

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS UZAYDA İZOTROPİK EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fidan TAHTİKŞAN
(101121107)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Ocak 2014

OCAK-2014

T.C

**FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KOMPLEKS UZAYDA İZOTROPİK EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fidan TAHTIKŞAN

(101121107)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Ocak 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Ocak 2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Tayfun TUTAK (F.Ü)

OCAK 2014

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımnda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarımı esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN 'e ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT 'e ve sayın hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Fidan TAHTİKŞAN

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER LİSTESİ	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
1. BÖLÜM	1
Giriş	1
2. BÖLÜM	3
Temel Tanımlar ve Teoremler	3
3. BÖLÜM	14
3.1 Sanal Elemanlar	14
3.2 Sanal Eğriler	18
4. BÖLÜM	26
4.1 $\mathbb{C}^4$ Kompleks Uzayında İzotropik Eğriler	26
4.2 $\mathbb{C}^4$ Uzayındaki İzotropik Helislerin ve Küresel İzotropik Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları	28
4.3 Vektörel Diferensiyel Denklem İle İzotropik eğrilerin Belirlenmesi	43
4.4 E. Cartan Çatısına Göre İzotropik Eğrinin Yer Vektörü	45
4.5 $\mathbb{C}^4$ Kompleks Uzayında İzotropik Rektifiyan Eğriler	51
KAYNAKLAR	55

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{C}^4$: 4-boyutlu Kompleks Uzay

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$: E. Cartan çatısı

g : Öklid iç çarpımı

d : Uzaklık fonksiyonu

κ : Eğrilik

ÖZET

KOMPLEKS UZAYDA İZOTROPİK EĞRİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, İzotropik eğriler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verildi.

İkinci bölümde; temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; çalışmanın ilerleyen kısımları için temel teşkil etmesi düşünülerek, sanal elemanlar ve sanal eğrilere ilişkin temel kavramlar verildi.

Dördüncü bölümde; $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında izotropik eğriler ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonları verildi. Ayrıca izotropik rektifiyan eğri tanımı yapıldı.

Anahtar Kelimeler: E. Cartan Çatı, İzotropik Eğri, İzotropik Kübik, Slant Helis

SUMMARY

ISOTROPIC CURVES IN THE COMPLEX SPACE

This thesis consist of four chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems are given.

In the third chapter; fundemental concepts, theorems about imaginary element and imaginary curves which are indispensable for the subsequent parts of the work were given.

In the fourth chapter; isotropic curves in the complex space $\mathbb{C}^4$ and some characterizations of them are given. Also definition of isotropic rectifying curve is given.

Keywords: E. Cartan frame, Isotropic curves, Isotropic cubic, Slant helix

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Eğriler günlük hayatta sık sık karşımıza çıkan geometrik nesnelerdir. Örneğin kalp grafisi çektirdiğimizde eğrimizin nasıl davrandığı bizim için önemlidir. Ekono-mide verilerin değerlendirilmesinde, derslerimizde öğrencilerimizin notlarını sıralarken (çan) eğrileri kullanırız.

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında eğrilerin en ilginç olanlarından biri helislerdir. Helisler için günlük hayattan bir çok örnek verilebilir. Örneğin; bir ağaca sarılarak çıkan sar-maşık, minaredeki merdiven veya bir vidanın üzerine işlenmiş yivler ve setler ver-ilebilir.

İlk olarak bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helis ele alınmış ve buna dairesel helis denilmiştir. Bu helislerde κ eğriliği ve τ burulmasının ayrı ayrı birer sabit olduğu ilk tesbit edilen karakterizasyonlardanır. Daha sonra bu eğriliklerin sabit olmamasına rağmen oranlarının sabit olduğu helis bulunmuştur ki bu helise genel helis adı verilmiştir. Bulunan genel helis sayesinde bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helislerden başka helislerin de var olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Helisler sabit eğriliklidir. Başka bir deyişle eğrinin tanjant vektörü sabit bir doğruyla sabit bir açı yapar. İlk olarak 1802 yılında Lancet Öklid üzayındaki helisler için yaptığı çalışmalar sonucu genel helis tanımını yapmıştır. 1845 yılında ise de Saint Venant tarafından bir eğrinin helis olması için gerek ve yeter şartın κ eğriliğinin τ burulmasına oranının sabit olması gerektiği ispatlanmıştır.

Slant helis kavramı ilk kez S. Izumiya ve N. Takeuchi tarafından bahsedilmiştir. E^3 Öklid uzayında κ eğriliği sıfırdan farklı olan ψ eğrisinin asli normal doğruları sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa ψ eğrisine slant helis denir.

E. Cartan sanal eğrilerden ilk bahseden kişidir ve sanal eğrileri tanımlamak için kompleks değişkenlerden yararlanmıştır. Ayrıca sanal eğriler F. Şemin tarafından ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. S. Yılmaz 'ın "Contributions to differential geome-

try of isotropic curves in the complex space" adlı makalesinde $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında izotropik eğriler ve izotropik slant helislerle ilgili çalışmalara yer verilmiştir. Bizde bu çalışmada izotropik rektifiyan eğri kavramını inceledik.

2. BÖLÜM

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$(A_1) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$(A_2) \quad \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır, [3].

Tanım 2.1.2: Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\begin{aligned} g : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve iç çarpım gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzay adını alır, [3].

Tanım 2.1.3:

$$\begin{aligned} d : E^n \times E^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir, [3].

Tanım 2.1.4: E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ -lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n -lisi $\mathbb{R}^n$ için ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir, [3].

Tanım 2.1.5 E^n de bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

dir.

Buradaki

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n -lisine de E^n in Öklid koordinat sistemi denir, [3].

Tanım 2.1.6: X boş olmayan bir cümle olsun. τ , X cümlesinin bazı alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Eğer τ ailesi

$$(T_1) \quad X, \emptyset \in \tau,$$

$$(T_2) \quad A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \text{ olduğunda } A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau,$$

$(T_3) \quad \forall i \in I$ için $A_i \in \tau$ olduğunda $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ koşullarını gerçekleştiriyorsa τ ailesine X cümlesi üzerinde bir topoloji denir, [3].

Tanım 2.1.7: Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir, [3].

Tanım 2.1.8: X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir. f bir homeomorfizm olduğu zaman X ile Y uzaylarına da topolojik olarak denktirler veya homeomorfiktirler denir, [3].

Tanım 2.1.9: M bir n -boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in açık bir alt cümlesi olsun. Eğer U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebiliyorsa

$$\psi : U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

(ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir, [3].

Tanım 2.1.10: $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir alt cümle olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^n \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

fonksiyonu verilmiş olsun. (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ e E^n uzayında bir eğri denir. t ye α eğrisinin parametresi, I ya da α eğrisinin parametre aralığı denir, [3].

Tanım 2.1.11: E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h : \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi (daha doğrusu M nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir, [3].

Tanım 2.1.12: $M \subset E^n$ eğrisi verilsin. M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki tanjant uzayı diye, $m \in M$ noktasında M nin hız vektörlerini içine alan $T_M(m) = V(m)$ vektör uzayına denir. $m \in M$ seçilmiş bir nokta olmak üzere, E^n in $T_M(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da, M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki teğet doğrusu denir, [3].

Tanım 2.1.13: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir, [3].

Tanım 2.1.14: M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir, [3].

Tanım 2.1.15: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir, [3].

Tanım 2.1.16: E^n Öklid uzayında bir M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğrinin hız vektörü olan $\alpha'(t)$ tanjant vektörü,

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Şimdi,

$$\begin{aligned} \alpha' : \quad M &\longrightarrow \bigcup_{\forall m \in M} T_M(m) \\ m = \alpha(t) &\longrightarrow \alpha'(t) \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \pi : \quad \bigcup_{\forall m \in M} T_M(m) &\longrightarrow M \\ \alpha'(t) &\longrightarrow \alpha(t) = m \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\pi \circ \alpha' = I_M : M \xrightarrow{\text{özdelslik}} M$$

olduğu aşikârdır. O halde, α' , M üzerinde bir vektör alanıdır. α' vektör alanına M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre teğet vektör alanı denir, [3].

Tanım 2.1.17: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\Psi = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için;

$$\forall \alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Herbir $V_i, 1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektörü adı verilir, [3].

Tanım 2.1.18: $n=3$ özel halinde, E^3 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 2-ayaklısı ve Frenet 3-ayaklısı elde edilir. Bu özel halde Frenet 3-ayaklısının teşkili, vektörel çarpım yardımıyla biraz basitleştirilebilir. Bu özel halde M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmişse $s \in I$ olmak üzere;

$$T = \alpha'$$

ve

$$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

diyelim. Bu durumda, $T(s) = V_1(s)$ ve $N(s) = V_2(s)$ dir. Gerçekten $s \in I$ yay parametresi olduğu için,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\| &= 1 \\ \implies g(\alpha'(s), \alpha'(s)) &= 1, \\ \implies g(\alpha'(s), \alpha''(s)) &= 0, \end{aligned}$$

$$E_1(s) = \alpha'(s) \implies V_1(s) = \frac{E_1(s)}{\|E_1(s)\|}$$

$$\begin{aligned} V_1(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \alpha'(s) \\ \implies V_1(s) &= T(s) \end{aligned}$$

olur.

$$E_2(s) = \alpha''(s) - \frac{g(\alpha''(s), E_1(s))}{g(E_1(s), E_1(s))} E_1(s)$$

$$E_2(s) = \alpha''(s) - \frac{g(\alpha''(s), \alpha'(s))}{g(\alpha'(s), \alpha'(s))} \alpha'(s) = \alpha''(s)$$

$$V_2(s) = \frac{E_2(s)}{\|E_2(s)\|} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$\implies N(s) = V_2(s)$$

dır.

$$B = T \wedge N$$

tanımlarsak kolayca $V_3(s) = B(s)$ olduğu görülür. Böylece $\{T(s), N(s), B(s)\}$ sistemi $\alpha(s)$ noktasında M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır, [3].

Tanım 2.1.19: Bir α eğrisinin her noktası için tanımladığımız T, N, B birim vektörlerinin başlangıçlarını n almak suretiyle eğri üzerinde noktadan noktaya değişen bir üçyüzlü elde edilir. Bu üç yüzölçüye Frenet üçyüzlüğü denir. (T, N, B) pozitif bir üçyüzlü olup, T, N, B vektörleri arasında

$$g(T, T) = g(N, N) = g(B, B) = 1$$

$$g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0$$

$$T = N \wedge B, N = B \wedge T, B = T \wedge N$$

bağıntıları vardır, [3].

Tanım 2.1.20: $M \subset E^n$ eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ seçilmiş bir nokta olmak üzere E^n in,

$$Sp\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}, p \leq r$$

vektör uzayı ile birleşen afin alt uzayına, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin p - yinci oskülatör hiperdüzlemi denir, [3].

Tanım 2.1.21: $n=3$ özel halinde, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet 3-ayaklısını gözönüne alalım:

$$Sp\{T(s), N(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya oskülatör düzlem,

$$Sp\{N(s), B(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya normal düzlem,

$$Sp\{T(s), B(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya rektifiyan düzlem denir.

Burada, oskülatör kelimesi yapışan veya öpen anlamında, normal dik anlamında ve rektifiyan kelimeside tamamlayan veya doğrulayan anlamındadır, [3].

Tanım 2.1.22: T teğet B binormal vektör alanı olmak üzere, Öklid 3-uzayında yer vektörü, eğrinin T teğet ve B binormal vektör alanları tarafından gerilen rektifiyan düzleminde yatan eğriye rektifiyan eğri denir.

Buna göre E^3 teki rektifiyen eğrinin seçilmiş bir orjine göre yer vektörü

$$x(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

denklemini sağlar. Burada $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, yay uzunluğu parametresi için keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlardır, [3].

