

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA EĞRİLER
VE KAREKTERİZASYONLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Serpil TATLIPINAR**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri**

TEMMUZ-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA EĞRİLER
VE KAREKTERİZASYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serpil TATLIPINAR

(08121111)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Haziran 2010

TEMMUZ-2010

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA EĞRİLER
VE KAREKTERİZASYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serpil TATLIPINAR

(08121111)

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Haziran 2010
Tezin Savunulduğu Tarih: 6 Temmuz 2010**

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN(F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT(F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ(F.Ü)

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana gerekli imkanları sağlayan, yardımını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli Hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN' e ve ayrıca çalışmalarımda önerilerini ve katkılarını esirgemeyen değerli Hocam, Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım ve her zaman yanımda olan sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Serpil TATLIPINAR

ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SİMGELER LİSTESİ.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. İKİNCİ BÖLÜM.....	3
2.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	3
3. ÜÇÜNCÜ BÖLÜM.....	11
3.1. Öklidyen Olmayan Geometrilere.....	11
4. DÖRDÜNCÜ BÖLÜM.....	15
4.1. Galilean Düzlemi.....	15
4.2. Galilean Düzleminde Konum Vektörleri.....	23
5. BEŞİNCİ BÖLÜM.....	25
5.1. Üç Boyutlu Galilean Uzayında Eğriler ve Karakterizasyonları.....	25
5.2. Üç Boyutlu Galilean Uzayında Helis.....	33
5.3. Örnekler.....	43
6. SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	48

ÖZET

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmanın içeriği ve amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklidyen olmayan geometriler açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, Galilean düzlemi incelenmiş ve orijinal olarak Galilean düzleminde konum vektörleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, 3-boyutlu Galilean uzayı, bu uzaydaki helisler ele alınmıştır. Orijinal olarak bu uzayda eğri ve helislerin konum vektörleri ve slant helisler incelenmiştir; örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde, bu çalışmanın sonucu verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öklidyen Olmayan Geometri, Konum Vektörü, Küresel Eğriler, Helis, Slant Helis, Galilean Düzlemi, Galilean Uzayı.

SUMMARY

Curves and Their Characterizations in 3-Dimensional Galilean Space

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, the aim and content of the thesis are explained.

In the second chapter, necessary fundamental definitions and theorems for our study are given.

In the third chapter, non-Euclidean geometries are explained.

In the fourth chapter, Galilean plane is given and originally positions vectors in Galilean plane are obtained.

In the fifth chapter, 3-dimensional Galilean space; helices are given. Originally in this space positions vectors of curves and helices and slant helices in this space are explained and examples are given.

In the sixth chapter, the result of this study is given.

Keywords: Non-Euclidean Geometry, Position Vector, Spherical Curves, Helix, Slant Helix, Galilean Plane, Galilean Space.

SİMGELER LİSTESİ

E^3	: 3-Boyutlu Öklid Uzay
$\langle, \rangle$	: İç Çarpım
d	: Uzaklık Fonksiyonu
$m(,)$	: Açık Ölçüsü
G_2	: Galilean Düzlemi
G_3	: Galilean Uzay
D	: Dual Sayılar Uzay
E_1^3	: 3-Boyutlu Lorentz Uzay
$\chi(M)$	: Tanjant Vektör Alanlarının Uzay
τ	: Torsiyon
κ	: Eğrilik
f	: İdeal Doğru
w	: İdeal Düzlem
ε	: Eliptik İnvolusyon
$(,)$	: Galilean Uzayında Uzaklık Fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1 Güneş Işığının Olay Çizgisi.....	13
Şekil 4.1 Galilean Düzlemi ve Koni.....	16
Şekil 4.2 Galilean Düzleminde Uzaklık.....	17
Şekil 4.3 Galilean Düzleminde Özel Uzaklık.....	18
Şekil 4.4 Galilean Düzleminde Bir Noktanın Orjine Uzaklığı.....	18
Şekil 4.5 Galilean Düzleminde r yarıçaplı Galilean Çemberi.....	19
Şekil 4.6 Galilean Düzleminde Doğrular Arasındaki Açılar.....	20
Şekil 4.7 Galilean Düzleminde Bir ABC Üçgeninde Kenar Uzunlukları.....	21
Şekil 4.8 Galilean Düzleminde Bir ABC Üçgeninde Açılar Ölçüleri.....	22
Şekil 5.1 Galilean Uzayı.....	26

1. GİRİŞ

Bir üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğu ve paralel doğruların birbirlerinden her zaman aynı uzaklıkta kaldıkları gibi bilgileri içeren ve okullarda geleneksel olarak gösterilen Öklid geometrisi sadece düz yüzeyler için geçerlidir. 19. yüzyıl matematikçileri, eğri yüzeyler üzerindeki üçgenleri, paralel doğrular vb. şeyleri açıklamak için farklı türden geometrilere gereksinim olduğunu farketmişlerdir. Albert Einstein 20. yüzyılın başlarında uzayın maddenin varlığı nedeniyle eğrildiğinin farkına vardığında, gereksinim duyduğu matematiksel kavramlar, kullanıma hazır durumda bekliyordu. Günümüzde, uçaklar ve gemiler mümkün olan en kısa rotayı belirlemek için Dünya'nın eğriliğini hesaba katmak zorundadırlar. Kara delikleri, evrenin kaderini ve Güneş'in ışığı nasıl büküğünü açıklayan denklemler 19. yüzyıl matematiğinin denklemleriydi.

Öklid geometrisinin en önemli postulatı şudur: “Başka iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğruyla aynı tarafta, toplamaları iki dik açıdan küçük açılar meydana getirirse bu iki doğrunun uzantıları açılarda iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.” Buna göre, “Bir doğruya paralel olan ve bu doğru dışında verilen bir noktadan geçen bir tek doğru vardır.” Önceleri bu postulatın ispat edilebileceği sanılarak bu yönde çalışmalar yapılmış ama sonuç alınamamıştır. Daha sonraları, aksiyomların gerçeklerden çok varsayımlar olduğu anlaşılmış ve bu sonuç yepyeni geometrilerin doğmasına yol açmıştır [12].

Ömer Hayyam ve Tusi, Öklid' in postulatını irdeleyen ilk alimlerdir. Fakat Öklid dışı geometriler, ilk olarak 19.yüzyılda C.F.Gauss, N.I.Lobachevsky ve J.Bolyai tarafından paralellik postulatı yerine yeni bir postulatı (Bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz paralel çizilebilir.) kabul eden hiperbolik geometrinin keşfiyle ortaya çıkmıştır. Daha sonraları G.F.B. Riemann eliptik geometri denen yeni bir geometrinin temellerini atmıştır. F.Klein tarafından bu geometriler genelleştirilmiştir ve Öklid, hiperbolik ve eliptik geometrileri de içeren dokuz geometrinin varlığını göstermiştir [24].

Galilean geometrisi, (bazı durumlarda Öklid hariç) bütün Klein geometrileri içinde en basitidir ve Galileo ile Einstein' ın görelilik kuramıyla bağıntılıdır. Galilean geometrisinin geniş bir incelemesi için Yaglom [28] ve Röschel [22]' in çalışmalarına bakılabilir. Bu geometri üzerine daha sonraları yapılan Kamenarovic, Pavkovic [17], Artıkbayev [2] ve

yakın zamanda da Öğrenmiş, Ergüt ve Bektaş [3,9,10]' ın çalışmalarına göz atılabilir.

Diferensiyel geometrinin en önemli konularından biri de 1-boyutlu manifoldlar olan eğriler konusudur. Galilean düzleminin ve Galilean uzayının geometrisi temel anlamda incelenmiştir fakat bu uzaydaki eğriler ve karakterizasyonları ile ilgili çalışmalar literatürde oldukça azdır. Bu çalışmada dördüncü bölümde Galilean görelilik kuramı, Galilean düzleminin geometrisi detaylı bir şekilde incelenmiştir ve farklı olarak Galilean düzleminde konum vektörleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise 3-boyutlu Galilean uzayının geometrisi verilmiş, özellikle eğriler teorisi incelenmiş ve bu uzayda bazı eğriler üzerinde durulmuştur. 3-boyutlu Galilean uzayında helis ile ilgili gerekli bilgiler verilmiştir ve farklı olarak bu uzaydaki konum vektörleri, slant helisler ve karakterizasyonları elde edilmiş ve bu doğrultuda örnekler verilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM

2.1.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1.1. Tanım: $\mathbb{R}^n$ reel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n)\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ cümlesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ cümlesine $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir [23].

2.1.2. Tanım: $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

eşitliğiyle tanımlanan $\langle, \rangle$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım denir. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpım denir [23].

2.1.3. Tanım: $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|.\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow \|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

şeklinde tanımlı $\|.\|$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında bir norm denir [23].

2.1.4. Tanım: $p, q \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

biçiminde tanımlanan $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzayıdır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzay denir. Genellikle E^n ile gösterilir [23].

2.1.5. Tanım: $f, \mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[f(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + s, p_{j+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n) \right]$$

limiti varsa bu limite, f fonksiyonunun j inci değişkene göre kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \text{ veya } f_j(p)$$

biçiminde gösterilir [23].

2.1.6. Tanım: f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ nin herbir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^k sınıfındandır denir [23].

2.1.7. Tanım: $\mathbb{R}^n$ nin herbir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur denir [23].

2.1.8. Tanım: $q \in \mathbb{R}^n$ olsun. $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere q noktasından $q + v$ noktasına giden yönlü doğru parçası, q noktasında v tanjant vektörü diye adlandırılır ve v_q ile gösterilir. q noktasındaki bütün tanjant vektörlerin cümlesi $T_q(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir [23].

2.1.9. Tanım: $T_q(\mathbb{R}^n)$ cümlesinde toplama işlemi $v_q + w_q = (v + w)_q$ eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda v_q = (\lambda v)_q$ eşitliğiyle tanımlanır.

$T_q(\mathbb{R}^n)$ bu işlemlere göre $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayına $\mathbb{R}^n$ uzayının q noktasındaki tanjant uzay denir [23].

2.1.10. Tanım: U , $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt cümlesi olsun. U nun her bir q noktasına, q noktasında bir tanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyona U üzerinde bir vektör alanı denir. $\mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık alt cümlesi üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(U)$ ile gösterilir [23].

2.1.11. Tanım: $I, \mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzay içinde bir eğri denir [23].

2.1.12. Tanım: $\mathbb{R}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha(t) \in M \text{ ve } \alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \Big|_t \right)$$

dir. $(\alpha'(t), \alpha(t)) \in T_{\mathbb{R}^n}(t)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [13].

