2,I+2

AA(I,J)=A(I,J)+(TIME/2.)*(alfa*B(I,J)+lmd*C(I,J)-lmd*D(I,J))

BB(I,J)=A(I,J)-(TIME/2.)*(alfa*B(I,J)+lmd*C(I,J)-lmd*D(I,J))

19 CONTINUE

18 CONTINUE

C DO 20 I=-1,N

C20 G(I)=G1(I)

BB(0,0)=BB(0,0)-BB(0,-1)

BB(1,0)=BB(1,0)-BB(1,-1)

BB(N-1,N-1)=BB(N-1,N-1)-BB(N-1,N)

BB(N-2,N-1)=BB(N-2,N-1)-BB(N-2,N)

PPP=0.

DO 21 J=0,2

PPP=PPP+BB(0,J)*G(J)

21 CONTINUE

FF(0)=PPP+ua(0)*BB(0,-1)-ua_dt(0)*AA(0,-1)

PPP=0.

DO 22 J=N-3,N-1

PPP=PPP+BB(N-1,J)*G(J)

22 CONTINUE

FF(N-1)=PPP+ua(N)*BB(N-1,N)-ua_dt(N)*AA(N-1,N)

PPP=0.

DO 211 J=0,3

```

      PPP=PPP+BB(1,J)*G(J)

211  CONTINUE

      FF(1)=PPP+ua(0)*BB(1,-1)-ua_dt(0)*AA(1,-1)


      PPP=0.

      DO 222 J=N-4,N-1

      PPP=PPP+BB(N-2,J)*G(J)

222  CONTINUE

      FF(N-2)=PPP+ua(N)*BB(N-2,N)-ua_dt(N)*AA(N-2,N)


      DO 23 I=2,N-3

      PPP=0.0

      DO 24 J=I-2,I+2

      PPP=PPP+BB(I,J)*G(J)

24  CONTINUE

      FF(I)=PPP

23  CONTINUE


      AA(0,0)=AA(0,0)-AA(0,-1)

      AA(1,0)=AA(1,0)-AA(1,-1)

      AA(N-1,N-1)=AA(N-1,N-1)-AA(N-1,N)

      AA(N-2,N-1)=AA(N-2,N-1)-AA(N-2,N)


      DO 129 KI=1,N

```

```

DO 129 KJ=1,N
129    TM(KI,KJ)=AA(KI-1,KJ-1)

do 189 KI=1,N
    xc(KI)=FF(KI-1)
189    continue

    ng=N

do 300 kg=1,ng
do 301 ig=kg+1,ng

    TM(ig,kg)=TM(ig,kg)/TM(kg,kg)
301    continue

do 302 jg=kg+1,ng
do 303 ig=kg+1,ng

    TM(ig,jg)=TM(ig,jg)-TM(ig,kg)*TM(kg,jg)
303    continue
302    continue

do 304 ig=kg+1,ng

    xc(ig)=xc(ig)-TM(ig,kg)*xc(kg)
304    continue
300    continue

do 305 ig=ng,1,-1
do 306 jg=ig+1,ng

    xc(ig)=xc(ig)-TM(ig,jg)*xc(jg)
306    continue

```

```

xc(ig)=xc(ig)/TM(ig,ig)
305    continue

DO 27 I=1,N
27 G1(I-1)=XC(I)

G1(-1)=ua_dt(0)-G1(0)
G1(N)=ua_dt(N)-G1(N-1)

DO 30 I=-1,N
G(I)=G1(I)
30  CONTINUE

*  kmm=mod(k,imd)
*  if (kmm.eq.0) then
write(10,38)T
X=0.D0
ss=1.+200.*vv*T
DO 290 i=0,N
U(I)=G(I-1)+G(I)
Ua(I)=(1./(sqrt(ss)))*exp((-50.*(x-T)**2)/ss)

write(10,39)x,u(i),ua(i),abs(ua(i)-u(i))
X=X+H
290  CONTINUE

```

```

    tpu=0.

    do 406 i=0,N
        tpu=tpu+(abs(Ua(i)-U(i)))**2
406  continue
        tpu=(H*tpu)**0.5

        enbu=abs(Ua(0)-U(0))

        do 407 i=1,n
            if ((abs(Ua(i)-U(i))).gt.enbu) then
                enbu=abs(Ua(i)-U(i))
            end if
407  continue
            write(11,37)t, tpu,enbu

*   endif
9   continue

37   FORMAT(F10.5,2X,F12.6,2X,F12.6)
38 format('t=',F10.5)
39   FORMAT(F10.5,2X,F12.6,2X,F12.6,2X,F12.6)

    END