Tanım 2.1.23: E^3 Öklid uzayına benzer yaklaşımla, E^4 Öklid uzayındaki rektifiyan eğri; $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B_1, B_2\}$, E^4 de $x(s)$ eğrisi boyunca Frenet çatısı olsun, x eğrisinin $x(s)$ yer vektörü, N nin dik tümleyenini olan $N^\perp = \{T, B_1, B_2\}$ de yatıyorsa, x birim hızlı eğrisine rektifiyan eğri denir.

Buradan E^4 Öklid uzayındaki x rektifiyan eğrinin seçilmiş herhangi bir orjine göre yer vektörü;

$$x(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \gamma(s)B_2(s)$$

denklemini sağlar. Burada $\lambda(s), \mu(s), \gamma(s), s \in I \subset \mathbb{R}$, yay uzunluğu parametresi için diferensiyellenebilir fonksiyonlardır, [5].

Tanım 2.1.24: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} k_i : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle, 1 \leq i < r \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $k_i(s)$ reel sayısına da M nin i-yinci eğriliği denir, [3].

Teorem 2.1.25: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere; $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ise

- 1) $V'_1(s) = k_1(s) V_2(s)$
- 2) $V'_i(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), 1 < i < r$
- 3) $V'_r(s) = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$

dir, [3].

Tanım 2.1.26: n=3 özel halinde Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu halde, birinci eğrilik olan $k_1(s)$ değerine sadece eğrilik ve ikinci eğrilik olan $k_2(s)$ değerine de burulma (torsiyon) denir. Ayrıca burada $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ olarak da gösterilebilir, [3].

Tanım 2.1.27: Teğet doğruları sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğrilere sabit eğilimli eğriler ya da genel helisler denir, [2].

Tanım 2.1.28: Eğer bir eğrinin hem eğriliği hemde burulması sıfırdan farklı sabitler ise bu eğriye bir helis adı verilir, [1].

Teorem 2.1.29: Bir eğrinin helis olması için gerek ve yeter şart burulmasının eğriliğe oranının sabit olmasıdır, [6].

İspat: Bir a birim vektörü herhangi bir l doğrultusuna yerleştirilsin. O zaman eğri bir helis ise

$$g(T, a) = \cos \alpha = \text{sabit}$$

olur. Böylece Frenet formülleri kullanılarak

$$g(a, N) = 0$$

elde edilir. Bu ise a vektörünün, eğrinin rektifiyan düzlemine paralel olduğunu gösterir ve

$$a = T \cos \alpha + B \sin \alpha$$

formunda yazılır. Her iki tarafın türevi alındığında

$$0 = \kappa N \cos \alpha - \tau N \sin \alpha \implies \frac{\tau}{\kappa} = \cot \alpha = \text{sabit}$$

olur. Buradan görülür ki sabit eğilimli eğriler için burulmanın eğriliğe oranı sabit olur.

Tersine; eğer bu şart regüler bir eğri için sağlanırsa eğrinin eksen boyunca sabit bir α açısı yaptığını biliyoruz. Öyleki

$$N(\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) = 0 \implies \frac{d}{ds}(T \cos \alpha + B \sin \alpha) = 0$$

ya da

$$T \cos \alpha + B \sin \alpha = a$$

sabit birim vektörü elde edilir. Böylece

$$\cos \alpha = g(a, T)$$

olur. O halde eğri sabit eğilimlidir.

Böylece ispat tamamlanır.

Bu teoremin bir sonucu olarak 3 boyutlu Öklid uzayında helis denklemini

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = s \cos \alpha$$

formunda alırsak bu eğri genel silindir üzerinde sabit doğrultuyla sabit açı yapan eğri olur. Burada 2.1.29 in ispatında geçen l doğrultusu z eksenidir. Bu eğri genel silindir üzerinde sabit doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak düşünülür.

$\frac{\tau}{\kappa} = 0$ olduğunda eğri düzlemsel bir eğriye, $\frac{\tau}{\kappa} = \infty$ olduğunda ise eğri bir doğruya karşılık gelir.

Tanım 2.1.30: Bir eğrinin asli normal doğruları sabit bir doğrultuyla sabit açı yapıyorsa bu eğriye slant helistir denir, [4].

Silindirik helisler bir slant helistir. Çünkü silindirik helisin asli normal doğruları sabit bir doğrultuya diktir.

Teorem 2.1.31: γ , eğriliği $\kappa(s) \neq 0$ olan birim hızlı eğri olsun. O halde γ nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır, [4].

Tanım 2.1.32: V , $\mathbb{R}$ üzerinde bir reel vektör uzayı olsun. V nin $V^{\mathbb{C}}$ kompleksleştirilmiş $X, Y \in V$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $X + iY$ ($i = \sqrt{-1}$) lerin cümlesine denir, [8].

a) $X + iY = X' + iY'$ olması için gerek ve yeter koşul $X = X'$ ve $Y = Y'$ olmasıdır.

b) $X + iY$ ve $X' + iY'$ lerin toplamı

$$(X + iY) + (X' + iY') = (X + X') + i(Y + Y'),$$

c) $a + ib \in \mathbb{C}$ ve $X + iY$ nin çarpımı

$$(a + ib)(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY)$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla $V^{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. V nin X elemanı ile $V^{\mathbb{C}}$ nin $X + i0$ elemanını tanımladığından $V \subset V^{\mathbb{C}}$ olduğu düşünülebilir.

Tanım 2.1.33: V üzerindeki g iç çarpımı sayesinde $V^{\mathbb{C}}$ üzerine tanımlı $\langle, \rangle$ iç çarpım

$$\langle X + iY, X' + iY' \rangle = \{g(X, X') - g(Y, Y')\} + i\{g(X, Y') + g(Y, X')\}$$

şeklinde verilir, [2].

3. BÖLÜM

3.1 Sanal Elemanlar

Tanım 3.1.1: k_p , ($p = 1, 2, 3$) birim vektörlü bir eksen sistemi Ox_p olsun. Bu üç eksenin aynı bir düzleme paralel bulunmadıklarını yani

$$\det(k_1, k_2, k_3) \neq 0$$

olduğunu kabul edelim.

Buna göre, koordinatlarından en az biri kompleks olan bir $n(x_p)$ noktasına sanal nokta diyeceğiz.

İki n_1, n_2 sanal noktasının aynı olmaları için gerek ve yeter şart koordinatlarının aynı olmasıdır, [7].

Tanım 3.1.2: İki sanal noktadan birisinin koordinatları ötekinin koordinatlarının eşlenikleri ise, böyle iki noktaya birbirinin eşleniğidir denir. Örneğin $n_1(1, 2i, 1 - 3i)$ ve noktaları eşlenik $n_2(1, -2i, 1 + 3i)$ iki noktadır.

İki eşlenik noktanın aynı olabilmesi için, eşitlikleri gereken koordinatların reel sayılardan oluşmaları yani noktaların sanal olmamaları gerekir, [7].

Tanım 3.1.3: Koordinatları x_p olan $n(x_p)$ sanal noktasını ve dördü birden sıfır olmayan öyle dört X_p , $p = 1, \dots, 4$, sayısını alalım ki

$$x_p = \frac{X_p}{X_4} \quad X_4 \neq 0$$

olsun. Bu X_p sayılarına, $n(x_p)$ sanal noktasının homojen koordinatları denir. Homojen koordinatları ile tanımlanan noktanın sanal olabilmesi için, $\frac{X_p}{X_4}$, $p = 1, 2, 3$ oranının en az birinin kompleks olması gerekir, [7].

Tanım 3.1.4:

$$D = \sum_{p=1}^3 A_p X_p = 0 \tag{3.1.1}$$

homojen denklemindeki katsayılardan en az biri kompleks ise ve a_p ler reel sayıları göstermek üzere, bu katsayılar arasında

$$A_p = \lambda a_p, \quad p = 1, 2, 3$$

şeklinde bağıntı mevcut değil ise (3.1.1) homojen denklemi reel düzlemde bir sanal doğruyu gösterir.

Bu denklemde X_p koordinatları kompleks ya da reel değerler alabilir, [7].

Tanım 3.1.5: Reel düzlem üzerinde, $A_p, \bar{A}_p, (p = 1, 2, 3)$, kompleks sayıları birbirinin eşleniği ise

$$D \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\bar{D} \equiv \bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + \bar{A}_3 = 0$$

doğruları da birbirinin eşleniğidir, [7].

Tanım 3.1.6: $A_p, p = 1, 2, 3, 4$ sayılarından en az biri kompleks ise ve a_p ler reel sayıları göstermek üzere, bu sayılar arasında

$$A_p = \lambda a_p, \quad p = 1, 2, 3, 4$$

bağıntısı mevcut değil ise

$$\Delta = \sum_{p=1}^4 A_p X_p = 0$$

homojen denklemi reel uzayda sanal düzlemi gösterir.

Bu denklemde X_p koordinatları kompleks ya da reel değerler alabilir, [7].

Tanım 3.1.7: $A_p, \bar{A}_p, (p = 1, 2, 3, 4)$, kompleks sayıları birbirinin eşleniği ise

$$\Delta \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\bar{\Delta} \equiv \bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + \bar{A}_3x_3 + \bar{A}_4 = 0$$

düzlemleri birbirinin eşleniğidir, [7].

Tanım 3.1.8: Reel düzlemde Ox_1 ile Ox_2 eksenleri arasındaki açı θ olsun. Reel ya da sanal bir $A(a_1, a_2)$ noktasından geçen bir sanal doğrunun denklemi

$$(x_2 - a_2) = m(x_1 - a_1)$$

olduğuna göre, eğer m eğimi

$$m^2 + 2m \cos \theta + 1 = 0$$

denkleminin köklerinden biri ise bu köklerle belirli olan doğrulardan herhangi birine (a_1, a_2) noktasından geçen izotropik doğru denir, [7].

Tanım 3.1.9: Homojen koordinatlar yardımıyla yazılan

$$X_1 + \varepsilon i X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad \varepsilon = \mp 1$$

doğrularının ortak noktalarına siklik nokta denir. Bu noktaların homojen koordinatları $I(1, i, 0)$ ve $J(1, -i, 0)$ dır. I ve J noktalarına düzlemin siklik noktaları denir, [7].

Tanım 3.1.10: Dik koordinatlara karşılık gelen reel uzayda, O başlangıç noktasından uzaklıklarının karesi sıfır olan sanal noktaların geometrik yeri

$$\sum_{p=1}^3 x_p^2 = 0$$

dir.

Bu denklem ikinci dereceden bir koni denklemini gösterdiğinden O noktası reel uzayda dik koordinat sisteminin başlangıç noktası olduğuna göre, O dan uzaklıklarının karesi sıfır olan sanal noktaların geometrik yeri, izotropik koni denilen tepe noktası O başlangıç noktası olan

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

ikinci derece konisidir, [7].

Tanım 3.1.11 O başlangıç noktasından geçen herhangi bir reel düzlemle izotropik koniyi kestüğümüzde, kesit olarak izotropik koninin iki anadoğrusunu elde ederiz. Bu doğrular üzerindeki sanal noktaların O noktasından uzaklıklarının karesi sıfıra eşit olduğundan, bu iki anadoğru sözü edilen reel düzlemin O noktasından geçen izotropik doğrularıdır, [7].

Tanım 3.1.12: A tepeli izotropik koninin homojen koordinatlara bağlı denklemi

$$(X_1 - a_1 X_4)^2 + (X_2 - a_2 X_4)^2 + (X_3 - a_3 X_4)^2 = 0$$

şeklinde tanımlıdır. Bunun sonsuzdaki düzlemle arakesiti reel ya da sanal tepeli tüm izotropik konilerde ortak olan

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0, \quad X_4 = 0$$

ikinci derece eğrisidir.