2.1.13. Tanım: $M \subset \mathbb{R}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir [13].

2.1.14. Tanım: M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [13].

2.1.15. Tanım: $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. T , α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına birim teğet vektör alanı denir [23].

2.1.16. Tanım: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R} , \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [23].

2.1.17. Tanım: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (aslinormali) denir.

N vektör alanına, α eğrisinin birinci dik vektör alanı (aslinormal vektör alanı) denir [23].

2.1.18. Tanım: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir. B vektör alanına, α eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir [23].

2.1.19. Tanım: $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir.

T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [23].

2.1.20. Tanım: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R} , \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması (torsiyonu) denir [23].

2.1.21. Teorem: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$T' = \kappa N,$$

$$N' = -\kappa T + \tau B,$$

$$B' = -\tau N$$

dir [23].

2.1.22. Teorem: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre

$$T' = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$N' = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$$

dir. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ ve τ olduğuna göre

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

dir [23].

2.1.23. Tanım: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun.

$\{T(s), N(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki dokunum düzlemi veya oskülatör düzlem denir.

$\{T(s), B(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultman düzlemi veya rektifiyan düzlem denir.

$\{N(s), B(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki dik düzlem veya normal düzlem denir [23].

2.1.24. Teorem: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre

$$N \times B = T$$

$$B \times T = N$$

dir [23].

2.1.25. Tanım: Birim elemanları bulunan, her elemanın tersi var olan ve birleşme kuralını gerçekleyen, G herhangi bir cümle ve $\circ$ bu cümle üzerinde tanımlı herhangi bir ikili işlem olmak üzere $(G, \circ)$ sistemine grup denir [18].

2.1.26. Tanım: $(G, \circ)$ sistemi bir grup ve $H \subseteq G$ olsun, $\circ$ işleminin H ya kısıtlanmışı yine $\circ$ ile gösterilmek üzere eğer $(H, \circ)$ sistemi de bir grupsa H ya G nin bir altgrubu denir [18].

2.1.27. Tanım: $\mathbb{R}^3$ de bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olsun. T vektör alanı, belirli bir U vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa α eğrisine helis adı verilir [23].

2.1.28. Teorem: $\mathbb{R}^3$ de bir α eğrisi için $\kappa > 0$ olduğunu varsayalım. α nın bir helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olmasıdır (Lancret Teoremi) [23].

2.1.29. Tanım: $\kappa \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ de bir γ eğrisinin aslinormali sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa γ eğrisine slant helis adı verilir [16].

2.1.30. Teorem: $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ de γ bir birim hızlı uzay eğrisi olsun. Bu takdirde γ slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s)$$

sabit bir fonksiyon olmasıdır [16].

2.1.31. Tanım: $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(q_1, q_2) = \eta(q_1) + q_2 \varphi(q_1)$ dönüşümü yukarıdaki açıklandığı gibi bir dönüşüm olmak üzere, $\varphi(I \times \mathbb{R})$ yüzeyine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğrusal yüzey veya regle yüzey denir [23].

2.1.32. Tanım: $\mathbb{R}^n$ de bir d uzaklığını değişmez bırakan bir R fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ de bir katı harekettir, yani

$$R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

fonksiyonu için eğer

$$d(R(x), R(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ise R ye bir katı hareket denir [14].

2.1.33. Tanım: $R_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü $O \in \mathbb{R}^n$ için $R_0(O) = O$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $x \rightarrow R_0(x)$ biçiminde tanımlanan bir hareket olsun. R_0 hareketine O etrafında $\mathbb{R}^n$ nin bir dönme hareketi denir. $\mathbb{R}^n$ nin O etrafındaki bütün dönmelerinin cümlesi $R_0(n)$ ile gösterilir [14].

2.1.34. Tanım: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ dönüşümü $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n)$ için

$$T(X) = (x_1 + t_1, \dots, x_n + t_n), \quad t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$$

biçiminde tanımlı ise T ye $\mathbb{R}^n$ deki bir öteleme denir. $\mathbb{R}^n$ nin bütün ötelemelerinin cümlesi $T(n)$ ile gösterilir [14].

2.1.35. Tanım: $T \in T(n)$ ve $R_0 \in R_0(n)$ olmak üzere elemanları $T \circ R_0$ ve $R_0 \circ T$ biçimindeki genel hareket denen bir $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümleridir [14].

2.1.36. Tanım: M bir Hausdorff uzayı olsun. M nin her bir açık alt cümlesi $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt cümlesine homeomorf ve M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebiliyorsa M ye n -boyutlu topolojik manifold denir [13].

2.1.37. Tanım: M bir topolojik manifold olsun. $U \subset M$ açık alt cümlesinden $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt cümlesine bir $\Psi : U \rightarrow V$ homeomorfizmi verilsin. (Ψ, U) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir. $\Psi_i = y_i \circ \Psi (1 \leq i \leq n)$ olmak üzere Ψ_i lere Ψ haritasına bağlı koordinat fonksiyonları denir [13].

2.1.38. Tanım: M bir topolojik n -manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha\}$ olsun. W_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{W_\alpha\}$ örtüsü için $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. $\mathbb{R}^n$ de W_α ya bir Ψ_α homomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle W_α olsun. Böylece ortaya çıkan (Ψ_α, W_α) haritalarının

$$S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

koleksiyonuna bir atlas(=koordinat komşuluğu sistemi) denir [13].

2.1.39. Tanım: Bir topolojik n -manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\Phi_{\alpha\beta}$ ve $\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir [13].

2.1.40. Tanım: M n -boyutlu topolojik manifold ve M nin bir S atlası C^k sınıfından ise M manifolduna n boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold denir [13].

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.1. ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLER

3.1.1. Tanım: IN ve ID , elemanları, sırasıyla, noktalar ve doğrular olan ve I , $IN \cap ID = \emptyset$ özelliğine sahip iki cümle, $\circ$ de $IN \times ID$ cümlesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset IN \times ID$) olmak üzere aşağıda verilen $A1$, $A2$ ve $A3$ aksiyomlarını gerçekleyen $(IN, ID, \circ)$ sistemine afin düzlem denir:

$A1$: Her $M, N \in IN$, $M \neq N$, noktaları için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in ID$ doğrusu vardır.

$A2$: $N \not\circ d$ olmak üzere her $N \in IN$ ve her $d \in ID$ için $N \circ c$ ve $d \parallel c$ olacak şekilde bir tek $c \in ID$ doğrusu vardır.

$A3$: Doğrudaş olmayan üç nokta vardır [18].

3.1.2. Tanım: Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. A aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$A1$: $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

$A2$: $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [13].

3.1.3. Tanım: Nokta, doğru ve düzlem denilen tanımsız geometrik nesnelerden oluşan boş olmayan üç ayrık cümle, bu cümlelerin elemanlar arasında tanımlı üzerinde bulunma bağıntılarıyla birlikte aşağıdaki aksiyomlar da gerçekleşiyorsa bunların hepsine birden bir projektif 3-uzay denir:

$P1$: Farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

$P2$: Her doğru üzerinde en az üç nokta vardır.

$P3$: Doğrudaş olmayan üç nokta bir tek düzlem üzerindedir.

$P4$: Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve hepsi ayn düzlemde bulunmayan dört nokta vardır.

$P5$: Bir doğru ve bir düzlemin en az bir ortak noktası vardır.

$P6$: İki düzlemin en az bir ortak doğrusu vardır [18].

3.1.4. Tanım: Afin düzlemde birbirini paralel bütün doğrular cümlesine bir paralel doğru demeti denir. Düzlemde her bir demet için bu demetin tüm doğrularının üzerinde bulunan ama afin düzlemin noktalar cümlesinde bulunmayan bu yeni noktaya ideal nokta, ideal noktaların üzerinde bulunduğu doğruya da ideal doğru denir [18].

3.1.5. Tanım: $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ 3-boyutlu bir vektör uzayı ve $\mathbb{R}^3$ de $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. x ve y nin Lorentz iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

ile tanımlanır. $E_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle x, y \rangle_L)$ na 3-boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayı denir [4].

3.1.6. Tanım: $M \subset E_1^3$ bir manifold ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

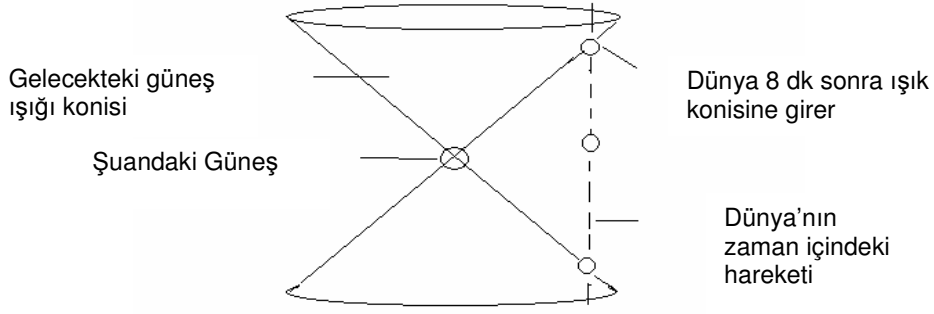
$\langle T, T \rangle > 0$ veya $T = 0$ ise α ya spacelike eğri,

$\langle T, T \rangle < 0$ ise α ya timelike eğri,

$\langle T, T \rangle = 0$ veya $T \neq 0$ ise α ya (null)lightlike eğri

denir [25].

3.1.7. Sonuç: 1905' te Einstein' ın özel görelilik kuramı , uzay ve zamanı tek bir matematiksel tanımda birleştirmiştir. 1907 yılında Hermann Minkowski bunun , zamanı üç boyutunu da bir anlamda dik olan dördüncü bir boyut olarak kabul etmekle eşdeğer olduğunu farketmiştir. Minkowski görelilik kuramını geometri ile açıklamıştır. Özel görelilik kuramı, hareket eden cetvellerin kısılacacağı, hareket eden saatlerin ise yavaşlayacağı şeklinde ilginç bir öngöründe bulunmaktadır. Minkowski' nin fikirleri buna açıklık getirmektedir. Uzay ve zamanda var olan her şey yayılım adı verilen dört boyutlu bir "uzunluğa" sahiptir. Bu Pythagoras teoreminin dört boyutlu versiyonu kullanılarak hesaplanır. Yayılım sabit bir özelliktir. Yayılımın, kendini üç boyutlu uzunluk olarak gösteren kısmı ile zaman aralığı olarak gösteren kısmı hareket halindeki gözlemcinin bakış açısına bağlıdır. Bunların ikisi her zaman birbirini tamamlar [12].