```

KAYNAKLAR

- [1] **Adomian G.**, 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego.
- [2] **A. Doğan.**, 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematics Modell*, **26**, 771-783.
- [3] **A.H.Hasanov.**, 2001. Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi, *Literatür Yayıncılık*
- [4] **Alan J.Davies.**, The Finite Element Method A First Approach, *Clarendon Press Oxford*
- [5] **Cherruault, Y.**, 1988. 'Convergence of Adomian's method', *Kybernetes* **18**,(2), 31-38.
- [6] **Esen A.**, 2003. Termistör Probleminin B-Spline Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü, *Doktora Tezi*, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [7] **He J.H.**, 2000. A coupling method a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *International Journal Nonlinear Mechanic*, **35**, 37-43.
- [8] **He J.H.**, 2004. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy Analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **156**(2), 527-539.
- [9] **He J.H.**, 2004. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities, *Applied Mathematics and Computation*, **151**, 287-292.
- [10] **He J.H.**, 2005. Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, *International Journal Nonlinear Science Numerical Simulation*, **6**, 207-208.
- [11] **He J.H.**, 2006. Application of He's Homotopy perturbation Method to Non-Linear Coupled system of Reaction diffusion Equations, *International Journal Nonlinear Science Numerical Simulation*, **7**, 413-420.

- [12] **H. Nguyen, J. Reynen.**, 1984. A space time least-squares finite element scheme for advection-diffusion equation, *Computation Methods Applications Mechanic Engineering*, **42**, 331–342.
- [13] **İ. Dağ, D. Irk, M. Tombul.**, 2006. Least-squares finite element method for the advection–diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, **173**, 554– 565.
- [14] **İ. Dağ, Özer. M. N.**, 2001. Approximation of the RLW equation by the least quare cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematics Modelling*, **25**, 221-231.
- [15] **Liao S.J.**, 2003. Beyond perturbation:Introduction to the homotopy analysis method, Boca Raton: Chapman.&Hall/CRC Press.
- [16] **Liang S., Jeffrey D.J.**, 2009. Comparison of homotopy analysis method and homo- topy perturbation method through an evolution equation, *Commun. Nonlinear Science and Numerical Simulation*, doi:10.1016/j.cnsns.02.016.
- [17] **Liao S.J.**, 2009. Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems, *Commun Nonlinear Science Numerical Simulation*, **14**, 983-997.
- [18] **L.B. Wahibin.**, 1974. A Dissipative Galerkin Method for the Numerical Solution of First Order Hyperbolic Equation. In *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (C.de Boor, Ed.) *New York, Academic Press*, 147-169.
- [19] **M. Dehghan.**, 2004. The use of Adomian decomposition method for solving the one dimentional parabolic equation with non-local boundary spesification, *Int. International Journal of Computer Mathematics*, **81**, 25–34.
- [20] **M.E. Alexander ve J.LI Morris.**,1981. Galerkin Methods for some Model Equations for Nonlinear Dispersive Waves, *Journal Computation Physics*, **39**, 94-102.
- [21] **M. Inc, M. Ergut and H. Bulut.**, 2005. On approximate solutions of the diffusion and convection-diffusion equations, *F.Ü. Fen ve Müh.Bilimleri Dergisi University*, **17(1)**, 78-86.

- [22] **M.K. Deb, I. M. Babuška, and J. T. Oden.**, 2001. Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques, *Computation Methods Applied Mechanic Engineering*, **190**, 6359–6372.
- [23] **Özlük, M.**, 2005. Korteweg-de vries (Kdv) denkleminin spline baz fonksiyonları yardımıyla nümerik çözümleri, *Yüksek Lisans Tezi*, İ. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [24] **Reddy, J. N.**, 1985. An Introduction to the Finite Element Method, *McGraw-Hill, Inc*,
- [25] **R. Szymkiewicz.**, 1993. Solution of the advection–diffusion equation using the spline function and finite elements, *Computation Methods Applied Mechanic Engineering*, **9**, 197–206.
- [26] **S.I. Zaki.**, 2000. A least-squares finite element scheme for the EW equation, *Computation Methods Applied Mechanic Engineering*, **189**, 587-594.
- [27] **S. Kutluay, A. Esen, İ. Dağ.**, 2004. Numerical solutions of the Burgers equation by the least square quadratic B-spline finite element, *Journal Computation Applied Mathematics*, **167**, 21–33.
- [28] **T. Mavoungou, Y. Cherruault.**, 1992. Convergence of Adomian's method and applications to nonlinear partial differential equations, *Kybernetes*, **21**, 13–25.
- [29] **Wait. R, and Mitchell. A. R.**, 1985. Finite Element Analysis and Applications, *John Wiley & Sons*.
- [30] **Wazwaz., A.M.**, 2005. Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratutype equations, *Applied Mathematics and Computation*, **166**, 652-663.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında İzmir’de doğdu. İlkokulu Gaziantep ve Ortaokul öğrenimini Yeşilırmak İlköğretim okulunda ve Lise öğrenimini Konya Özel İdeal Lisesinde tamamladı. 2003 yılında Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde lisans eğitime başladı. 2007 yılında mezun oldu ve 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.