Reel uzayda, bir dik koordinat sistemine göre, bir a_p , $p = 1, 2, 3$, doğrultusunun bir izotropik doğrultu olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{p=1}^3 a_p^2 = 0$$

olmasıdır, [7].

Tanım 3.1.13: Bir reel dik üçyüzlüğünün eksenlerinin birim vektörleri k_p , $p = 1, 2, 3$ olsun. Kompleks e_p vektörlerinden oluşan Cartan siklik üçyüzlüğü

$$e_1 = \frac{(k_1 - ik_3)}{\sqrt{2}} \quad , \quad e_2 = k_2 \quad , \quad e_3 = \frac{(k_1 + ik_3)}{\sqrt{2}}$$

biçiminde tanımlanır, [7].

Tanımdan

$$\begin{aligned} \|e_1\|^2 &= \langle e_1, e_1 \rangle = 0 & \langle e_1, e_2 \rangle &= 0 \\ \|e_2\|^2 &= \langle e_2, e_2 \rangle = 1 & \langle e_2, e_3 \rangle &= 0 \\ \|e_3\|^2 &= \langle e_3, e_3 \rangle = 0 & \langle e_1, e_3 \rangle &= 1 \end{aligned}$$

ya da kısaca

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i + j \neq 4 \\ 1 & i + j = 4 \end{cases}$$

dir. Görülüyor ki e_1 ve e_3 iki izotropik vektör, e_2 ise reel vektördür. Ayrıca

$$e_1 \wedge e_2 = ie_1, \quad e_2 \wedge e_3 = ie_3, \quad e_3 \wedge e_1 = ie_2$$

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \det(e_2, e_3, e_1) = \det(e_3, e_1, e_2) = i$$

$$e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3) = e_2, \quad e_2 \wedge (e_3 \wedge e_1) = 0, \quad e_3 \wedge (e_1 \wedge e_2) = -e_2$$

dir.

3.2 Sanal Eğriler

Tanım 3.2.1: x_p kompleks bir t değişkenine bağlı kompleks bir analitik fonksiyon olsun

$$x(t) = \sum_{p=1}^3 x_p(t) k_p$$

vektörel fonksiyonuna da sanal (imajiner) eğri denir. Burada $x : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$ bir fonksiyon, $t = t_1 + it_2$ kompleks değişken, k_p ' ler de E^3 ün standart birim baz vektörleridir, [7].

Tanım 3.2.2: Herhangi iki noktası arasındaki uzaklığın karesi sıfıra eşit olan bir eğriye izotropik ya da minimal eğri denir. Dolayısıyla

$$ds^2 = 0$$

olur, [7].

Tanım 3.2.3 (Reel Düzlemde İzotropik Eğriler): Dik koordinat sistemini öyle bir seçelim ki verilen reel düzlem $x_3 = 0$ düzlemi yani x_1x_2 düzlemi olsun. O halde bu düzlem üzerindeki izotropik eğriler

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = 0$$

diferensiyel denklemlerini sağlayan

$$x_3 = 0, \quad dx_2 = \varepsilon i dx_1, \quad \varepsilon = \mp 1$$

ya da c reel veya kompleks bir sabit olmak üzere

$$x_3 = 0, \quad x_2 = \varepsilon i x_1 + c$$

izotropik doğrularıdır, [7].

Tanım 3.2.4 (Sanal Düzlemde İzotropik Eğriler): Ox_3 eksenini reel olmak üzere, sanal düzlemin denklemi

$$x_2 = mx_1, \quad m = m_1 + im_2, \quad m_2 \neq 0 \quad (3.2.1)$$

şeklindedir. Böyle bir düzlem üzerinde izotropik eğrilerin bulunması için, (3.2.1) eşitliğinden

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = (1 + m^2) dx_1^2 + dx_3^2 = 0$$

ya da

$$ds^2 = (1 + m_1^2 - m_2^2) dx_1^2 + dx_3^2 + 2m_1m_2i dx_1^2 = 0$$

bağıntısı

$$m_1 = 0, \quad (1 - m_2^2) dx_1^2 + dx_3^2 = 0$$

veya

$$m_2 = \mp 1, \quad dx_3^2 = 0 \text{ yani } x_3 = c = \text{sabit}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde (3.2.1) düzlemi, O tepeli izotropik koniye teğet olan

$$x_2 = \varepsilon i x_1$$

izotropik düzlemlerinden biridir, [7].

Tanım 3.2.5 (Uzayda İzotropik Eğriler): Bir x izotropik eğrisinin $x(t)$ düzgün noktalarındaki teğetleri izotropik doğrulardır. Gerçekten, tanım 3.2.4 den

$$ds^2 = dx^2 = 0$$

veya düzgün noktada $\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \neq 0$ olduğundan

$$\|\dot{x}(t)\|^2 = 0 \quad (3.2.2)$$

elde edilir, [7].

O halde, uzayda izotropik eğriler aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir:

Tanım 3.2.6: Uzayda tüm düzgün noktalardaki teğetleri izotropik doğrulardan oluşan eğrilere, izotropik eğri denir.

(3.2.2) den t ye göre türev alırsak,

$$\langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle = 0 \quad (3.2.3)$$

bulunur.

x izotropik eğrisinin $x(t)$ düzgün noktasındaki oskülatör düzlem; hem $\dot{x}(t)$ hem de $\ddot{x}(t)$ vektörlerine paralel olduğundan ve (3.2.3) den $\ddot{x}(t)$ vektörü $\dot{x}(t)$ ye diktir, dolayısıyla $x(t)$ noktasındaki asli normale paraleldir. Ayrıca

$$\|\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)\|^2 = \|\dot{x}(t)\|^2 \|\ddot{x}(t)\|^2 - \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle^2$$

olduğundan (3.2.2) ve (3.2.3) eşitlikleriyle

$$\|\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)\|^2 = 0 \quad (3.2.4)$$

olur. Görülüyor ki $\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)$ binormalı bir izotropik doğrudur ve kendi kendisine diktir, öyleyse oskülatör düzlem üzerindedir. Başka ifade ile, kendi normalinden geçen oskülatör düzlem bir izotropik düzlemdir, [7].

Tanım 3.2.7 (İzotropik Eğrilerde Bazı Diferensiyel Değişmezler ve Pseudo yay): x izotropik eğrisinin sağladığı (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) eşitliklerinden

$$\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t) = \lambda \dot{x}(t), \quad \lambda \neq 0 \quad (3.2.5)$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanını vektörel olarak $\ddot{x}(t)$ ile çarpar ve (3.2.3) ve (3.2.5) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)) \wedge \ddot{x}(t) &= \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle \ddot{x}(t) - \langle \ddot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle \dot{x}(t) \\ &= -\|\ddot{x}(t)\|^2 \dot{x}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t) &= \lambda (\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)) \\ &= \lambda (\lambda \dot{x}(t)) \\ &= \lambda^2 \dot{x}(t) \end{aligned}$$

$$\implies \|\ddot{x}(t)\|^2 \dot{x}(t) = -\lambda^2 \dot{x}(t)$$

veya

$$\lambda^2 = -\|\ddot{x}(t)\|^2$$

ve

$$\dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)}{\sqrt{-\|\ddot{x}(t)\|^2}} \quad (3.2.6)$$

elde edilir t yi yazmadan

$$dx = \frac{\dot{x} \wedge \ddot{x}}{\sqrt{-\|\ddot{x}\|^2}} dt \quad (3.2.7)$$

biçimde de yazılabilir, [7].

Önerme 3.2.1: $dx = \frac{\dot{x} \wedge \ddot{x}}{\sqrt{-\|\ddot{x}\|^2}} dt$ eşitliği diferensiyel invarianttır.

İspat: t kompleks değişkeni başka bir t^* kompleks değişkeninin

$$t = f(t^*), \quad \frac{df}{dt^*} = f' \neq 0 \quad (3.2.8)$$

biçiminde bir analitik fonksiyonu olsun. Buna göre, x izotropik eğrisinin t ve t^* cinsinden türevleri arasında

$$x' = \dot{x} f' \quad (3.2.9)$$

$$x'' = \ddot{x} f'^2 + \dot{x} f'' \quad (3.2.10)$$

bağıntıları mevcut olacağından (3.2.2) ve (3.2.3) formülleri nedeniyle, yeni t^* kompleks değişkenine göre

$$\|x'\|^2 = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\langle x', x'' \rangle = 0 \quad (3.2.12)$$

$$\|x' \wedge x''\|^2 = 0 \quad (3.2.13)$$

$$\|x''\|^2 = \|\ddot{x}\|^2 f'^4 \quad (3.2.14)$$

bulunur.

Görülüyor ki, ilk t kompleks değişkeninin yerine, yeni t^* kompleks değişkeninin alınması (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) bağıntılarını değiştirmemektedir. Ayrıca (3.2.9), (3.2.10), ve (3.2.14) bağıntılarından

$$dx = \frac{\dot{x} \wedge \ddot{x}}{\sqrt{-\|\ddot{x}\|^2}} dt = \frac{x' \wedge x''}{\sqrt{-\|x''\|^2}} dt^* \quad (3.2.15)$$

sonucu elde edilir.

Öte yandan (3.2.14) eşitliğini

$$\left(-\|x''\|^2\right)^{\frac{1}{4}} dt^* = \left(-\|\ddot{x}\|^2\right)^{\frac{1}{4}} dt \quad (3.2.16)$$

biçiminde yazarsak, bunun diferensiyel invariant olduğu görülür. Burada

$$\|x''\|^2 = -1 \quad (3.2.17)$$

kabul edilirse (3.2.16) ve (3.2.17) den

$$dt^* = \left(-\|\ddot{x}\|^2\right)^{\frac{1}{4}} dt$$

veya $t^* = s$ dersek

$$s = t^* = \int_{t_0}^t \left(-\|\ddot{x}\|^2\right)^{\frac{1}{4}} dt$$

bulunur. Bu şekilde tanımlanan $s = t^*$ parametresine x izotropik eğrisinin pseudo yayı veya doğal parametresi denir, [5].

Bundan sonra, izotropik eğrileri incelerken, kompleks değişken olarak pseudo-yayı kullanacağız.

Ayrıca x eğrisinin çeşitli mertebeden türevleri arasındaki ilişkileri incelersek, (3.2.15) ve (3.2.17) eşitliklerinden

$$x' = x' \wedge x'' \quad (3.2.18)$$

eşitliği, (3.2.12) ve (3.2.17) eşitliklerinden

$$\langle x', x''' \rangle = 1 \quad (3.2.19)$$

eşitliği, (3.2.17) eşitliğinden

$$\langle x'', x''' \rangle = 0 \quad (3.2.20)$$

eşitliği, (3.2.19) ve (3.2.20) eşitliklerinden

$$\langle x', x'''' \rangle = 0 \quad (3.2.21)$$

eşitliği, (3.2.18) ve (3.2.19) eşitliklerinden

$$\det(x', x'', x''') = 1 \quad (3.2.22)$$

eşitliği, (3.2.18) ve (3.2.21) eşitliklerinden

$$\det(x', x'', x''') = 0 \quad (3.2.23)$$

eşitliği, (3.2.20) eşitliğinden

$$\langle x'', x'''' \rangle + \|x'''\|^2 = 0 \quad (3.2.24)$$

$$\langle x''', x'''' \rangle - \frac{1}{2} \left(\|x'''\|^2 \right)' = 0 \quad (3.2.25)$$

eşitlikleri, (3.2.18) eşitliğinden

$$x'' = x' \wedge x''' \quad (3.2.26)$$

eşitliği elde edilir. (3.2.26) eşitliğinin vektörel olarak x''' ile çarpımı ve türevinden

$$x'' \wedge x''' = x''' - \|x'''\|^2 x' \quad (3.2.27)$$

$$x'' \wedge x''' = x''' - x' \wedge x''' \quad (3.2.28)$$

$$\|x'''\|^2 x' = x' \wedge x''' \quad (3.2.29)$$

eşitliği elde edilir. x' ve x'' vektörleri x izotropik eğrisinin izotropik oskülatör düzlemini belirttiklerine göre (3.2.23) bağıntısı gösterir ki x''' vektöründe bu düzleme paraleldir. O halde bu vektör

$$x''' = \alpha x' + \beta x'' \quad (3.2.30)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanını skaler olarak x'' ile çarptığımızda (3.2.24), (3.2.29) formülleri ile

$$\langle x''', x'' \rangle = \langle \alpha x', x'' \rangle + \langle \beta x'', x'' \rangle$$

$$\begin{aligned} \implies -\|x'''\|^2 &= -\beta \\ \implies \beta &= \|x'''\|^2 \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

elde edilir. Aynı eşitliğin her iki yanını bir kez de x''' ile skaler olarak çarptığımızda (3.2.19), (3.2.20), ve (3.2.31) eşitlikleriyle

$$\langle x''', x''' \rangle = \langle \alpha x', x''' \rangle + \langle \beta x'', x''' \rangle$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \beta' \quad (3.2.32)$$

bulunur. Öyleyse, (3.2.30) eşitliği

$$x''' = \frac{1}{2} \beta' x' + \beta x'', \beta = \|x'''\|^2 \quad (3.2.33)$$

şeklindedir, [7].