Şekil 3.1. Güneş Işığının Olay Çizgisi

3.1.8. Sonuç: Bir Minkowski şemasında ışık ışınları, yatayla 45° lik açı yapan olay çizgileri şeklinde gösterilir. Daha yatık olay çizgileri ışıktan daha hızlı harekete karşılık gelir ki bu olanaksızdır. Dünya Güneş' ten 8 ışık dakikasından biraz daha uzaktır. Yani Güneş' ten çıkan bir ışık ışınının Dünya' ya ulaşması 8 dakikayı bulur. Şemada Dünya dimdik yukarı doğru hareket etmektedir , dolayısıyla uzayda Güneş' e göre bir hareketi söz konusu değildir. Güneş ışığının olay çizgisi bir koni oluşturur. Güneş' ten çıkan bir ışık demeti, bu ışık konisinin kenarı boyunca hareket eder ve Dünya' ya ancak Dünya zaman içinde geleceğe doğru 8 dakikadan biraz daha fazla ilerleyip ışık konisine girdiği zaman etkiler [12].

3.1.9. Tanım: Dual sayı : $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

iki boyutlu reel vektör uzayıdır. E.STUDY(1862-1930) nın keşfettiği dual sayılar cümlesi,

$$D = \{z = x + \varepsilon y | x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0\}$$

olmak üzere, $(D, +)$ bir Abel grubu oluşturur [15].

3.1.10. Tanım: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

şeklindeki bir $M: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna Möbius dönüşümü denir.

Burada $c = 0$ alınırsa, bu takdirde $M(\infty) = \infty$ olur, aksi halde $M(-d/c) = \infty$ ve $M(\infty) = a/c$ dir [11].

3.1.8. Tanım(Öklidyen Olmayan Hareketler): Birim dairesini sabit bırakan Möbius dönüşümlerinin grubu ile katı düzlem hareketlerinin (öteleme ve dönme) grubu arasında çok benzerlik vardır. Farklı olarak doğruların rolünü, birim çemberine dik çemberlerin, birim dairesinin iç bölgesine ait kısımları alır. Bu çember parçalarına Öklidyen olmayan doğrular denir. $|z| < 1$ dairesine Öklidyen olmayan düzlem (veya hiperbolik düzlem) ve $|z| < 1$ sabit bırakan Möbius dönüşümlerine de Öklidyen olmayan hareketler denir.

3.1.9. Tanım: z_1, z_2 sabit noktalar ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

normal biçimde verilen $z \rightarrow w$ doğrusal dönüşümüne eliptik dönüşüm denir [27].

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4.1. GALILEAN DÜZLEMİ

Galilean geometrisi ismini 17. yüzyılda yaşayan ünlü Galileo Galilei' den almasının nedeni Galilean' nın görelilik kuramıyla bağlantılı olmasındandır. Şimdi bu kuramı kısaca inceleyelim:

4.1.1. Tanım (Galilean Koordinat Sistemi): Bilindiği gibi Galile-Newton mekaniğin temel yasası olan atalet yasası şöyle ifade edilebilir. Diğer cisimlerden yeterince uzaklaştırılmış olan bir cisim durmaya, yada düz bir çizgi üstündeki düzgün hareketine devam eder. Bu yasa sadece cisimlerin hareketi konusunda birşeyler belirtmekle kalmıyor, aynı zamanda mekanik tanımda hangi referans cisimlerinin ya da koordinat sistemlerinin kullanılabileceğini de gösteriyor. Kuşkusuz ki atalet yasası, görünen yıldızlar için oldukça büyük bir yaklaşıklıkla geçerlidir. Eğer dünyaya yerleştirilmiş bir koordinat sistemi kullanırsak, o zaman bu sisteme göre her sabit yıldız astronomik günde (Dünyanın kendi eksenini etrafında bir tam dönüşü) kocaman çaplı birer daire çizer ki, bu da atalet yasasına aykırı birşeydir. Böylece, eğer bu yasaya bağlı kalırsak bu hareketleri sabit yıldızların, onlara göre bir daire çizmedikleri koordinat sistemine göre tanımlamalıyız. Kendisine göre atalet yasasının geçerli olduğu hareketlerin koordinat sistemine "Galile koordinat sistemi" denir. Galile-Newton mekaniğinin yasaları, ancak Galile koordinat sistemi için geçerli kabul edilebilir [8].

Galilean düzlem geometrisi, bir doğru üzerinde klasik mekaniğin ya da dönüşümlerin geometrisi olarak düşünülebilir [28].

4.1.2. Tanım: Galilean geometrisi, xoy düzleminde

$$x' = x + a,$$

$$y' = vx + y + b, \tag{4.1.1}$$

eşitlikleri ile verilen harekete sahip bir geometridir. (4.1.1) hareketi altında (ya da buna denk olan

$$x' = x,$$

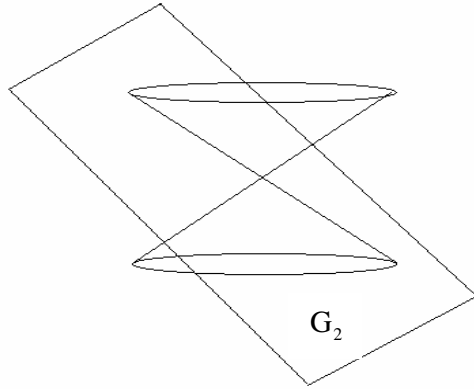
$$y' = vx + y,$$

ve

$$x' = x + a,$$

$$y' = y + b,$$

eşitlikleri altında) xoy düzlemindeki şekillerin özellikleri değişmezdir [28].



Şekil 4.1. Galilean Düzlemi ve Koni

4.1.3. Sonuç: (4.1.1) hareketi ile,

- a) doğrular doğrulara,
- b) paralel doğrular paralel doğrulara,
- c)doğrudaş AB,CD doğru parçaları, $C'D'/A'B' = CD/AB$ olmak üzere doğrudaş $A'B',C'D'$ parçalarına,
- d) Bir F şekli aynı bölgedeki bir F' şekline dönüşür [28].

4.1.4. Tanım: $z_1 = x_1 + \epsilon y_1$ ve $z_2 = x_2 + \epsilon y_2$ olmak üzere

$$\langle z_1, z_2 \rangle : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = \text{re}(z_1 z_2) = x_1 x_2$$

olarak tanımlanan $\langle, \rangle$ işlemi D üzerinde indefinit iç çarpım işlemidir [15].

4.1.5. Tanım: D afin uzayını $\mathbb{R}^2$ üzerindeki yukarıdaki iç çarpım ile düşünersek, D ye Galilean düzlemi denir ve $(\mathbb{R}^2, D, \langle, \rangle)$ veya G_2 ile gösterilir [26].

4.1.6. Tanım. G_2 Galilean düzleminde $X(x_1, y_1)$ ve $Y(x_2, y_2)$ olmak üzere

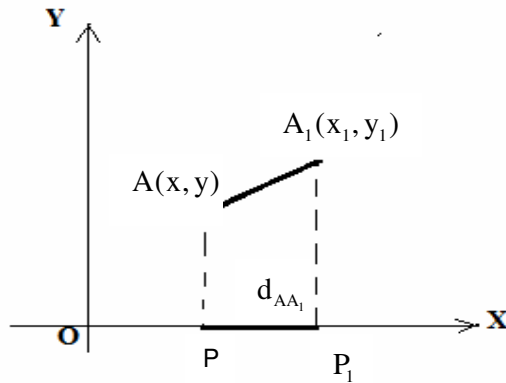
$$\langle X, Y \rangle = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2, & x_1 = 0 \wedge x_2 = 0, \end{cases}$$

ile tanımlanan $\langle, \rangle$ işlemine G_2 Galilean düzleminde iç çarpım denir [7].

4.1.7. Tanım: Galilean geometride $A(x, y)$, $A_1(x_1, y_1)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_{AA_1} = x_1 - x$$

dir, yani AA_1 doğru parçasının x-ekseni üzerindeki PP_1 projeksiyonunun işaretli uzunluğudur.

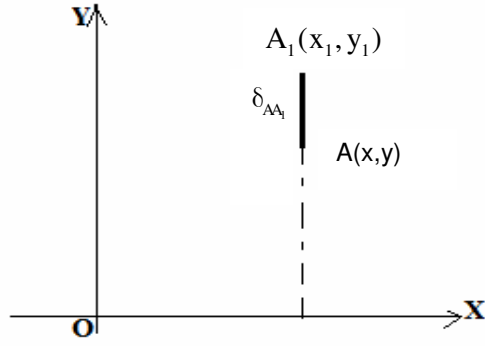


Şekil 4.2. Galilean Düzleminde Uzaklık

$d_{AA_1} = 0$ ise $x_1 = x$ ve A ve A_1 aynı özel doğru(oy-eksenine paralel doğru) üzerindedir. Bu durumdaki noktalar arasındaki özel uzaklık

$$\delta_{AA_1} = y_1 - y$$

şeklinde tanımlanır [28].



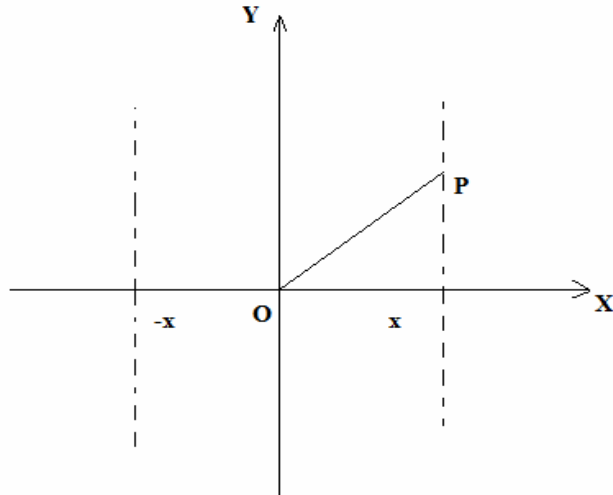
Şekil 4.3. Galilean Düzleminde Özel Uzaklık

Basitliğin sağlanması amacıyla aşağıdaki tanımı verebiliriz:

4.1.8. Tanım. G_2 Galilean düzleminde $X(x_1, y_1)$ ve $Y(x_2, y_2)$ olmak üzere

$$d(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y)_1 = |x_2 - x_1|, & x_1 \neq x_2, \\ d(X, Y)_2 = |y_2 - y_1|, & x_1 = x_2, \end{cases}$$

ile tanımlanan $d(\cdot)$ işlemine G_2 Galilean düzleminde uzaklık denir [2].



