

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ KUVVETLERE SAHİP KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ ile SAYISAL
ÇÖZÜMLERİNİN İRDELENMESİ

DOKTORA TEZİ
Ebru CAVLAK

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

MAYIS-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ KUVVETLERE SAHİP KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ ile SAYISAL
ÇÖZÜMLERİNİN İRDELENMESİ

DOKTORA TEZİ
Ebru CAVLAK
(08121203)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 28 Mayıs 2013
MAYIS-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ KUVVETLERE SAHİP KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ ile SAYISAL
ÇÖZÜMLERİNİN İRDELENMESİ

DOKTORA TEZİ
Ebru CAVLAK
(08121203)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 28 Mayıs 2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 17 Mayıs 2013

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (Y.T.Ü.)

Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Prof. Dr. Niyazi BULUT (F.Ü)

Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

MAYIS-2013

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Mustafa İNÇ' e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren ve hep yanımda olan sevgili aileme ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

Ebru CAVLAK

Elazığ-2013

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
TABLolar LİSTESİ.....	XI
SEMBOLLER LİSTESİ.....	XIII
1. BÖLÜM.....	1
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM.....	8
2.1. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	8
3. BÖLÜM.....	14
3.1 ÖZEL FONKSİYONLAR.....	14
3.1.1 Euler's Gamma Fonksiyonu	14
3.1.2 Beta Fonksiyonu	20
3.1.3 Mittag-Leffer Fonksiyonu	22
3.2 RİEAMANN-LİOUVILLE KESİRLİ TÜREV ve İNTEGRALI.....	23
3.2.1 Kesirli Türev ve İntegralin Özellikleri ve Bazı Uygulamaları	35
3.3 CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ.....	52
3.4 KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER.....	56
4. BÖLÜM.....	58
4.1 HOMOTOPİ KAVRAMI.....	58
4.2 HOMOTOPİ ANALİZ METODU	60
4.2.1 Sıfıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi	61
4.2.2 Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi	63
4.2.3 Homotopi Analiz Metod ile İlgili Bazı Temel Kurallar	66
4.2.4 Çözüm İfadeleri	67

4.2.4.1 Polinom Fonksiyonlarıyla İfade Edilen Çözüm	67
4.2.4.2 Kesirli Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm	70
4.2.4.3 Üstel Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm	72
4.2.5 $\hbar$ Yardımcı Parametrenin Rolü	76
4.2.6 Homotopi Analiz Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu Arasındaki İlişki	78
5. BÖLÜM	80
5.1 KESİRLİ KABLO DENKLEMİ	80
5.2 HAM'ın KESİRLİ KABLO DENKLEMİNE UYGULANMASI	83
5.3 SONUÇLAR ve TARTIŞMA	109
6. BÖLÜM	111
6.1 ZAMAN KESİRLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ HIROTA-SATSUMA BİRŞLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİ	111
6.2 HAM'ın ZAMAN KESİRLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ HIROTA-SATSUMA BİRŞLEŞTİ- RİLMİŞ KdV DENKLEMİ UYGULANMASI	114
6.3 SONUÇLAR ve TARTIŞMA	142
KAYNAKLAR	144
ÖZGEÇMİŞ	152

ÖZET

Bu çalışma altı bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, Kesirli analizin tarihçesi ve bu alanda yapılan çalışmalar ifade edilmiştir. Ayrıca tezde kullanılacak olan Homotopi analiz metodundan (HAM) bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Kesirli analiz ile ilgili çalışmalarda önemli bir yeri olan Özel fonksiyonların tanımları ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca Kesirli analiz alanındaki temel tanım, teorem ve özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, çalışmamızda kullanacağımız Homotopi analiz metodunun temeli ve metodun uygulaması bir örnek üzerinde ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde, Kesirli Kablo denkleminin genel yapısı anlatılmıştır ve Kesirli Kablo denklemine, HAM uygulanarak denklemin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal olarak irdelenen Kesirli Kablo denklemi için HAM'nun hassaslığı hakkında yorum yapılmıştır.

Altıncı bölümde, zaman kesirli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi ve Soliton kavramı hakkında bilgi verilmiştir. HAM ile sayısal çözümleri elde edilen zaman kesirli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi için metodun hassaslığı ile ilgili yorum yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Özel fonksiyonlar, Euler's Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Kesirli analiz, Riemann-Liouville kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli integrali, Caputo kesirli türevi, Homotopi Analiz Metodu (HAM), Kesirli Kablo Denklemi, Zaman Kesirli Hirota-Satsuma Birleştirilmiş KdV Denklemi, Tek Dalga.