Tanım 3.2.8 (E. Cartan Siklik Üçyüzlüsü): x izotropik eğrisinin her $x(s)$ noktasına

$$\begin{aligned} e_1 &= x' \\ e_2 &= ix'' & \beta &= \|x'''\|^2 \\ e_3 &= -\frac{\beta}{2}x' + x''' \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

bağıntılarıyla tanımlanan e_q , ($q = 1, 2, 3$) vektörlerinin oluşturduğu T_c üçyüzlüsünü bağlayalım. e_q vektörleri

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= \begin{cases} 0, & i+j \neq 4 \\ 1, & i+j = 4 \end{cases} \\ e_i \wedge e_j &= ie_{i+j-2} \\ \det(e_1, e_2, e_3) &= i \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

şeklindeki bağıntıları sağlar, [7].

Uyarı

e_1 izotropik vektörü, x izotropik eğrisinin $x(s)$ noktasındaki teğetini belirler. Bu vektöre dik olan ve $x(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem üzerinde bulunan e_2 vektörü, x'' ya paralel olduğundan asli normali temsil eder. x izotropik eğrisinin $x(s)$ noktasındaki binormali, hem oskülatör düzlem üzerinde bulunan hem de bu düzleme dik olan e_1 izotropik vektörüdür. e_2 vektörüne dik olan e_3 izotropik vektörü de e_1 ile birlikte x izotropik eğrisinin $x(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlemini tanımlar, [7].

Tanım 3.2.8 (Türev Formülleri): (3.2.33) ve (3.2.34) eşitliklerinden, s pseudo yayına göre hesaplanan, türev formülleri

$$\begin{aligned} e_1' &= -ie_2, \\ e_2' &= i\kappa e_1 + ie_3, \\ e_3' &= -i\kappa e_2, \quad \kappa = \frac{1}{2}\beta \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

şeklindedir, [7].

4. BÖLÜM

4.1 $\mathbb{C}^4$ Kompleks Uzayında İzotropik Eğriler

Tanım 4.1.1: x_p kompleks bir t değişkenine bağlı kompleks bir analitik fonksiyon olmak üzere

$$x(t) = \sum_{p=1}^4 x_p(t) k_p$$

vektörel fonksiyonuna sanal (imajiner) eğri denir.

Burada $x : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^4$ bir fonksiyon, $t = t_1 + it_2$ kompleks değişken, k_p ' ler de E^4 ün standart birim baz vektörleridir, [9].

Tanım 4.1.2: $\mathbb{C}^4$ uzayında herhangi iki noktası arasındaki uzaklığın karesi 0' a eşit olan eğriye minimal ya da izotropik eğri denir.

ζ keyfi bir izotropik vektör olması için gerek ve yeter şart $\zeta \neq 0$ için $\zeta^2 = 0$ olmasıdır.

s pseudo yay parametresini göstermek üzere bir eğrinin izotropik eğri olması için gerek ve yeter şart $ds^2 = dx^2 = 0$ olmasıdır, [9].

Tanım 4.1.3: $\mathbb{C}^4$ uzayında izotropik bir x eğrisinin E.Cartan çatısı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ile gösterilir. Bu çatı $\mu[e_1, e_2, e_3, e_4]$ matrisinin determinantını +1 yapacak şekilde ∓ 1 değerini almak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} e_1 &= x' \\ e_2 &= ix'' \\ e_3 &= -\frac{\beta}{2}x' + x''', \quad \beta = \|x'''\|^2 \\ e_4 &= \mu(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Bu şekilde E.Cartan çatısı pozitif yönlü olur. Burada $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ üçlü vektörel çarpım klasik vektörel çarpımdır, [9].

Tanım 4.1.4: E.Cartan çatı vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle e_i, e_j \rangle = e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & , i+j = 1, 2, 3(\text{mod } 4) \text{ ise} \\ 1 & , i+j = 4 \text{ ise} \\ -1 & , i+j = 8 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

e_1 ve e_3 izotropik vektör olduklarından, e_2 reel ve e_4 kompleks bir vektördür. E. Cartan türev formülleri (4.1.1) den

$$\begin{aligned} e'_1 &= -ie_2 \\ e'_2 &= i\kappa e_1 + ie_3 \\ e'_3 &= -i\kappa e_2 \\ e'_4 &= -K(\kappa'' + K\kappa)e_1 - K\kappa e_3 + \frac{K'}{K}e_4 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

şeklinde elde edilir.

Burada $\kappa = \frac{1}{2}\beta$, pseudo eğriliğidir. $\gamma = \|x^{uv}\|^2$ olmak üzere $K = \mp \frac{i}{\sqrt{\beta^2 + \gamma}}$ dır.

Burada $(')$ s pseudo yay parametresine göre türevi ifade eder. Aksi belirtilmedikçe κ pseudo eğriliğinin her yerde sıfırdan farklı olduğunu kabul edeceğiz, [9].

Tanım 4.1.5: $\mathbb{C}^4$ de m merkezli $r>0$ yarıçaplı izotropik hiperküre

$$S^3 = \{p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in C^4 / (p - m)^2 = 0\}$$

şeklinde tanımlıdır, [9].

4.2 $\mathbb{C}^4$ Uzayındaki İzotropik Helislerin ve Küresel İzotropik Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları

Tanım 4.2.1: m ve $r > 0$ verilsin $f(s) = \|\alpha - m\|^2$ dir. Eğer $f(s_0) = r^2$, $f'(s_0) = f''(s_0) = \dots = f^{(j)}(s_0) = 0$ ise α eğrisinin r yarıçaplı m merkezli küreye j . mertebeden değdiğini söyleyebiliriz. Daha büyük mertebeden j ler için $f(s)$ kapalı fonksiyonu sabittir. Böylece kapalı α eğrisi m merkezli ve r yarıçaplı kürede yatar, [9].

Teorem 4.2.2: Görüntüsü $\mathbb{C}^4$ uzayındaki izotropik hiperkürede yatan hiçbir izotropik eğri yoktur, [9].

İspat: m merkezli küre üzerinde yatan izotropik eğri x olsun. Keyfi $\mu_i(s)$ fonksiyonları için $x(s) - m = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4$, $1 \leq i \leq 4$, eşitliği yazılabilir. (4.1.1) den

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \|x(s) - m\|^2 = \langle \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 \rangle = 0 \\
 &= \langle \mu_1 e_1, \mu_1 e_1 \rangle + \langle \mu_1 e_1, \mu_2 e_2 \rangle + \langle \mu_1 e_1, \mu_3 e_3 \rangle + \langle \mu_1 e_1, \mu_4 e_4 \rangle \\
 &\quad + \langle \mu_2 e_2, \mu_1 e_1 \rangle + \langle \mu_2 e_2, \mu_2 e_2 \rangle + \langle \mu_2 e_2, \mu_3 e_3 \rangle + \langle \mu_2 e_2, \mu_4 e_4 \rangle \\
 &\quad + \langle \mu_3 e_3, \mu_1 e_1 \rangle + \langle \mu_3 e_3, \mu_2 e_2 \rangle + \langle \mu_3 e_3, \mu_3 e_3 \rangle + \langle \mu_3 e_3, \mu_4 e_4 \rangle \\
 &\quad + \langle \mu_4 e_4, \mu_1 e_1 \rangle + \langle \mu_4 e_4, \mu_2 e_2 \rangle + \langle \mu_4 e_4, \mu_3 e_3 \rangle + \langle \mu_4 e_4, \mu_4 e_4 \rangle \\
 &= \mu_1 \mu_3 + \mu_2^2 + \mu_3 \mu_1 - \mu_4^2 = 0 \\
 &\implies f(s) = \|x(s) - m\|^2 = \mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_3 - \mu_4^2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

yazılabilir. Bu eğri 5. dereceden değme şartını sağlamalıdır. (4.2.1) denkleminin türevi sırasıyla aşağıdaki eşitlikleri verir;

$$\begin{aligned}
 f' &= \mu_3 = 0 \\
 f'' &= -i\mu_2 = 0 \\
 f''' &= -\mu_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Gerçekten;

$$f(s) = \|x(s) - m\|^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2 \langle x(s) - m, x'(s) \rangle = 0 \\ &= 2 \langle \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4, e_1 \rangle = 0 \\ &= 2\mu_3 \langle e_1, e_3 \rangle = 0 \implies \mu_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(s) &= 2 \langle x'(s), x'(s) \rangle + 2 \langle x(s) - m, x''(s) \rangle = 0 \\ &= 2 \langle \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_4 e_4, -ie_2 \rangle = 0 \\ &= -2i\mu_2 = 0 \implies \mu_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(s) &= 2 \langle x'(s), x''(s) \rangle + 2 \langle x(s) - m, x'''(s) \rangle = 0 \\ &= 2 \langle e_1, -ie_2 \rangle + 2 \langle \mu_1 e_1 + \mu_4 e_4, e_3 + \kappa e_1 \rangle = 0 \\ &= \mu_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(v)}(s) &= \langle x(s) - m, x'''(s) \rangle' = 0 \\ &= \langle e_1, e_3 + \kappa e_1 \rangle + \langle \mu_4 e_4, e_3' + \kappa' e_1 + \kappa e_1' \rangle = 0 \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

$f^{(v)} = 1$ olması her yerde sıfırdan farklı olduğunu gösterir. Böylece x izotropik eğrisi 4. dereceden değme şartını sağlamaz.