Şekil 4.4. Galilean Düzleminde Bir Noktanın Orjine Uzaklığı

4.1.9. Sonuç. Galilean düzleminde $d(X, Y)_1 = 0$ olduğunda vektörlerden en az biri oy-eksenine paraleldir [2].

4.1.10. Sonuç. Galilean düzleminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki $d(A, B)_1 = |x_2 - x_1|$ uzaklığı AB doğru parçasının ox-ekseni üzerine izdüşümüdür. Eğer $d(A, B)_1 = 0$ ise A ve B oy-eksenine paralel doğru üzerindedir. Bu durumda $d(A, B)_2 = |y_2 - y_1|$ uzaklığı AB doğru parçasının oy-eksenine izdüşümüdür [2].

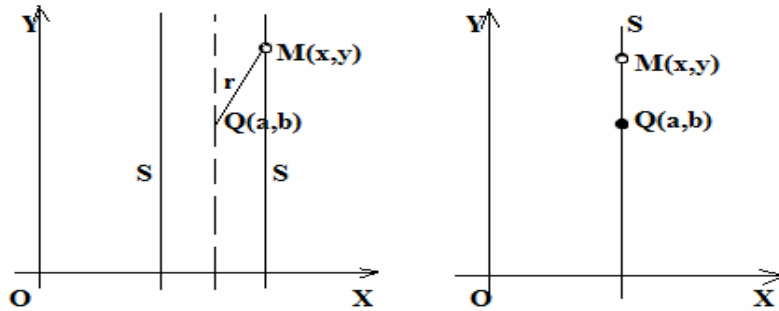
4.1.11. Tanım: Galilean düzleminde sabit bir $Q(a, b)$ noktasına mutlak uzaklığı r olan $M(x, y)$ noktalarının cümlesine Galilean çemberi denir ve S_G^r ile gösterilir. $q = a^2 - r^2$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} d_G(Q, M) &= r \\ S_G^r &= \{M(x, y) \mid d_G^2(Q, M) = r^2\} = p = -a \\ (x - a)^2 &= r^2 \end{aligned} \right\}$$

veya

$$x^2 + 2px + q = 0$$

şeklinde tanımlanır. Q merkezli, r yarıçaplı S_G^r Galilean çemberi, Q noktasına Öklid anlamda r uzaklıkta olan iki özel (oy-eksenine paralel) doğru üzerindeki noktalardan oluşur. $r = 0$ ise bu iki özel doğru çakışır. Önemle vurgulamalıyız ki, r yarıçapı iki bileşenli özel doğrular arasındaki Öklid mesafesinin yarısı ise bir S_G^r Galilean çemberi, Q noktasından geçen özel doğru üzerinde sonsuz çoklukta merkeze sahiptir [28].



Şekil 4.5. Galilean Düzleminde r Yarıçaplı Galilean Çemberi

4.1.12. Sonuç. Galilean düzleminde çember, oy-eksenine paralel iki özel doğrudur [2].

4.1.13. Tanım: Galilean düzleminde birim çember,

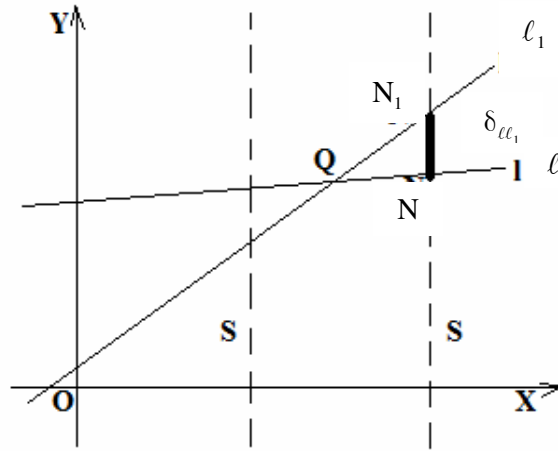
$$S_G^1 = \{P(x, y) \mid d_G(O, P) = 1\}$$

şeklinde tanımlanır [28].

4.1.14. Tanım: Galilean düzleminde, ℓ ve ℓ_1 doğruları arasındaki $\delta_{\ell\ell_1}$ açısının ölçüsü, bu doğruların ortak noktasını merkez alan birim çember üzerinde belirli NN_1 yayının uzunluğudur. Doğal olarak bu birim Galilean çemberi üzerindeki NN_1 yayının uzunluğu

$$\delta_{\ell\ell_1} = NN_1 = \delta_{NN_1}$$

δ_{NN_1} özel uzaklığıdır [28].



Şekil 4.6. Galilean Düzleminde Doğrular Arasındaki Aç

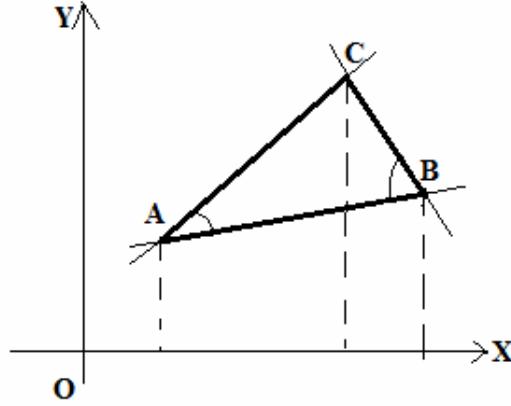
4.1.15. Sonuç. Merkezi başlangıçta olan birim çemberi ele alalım. $X(1, y_1)$ ve $Y(1, y_2)$ bu çemberin iki birim yarıçapı olsun. X, Y vektörleri arasındaki açı bu vektörlerin uç noktaları arasındaki $|y_2 - y_1|$ yayının uzunluğudur. Vektörlerden birinin yönünü oy-ekseninin yönüne çevirirsek, açı sonsuz artar [2].

4.1.16. Sonuç. Galilean düzleminde noktaların ve doğruların özellikleri tamamen aynıdır. Örnek olarak, üçgenin kenarları ve açıları arasındaki bağıntıyı verebiliriz [2].

4.1.17. Tanım: Galilean düzleminde herhangi bir ABC üçgenindeki kenar uzunluklarını incelediğimizde;

$$\left. \begin{array}{l} d_{AB} = a + b \\ d_{BC} = a \\ d_{CA} = b \end{array} \right\} d_{BC} + d_{CA} = d_{AB}$$

olduğu görülür [28].



Şekil 4.7. Galilean Düzleminde Bir ABC Üçgeninde Kenar Uzunlukları

4.1.18. Sonuç: Galilean düzleminde iki kenarın uzunlukları toplamı üçüncü kenarın uzunluğuna eşittir [26].

4.1.19. Tanım: Galilean düzleminde herhangi bir ABC üçgeninin açılarının ölçüleri incelendiğinde;

$$\left. \begin{array}{l} m(ABC) = d_{KP} \\ m(BAC) = d_{AK} \\ m(ACB) = d_{AP} \end{array} \right\} d_{KP} + d_{AK} = d_{AP}$$

den dolayı

$$m(B) + m(A) = m(C)$$

olduğu görülür [28].



22

4.2. GALILEAN DÜZLEMİNDE KONUM VEKTÖRLERİ

Bu bölümde, G_2 Galilean düzleminde eğrilerin konum vektörleri incelenmiştir.

4.2.1. Tanım: $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\varphi: I \rightarrow G_2$ biçiminde diferensiyellenebilir bir φ dönüşümüne, G_2 de bir eğri denir.

Düzlemde verilen eğrinin Frenet eşitlikleri

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= 0, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

şeklindedir, burada T, N , sırasıyla, eğrinin teğet, aslinormal ve binormal vektörleridir.

4.2.2. Teorem: G_2 Galilean düzleminde $\varphi = \varphi(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde, $\varphi(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\varphi(s) = (s + c_1)T + \left(-\frac{1}{2}\kappa s^2 - \kappa c_1 s + c_2\right)N$$

şeklindedir. Burada c_1 ve c_2 integral sabitleridir.

İspat. G_2 de $\varphi(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. G_2 deki $\varphi(s)$ eğrisinin konum vektörünü Frenet çatısına göre

$$\varphi(s) = \delta T + \lambda N$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin türevi alınır,

$$(\delta' - 1)T + (\delta\kappa + \lambda')N = 0$$

ve buradan da

$$\begin{cases} \delta' = 1, \\ \delta\kappa + \lambda' = 0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

bulunur. (4.2.2) denkleminde birinci eşitlikten

$$\delta = s + c_1,$$

ikinci eşitlikten de

$$\lambda = -\frac{1}{2}\kappa s^2 - \kappa c_1 s + c_2$$

elde edilir. Burada c_1 ve c_2 integral sabitleridir. Bu takdirde

$$\varphi(s) = (s + c_1)T + \left(-\frac{1}{2}\kappa s^2 - \kappa c_1 s + c_2\right)N$$

yazabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

4.2.3. Teorem: G_2 Galilean düzleminde $\varphi = \varphi(s)$, $\kappa \neq 0$ eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde, $\varphi(s)$ eğrisinin konum vektörü ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemi sağlar.