SUMMARY

**EXAMINATION OF NUMERICAL SOLUTIONS WITH THE
HOMOTOPY ANALYSIS METHOD OF PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATION WITH FRACTIONAL POWERS**

This study has been probed in six sections.

In Section 1 history of fractional calculus and the studies that have been done in this area have been given. In addition to that Homotopy analysis method (HAM) that will be used in this thesis has been discussed in this section.

In Section 2 some basic definitions and theorems that will be used in other sections have been stated.

In Section 3 definitions and properties of special functions that has an important place in this studies that related to fractional analysis have been mentioned. Moreover, basic definitions, theorems and properties of fractional analysis have been discussed.

In Section 4 the basis of Homotopy analysis method that we will use and application of the method have been applied on an example.

In Section 5 general structure of the fractional cable equation has been represented and numerical solutions of the equation have been obtained by applying the HAM to the fractional cable equation. Sensitivity of the HAM for the fractional cable equation that is examined numerically has been interpreted.

In Section 6 some information about Time-Fractional Hirota-Satsuma Coupled KdV Equation and concept of soliton has been given. Sensitivity of the method for Time-Fractional Hirota-Satsuma Coupled KdV equation, which is obtained with numerical solutions, has been interpreted.

Key Words: Special functions, Euler's Gamma function, The Beta function, Fractional calculus, Rieamann-Liouville fractional derivative, Rieamn-Liouville fractional integral, Caputo fractional derivative, Homotopy Analysis Method (HAM), Fractional Cable Equation, Time-Fractional Hirota-Satsuma Coupled KdV Equation, Solitary Wave.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1. $\Gamma(\alpha)$ fonksiyonunun Maple ile çizilmiş grafiği	14
Şekil 3.2. A integralinin şekli	23
Şekil 3.3. A integralinin şekli	24
Şekil 5.1. İki sinir hücresi arasında gerçekleşen hareket	80
Şekil 5.2. Sinir hücresinin genel yapısı	81
Şekil 5.3. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 5 teriminin $\hbar$ eğrisi	86
Şekil 5.4. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin $\hbar$ eğrisi	87
Şekil 5.5. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 15 teriminin $\hbar$ eğrisi	87
Şekil 5.6. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 20 teriminin $\hbar$ eğrisi	88
Şekil 5.7. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 25 teriminin $\hbar$ eğrisi	88
Şekil 5.8. $\gamma_1 = 0.25$, $\gamma_2 = 0.25$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin $\hbar$ eğrisi	89
Şekil 5.9. $\gamma_1 = 0.25$, $\gamma_2 = 0.75$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin $\hbar$ eğrisi	89
Şekil 5.10. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.25$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin $\hbar$ eğrisi	90
Şekil 5.11. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.75$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin $\hbar$ eğrisi	90
Şekil 5.12. $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.3$ durumunda x ve t' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin $\hbar$ eğrisi	91
Şekil 5.13. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $t = 0.5$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 5 terimi	95
Şekil 5.14. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $t = 0.1$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 terimi	95
Şekil 5.15. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $t = 0.03$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 terimi	96

Şekil 5.16. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $t = 0.5$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 5 terimi.	96
Şekil 5.17. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $t = 0.5$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 terimi.	97
Şekil 5.18. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = 0.01$ (yeşil bölge), $\hbar = -0.01$ (kırmızı bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği.	97
Şekil 5.19. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.01$ (kırmızı bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği.	98
Şekil 5.20. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.01$ (kırmızı bölge), $\hbar = -0.2$ (turuncu bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği. ...	98
Şekil 5.21. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = 0.01$ (kırmızı bölge), $\hbar = -0.3$ (turuncu bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği. ...	99
Şekil 5.22. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.1$ (kırmızı bölge), $\hbar = -0.01$ (turuncu bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği. .	99
Şekil 5.23. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki Mutlak Hata.	100
Şekil 5.24. $u(x, t)$ nin 20 terimi için $\hbar = 0.000001$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki Mutlak Hata.	100
Şekil 5.25. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$, $\gamma_1 = 0.8$ ve $\gamma_2 = 0.3$ değerlerindeki Mutlak Hata.	101
Şekil 5.26. $u(x, t)$ nin 20 terimi için $\hbar = 1/10^8$, $\gamma_1 = 0.8$ ve $\gamma_2 = 0.3$ değerlerindeki Mutlak Hata.	101
Şekil 5.27. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$, $\gamma_1 = 0.25$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata.	102
Şekil 5.28. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata.	102
Şekil 5.29. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.0001$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata.	103
Şekil 5.30. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.0001$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata.	103