Klasik diferensiyel geometride keyfi bir eğrinin teğet vektörünün sabit bir u vektörüyle yaptığı açı sabit ise, bu eğriye eğilim çizgisi ya da genel helis adı verilir, [1]. $\mathbb{C}^4$ uzayındaki keyfi iki vektör arasındaki açının tanımı mevcut değildir. Bu sebeple açı kavramı olmadan $\mathbb{C}^4$ uzayında pseudo helis tanımını aşağıdaki şekilde vereceğiz:

Tanım4.2.3: Keyfi izotropik x eğrisi u sabit ve sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere .

$$\langle e_1, u \rangle = \text{sabit} \tag{4.2.3}$$

eşitliğini sağlarsa izotropik helis ya da pseudo helis adını alır, [9]

Teorem 4.2.4: $\mathbb{C}^4$ uzayında bir izotropik eğri x olsun.

$$x \text{ eğrisi pseudo helistir} \iff \kappa \text{ sabittir} \quad (4.2.4)$$

İspat: Pseudo helis tanımından $\langle e_1, u \rangle = \text{sabit}$ yazabiliriz. (4.2.3) eşitliğinin türevi bize

$$\begin{aligned} \langle e_1, u \rangle' &= \langle e_1', u \rangle + \langle e_1, u' \rangle = 0 \\ &= \langle -ie_2, u \rangle = 0 \end{aligned}$$

eşitliğini verir. Böylece u vektörünü aşağıdaki bağıntıyla verebiliriz

$$\overrightarrow{u} = \lambda e_1 + \gamma e_3 + \delta e_4 \quad (4.2.5)$$

İzotropik helis tanımını göz önüne aldığımızda (4.2.5) eşitliğinin her iki yanını e_1 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned} \langle u, e_1 \rangle &= \langle \lambda e_1 + \gamma e_3 + \delta e_4, e_1 \rangle \\ &= \lambda \langle e_1, e_1 \rangle + \gamma \langle e_3, e_1 \rangle + \delta \langle e_4, e_1 \rangle \\ &= \gamma = \text{sabit} \end{aligned}$$

olur. (4.2.5) eşitliğinin türevini alıp ve E.Cartan türev formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned} u' &= \lambda' e_1 + \lambda e_1' + \gamma' e_3 + \gamma e_3' + \delta' e_4 + \delta e_4' \\ \implies 0 &= \lambda' e_1 + \lambda e_1' + \gamma' e_3 + \gamma e_3' + \delta' e_4 + \delta e_4' \\ \implies 0 &= \lambda' e_1 + \lambda (-ie_2) + \gamma' e_3 + \gamma (-i\kappa e_2) + \delta' e_4 \\ &\quad + \delta \left(-K(\kappa'' + K\kappa) e_1 - K\kappa e_3 + \frac{K'}{K} e_4 \right) \\ \implies 0 &= (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1 + (-i\lambda - i\gamma \kappa) e_2 + (\gamma' - K\kappa \delta) e_3 \\ &\quad + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

elde ederiz. (4.2.6) eşitliğini e_1 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1 + (-i\lambda - i\gamma \kappa) e_2 + (\gamma' - K \kappa \delta) e_3 + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_1 \rangle$$

$$0 = \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \langle (-i\lambda - i\gamma \kappa) \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle + \langle (\gamma' - K \kappa \delta) \vec{e}_3, \vec{e}_1 \rangle + \langle \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) \vec{e}_4, \vec{e}_1 \rangle$$

$$0 = (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) \langle e_1, e_1 \rangle + (-i\lambda - i\gamma \kappa) \langle e_2, e_1 \rangle + (\gamma' - K \kappa \delta) \langle e_3, e_1 \rangle + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_1 \rangle$$

olur. Burada $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = \langle e_4, e_1 \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_1 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\gamma' - K \kappa \delta = 0$$

bulunur.

Şimdi (4.2.6) eşitliğini e_2 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1 + (-i\lambda - i\gamma \kappa) e_2 + (\gamma' - K \kappa \delta) e_3 + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_2 \rangle$$

$$0 = \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1, e_2 \rangle + \langle (-i\lambda - i\gamma \kappa) e_2, e_2 \rangle + \langle (\gamma' - K \kappa \delta) e_3, e_2 \rangle + \langle \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_2 \rangle$$

$$0 = (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) \langle e_1, e_2 \rangle + (-i\lambda - i\gamma \kappa) \langle e_2, e_2 \rangle + (\gamma' - K \kappa \delta) \langle e_3, e_2 \rangle + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_2 \rangle$$

olur. Burada $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = \langle e_4, e_2 \rangle = 0$ ve $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olduğundan

$$i\lambda + i\gamma\kappa = 0$$

bulunur.

Yine (4.2.6) eşitliğini e_3 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1 + (-i\lambda - i\gamma\kappa) \vec{e}_2 + (\gamma' - K\kappa\delta) e_3 \\ &\quad + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1, e_3 \rangle + \langle (-i\lambda - i\gamma\kappa) e_2, e_3 \rangle \\ &\quad + \langle (\gamma' - K\kappa\delta) e_3, e_3 \rangle + \langle \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) \langle e_1, e_3 \rangle + (-i\lambda - i\gamma\kappa) \langle e_2, e_3 \rangle \\ &\quad + (\gamma' - K\kappa\delta) \langle e_3, e_3 \rangle + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_3 \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_3 \rangle = 1$, $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = \langle e_4, e_3 \rangle = 0$ olduğundan

$$\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa = 0$$

elde edilir.

Son olarak (4.2.6) eşitliğini e_4 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1 + (-i\lambda - i\gamma\kappa) e_2 + (\gamma' - K\kappa\delta) e_3 \\ &\quad + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_4 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) e_1, e_4 \rangle + \langle (-i\lambda - i\gamma\kappa) e_2, e_4 \rangle \\ &\quad + \langle (\gamma' - K\kappa\delta) e_3, e_4 \rangle + \langle \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_4 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa) \langle e_1, e_4 \rangle + (-i\lambda - i\gamma\kappa) \langle e_2, e_4 \rangle \\ &\quad + (\gamma' - K\kappa\delta) \langle e_3, e_4 \rangle + \left(\delta' + \delta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_4 \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_2, \vec{e}_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ ve $\langle e_4, e_4 \rangle = -1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\delta' + \delta \frac{K'}{K} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda' - \delta K \kappa'' - \delta K^2 \kappa = 0 \\ i\lambda + i\gamma \kappa = 0 \\ K \kappa \delta = 0 \\ \delta' + \delta \frac{K'}{K} = 0 \end{cases} \quad (4.2.7)$$

denklem sistemi elde edilir. $K \neq 0$ ve $\kappa \neq 0$ olduğunu biliyoruz. (4.2.7) denklem sisteminin 3. eşitliğinden $\delta = 0$ elde edilir. Ayrıca diğer denklemler aşağıdaki eşitlikleri sağlar

$$\begin{cases} \lambda = c = \text{sabit} \neq 0 \\ \gamma = -\frac{c}{\kappa} = \text{sabit} \\ \kappa = \text{sabit} \end{cases} \quad (4.2.8)$$

(4.2.8) denklem sisteminin son eşitliği bize istenilen sonucu verir.

Tersine

$$u = \left\{ e_1 - \frac{1}{\kappa} e_3 \right\} c \quad (4.2.9)$$

ile verilen vektörü düşünelim. Burada c sabit ve sıfırdan farklıdır ve daha sonra $\langle e_1, u \rangle = -\frac{c}{\kappa} = \text{sabit}$ ile verilen eğriyi düşünelim. Bu da bize x in $\mathbb{C}^4$ de pseudo helis olduğunu verir.

Sonuç 4.2.5: Pseudo helis tanımındaki sabit doğrultu (4.2.9) şeklinde alınabilir, [9].

Burada pseudo helisi 0.tip izotropik slant helis olarak kabul edebiliriz.

Tanım 4.2.6: Keyfi izotropik x eğrisi u sabit ve sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere

$$\langle e_2, u \rangle = \text{sabit} \quad (4.2.10)$$

eşitliğini sağlarsa 1.tip izotropik slant helis adını alır, [9].

Çalışmamızın devamında değişken katsayılı uzun kompleks diferensiyel denklemlerden dolayı keyfi 1. ve 2.tip izotropik slant helisler için açık karakterizasyonlar bulamadık. Bu nedenle özel durumları ele alacağız.

Tanım 4.2.7: $\mathbb{C}^4$ uzayındaki x izotropik eğrisinin pseudo eğriliği 0 ise bu eğri izotropik kübik adını alır, [9].

Teorem 4.2.8: $\mathbb{C}^4$ uzayında izotropik kübik x olsun. x 1.tip izotropik slant helis ise eğrinin ekseni $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere $u = \frac{c}{K}e_4$ olarak yazılabilir, [9].

İspat: Tanım (4.2.6) dan $\langle e_2, u \rangle = \text{sabit}$ yazabiliriz. (4.2.10) eşitliğinin s 'e göre türevi alınır

$$\begin{aligned}\langle e_2, u \rangle' &= \langle e_2', u \rangle + \langle e_2, u' \rangle = 0 \\ &= \langle e_2', u \rangle = 0 \\ &= \langle (i\kappa e_1 + ie_3), u \rangle = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece u vektörünü

$$u = \pi e_2 + we_4 \quad (4.2.11)$$

şeklinde verebiliriz. 1.tip izotropik slant helis tanımından $\langle e_2, u \rangle = \pi = \text{sabit}$ olduğunu biliyoruz. (4.2.11) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned}0 &= \pi' e_2 + \pi e_2' + w' e_4 + we_4' \\ \implies 0 &= \pi' e_2 + \pi (i\kappa e_1 + ie_3) + w' e_4 \\ &\quad + w \left(-K(\kappa'' + K\kappa)e_1 - K\kappa e_3 + \frac{K'}{K}e_4 \right) \\ \implies 0 &= (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) e_1 + (i\pi - wK\kappa) e_3 \\ &\quad + \left(w' + w\frac{K'}{K} \right) e_4\end{aligned} \quad (4.2.12)$$

olur. (4.2.12) eşitliğini e_1 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) \vec{e}_1 + (i\pi - wK\kappa) e_3 + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) e_4, e_1 \rangle$$

$$\begin{aligned} 0 &= (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) \langle e_1, e_1 \rangle + (i\pi - wK\kappa) \langle e_3, e_1 \rangle \\ &\quad + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) \langle e_4, e_1 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_4, e_1 \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_1 \rangle = 1$ olduğundan

$$i\pi - wK\kappa = 0$$

elde edilir.

Şimdi (4.2.12) eşitliğini e_2 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) e_1 + (i\pi - wK\kappa) e_3 + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) e_4, e_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} 0 &= (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) \langle e_1, e_2 \rangle + (i\pi - wK\kappa) \langle e_3, e_2 \rangle \\ &\quad + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) \langle e_4, e_2 \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = \langle e_4, e_2 \rangle = 0$ dir.

Yine (4.2.12) eşitliğini e_3 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) e_1 + (i\pi - wK\kappa) e_3 + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) e_4, e_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} 0 &= (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) \langle e_1, e_3 \rangle + (i\pi - wK\kappa) \langle e_3, e_3 \rangle \\ &\quad + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) \langle e_4, e_3 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\langle e_3, e_3 \rangle = \langle e_4, e_3 \rangle = 0$ ve $\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ olduğundan

$$i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa = 0$$

bulunur.

Son olarak (4.2.12) eşitliğini e_4 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) e_1 + (i\pi - wK\kappa) e_3 + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) e_4, e_4 \rangle$$

$$\begin{aligned} 0 &= (i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa) \langle e_1, e_4 \rangle + (i\pi - wK\kappa) \langle e_3, e_4 \rangle \\ &\quad + \left(w' + w\frac{K'}{K}\right) \langle e_4, e_4 \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ ve $\langle e_4, e_4 \rangle = -1$ olduğundan

$$w' + w\frac{K'}{K} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} i\pi\kappa - wK\kappa'' - wK^2\kappa = 0 \\ i\pi - wK\kappa = 0 \\ w' + w\frac{K'}{K} = 0 \end{cases} \quad (4.2.13)$$

yazabiliriz. (4.2.13) denklem sisteminin son eşitliğinden $wK = c = \text{sabit}$ ve sıfırdan farklıdır. Ayrıca (4.2.13) un 2. eşitliğinden

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{wK\kappa}{i} \\ \implies \pi &= c \frac{\kappa}{i} \end{aligned}$$

olur. $\kappa = 0$ olduğundan $\pi = 0$ dır. $wK = c \implies w = \frac{c}{K}$ olduğundan $u = \frac{c}{K}e_4$ elde edilir.

Tanım 4.2.9: x keyfi izotropik eğrisi u sabit ve sıfırdan farklı vektör olmak üzere

$$\langle e_3, u \rangle = \text{sabit} \quad (4.2.14)$$

bağıntısını sağlarsa bu eğriye 2.tip izotropik slant helis denir, [9].