İspat. G_2 de $\varphi = \varphi(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda (4.2.1) denklemlerinden

$$N = \frac{1}{\kappa} T' = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds}$$

yazılabilir. Burada türev alınırsa

$$N' = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} \right] = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $\phi = \int \kappa ds$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{d^2 T}{d\phi^2} = 0 \tag{4.2.3}$$

bulunur ve (4.2.3) denkleminin çözümünde a ve b keyfi sabitler olmak üzere

$$T = a \int \kappa ds + b$$

şeklinde elde edilir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5.1. ÜÇ BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA EĞRİLER VE KAREKTERİZASYONLARI

5.1.1. Tanım: $\{x,y\}$ koordinat sistemi ile verilmiş bir düzlemi gözönüne alalım. Bir A noktasında mekanik hareket

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

formülleriyle verilir. Bu bize verilen (x,y) koordinatlarının t zamanına göre nasıl değiştiğini verir. $\{x,y\}$ nin ox , oy eksenlerinin bir α açısı boyunca döndürülmesi ve O orjininin O' noktasına döndürülmesiyle elde edilen yeni koordinat sistemine $\{x',y'\}$ diyelim. Yani $\{x,y\}$ ile $\{x',y'\}$ koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + a,$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b,$$

şeklindedir. Burada ox ve $o'x'$ eksenleri arasındaki açı α ve yeni koordinat sisteminde O nun koordinatları (a,b) ile gösterilmiştir. Bunun anlamı, mekanik anlamlı bir konum, dönüşümler altında şeklini korur. Ek olarak Galilei' nin görelilik ilkesine göre (x,y) yada (x',y') koordinatlarına ilişkin bütün mekanik süreçlerin tanımı, eğer $\{x,y\}$ koordinat sisteminin eksen ve orjini $\{x',y'\}$ koordinat sistemine göre tek biçimde ilerlerse yada buna denk olarak; $\{x,y\}$ eski koordinat sisteminin eksen ve orjini $\{x',y'\}$ yeni koordinat sistemine göre tek biçimde ilerlerse değişmez. Şimdi eğer $\{x,y\}$ nin O orjini v hızı ile $o'x'$ eksenine β açısı yapan l doğrusu boyunca ilerlerse, bu takdirde $\{x',y'\}$ ne göre O noktasının t zamanında $a(t)$ ve $b(t)$ koordinatları

$$a(t) = a + v \cos \beta t,$$

$$b(t) = b + v \sin \beta t,$$

dir. ($t=0$ da $\{x,y\}$ ye göre O nun koordinatları a ve b dir.) Buradan $\{x',y'\}$ ve $\{x,y\}$ ye göre bir A noktasındaki (x',y') ve (x,y) koordinatları arasındaki bağıntı

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta)t + a,$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta)t + b,$$

bulunur. Bu da mekanik anlamlı tüm özelliklerin dönüşümler altında değişmeyen formüller ile ifade edilebileceği demektir.

Zamanın bütün mekanik kuralları sisteminde aynı olduğu düşünülürse, buna zaman orjiniindeki değişim,

$$t' = t + d,$$

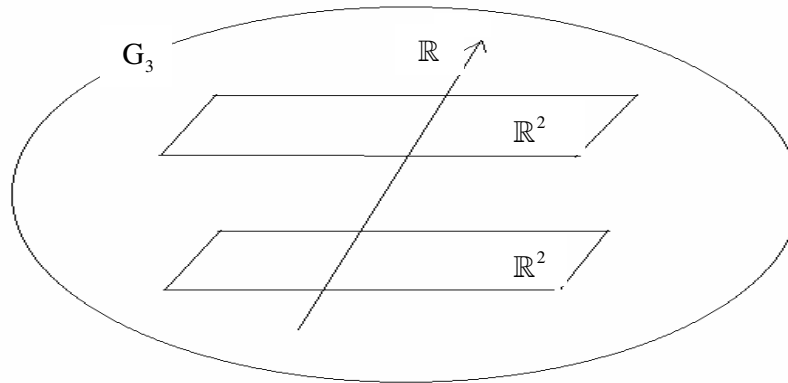
dönüşümü de eklenebilir. Buradaki d yeni zaman sisteminde, eski zaman orjiniinin zamanıdır ($t=0$ anında). Öyleyse

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta)t + a,$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta)t + b,$$

$$t' = t + d,$$

elde edilir. Son verilen formül fizik uzay-zamanda bir dönüşümdür. Bu şekildeki dönüşümlere Galilei dönüşümleri denir [28].



Şekil 5.1. Galilean Uzayı

Ya da daha bilinen şekilde Galilean uzayındaki bu hareket gruplarını açıklayabiliriz:

5.1.2. Tanım: G_3 Galilean uzayı, 3-boyutlu bir P_3 kompleks projektif uzayının w ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini, $f \subset w$ ideal doğrularının bir reel doğrusunu ve $I_1, I_2 \in f$ gibi ideal noktalardan iki tanesini içeren $\{w, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahip olan bir halidir [17].

G_3 uzayının bir reel modeli olarak, ε eliptik involusyonu ile birlikte $f \subset w$ reel doğrusunu ve $w \subset G_3$ reel düzlemini içeren $\{w, f\}$ idealine sahip bir reel P_3 projektif uzayını alabiliriz.

Uygun koordinatlarda ε eliptik involusyonunu

$$\begin{aligned} w \dots x_0 &= 0, \\ f \dots x_0 &= x_1 = 0, \\ \varepsilon : (0 : 0 : x_2 : x_3) &\rightarrow (0 : 0 : x_3 : -x_2). \end{aligned}$$

Homojen olmayan koordinatlarda H_8 benzerlik grubu

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} + a_{12}x, \\ y' &= a_{21} + a_{22}x + a_{23}y \cos \varphi + a_{23}z \sin \varphi, \\ z' &= a_{31} + a_{32}x - a_{23}y \sin \varphi + a_{23}z \cos \varphi, \end{aligned}$$

formundadır. Burada a_{ij} ve φ reel sayılardır.

Burada a_{12} ve a_{23} katsayıları özel bir rol oynar. $a_{12} = a_{23} = 1$ alındığında Galile uzayının B_6 hareket grubu elde edilir. Bu grup

$$\begin{aligned} x' &= a + z, \\ B_6, \dots, y' &= b + cx + y \cos \varphi + z \sin \varphi, \\ z' &= d + ex - y \sin \varphi + z \cos \varphi, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

şeklinde hareket eder [17].

5.1.3. Sonuç: 3-boyutlu Galilean uzayında hareketler (5.1.1) denklemler sistemiyle ifade edilir. $\{e_1(1,0,0), e_2(0,1,0), e_3(0,0,1)\}$ ortonormal baz olsun. O zaman kolayca gösterilebilir ki, uzayın hareketi e_2 ve e_3 vektörlerine paralel düzlemi bu düzleme paralel başka bir düzleme dönüştürür. Bu düzlemler Öklid düzlemlerdir. e_2, e_3 vektörlerine paralel olmayan düzlemlere genel durumdaki düzlemler denir [2].

5.1.4. Tanım: G_3 Galilean uzayında verilen hareket boyunca doğrular dört sınıfa ayrılır.

Bu doğrular aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

- 1) Reel non-izotropik doğrular. Bu doğrular f ideal doğrusunu kesmezler.
- 2) Reel izotropik doğrular. Bu doğrular w ideal düzlemine ait değildir, fakat f ideal doğrusunu keserler.
- 3) Reel olmayan non-izotropik doğrular. Bu doğrular f den başka w nın bütün doğrularıdır.
- 4) f ideal doğrusu [17].

5.1.5. Teorem. G_3 Galilean uzayında hareket grupları göz önüne alındığında üç düzlem sınıfı mevcuttur: w ideal düzlemi, Öklid düzlemleri ve izotrop düzlemler. Bu düzlem sınıfları tarafından elde edilen geometri ilk iki sınıfta Öklid, sonuncu da ise izotropdur [22].

5.1.6. Sonuç: G_3 Galilean uzayında $x = \text{sabit}$ alındığında düzlemler Öklidiyendir, bu ise w düzlemidir. Diğer düzlemler izotropiktir [17].

5.1.7. Tanım: G_3 Galilean uzayında noktalar üç sınıfa ayrılır: Esas noktalar (w üzerinde), mutlak olmayan ideal noktalar (f üzerinde olmayan) ve mutlak ideal (f üzerinde) noktalardır [22].

Bütün bu incelemelerden sonra G_3 3-boyutlu Galilean uzayına dair aşağıdaki tanımları verebiliriz:

5.1.8. Tanım: $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ile $G_3 \neq \emptyset$ nokta cümlesini afin anlamda eşleyelim. $\mathbb{R}^3$ de norm operatörünü $\forall X \in \mathbb{R}^3$ için

$$\|X\| = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ uzayına Galilean uzayı denir ve G_3 ile gösterilir [26].

5.1.9. Tanım: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında $X(x_1, y_1, z_1)$ ve $Y(x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0, \\ y_1 y_2 + z_1 z_2, & x_1 = 0 \wedge x_2 = 0, \end{cases}$$

ile tanımlanan $\langle, \rangle$ işlemine G_3 Galilean uzayında iç çarpım denir [22].

5.1.10. Tanım: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında $X(x_1, y_1, z_1)$ ve $Y(x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere

$$d(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y)_1 = |x_2 - x_1|, & x_1 \neq x_2, \\ d(X, Y)_2 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, & x_1 = x_2, \end{cases}$$

ile tanımlanan $d(,)$ işlemine G_3 Galilean uzayında uzaklık denir [2].

5.1.11. Sonuç: Galilean iç çarpımı ile noktalar arasındaki birinci uzaklık, aralarındaki zaman aralığına eşit olur. Bu uzaklık sıfır olduğunda noktalar aynı Öklid düzlemde olurlar ve aynı zamanlı olayları gösterirler. Bu durumda ikinci uzaklık bu noktalar arasındaki Öklid uzaklığıdır [2].

5.1.12. Tanım: G_3 uzayının küresi, bir X_0 noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktalar cümlesi,

$$\langle X - X_0, X - X_0 \rangle = r^2$$

denklemini ile gösterilir.

X_0 küresinin merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı 1 ise denklemini

$$\langle X, X \rangle = 1 \tag{5.1.2}$$

şeklindedir [2].

5.1.13. Sonuç: Galilean uzayının küresi, iki Öklid düzleminden oluşur [2].

5.1.14. Sonuç: (5.1.2) denklemini sağlayan noktalar, Öklid düzlemlere başlangıç noktasından 1 birim uzaklıkta olan iki paralel oluşturmaktadır [2].

5.1.15. Tanım: $X(x_1, y_1, z_1)$ ve $Y(x_2, y_2, z_2)$ iki uzay vektörünü göz önüne alalım, yani $x_1 x_2 \neq 0$ olsun. Bu vektörlerle aynı yönde olan birim vektörler

$$\bar{X}(1, \frac{y_1}{x_1}, \frac{z_1}{x_1}), \bar{Y}(1, \frac{y_2}{x_2}, \frac{z_2}{x_2})$$

dir. Bu vektörler birim kürenin noktalarının yarıçap vektörleridir [2].

G_3 deki düzlemler arasındaki açıyı hesaplamak için projektif duallikten yararlanılır. Basit durumda bu, Öklid uzayındaki yüzeyin teğet düzlemi ile küresel dönüşümü arasındaki ilişkidir. Küresel koordinatların teğet düzlemindeki inşasında düzlemin normali belirlenir, bu normal birim küresini belirli bir noktada keser ve bu nokta düzlemin küresel koordinatlardaki görüntüsüdür. Bu düşünce projektif geometride çok kullanılan düzlemde doğrunun (veya düzlemle küresel koordinatlardaki görüntü cümlelerinin) duallığıdır [2].