Şekil 5.31. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = -0.0395$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki Mutlak Hata.....	104
Şekil 5.32. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = -0.0395$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm.....	104
Şekil 5.33. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.004$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata.....	105
Şekil 5.34. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.004$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm.....	105
Şekil 5.35. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0043$, $\gamma_1 = 0.25$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata.....	106
Şekil 5.36. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0043$, $\gamma_1 = 0.25$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm.....	106
Şekil 5.37. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0108$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata.....	107
Şekil 5.38. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0108$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm.....	107
Şekil 5.39. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0129$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata.....	108
Şekil 5.40. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0129$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm.....	108
Şekil 6.1. Edinburgh-Glasgow Kanalı (1834).....	111
Şekil 6.2. Tek dalga (solitary wave).....	112
Şekil 6.3. Solitonların hareketinin bir şekli.....	112
Şekil 6.4. $\alpha = 0.5$ durumunda $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ ' nin 3 teriminin $\hbar$ eğrisi.....	122
Şekil 6.5. $\alpha = 0.75$ durumunda $k = \beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ ' nin 3 teriminin $\hbar$ eğrisi.....	122
Şekil 6.6. $\alpha = 0.5$ durumunda $k = 1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ ' nin 5 teriminin $\hbar$ eğrisi.....	123
Şekil 6.7. $\alpha = 0.75$ durumunda $k = 0.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ ' nin 5 teriminin $\hbar$ eğrisi.....	123
Şekil 6.8. $\alpha = 0.75$, $k = 1$, $\beta = 1.5$ ve $x = 0.5$ olduğu zaman $u(x, t)$ ' nin 3 teriminin mutlak hata grafiği.....	136

Şekil 6.9. $\alpha = 0.75, k = 1, \beta = 1.5$ ve $x = 0.5$ olduğu zaman $u(x, t)$ ' nin 3 teriminin DTM, HPM, HAM ve analitik çözümünün grafiği.	136
Şekil 6.10. $\alpha = 0.75, k = 1.5, \beta = 1.5, c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $v(x, t)$ ' nin 3 teriminin mutlak hata grafiği.	137
Şekil 6.11. $\alpha = 0.75, k = 1.5, \beta = 1.5, c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $v(x, t)$ ' nin 3 teriminin DTM, HPM, HAM ve analitik çözümünün grafiği.	137
Şekil 6.12. $\alpha = 0.75, k = 1.5, \beta = 1.5, c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $w(x, t)$ ' nin 3 teriminin mutlak hata grafiği.	138
Şekil 6.13. $\alpha = 0.75, k = 1.5, \beta = 1.5, c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $w(x, t)$ ' nin 3 teriminin DTM, HPM, HAM ve analitik çözümünün grafiği.	138
Şekil 6.14. $\alpha = 0.5, k = 1, \beta = 0.5, c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $u(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği.	139
Şekil 6.15. $\alpha = 0.75, k = 1, \beta = 0.5, c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $u(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği.	139
Şekil 6.16. $\alpha = 0.5, k = 0.1, \beta = 1.5, c_0 = c_1 = 1$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $v(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği.	140
Şekil 6.17. $\alpha = 0.75, k = 0.1, \beta = 1.5, c_0 = c_1 = 1$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $v(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği.	140
Şekil 6.18. $\alpha = 0.5, k = 0.1, \beta = 0.5, c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $w(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği.	141
Şekil 6.19. $\alpha = 0.75, k = 0.1, \beta = 0.5, c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $w(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği.	141

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 5.1. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0395$ değerleri için hesaplanan 5 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası.....	92
Tablo 5.2. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.004$ değerleri için hesaplanan 10 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası.....	92
Tablo 5.3. $\gamma_1 = 0.25$, $\gamma_2 = 0.75$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0043$ değerleri için hesaplanan 10 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası.....	93
Tablo 5.4. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.25$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0108$ değerleri için hesaplanan 10 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası.....	93
Tablo 5.5. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.75$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0129$ değerleri için hesaplanan 10 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası.....	94
Tablo 5.6. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, $x = 10^{-4}$ ve $\hbar = 1/10^8$ değerleri için hesaplanan mutlak hata.....	94
Tablo 6.1. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri.	124
Tablo 6.2. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri.....	125
Tablo 6.3. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $x = 0.5$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin değerleri.	126
Tablo 6.4. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $x = 0.5$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri.....	126
Tablo 6.5. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri.....	127
Tablo 6.6. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri.....	128
Tablo 6.7. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri.....	129
Tablo 6.8. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri.....	129
Tablo 6.9. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri.....	130