Teorem 4.2.10: $\mathbb{C}^4$ uzayında izotropik bir eğri x olsun. x eğrisinin 2.tip izotropik slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \kappa &= \mp \frac{1}{\sqrt{c^2 s}} \\ K &= -\frac{3}{4s^2} \end{aligned}$$

olmasıdır, [9].

İspat: x eğrisi 2.tip izotropik slant helis olsun. (4.2.14) eşitliğinin türevi bize

$$\begin{aligned}\langle e_3, u \rangle' &= \langle e_3', u \rangle + \langle e_3, u' \rangle = 0 \\ &= \langle -i\kappa e_2, u \rangle = 0\end{aligned}$$

eşitliğini verir. Böylece u vektörünü

$$u = \epsilon e_1 + \varsigma e_3 + \eta e_4 \quad (4.2.15)$$

eşitliğiyle verebiliriz. $\epsilon = c$ sabit olduğundan ve ayrıca (4.2.15) eşitliğinin her iki yanının türevi alınırsa

$$\begin{aligned}0 &= \epsilon' e_1 + \epsilon e_1' + \varsigma' e_3 + \varsigma e_3' + \eta' e_4 + \eta e_4' \\ \implies 0 &= -i\epsilon e_2 + \varsigma' e_3 - i\varsigma \kappa e_2 + \eta' e_4 + \eta \left(-K(\kappa'' + K\kappa)e_1 - K\kappa e_3 + \frac{K'}{K}e_4 \right) \\ \implies 0 &= (-\eta K\kappa'' - \eta K^2\kappa) e_1 - (i\epsilon + i\varsigma\kappa) e_2 + (\varsigma' - \eta K\kappa) e_3 \\ &\quad + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) e_4\end{aligned} \quad (4.2.16)$$

bulunur. (4.2.16) eşitliğini e_1 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}0 &= \langle (-\eta K\kappa'' - \eta K^2\kappa) e_1 - (i\epsilon + i\varsigma\kappa) e_2 + (\varsigma' - \eta K\kappa) e_3 \\ &\quad + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_1 \rangle \\ 0 &= (-\eta K\kappa'' - \eta K^2\kappa) \langle e_1, e_1 \rangle - (i\epsilon + i\varsigma\kappa) \langle e_2, e_1 \rangle + (\varsigma' - \eta K\kappa) \langle e_3, e_1 \rangle \\ &\quad + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_1 \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = \langle e_4, e_1 \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_1 \rangle = 1$ olduğundan

$$\varsigma' - \eta K\kappa = 0$$

elde edilir.

Şimdi (4.2.16) eşitliğini e_2 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (-\eta K \kappa'' - \eta K^2 \kappa) e_1 - (i\epsilon + i\zeta \kappa) e_2 + (\zeta' - \eta K \kappa) e_3 + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_2 \rangle$$

$$0 = (-\eta K \kappa'' - \eta K^2 \kappa) \langle e_1, e_2 \rangle - (i\epsilon + i\zeta \kappa) \langle e_2, e_2 \rangle + (\zeta' - \eta K \kappa) \langle e_3, e_2 \rangle + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_2 \rangle$$

olur. Burada $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = \langle e_4, e_2 \rangle = 0$ ve $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olduğundan

$$i\epsilon + i\zeta \kappa = 0$$

elde edilir.

Yine (4.2.16) eşitliğini e_3 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (-\eta K \kappa'' - \eta K^2 \kappa) e_1 - (i\epsilon + i\zeta \kappa) e_2 + (\zeta' - \eta K \kappa) e_3 + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_3 \rangle$$

$$0 = (-\eta K \kappa'' - \eta K^2 \kappa) \langle e_1, e_3 \rangle - (i\epsilon + i\zeta \kappa) \langle e_2, e_3 \rangle + (\zeta' - \eta K \kappa) \langle e_3, e_3 \rangle + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_3 \rangle$$

olur. Burada $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_4, e_3 \rangle = 0$ ve $\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ olduğundan

$$\eta K \kappa'' + \eta K^2 \kappa = 0$$

elde edilir.

Son olarak (4.2.16) eşitliğini e_4 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (-\eta K \kappa'' - \eta K^2 \kappa) e_1 - (i\epsilon + i\zeta \kappa) e_2 + (\zeta' - \eta K \kappa) e_3 + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) e_4, e_4 \rangle$$

$$0 = (-\eta K \kappa'' - \eta K^2 \kappa) \langle e_1, e_4 \rangle - (i\epsilon + i\zeta \kappa) \langle e_2, e_4 \rangle + (\zeta' - \eta K \kappa) \langle e_3, e_4 \rangle + \left(\eta' + \eta \frac{K'}{K} \right) \langle e_4, e_4 \rangle$$

olur. Burada $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_2, e_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ ve $\langle e_4, e_4 \rangle = -1$ olduğundan

$$\eta' + \eta \frac{K'}{K} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\implies \begin{cases} \eta K \kappa'' + \eta K^2 \kappa = 0 \\ i\epsilon + i\zeta \kappa = 0 \\ \zeta' - \eta K \kappa = 0 \\ \eta' + \eta \frac{K'}{K} = 0 \end{cases} \quad (4.2.17)$$

sistemi elde edilir. İlk olarak (4.2.17) denklem sisteminin 4. eşitliğinden $\eta K = c_1 = \text{sabit}$ elde ederiz. (4.2.17) denklem sisteminin 2. eşitliğinden yararlanarak $\zeta = -\frac{\epsilon}{\kappa}$ yazabiliriz. Bu eşitliği (4.2.17) ün 3. eşitliğinde yazarsak

$$\left(-\frac{\epsilon}{\kappa}\right)' - c_1 \kappa = 0 \text{ ve } \epsilon = c = \text{sabit}$$

olduğundan

$$-c \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa}\right) - c_1 \kappa = 0 \quad (4.2.18)$$

elde ederiz. (4.2.18) denkleminde $C = -\frac{c_1}{c}$ alalım

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa}\right) = -\frac{c_1}{c} \kappa &\implies \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa}\right) = C \kappa \\ &\implies d \left(\frac{1}{\kappa}\right) = C \kappa ds \\ &\implies \frac{1}{\kappa} d \left(\frac{1}{\kappa}\right) = C ds \\ &\implies \frac{1}{2\kappa^2} + c_3 = Cs + c_3 \\ &\implies \kappa^2 = \frac{1}{2Cs} \\ &\implies \kappa = \mp \frac{1}{\sqrt{2Cs}} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Ayrıca (4.2.19) değerini (4.2.17) denklem sisteminin ilk eşitliğinde yazarsak

$$\eta K \kappa'' + \eta K^2 \kappa = 0$$

$$K = -\frac{3}{4s^2} \quad (4.2.20)$$

elde edilmiş olur.

($\Leftarrow$) Tersine

$$u = ce_1 + \frac{c}{\kappa}e_3 + \frac{c_1}{K}e_4 \quad (4.2.21)$$

eşitliği ile verilen vektörü ele alalım. $c, c_1 \in \mathbb{C}$. Burada u nun sabit bir vektör olduğu açıktır ve $\vec{x}$ izotropik eğrisi için $\langle e_3, u \rangle = \text{sabit}$ dir. Bu ise x eğrisinin $\mathbb{C}^4$ uzayında 2. tip izotropik slant helis olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.11: 2.tip izotropik slant helis tanımındaki sabit doğrultu (4.2.21) olarak alınabilir, [9].

Tanım 4.2.12: u sabit ve sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere

$$\langle e_4, u \rangle = \text{sabit} \quad (4.2.22)$$

eşitliğini sağlayan keyfi izotropik x eğrisine 3.tip izotropik slant helis denir, [9].

Teorem 4.2.13: $\mathbb{C}^4$ uzayında izotropik kübik x olsun. x eğrisi 3.tip izotropik slant helis ise, eğrinin eksenini $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^4$ olmak üzere

$$u = c_1e_1 + (ic_1s + c_2)e_2 + \left(c_1\frac{s^2}{2} - ic_2s + c_3\right)e_3$$

şeklindedir, [9].

İspat: x eğrisi 3.tip izotropik slant helis olduğundan (4.2.22) in s pseudo yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle e_4, u \rangle' &= \langle e_4', u \rangle + \langle e_4, u' \rangle = 0 \\ \implies \left\langle \left(-K(\kappa'' + K\kappa)e_1 - K\kappa e_3 + \frac{K'}{K}e_4\right), u \right\rangle &= 0 \\ \implies \frac{K'}{K} \langle e_4, u \rangle &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece u için aşağıdaki bağıntıyı verebiliriz

$$u = \lambda e_1 + \gamma e_2 + \delta e_3 \quad (4.2.23)$$

şeklinde yazılabilir. 3.tip izotropik slant helis tanımından $u' = 0$ olur. (4.2.23)

eşitliğinin türevi alınırsa ve E. Cartan türev formülleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda' e_1 + \lambda e_1' + \gamma' e_2 + \gamma e_2' + \delta' e_3 + \delta e_3' \\ \implies 0 &= \lambda' e_1 - i\lambda e_2 + \gamma' e_2 + \gamma (i\kappa e_1 + ie_3) + \delta' e_3 - \delta i\kappa e_2 \\ \implies 0 &= (\lambda' + i\kappa\gamma) e_1 + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) e_2 + (i\gamma + \delta') e_3 \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

(4.2.24) eşitliğini e_1 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\lambda' + i\kappa\gamma) e_1 + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) e_2 + (i\gamma + \delta') e_3, e_1 \rangle \\ 0 &= (\lambda' + i\kappa\gamma) \langle e_1, e_1 \rangle + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) \langle e_2, e_1 \rangle + (i\gamma + \delta') \langle e_3, e_1 \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_1 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$i\gamma + \delta' = 0$$

bulunur.

Şimdi (4.2.24) eşitliğini e_2 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\lambda' + i\kappa\gamma) e_1 + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) e_2 + (i\gamma + \delta') e_3, e_2 \rangle \\ 0 &= (\lambda' + i\kappa\gamma) \langle e_1, e_2 \rangle + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) \langle e_2, e_2 \rangle + (i\gamma + \delta') \langle e_3, e_2 \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = 0$ ve $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa = 0$$

bulunur.

Yine (4.2.24) eşitliğini e_3 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (\lambda' + i\kappa\gamma) e_1 + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) e_2 + (i\gamma + \delta') e_3, e_3 \rangle$$

$$0 = (\lambda' + i\kappa\gamma) \langle e_1, e_3 \rangle + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) \langle e_2, e_3 \rangle + (i\gamma + \delta') \langle e_3, e_3 \rangle$$

olur. Burada $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 0$ ve $\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınır

$$\lambda' + i\kappa\gamma = 0$$

bulunur.

Son olarak (4.2.24) eşitliğini e_4 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = \langle (\lambda' + i\kappa\gamma) e_1 + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) e_2 + (i\gamma + \delta') e_3, e_4 \rangle$$

$$0 = (\lambda' + i\kappa\gamma) \langle e_1, e_4 \rangle + (-i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa) \langle e_2, e_4 \rangle + (i\gamma + \delta') \langle e_3, e_4 \rangle$$

olur. Burada $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_2, e_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ dir. Böylece

$$\begin{cases} \lambda' + i\kappa\gamma = 0 \\ -i\lambda + \gamma' - \delta i\kappa = 0 \\ i\gamma + \delta' = 0 \end{cases} \quad (4.2.25)$$

denklem sistemi elde edilir. $\kappa = 0$ ve (4.2.25) denklem sisteminin 1. eşitliğinden

$$\lambda' = 0$$

$$\implies \lambda = c_1 = \text{sabit}$$

olduğundan (4.2.25) denklem sisteminin 2. eşitliğinden

$$\gamma' = ic_1$$

$$\implies \gamma = ic_1 s + c_2$$

elde ederiz. Bu değeri (4.2.25) denklem sisteminin son eşitliğinde yazarsak

$$\implies i(ic_1 s + c_2) + \delta' = 0$$

$$\implies -c_1 s + ic_2 + \delta' = 0$$

$$\implies \delta' = c_1 s - ic_2$$

$$\implies \delta = c_1 \frac{s^2}{2} - ic_2 s + c_3$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$u = c_1 e_1 + (ic_1 + c_2) e_2 + \left(c_1 \frac{s^2}{2} - ic_2 s + c_3 \right) e_3$$

eşitliği elde edilir.