5.1.16. Tanım: Uzay vektörleri arasındaki açı birim vektörlerin uç noktaları arasındaki uzaklık olarak tanımlanır ve

$$h = \sqrt{\left(\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{x_1} - \frac{z_2}{x_2}\right)^2} \quad (5.1.3)$$

formülü ile hesaplanır. Burada $0 \leq h < \infty$ ve vektörlerden biri Öklid vektörlere yaklaştığında $h \rightarrow \infty$ dır.

$h = 0$ ise X, Y vektörleri paraleldir. $X(x_1, y_1, z_1)$ uzay vektörü ile $Y(0, y_2, z_2)$ Öklid vektörü arasındaki açı

$$f = \frac{d(X, Y)_2}{\|Y\|_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1} y_2 + \frac{z_1}{x_1} z_2}{\sqrt{y_2^2 + z_2^2}} \quad (5.1.4)$$

dır. f açısının geometrik değeri X birim vektörünün, Y vektörünün Öklid düzlemde yönüne izdüşümünün uzunluğuna eşittir. Yani $f = 0$ dır. Öklid vektörler arasındaki açı Öklid haldeki gibi

$$\cos \theta = \frac{y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{y_1^2 + z_1^2} \sqrt{y_2^2 + z_2^2}} = \frac{d(X, Y)_2}{\|X\|_2 \|Y\|_2}$$

şeklinde dir. (5.1.3) ve (5.1.4) de tanımlanan açılar paraboliktir [2].

5.1.17. Sonuç: Vektörler arasındaki açı yardımıyla Galilean uzayında doğrular arasındaki açı yönlendirici vektörleri arasındaki açı olarak tanımlanır [2].

5.1.18. Tanım: G_3 uzayında Öklid olmayan iki düzlemin denklemi

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

olsun. Bu tür düzlemler (yani Öklid olmayan) Galilean düzlemleridir [2].

5.1.19. Tanım: G_3 uzayında (5.1.5) denklemleri ile iki düzlem verilsin. Bu düzlemler arasındaki açı

$$\cos \theta = \frac{C_1C_2 + B_1B_2}{\sqrt{B_1^2 + C_1^2} \sqrt{B_2^2 + C_2^2}}$$

şeklindedir [2].

5.1.20. Sonuç: (5.1.5) denklemleriyle verilen düzlemler bir Öklid düzlemle bir doğru boyunca kesişebilir. $\cos \theta$ formülüyle tanımlanan düzlemler arasındaki açı, $x=0$ Öklid düzlemi ile kesiştiği doğru ile bu düzlemler arasındaki açiya eşittir [2].

5.1.21. Tanım: (5.1.5) denklemleri ile verilen düzlemler paralel ise $\cos \theta = 0$ dır. Bu durumda f_2 açısı

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{B_1^2 + C_1^2}} |A_2 - A_1|$$

formülü ile hesaplanır. f_2 açısının değeri, verilen düzlemlerin birim yarıçaplı, merkezi düzlemlerin kesişme noktasında bulunan küre ile kesişiminden oluşan paralel doğrular arasındaki uzaklığa eşittir [2].

5.1.22. Tanım: $\theta = f_2 = 0$ ise (5.1.5) denklemleri ile verilen düzlemlere paralel düzlemler denir ve bu paralel düzlemler arasındaki uzaklık

$$d = \frac{1}{\sqrt{B^2 + C^2}} |D_2 - D_1|$$

ile hesaplanır [2].

5.1.23. Teorem: $I \subset \mathbb{R} (0 \subset I)$ aralığında her $s \in I$ için $\kappa(s)$ bir C^1 fonksiyon ve $\tau(s)$ $\kappa(s) \geq 0$ olmak üzere C de bir fonksiyon ve P_0 noktası verilsin. P_0 noktasında ortonormal üç yüzölçümü $\{T, N, B\}$ olsun. s Galilean yay uzunluğu ile tanımlı bir uzay eğrisi vardır, bu eğrinin $\kappa(s)$ Galilean eğriliği, $\tau(s)$ Galilean torsiyonu ve P_0 noktasında $s=0$ için bir $\{T, N, B\}$ üç yüzölçümü vardır [22].

5.1.24. Sonuç: Sabit eğrilikli eğriler G_3 Galilean uzayında izotrop çemberlerdir. κ sabit eğriliği ve τ sabit torsiyonu yukarıdaki teorem yardımıyla bulunur [22].

5.1.25. Tanım: G_3 Galilean uzayında $(\dot{\varphi}(t) \times \ddot{\varphi}(t) \neq \sigma)$ dönüm noktasından bağımsız ve f mutlak doğrusunun teğeti sıfırdan farklı olacak şekilde bir uzay eğrisi

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$(x(t), y(t), z(t)) \in C^3, t \in (-\infty, +\infty)$ ile tanımlanır [22].

5.1.26. Tanım: G_3 Galilean uzayında bir φ eğrisinin ds yay elementi

$$ds = \dot{x}(t)dt = dx$$

şeklindedir [22].

5.1.27. Tanım: Burada C^3 sınıfından bir $\varphi: I \rightarrow G_3$ eğrisi (I, φ) koordinat komşuluğu ile $\varphi(x) = (x, y(x), z(x))$ şeklinde verildiğinde $\kappa(x)$ eğriliği ve $\tau(x)$ torsiyonu

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}$$

$$\tau(x) = \frac{\det(\varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece G_3 Galilean uzayında ortonormal üçyüzölçümü

$$T(x) = \varphi'(x),$$

$$N(x) = \frac{1}{\kappa(x)}(0, y'(x), z''(x)),$$

$$B(x) = \frac{1}{\kappa(x)}(0, -z'(x), y''(x)),$$

şeklinde verilebilir. Burada T, N, B vektörleri sırasıyla, φ eğrisinin teğet, aslinormal ve binormal vektörler olarak adlandırılır. Bu vektörlerin türevleri alınarak Frenet formülleri

$$T'(x) = \kappa(x)N(x),$$

$$N'(x) = \tau(x)B(x),$$

$$B'(x) = -\tau(x)N(x), \quad (5.1.6)$$

şeklinde elde edilir [17].

5.1.28. Sonuç: Ayrıca, Galilean uzayında verilen Frenet formüllerinden

$$\varphi'''(x) = \kappa(x)\tau(x)B(x) + \kappa'(x)N(x)$$

bulunur [22].

5.2. ÜÇ BOYUTLU GALILEAN UZAYINDA HELİS

Bu kısımda G_3 3-boyutlu Galilean uzayında helisler incelenmiştir ve orijinal olarak bu uzayda eğriler ve helislerin konum vektörleri üzerine bazı teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca slant helis tanımlanarak bir eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter şart verilmiştir.

5.2.1. Tanım: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri ve $\{T, N, B\}$ G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ boyunca pozitif Frenet çatısı olsun. Eğer κ ve τ , φ boyunca pozitif sabitlerse, bu takdirde φ ya Frenet çatısına göre bir dairesel helis denir [9].

5.2.2. Tanım: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri ve $\{T, N, B\}$ G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ boyunca Frenet çatısı olsun.

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

olacak şekilde φ eğrisine Frenet çatısına göre bir genel helis denir [9].

5.2.3. Teorem: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. $\varphi, \{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - K \nabla_T T = 3\kappa' \nabla_T N \quad (5.2.1)$$

olmasıdır. Burada $K = \frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2$ [9].

İspat. $\varphi, \{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olsun. Bu takdirde (5.1.6) dan,

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T = (\kappa'' - \kappa \tau^2) N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') B \quad (5.2.2)$$

elde edilir. Şimdi, φ Frenet çatısına göre bir genel helis olduğundan

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

ve burada türev alınırsa

$$\kappa' \tau = \kappa \tau' \quad (5.2.3)$$

bulunur. (5.2.2) de

$$N = \frac{1}{\kappa} \nabla_T T, \quad (5.2.4)$$

$$B = \frac{1}{\tau} \nabla_T N \quad (5.2.5)$$

ve (5.2.3) denklemleri gözönüne alınırsa, (5.2.1) eşitliği elde edilir.

Tersine, (5.2.1) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. φ eğrisinin bir genel helis olduğunu gösterelim. (5.2.4) den türev alınırsa,

$$\nabla_T N = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \nabla_T T + \frac{1}{\kappa} \nabla_T \nabla_T T \quad (5.2.6)$$

ve böylece olur. Burada tekrar türev alınırsa,

$$\nabla_T \nabla_T N = \left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)' \nabla_T T - 2 \frac{\kappa'}{\kappa^2} \nabla_T \nabla_T T + \frac{1}{\kappa} \nabla_T \nabla_T \nabla_T T \quad (5.2.7)$$

elde edilir. (5.2.7) de (5.2.1) yerine yazılırsa,

$$\nabla_T \nabla_T N = \left[\left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)' + \frac{K}{\kappa} \right] \nabla_T T - 2 \frac{\kappa'^2}{\kappa^2} N + \frac{\kappa' \tau}{\kappa} B \quad (5.2.8)$$

bulunur. Ayrıca (5.2.7) den

$$\nabla_T \nabla_T N = -\tau^2 N + \tau' B \quad (5.2.9)$$

elde edilir. (5.2.8) ve (5.2.9) eşit olduğundan, gerekli hesaplamalardan sonra φ nin bir genel helis olduğu gösterilmiş olur.

5.2.4. Sonuç. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. φ , $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T = -\tau^2 \nabla_T T \quad (5.2.10)$$

olmasıdır [9].

İspat. Sonuç 5.2.4 ün hipotezinden ve φ bir dairesel helis olduğundan (5.2.10) eşitliği elde edilir.

5.2.5. Sonuç. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. φ , $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - K \nabla_T T = 3\lambda \tau' \nabla_T N \quad (5.2.11)$$

olmasıdır. Burada $K = \frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2$ ve $\lambda = \frac{\kappa}{\tau}$ = sabit tir [9].

İspat. Teorem 5.2.3 ün ispatına benzerdir.

5.2.6. Teorem: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. φ $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helistir, bu takdirde

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - \tilde{K} \nabla_T B = 3\kappa' \nabla_T N \quad (5.2.12)$$

dır. Burada $\tilde{K} = -\frac{\kappa''}{\tau} + \kappa \tau$ dir [9].

İspat. φ , $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olsun. Bu takdirde (5.2.2) ve (5.2.3) den

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T = (\kappa'' - \kappa \tau^2) N + 3\kappa' \tau B \quad (5.2.13)$$

bulunur. (5.2.13) de (5.2.5) ve

$$N = -\frac{1}{\tau} \nabla_T B \quad (5.2.14)$$

eşitlikleri yerine yazılırsa (5.2.12) ifadesi elde edilir.

5.2.7. Teorem: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. φ , $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helistir , bu takdirde

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - \tilde{K} \nabla_T B = 3\lambda \tau' \nabla_T N \quad (5.2.15)$$

dır. Burada $\tilde{K} = -\frac{\kappa''}{\tau} + \kappa \tau$ ve $\lambda = \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$ dir [9].

İspat. 5.2.6 Teoreminin ispatının benzeridir.

5.2.8. Sonuç. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. φ , $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T = \kappa \tau \nabla_T B \quad (5.2.16)$$

olmasıdır [9].

İspat. 5.2.8 Sonucunun hipotezinden ve φ nin bir dairesel helis olmasından (5.2.16) eşitliği elde edilir.

5.2.9. Teorem: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. φ , $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T N - K \nabla_T N = -\frac{3}{\lambda} \tau' \nabla_T T \quad (5.2.17)$$

olmasıdır. Burada $K = \frac{\tau''}{\tau} - \tau^2$ [10].

İspat. $\varphi, \{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olsun. Bu takdirde (5.1.6) dan,

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T N = (\tau'' - \tau^3)B - (3\tau\tau')N \quad (5.2.18)$$

elde edilir. φ Frenet çatısına göre bir genel helis olduğundan

$$\frac{\kappa}{\tau} = \lambda = \text{sabit} \quad (5.2.19)$$

dir. Diğer taraftan

$$N = \frac{1}{\kappa} \nabla_T T, \quad (5.2.20)$$

$$B = \frac{1}{\tau} \nabla_T N \quad (5.2.21)$$

dir. (5.2.20) ve (5.2.21) eşitlikleri (5.2.18) de yerine yazılırsa istenilen (5.2.17) elde edilir.

Tersine, (5.2.17) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda φ eğrisinin bir genel helis olduğunu gösterelim. (5.2.21) den ardışık olarak türev alınır

$$\nabla_T B = -\frac{\tau'}{\tau^2} \nabla_T N + \frac{1}{\tau} \nabla_T \nabla_T N \quad (5.2.22)$$

ve

$$\nabla_T \nabla_T B = \left(-\frac{\tau'}{\tau^2} \right)' \nabla_T N - 2 \frac{\tau'}{\tau^2} \nabla_T \nabla_T N + \frac{1}{\tau} \nabla_T \nabla_T \nabla_T N \quad (5.2.23)$$

elde edilir. (5.2.23) de (5.2.17) yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\nabla_T \nabla_T B = \left[\left(-\frac{\tau'}{\tau^2} \right)' + \frac{\kappa}{\tau} \right] \nabla_T N - 2 \frac{\tau'^2}{\tau^2} \nabla_T \nabla_T N - \frac{3}{\lambda} \frac{\tau' \kappa}{\tau} N \quad (5.2.24)$$

ve

$$\nabla_T \nabla_T B = -\tau^2 B - \tau' N \quad (5.2.25)$$

bulunur. (5.2.24) ve (5.2.25) eşit olduğundan, gerekli hesaplamalardan sonra φ nin bir genel helis olduğu elde edilir.

5.2.10. Sonuç. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. $\varphi, \{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T N = -\tau^2 \nabla_T N \quad (5.2.26)$$

olmasıdır [10].

İspat. 5.2.10 Sonucunun hipotezinden ve φ bir dairesel helis olmasından (5.2.26) eşitliği bulunur.

5.2.11. Teorem: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. $\varphi, \{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olması için gerek ve yeter şart $\nabla_T T$ ve $\nabla_T B$ nin lineer bağımsız olmasıdır [10].

İspat. $\varphi, \{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir genel helis olsun. Bu durumda

$$\kappa = -\lambda\tau \quad (5.2.27)$$

olduğunu kabul edelim. (5.2.27) eşitliği N ile çarpılır ve (5.1.6) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\nabla_T T = \lambda \nabla_T B \quad (5.2.28)$$

elde edilir.

Tersine (5.2.28) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. φ eğrisinin bir genel helis olduğunu gösterelim. (5.1.6) ve (5.2.28) den,

$$\frac{\kappa}{\tau} = -\lambda = \text{sabit}$$

bulunur. Bu da φ nın bir genel helis olduğu demektir.

5.2.12. Teorem. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında φ bir eğri olsun. $\varphi, \{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart $\nabla_T \nabla_T T$ ve $\nabla_T \nabla_T B$ nin lineer bağımsız olmasıdır [10].

İspat. 5.2.11 Teoreminin ispatının benzeridir.

5.2.13. Teorem: G_3 Galilean uzayında $\varphi = \varphi(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde φ konum vektörü aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right) \right] + \frac{\tau}{\kappa} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0. \quad (5.2.29)$$

İspat. G_3 de birim hızlı bir $\varphi = \varphi(s)$ eğrisini alalım. (5.1.6) denkleminin birinci ve ikinci eşitliklerinden

$$B = \frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} \right)$$

elde edilir. Bulunan bu değer (5.1.6) denkleminin son eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} \right) \right] + \frac{\tau}{\kappa} \frac{dT}{ds} = 0, \quad (5.2.30)$$

bulunur. Burada $\frac{d\varphi}{ds} = T$ olup, böylece dördüncü mertebeden (5.2.29) vektörel diferensiyel denklemi elde edilir.

(5.2.30) denkleminde, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\frac{d}{d\theta} \left(f \frac{d^2 T}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{f} \frac{dT}{d\theta} = 0. \quad (5.2.31)$$

Burada $f = f(\theta) = \frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)}$ ve $\theta = \int \kappa(s) ds$ şeklindedir. Bu demektir ki, keyfi bir uzay eğrisinin konum vektörü yukarıdaki eşitliğin çözümünden belirlenebilir.

5.2.14. Teorem: G_3 Galilean uzayında $\varphi = \varphi(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde N aslinormal vektörü aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar:

$$f(\theta)N''(\theta) + f'(\theta)N'(\theta) + \frac{1}{f(\theta)}N(\theta) = 0. \quad (5.2.32)$$

Burada $f(\theta) = \frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)}$ ve $\theta = \int \kappa(s) ds$ dır.

İspat. G_3 de birim hızlı bir eğri $\varphi = \varphi(s)$ olsun. $\varphi = \varphi(\theta)$ alıp $\theta = \int \kappa(s) ds$ ve $f(\theta) = \frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)}$ olmak üzere Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(\theta) \\ N'(\theta) \\ B'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f(\theta) \\ 0 & -1/f(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\theta) \\ N(\theta) \\ B(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.2.33)$$

şeklindedir. Böylece bu eğri için Frenet denklemi (5.2.33) den

$$B(\theta) = f(\theta)N'(\theta)$$

elde edilir. Burada diferensiyel alınırsa, (5.2.32) bulunur.

(5.2.32) denkleminin çözümü incelenirse, $\varphi = \varphi(s)$ uzay eğrisi $\theta = \int \kappa(s)ds$ olmak üzere

$$\varphi(s) = \int \left(\int \kappa(s)N(s)ds \right) ds + C,$$

şeklinde yazılabilir ve parametrik gösterimi

$$\varphi(\theta) = \int \frac{1}{\kappa(\theta)} \left(\int N(\theta)d\theta \right) d\theta + C,$$

dir.

5.2.15. Teorem: Bir genel helisin konum vektörü,

$$\varphi(s) = \int \left(1, \cos \left(\cot \alpha \int \kappa(s)ds \right) + \sin \left(\cot \alpha \int \kappa(s)ds \right), \cos \alpha \right) ds + C. \quad (5.2.34)$$

ve parametrik gösterimi

$$\varphi(\phi) = \frac{\tan \alpha}{\kappa(\phi)} \int \left(1, \cos \phi + \sin \phi, \cos \alpha \right) d\phi + C, \phi = \cot \alpha \int \kappa(s)ds. \quad (5.2.35)$$

şeklindedir.

İspat: φ , G_3 de bir genel helis ise $f(\theta) = \tan \alpha$ yazılabilir. Buradan, (5.2.31) denklemi

$$\frac{d^3T}{d\theta^3} + \cot^2 \alpha \frac{dT}{d\theta} = 0$$

ya da

$$\frac{d^3T}{d\phi^3} + \frac{dT}{d\phi} = 0, \phi = \cot \alpha \int \kappa(s)ds. \quad (5.2.36)$$

biçiminde elde edilir. Teğet vektörü $T = (T_1, T_2, T_3)$ alınırsa, (5.2.36) denkleminin genel çözümü $i = 1, 2, 3$ için $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T(\phi) = T_i(\phi)e_i = (a_i \cos \phi + b_i \sin \phi + c_i)e_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2.37)$$

bulunur.

φ eğrisi genel helis olduğundan, φ nın teğet vektörü helis eksenini denenen sabit vektör alanıyla sabit bir α açısı yapar. Bu nedenle, özel olarak helis eksenini e_3 e paralel alabiliriz. Bu takdirde $T_3 = \langle T, e_3 \rangle = \cos \alpha$, $a_3 = b_3 = 0$ ve $c_3 = \cos \alpha$ bulunur. Ayrıca, T teğet vektörü birim vektör olduğundan,

$$T_1 = 1 \quad (5.2.38)$$

ve

$$a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi + c_1 = 1 \quad (5.2.39)$$

bulunur. Buradan da,

$$T(\phi) = (1, a_2 \cos \phi + b_2 \sin \phi + c_2, \cos \alpha). \quad (5.2.40)$$

elde edilir. (5.38,39,40) denklemlerinde, özel olarak $a_2 = b_2 = 1, c_2 = 0$ alınır

$$T(\phi) = (1, \cos \phi + \sin \phi, \cos \alpha) \quad (5.2.41)$$

yazılabilir. (5.2.41) eşitliğinin $\phi = \cot \alpha \int \kappa(s) ds$ olacak şekilde s ye göre integrali alınır (5.2.34) ve (5.2.35) denklemleri elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

5.2.16. Tanım: G_3 Galilean uzayında bir φ eğrisinin aslinormali sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa φ eğrisine slant helis denir.

5.2.17. Teorem: G_3 Galilean uzayında φ bir birim hızlı eğri olsun. Bu takdirde φ nin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{\tau^3} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \text{ yada } -\frac{1}{\tau} \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' \quad (5.2.42)$$

fonksiyonlarından birinin sabit olmasıdır.