4.3 Vektörel Diferensiyel Denklem İle İzotropik Eğrilerin Belirlenmesi

Teorem 4.3 1: $\mathbb{C}^4$ uzayındaki bir izotropik eğrinin yer vektörü

$$x^{(vv)} - 2\kappa x'' - \kappa' x' = 0 \quad (4.3.1)$$

diferensiyel denklemini sağlar, [9].

İspat: $\mathbb{C}^4$ uzayında izotropik eğri x olsun. (4.1.2) denklem sisteminin ilk eşitliğinden

$$e_2 = -\frac{e_1'}{i} \quad (4.3.2)$$

yazabiliriz. (4.3.2) eşitliğinin türevini alır ve (4.1.2) denklem sisteminin 2. eşitliğini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} e_2' &= -\frac{e_1''}{i} = i\kappa e_1 + ie_3 \\ \implies -e_1'' &= -\kappa e_1 - e_3 \\ \implies e_3 &= e_1'' - \kappa e_1 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

elde edilir.

Ayrıca (4.3.3) eşitliğini (4.1.2) denklem sistemini de kullanırsak

$$\begin{aligned} e_3 &= e_1'' - \kappa e_1 \\ \implies e_3' &= e_1''' - \kappa' e_1 - \kappa e_1' \\ \implies -i\kappa e_2 &= e_1''' - \kappa' e_1 - \kappa e_1' \\ \implies -i\kappa \left(-\frac{e_1'}{i} \right) &= e_1''' - \kappa' e_1 - \kappa e_1' \\ \implies e_1''' - \kappa' e_1 - 2\kappa e_1' &= 0 \end{aligned}$$

ve $x' = e_1$ olarak alırsak

$$x^{(v)} - 2\kappa x'' - \kappa' x' = 0$$

elde edilir.

(4.3.1) diferensiyel denklemi x izotropik eğrisi için bir karakterizasyondur. Bu denklemin çözümüyle, $\mathbb{C}^4$ uzayındaki standart çatıya göre izotropik eğrinin yer vektörü belirlenebilir. Ancak bu denklemin genel çözüm henüz bulunamadı. x izotropik eğrisini izotropik kübik olarak göz önüne alacağız. Bu durumda $\kappa = 0$ dır. (4.3.1) diferensiyel denkleminde $x^{(v)} = 0$ veya parametrik olarak

$$x_1^{(v)} = 0$$

$$x_2^{(v)} = 0$$

$$x_3^{(v)} = 0$$

$$x_4^{(v)} = 0$$

dır. Burada $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ standart çatıya göre yer vektörüdür. Bu sebeple

$$x = \begin{pmatrix} \frac{s^3}{6} + \alpha_1 \frac{s^2}{2} + \alpha_2 s + \alpha_3 \\ \frac{s^3}{6} + \beta_1 \frac{s^2}{2} + \beta_2 s + \beta_3 \\ \frac{s^3}{6} + \gamma_1 \frac{s^2}{2} + \gamma_2 s + \gamma_3 \\ \frac{s^3}{6} + \zeta_1 \frac{s^2}{2} + \zeta_2 s + \zeta_3 \end{pmatrix} \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \zeta_i \in \mathbb{C} \quad 1 \leq i \leq 4$$

alınabilir.

4.4 E. Cartan Çatısına Göre İzotropik Eğrinin Yer Vektörü

$\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında izotropik eğri x olsun. E. Cartan çatısına göre bu eğrinin yer vektörünü

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4 \quad (4.4.1)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.4.1) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak ve (4.1.2) eşitliklerinden

$$x' = u'_1 e_1 + u_1 e'_1 + u'_2 e_2 + u_2 e'_2 + u'_3 e_3 + u_3 e'_3 + u'_4 e_4 + u_4 e'_4$$

$$\begin{aligned} e_1 &= u'_1 e_1 - i u_1 e_2 + u'_2 e_2 + u_2 (i \kappa e_1 + i e_3) + u'_3 e_3 - u_3 i \kappa e_2 + u'_4 e_4 \\ &\quad + u_4 \left(-K(\kappa'' + K\kappa) e_1 - K\kappa e_3 + \frac{K'}{K} e_4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= (u'_1 + i u_2 \kappa - u_4 (K(\kappa'' + K\kappa))) e_1 + (u'_2 - i u_1 - i u_3 \kappa) e_2 \\ &\quad + (u'_3 + i u_2 - K\kappa u_4) e_3 + \left(u'_4 + \frac{K'}{K} u_4 \right) e_4 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

elde edilir. (4.4.2) eşitliğini e_1 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1 \rangle &= \langle (u'_1 + i u_2 \kappa - u_4 (K(\kappa'' + K\kappa))) e_1 + (u'_2 - i u_1 - i u_3 \kappa) e_2 \\ &\quad + (u'_3 + i u_2 - K\kappa u_4) e_3 + \left(u'_4 + \frac{K'}{K} u_4 \right) e_4, e_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1 \rangle &= (u'_1 + i u_2 \kappa - u_4 (K(\kappa'' + K\kappa))) \langle e_1, e_1 \rangle + (u'_2 - i u_1 - i u_3 \kappa) \langle e_2, e_1 \rangle \\ &\quad + (u'_3 + i u_2 - K\kappa u_4) \langle e_3, e_1 \rangle + \left(u'_4 + \frac{K'}{K} u_4 \right) \langle e_4, e_1 \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = \langle e_4, e_1 \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_1 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u'_3 + i u_2 - K\kappa u_4 = 0$$

bulunur.

Şimdi (4.4.2) eşitliğini e_2 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_2 \rangle &= \langle (u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa))) e_1 + (u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa) e_2 \\ &\quad + (u'_3 + iu_2 - K\kappa u_4) e_3 + \left(u'_4 + \frac{K'}{K}u_4\right) e_4, e_2 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_2 \rangle &= (u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa))) \langle e_1, e_2 \rangle + (u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa) \langle e_2, e_2 \rangle \\ &\quad + (u'_3 + iu_2 - K\kappa u_4) \langle e_3, e_2 \rangle + \left(u'_4 + \frac{K'}{K}u_4\right) \langle e_4, e_2 \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = \langle e_4, e_2 \rangle = 0$ ve $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa = 0$$

bulunur.

Yine (4.4.2) eşitliğini e_3 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_3 \rangle &= \langle (u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa))) e_1 + (u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa) e_2 \\ &\quad + (u'_3 + iu_2 - K\kappa u_4) e_3 + \left(u'_4 + \frac{K'}{K}u_4\right) e_4, e_3 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_3 \rangle &= (u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa))) \langle e_1, e_3 \rangle + (u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa) \langle e_2, e_3 \rangle \\ &\quad + (u'_3 + iu_2 - K\kappa u_4) \langle e_3, e_3 \rangle + \left(u'_4 + \frac{K'}{K}u_4\right) \langle e_4, e_3 \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_4, e_3 \rangle = 0$ ve $\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa)) - 1 = 0$$

bulunur.

Son olarak (4.4.2) eşitliğini e_4 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_4 \rangle &= \langle (u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa))) e_1 + (u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa) e_2 \\ &\quad + (u'_3 + iu_2 - K\kappa u_4) e_3 + \left(u'_4 + \frac{K'}{K}u_4\right) e_4, e_4 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_4 \rangle &= (u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa)))\langle e_1, e_4 \rangle + (u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa)\langle e_2, e_4 \rangle \\ &\quad + (u'_3 + iu_2 - K\kappa u_4)\langle e_3, e_4 \rangle + \left(u'_4 + \frac{K'}{K}u_4\right)\langle e_4, e_4 \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_2, e_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ ve $\langle e_4, e_4 \rangle = -1$ olduğu göz önüne alınır

$$u'_4 + \frac{K'}{K}u_4 = 0$$

dır. Böylece

$$\begin{cases} u'_1 + iu_2\kappa - u_4(K(\kappa'' + K\kappa)) - 1 = 0 \\ u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa = 0 \\ u'_3 + iu_2 - K\kappa u_4 = 0 \\ u'_4 + \frac{K'}{K}u_4 = 0 \end{cases} \quad (4.4.3)$$

sistemi elde edilir. (4.4.3) denklem sisteminin 4. denkleminde $u_4K = c = \text{sabit}$ olduğundan, (4.4.3) denklem sistemi

$$\begin{cases} u'_1 + iu_2\kappa - c(\kappa'' + K\kappa) - 1 = 0 \\ u'_2 - iu_1 - iu_3\kappa = 0 \\ u'_3 + iu_2 - c\kappa = 0 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

şeklinde olur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz, [9].

Teorem 4.4.1: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametrelili izotropik eğri x olsun. e_3e_4 alt uzayında tamamen yatan hiçbir izotropik eğri yoktur, [9].

İspat: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametrelili izotropik eğri x olsun. x eğrisinin e_3e_4 alt uzayında yattığını kabul edersek $u_1 = u_2 = 0$ olup $u_3 = c = 0$ dır. Bu sonuç (4.4.1) ile çelişmektedir. Bu nedenle eğri tamamen e_3e_4 alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.4.2: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametrelili izotropik eğri x olsun. e_2e_4 alt uzayında tamamen yatan eğri pseudo eğriliğine sahiptir ve x pseudo helistir, [9].

İspat: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametrelili izotropik eğri x olsun. x eğrisi e_2e_4 alt uzayında yattığından $u_1 = u_3 = 0$ olup $u_2 = c_1 = \text{sabit}$ $c_1 \in \mathbb{C}$ dir. Bu (4.4.4) denklem sisteminin 3. eşitliğinde yerine yazılırsa $\kappa = \frac{c_1}{c}i = \text{sabit}$ bulunur. Teorem 4.2.4 den x eğrisinin bir pseudo helis olduğu açıktır.

Teorem 4.4.3: e_1e_2 alt uzayında tamamen yatan hiçbir izotropik eğri yoktur, [9].

İspat: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametrelili izotropik eğri x olsun. x eğrisinin e_1e_2 alt uzayında yattığını kabul edersek $u_3 = u_4 = 0$ olur ve (4.4.4) denklem sisteminden $u_1 = 0$ ve $u_2 = 0$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir.

Teorem 4.4.4: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametrelili izotropik eğri x olsun. e_1e_3 alt uzayında yatan eğri $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\kappa = -\frac{s+c_2}{c_3}$ pseudo eğrililiğine sahiptir. Bu nedenle $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayının e_1e_3 alt uzayında yatan hiçbir pseudo helis yoktur, [9].

İspat: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametrelili izotropik eğri x olsun. (4.4.3) denklem sisteminin 1. ve 3. eşitliklerinde $u_2 = u_4 = 0$ yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{ds} = 1 &\implies du_1 = ds \\ &\implies u_1 = s + c_2 \end{aligned}$$

ve

$$\frac{du_3}{ds} = 0 \implies u_3 = c_3 = \text{sabit} \quad c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

elde ederiz. Bulduğumuz u_1 ve u_3 değerlerini (4.4.3) denklem sisteminin 2. ve 3. eşitliklerinde yazarsak

$$\begin{aligned} i(-s - c_2) - c_3 i \kappa &= 0 \\ \implies c_3 i \kappa &= i(-s - c_2) \\ \implies \kappa &= -\frac{s + c_2}{c_3} \end{aligned}$$

elde ederiz. Buda istenilendir.

Teorem 4.2.4 den x eğrisi pseudo helis olmadığı açıktır.

Teorem 4.4.5: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametreli izotropik eğri x olsun. e_1e_4 alt uzayında tamamen yatan hiçbir izotropik eğri yoktur, [9].

İspat: x eğrisinin e_1e_4 de yattığını kabul edersek $u_2 = u_3 = 0$ olup $u_1 = c = 0$ dır. Bu sonuç (4.4.1) eşitliği ile çelişmektedir. Bu nedenle eğri tamamen e_1e_4 alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.4.6: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında pseudo yay parametreli izotropik eğri x olsun. E. Cartan çatısına göre eğrinin yer vektörünün 1. bileşeni

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{i\kappa} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{i\kappa} \left(c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \right) \right\} \right] - \frac{d}{ds} \left(\frac{u_1}{\kappa} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \left(c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \right) - c\kappa \end{aligned}$$

3. dereceden diferensiyel denklemini sağlar, [9].

İspat: (4.4.4) denklem sisteminin 1. eşitliğinden

$$\begin{aligned} iu_2\kappa &= c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \\ \implies u_2 &= \frac{1}{i\kappa} \left(c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. u_2 nin s pseudo yay parametresine göre türevini alırsak

$$\implies \frac{du_2}{ds} = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{i\kappa} \left(c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \right) \right\}$$

dır ve bulduğumuz bu son eşitliği (4.4.4) denklem sisteminin 2.denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \implies iu_3\kappa &= \frac{du_2}{ds} - iu_1 \\ \implies u_3 &= \frac{1}{i\kappa} \left(\frac{du_2}{ds} \right) - \frac{u_1}{\kappa} \end{aligned}$$

u_3 ün türevini alırsak

$$\implies \frac{du_3}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{i\kappa} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{i\kappa} \left(c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \right) \right\} \right] - \frac{d}{ds} \left(\frac{u_1}{\kappa} \right)$$

ve bu değerlerin tümünü (4.4.4) denklem sisteminin son denkleminde yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{i\kappa} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{i\kappa} \left(c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \right) \right\} \right] - \frac{d}{ds} \left(\frac{u_1}{\kappa} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \left(c\kappa'' + cK\kappa + 1 - \frac{du_1}{ds} \right) - c\kappa \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.7: x izotropik kübik olsun. E. Cartan çatısına göre x in yer vektörü $\pi_i \in \mathbb{C} \quad 1 \leq i \leq 3$ olmak üzere

$$x = (s + \pi_1) e_1 + \left(i \frac{s^2}{2} + i\pi_1 s + \pi_2 \right) e_2 + \left(\frac{s^3}{6} + i\pi_1 \frac{s^2}{2} - i\pi_2 s + \pi_3 \right) e_3 + \frac{c}{K} e_4 \quad (5.5)$$

şeklindedir, [9].

İspat: (4.4.4) denklem sisteminden ve $\kappa = 0$ olmasından yararlanarak

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{ds} &= 1 \\ \frac{du_2}{ds} &= iu_1 \\ \frac{du_3}{ds} &= -iu_2 \\ \implies u_1 &= s + \pi_1 \\ du_2 &= iu_1 ds \\ &= (is + i\pi_1) ds \\ \implies u_2 &= i \frac{s^2}{2} + i\pi_1 s + \pi_2 \\ du_3 &= -iu_2 ds \\ &= -i \left(i \frac{s^2}{2} + i\pi_1 s + \pi_2 \right) ds \\ \implies u_3 &= \frac{s^3}{6} + i\pi_1 \frac{s^2}{2} - i\pi_2 s + \pi_3 \end{aligned}$$

$Ku_4 = c \implies u_4 = \frac{c}{K}$ değerleri

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4$$

dekleminde yerine yazılırsa

$$x = (s + \pi_1) e_1 + \left(i \frac{s^2}{2} + i\pi_1 s + \pi_2 \right) e_2 + \left(\frac{s^3}{6} + i\pi_1 \frac{s^2}{2} - i\pi_2 s + \pi_3 \right) e_3 + \frac{c}{K} e_4$$

elde edilir.

4.5 $\mathbb{C}^4$ Kompleks Uzayında İzotropik Rektifiyan Eğriler

Tanım 4.5.1 $x : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^4$ pseudo yay parametrelili bir izotropik eğri ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, x eğrisi boyunca $\mathbb{C}^4$ de E. Cartan çatısı olsun, x eğrisinin yer vektörü, e_2 nin dik tümleyenini olan $e_2^\perp = \{e_1, e_3, e_4\}$ de yatıyorsa, x eğrisine izotropik rektifiyan eğri denir.

Buradan $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayındaki x rektifiyan eğrinin seçilmiş herhangi bir orjine göre yer vektörü;

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_3 + u_3 e_4$$

denklemini sağlar. Burada s pseudo yay uzunluk fonksiyonu u_1, u_2, u_3 diferensiyelenebilir fonksiyonlardır.

Teorem 4.5.2: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında bir izotropik rektifiyan eğri x olsun. Bu takdirde x eğrisinin yer vektörü

$$x = \int (c(\kappa'' + K\kappa) + 1) ds e_1 + \int c\kappa ds e_3 + \frac{c}{K} e_4$$

veya

$$x = -\kappa \int c\kappa ds e_1 + \int c\kappa ds e_3 + \frac{c}{K} e_4$$

şeklinde dir.

İspat: $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında izotropik rektifiyan eğri x olsun. E. Cartan çatısına göre bu eğrinin yer vektörünü

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_3 + u_3 e_4 \tag{4.5.1}$$

olarak yazabiliriz. (4.5.1) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak ve (4.1.2) E. Cartan türev formülleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
x' &= u'_1 e_1 + u_1 e'_1 + u'_2 e_3 + u_2 e'_3 + u'_3 e_4 + u_3 e'_4 \\
e_1 &= u'_1 e_1 + u_1 e'_1 + u'_2 e_3 + u_2 e'_3 + u'_3 e_4 + u_3 e'_4 \\
e_1 &= u'_1 e_1 - i u_1 e_2 + u'_2 e_3 - u_2 i \kappa e_2 + u'_3 e_4 \\
&\quad + u_3 \left(-K(\kappa'' + K\kappa) e_1 - K\kappa e_3 + \frac{K'}{K} e_4 \right) \\
e_1 &= (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) e_1 + (-i u_1 - i u_2 \kappa) e_2 \\
&\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) e_3 + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3 \right) e_4 \tag{4.5.2}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5.2) eşitliğini e_1 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_1 \rangle &= \langle (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) e_1 + (-i u_1 - i u_2 \kappa) e_2 \\
&\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) e_3 + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3 \right) e_4, e_1 \rangle \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) \langle e_1, e_1 \rangle + (-i u_1 - i u_2 \kappa) \langle e_2, e_1 \rangle \\
&\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) \langle e_3, e_1 \rangle + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3 \right) \langle e_4, e_1 \rangle
\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = \langle e_4, e_1 \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_1 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınır

$$u'_2 - K\kappa u_3 = 0$$

bulunur.

Şimdi (4.5.2) eşitliğini e_2 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_2 \rangle &= \langle (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) e_1 + (-i u_1 - i u_2 \kappa) e_2 \\
&\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) e_3 + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3 \right) e_4, e_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_2 \rangle &= (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) \langle e_1, e_2 \rangle + (-iu_1 - iu_2 \kappa) \langle e_2, e_2 \rangle \\ &\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) \langle e_3, e_2 \rangle + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3\right) \langle e_4, e_2 \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = \langle e_4, e_2 \rangle = 0$ ve $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$iu_1 + iu_2 \kappa = 0$$

elde edilir. (4.5.2) eşitliğini e_3 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_3 \rangle &= \langle (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) e_1 + (-iu_1 - iu_2 \kappa) e_2 \\ &\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) e_3 + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3\right) e_4, e_3 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_3 \rangle &= (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) \langle e_1, e_3 \rangle + (-iu_1 - iu_2 \kappa) \langle e_2, e_3 \rangle \\ &\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) \langle e_3, e_3 \rangle + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3\right) \langle e_4, e_3 \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = \langle e_4, e_3 \rangle = 0$ ve $\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa) - 1 = 0$$

bulunur.

Son olarak (4.5.2) eşitliğini e_4 ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_4 \rangle &= \langle (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) e_1 + (-iu_1 - iu_2 \kappa) e_2 \\ &\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) e_3 + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3\right) e_4, e_4 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_4 \rangle &= (u'_1 - u_3 K(\kappa'' + K\kappa)) \langle e_1, e_4 \rangle + (-iu_1 - iu_2 \kappa) \langle e_2, e_4 \rangle \\ &\quad + (u'_2 - K\kappa u_3) \langle e_3, e_4 \rangle + \left(u'_3 + \frac{K'}{K} u_3\right) \langle e_4, e_4 \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_2, e_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ ve $\langle e_4, e_4 \rangle = -1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u'_3 + \frac{K'}{K} u_3 = 0$$

dır. Böylece

$$\begin{cases} u_1' - u_3 K(\kappa'' + K\kappa) - 1 = 0 \\ iu_1 + iu_2\kappa = 0 \\ u_2' - K\kappa u_3 = 0 \\ u_3' + \frac{K'}{K}u_3 = 0 \end{cases} \quad (4.5.3)$$

(4.5.3) denklem sisteminin 4. denkleminden $u_3 K = c = \text{sabit}$ elde edilir. Dolayısıyla (4.5.3) denklem sistemi

$$\begin{cases} u_1' - c(\kappa'' + K\kappa) - 1 = 0 \\ iu_1 + iu_2\kappa = 0 \\ u_2' - c\kappa = 0 \end{cases} \quad (4.5.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.5.4) denklem sisteminin 1. eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{ds} &= c(\kappa'' + K\kappa) + 1 \\ du_1 &= (c(\kappa'' + K\kappa) + 1) ds \\ \implies u_1 &= \int (c(\kappa'' + K\kappa) + 1) ds \end{aligned}$$

elde edilir. (4.5.4) denklem sisteminin 3. eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{ds} &= c\kappa \\ du_2 &= c\kappa ds \\ u_2 &= \int c\kappa ds \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikleri (4.5.1) de yerine yazarsak

$$x = \int (c(\kappa'' + K\kappa) + 1) ds e_1 + \int c\kappa ds e_3 + \frac{c}{K} e_4$$

veya $u_1 = -u_2\kappa$ eşitliğinden

$$x = -\kappa \int c\kappa ds e_1 + \int c\kappa ds e_3 + \frac{c}{K} e_4$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Ahmad, T.A., Turgut, M., 2010**, Position vector of a timelike slant helix in Minkowski 3-space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (In Press).
- [2] **Duggal, K. L. and Bejancu, A., 1996**, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers.
- [3] **Hacısalıhoğlu H. H., 1993**, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [4] **Izumiya, S. and Tkeuchi, 2004**, N. New Special Curves and Developable Surfaces, Turk J. Math 28, 153-163.
- [5] **İlarslan, K., Nešovič, E., 2008**, Some Characterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space E^4 , Turkish J. Math 32, No.1, 21-30.
- [6] **Struik, J. Dirk, 1961**, Lectures on Classical Differential Geometry, Addison-Wesley Publish.
- [7] **Şemin, F., 1983**, Diferensiyel Geometri I, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, İstanbul.
- [8] **Yano, K., Kon, M., 1984**, Structures on Manifolds, World Scientific Publishing.
- [9] **Yılmaz, S., 2010**, Contributions to Differential Geometry of Isotropic Curves in the Complex Space, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 374 (2011) 673–680.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Elazığ da doğmuşum. İlköğretimi Elazığ Şair Hayri İlköğretim okulunda tamamladım. Orta öğretimi Elazığ Balakgazi Lisesinde okudum ve 2005 yılında aynı okuldan mezun oldum. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2009 yılında lisans öğrenimimi tamamladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım.

Fidan TAHTİKŞAN