İspat. G_3 Galilean uzayında φ birim hızlı eğrinin bir slant helis olduğunu kabul edelim, U sabit doğrultusunu

$$U = a_1 T + a_2 N + a_3 B \quad (5.2.43)$$

şeklinde ifade edilir. Burada a_1, a_2, a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Slant helis tanımından

$$\langle N, U \rangle = \cos \theta = \text{sabit} = c$$

olduğunu biliyoruz. Bu (5.2.43) eşitliğinde göz önüne alınırsa,

$$U = a_1 T + cN + a_3 B$$

elde edilir. Bu son denklemde türev alınırsa

$$\begin{cases} a_1' = 0, \\ a_1 \kappa - a_3 \tau = 0, \\ c\tau + a_3' = 0 \end{cases} \quad (5.2.44)$$

şeklinde bulunur. Burada (5.2.44) de ikinci eşitlikten,

$$\frac{\tau}{\kappa} a_3 = a_1 \quad (5.2.45)$$

dir. Öyleyse (5.2.45) ile beraber (5.2.44) de birinci eşitlik göz önüne alınırsa

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} a_3 \right)' = 0$$

ve

$$a_3 = \frac{c \frac{\tau^2}{\kappa}}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} \quad (5.2.46)$$

ve (5.2.46) den

$$-c\tau = \left[\frac{c \frac{\tau^2}{\kappa}}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} \right]' \quad (5.2.47)$$

bulunur. Burada (5.2.47) den birtakım hesaplamalardan sonra

$$\text{Log} \left[\frac{\tau' \kappa - \tau \kappa'}{\tau^3} \right] = 0$$

elde edilir. Bu ise bize (5.2.42) denklemlerinin sabit olduğunu verir. Tam tersine, (5.2.42) fonksiyonlarının sabit alınması durumunda φ nın bir slant helis olduğu görülür.

5.3. ÖRNEKLER

5.3.1. Örnek: $\kappa = \frac{\sin \alpha}{a}, \tau = \frac{\cos \alpha}{a}$ olmak üzere bir uzay eğrisi alınır, konum vektörü aşağıdaki şekildedir:

$$\varphi(s) = \int \left(1, \cos \left(\cot \alpha \int \kappa(s) ds \right) + \sin \left(\cot \alpha \int \kappa(s) ds \right), \cos \alpha \right) ds + C. \quad (5.3.1)$$

(5.3.1) denkleminin integralini alınır ve $s = \frac{a}{\cos \alpha} \phi$ şeklinde yazılırsa eğrinin parametrik gösterimi

$$\varphi(\phi) = \frac{a}{\cos \alpha} (\phi, \sin \phi - \cos \phi, (\cos \alpha) \phi) + C,$$

elde edilir.

5.3.2. Örnek: $\kappa = \frac{\sin \alpha}{as}, \tau = \frac{\cos \alpha}{as}$ olacak şekildeki bir uzay eğrisi gözönüne alınır, konum vektörü

$$\varphi(\phi) = \frac{a}{\cos \alpha} \int \exp \left(\frac{a}{\cos \alpha} \phi \right) (1, \cos \phi + \sin \phi, \cos \alpha) d\phi + C.$$

bulunur. Bu denklemin integrali alınır, eğrinin parametrik gösterimi

$$\varphi(\phi) = \frac{a \cos \alpha}{a^2 + \cos^2 \alpha} \exp \left(\frac{a}{\cos \alpha} \phi \right) \left(\frac{a^2 + \cos^2 \alpha}{a \cos \alpha}, \sin \phi - \cos \phi + \frac{a}{\cos \alpha} (\sin \phi + \cos \phi), \frac{a^2 + \cos^2 \alpha}{a} \right) + C$$

şeklindedir.

5.3.3. Örnek: $\kappa = \frac{1}{as}, \tau = \frac{b}{as}$ olmak üzere bir uzay eğrisini alalım. Bu eğrinin konum vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(\phi) = a \tan \alpha \int \exp(a\phi \tan \alpha) (1, \cos \phi + \sin \phi, \cos \alpha) d\phi + C.$$

Bu takdirde integral alınır, parametrik gösterimi

$$\varphi(\phi) = \frac{a \tan \alpha}{1 + a^2 \tan^2 \alpha} \exp(a \phi \tan \alpha) \left(\frac{1 + a^2 \tan^2 \alpha}{a \tan \alpha}, \sin \phi - \cos \phi + a \tan \alpha (\sin \phi + \cos \phi), \right. \\ \left. , \frac{1 + a^2 \tan^2 \alpha}{a} \sin \alpha \right) + C,$$

şeklindedir.

5.3.4. Örnek: $\kappa = \frac{1}{as + c}, \tau = \frac{b}{as + c}$ olmak üzere bir uzay eğrisi alınırsa, bu eğrinin

konum vektörü 5.3.3 örneğine benzer şekilde bulunur.

6. SONUÇ

Son olarak belirtelim ki; klasik mekanikte dünyaya A^{n+1} afin uzayı gibi bakılır ve burada zaman lineer dönüşümler olarak alınırsa $a \in A^{n+1}$ olayı ile $b \in A^{n+1}$ olayı arasındaki zaman aralığı da

$$\rho_1(a, b) = |b - a|$$

sayısına eşit olur. Eğer $|b - a| = 0$ ise, a ve b olayları eş zamanlıdır denir. Aynı zamanlı olaylar n -boyutlu afin uzayını oluştururlar ve $A^n \subset A^{n+1}$. Aynı zamanlı olaylar arasındaki uzaklık

$$\rho_2(a, b) = |a - b| = \sqrt{(a - b, a - b)}, \quad a, b \in A^n$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{R}^n$ uzayının iç çarpımı ile bulunur. Uzaklığı böyle tanımlanan $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu Öklid uzayıdır. Metrikleri yukarıdaki şekilde verilmiş A^{n+1} uzayına da $(n+1)$ -boyutlu Galilean uzayı denir [2]. Bu bilgiler doğrultusunda Galilean uzayındaki keyfi boyut üzerinde çalışmalar yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Ali, A., T.**, 2009, "Determination of the Position Vectors of General Helices from Intrinsic Equations in E^3 ", arxiv: 0904.0301v1[math.DG]
- [2] **Artıkbayev, A., Sokolov, D.**, 1991, "Geometria v Tselom v Ploskom Prostranstve-vremeni", Taşkent FAN, Özbekistan.
- [3] **Bektaş, M.**, 2009, "The Characterizations of General Helices in the 3-dimensional Pseudo-Galilean Space", Soochow Journal of Mathematics, Vol**31**, No.3,pp.441-447.
- [4] **Bukcu, B., Karacan, M.K.**, 2007, "On the Involute and Evolute Curves of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space", Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol.2,no.5,221-232.
- [5] **Divjak, B., Milin-Sipus**, 2003, "Special Curves on Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Space", Acta math. Hungar.,**98(3)**,203-215.
- [6] **Divjak, B.**, 1998, "Curves in Pseudo-Galilean Geometry", Annales Univ. Sci. Budapest,**41**,117-128.
- [7] **Efimov, D., Kostyakov, I., Kuratovov, V.**, 2009 , "On Exact Representations of the Motions Group of Galilean Plane",arxiv:0912.1981v1[math.RT].
- [8] **Einstein, A.**, 1998, "İzafiyet Teorisi (Görelilik Kuramı)", Say Yayınları.
- [9] **Ergüt, M., Öğrenmiş, A., O., Bektaş, M.**, 2007, "On the Helices in the Galilean Space G_3 ", Iranian J.of Science&Technology, Transaction A, Vol.31,No.A2,2007.
- [10] **Ergüt, M., Öğrenmiş, A., O., Bektaş, M.**, 2004, "Characterizations for Helices in the Galilean Space G_3 ", International J. of Pure and Applied Math. Vol.16. No.1, 31-36.
- [11] **Gray, J., J., Brannan, D., A., Esplen, M., F.**, 1999, "Geometry", The Open University, Cambridge University Press.
- [12] **Gribbin, M., Gribbin, J.**, 2005, "Zaman ve Uzay", Tübitak Popüler Bilim Kitapları.
- [13] **Hacısalıhoğlu, H., H.**, 1983, "Diferensiyel geometri", Gazi Üniversitesi, Ankara.
- [14] **Hacısalıhoğlu, H., H.**, 1980, "Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş", Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul.

- [15] **Hacısalıhoğlu, H., H.**, 1983, " Hareketler Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi", Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
- [16] **Izumiya, S., Takeuchi, N.**, 2004, "New Special Curves and Developable Surfaces", Turk J. Math. **28**(2004), 153-163.TÜBİTAK.
- [17] **Kamenarovic, I.**, 1991, "Existence Theorems for Ruled Surfaces in the Galilean Space G_3 ", Rad HAZU. Mat.**456**, **10**, 183-196.
- [18] **Kaya, R.**, 1978, "Projektif Geometri", Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul.
- [19] **O'Neil, B.**, 1983,"Semi-Riemannian Geometry with Applications To Relativity", Academic Press, New York.
- [20] **Öğrenmiş, A., O.**, 2007, "Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeyler", Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [21] **Pavkovic, B., J., Kamenarovic, I.**, 1987, "The Equiform Differential Geometry of Curves in the Galilean Space G_3 ", Glasnik Matematicki, Vol.**22(42)**, 449-457.
- [22] **Röschel, O.**, 1986, "Die Geometrie Des Galileischen Raumes", Forschungszentrum Graz Research Centre, Austria.
- [23] **Sabuncuoğlu, A.**, 2006, "Diferensiyel Geometri", Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [24] **Sertöz, S.**, 2009, "Matematiğin Aydınlik Dünyası", Tübitak Popüler Bilim Kitapları.
- [25] **Turgut, A.**, 1995 , "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüaeyler", Ankara Ün. Fen Bilimleri Ens. Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, Ankara.
- [26] **Tütüncü, E., E.**, 2009, "Galile Uzaylarında Hareketlerin Geometrisi", Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.
- [27] **Uluçay, C.**, 1955, "Konform Tasvir", Ankara Üniversitesi Yayınları.
- [28] **Yaglom, I., M.**, 1979, "A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag Inc., New York.
- [29] **Yılmaz, S.**, 2009, "Notes on the Curves in Lorentzian Plane L^2 ", International J. Math. Combin. Vol. **1**,38-44.

8. ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ' da doğmuşum. İlkokulu 1997 yılında Kayseri Arif Eminoğlu İlkokulu' nda, ortaokulu 2000 yılında Lefkoşa Şehit Hüseyin Ruso Ortaokulu'nda bitirdim. Lise öğrenimime Ankara Etimesgut Anadolu Lisesi 'nde başladım ve Diyarbakır Anadolu Lisesi'nde 2004 yılında tamamladım ve aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2008 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik dalında Geometri Anabilim dalı tezli yüksek lisansa başladım.