Tablo 6.10. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri.....	131
Tablo 6.11. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri.....	132
Tablo 6.12. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri.....	132
Tablo 6.13. $k = 1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri.....	133
Tablo 6.14. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri.....	133
Tablo 6.15. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri.....	134
Tablo 6.16. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.75$ için $v(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri.....	134
Tablo 6.17. $k = 0.1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.5$ için $w(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri.....	135
Tablo 6.18. $k = 0.1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.75$ için $w(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri.....	135

SEMBOLLER LİSTESİ

L :	Lineer Operatör
L^{-1} :	İntegral Operatörü
Nu :	Lineer Olmayan Operatör
$\sum$:	Toplam Sembolü
α :	Alpha
β :	Beta
δ :	Delta
ε :	Epsilon
η :	Eta
λ :	Lambda
τ :	Tau
Γ :	Gamma
L^1 :	Lebesgue integrali
$\mathbb{R}$:	Reel Sayılar Cümlesi
$\bar{\mathbb{R}}^+$:	$[0, \infty) \cup \{\infty\}$

KISALTMALAR

HAM:	Homotopi Analiz Metodu
KdV:	Korteweg-de Vries denkemi
HPM:	Homotopi pertürbasyon metodu
DTM:	Diferansiyel dönüşüm metodu
INM:	Kapalı sayısal metod
ICFDS:	Kapalı kompakt sonlu farklar yöntemi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kesirli analiz alanı oldukça eski bir tarihe sahiptir, ancak klasik analizin daha gerisinde kalmıştır. Klasik analizde bilinen türev ve integral tanımlarının gelişen teknoloji için yapılan çalışmalarda yeterli olmadıkları görülmüştür. Bu ifadelerin belirli tanımlarla genişletilmesi mümkündür. Türev ve integral tanımlarının genişletilmesiyle oluşan alan "Kesirli Analiz" olarak adlandırılır. Kesirli analizde türev ve integral kesirli mertebelere sahiptir. Şöyle ki; kuvvetin sayısal bir değerinin tekrar tekrar kendisiyle çarpımı matematikteki basit bir ifadedir. Kuvvetin bu yapısı tam sayı değerli ifadeler için açık ve kolaydır. Ancak bu tanım kuvvetin tam sayı olmayan değerleri için yetersiz kalır. Örneğin, $x^{3.4}$ ve x^π gibi kuvvetlere sahip ifadeler bu tanım ile elde edilemez. Benzer durum bilinen anlamdaki türev ve integral içinde geçerlidir. Kesirli analizde yapılar gerçekten karmaşık olmasına rağmen, fiziksel yorum ve anlamları elde etmek daha kolaydır.

Kesirli analiz ifadesi ilk olarak 30 Eylül 1695 yılında L'hospital' ın Leibniz' e yazmış olduğu bir mektupla ortaya çıkmıştır. L'hospital bu mektubunda Leibniz' e " $f(x) = x$ lineer fonksiyonunun n ' inci mertebeden türevi olan $\left(\frac{D^n x}{Dx^n}\right)$ için çalışmalarında kullandığı özel bir yapı hakkında" sorular yöneltmiştir. L'hospital $n = 1/2$ olması durumunda türevin nasıl alınacağını ve sonucun ne olacağını sormuştur. Bu soru kesirli analizin temelini oluşturur [1]-[2].

Bu konu Leibniz ve Bernoulli arasında da çalışılmıştır. Bernoulli, Aralık 1695 yılında Leibniz' e " Kuvvetlerin kesirli veya irrasyonel " olması durumu hakkında sorular yönelttiği bir mektup yazmıştır. Leibniz, L'hospital' a yolladığı mektuba benzer fakat, genel mertebeli türev yapısı hakkında daha detaylı bilgiler verdiği bir mektup yollamıştır [2].

Leibniz' in 1716 yılında ölümüyle tamsayı olmayan mertebeli türev ile ilgili çalışmalar son bulmamıştır. 1783 yılında bu alana temel oluşturan çalışmalardan birini Leonhard Euler yapmıştır. Euler yaptığı çalışmada faktöriyel kavramının genelleştirilmiş olan ve kesirli analizde önemli bir kavram olan Gamma fonksiyonunu geliştirmiştir [2].

Leibniz' in ölümünden 50 yıl sonra J. L. Lagrange kesirli analiz alanıyla ilgilenmeye başlamıştır. 1772 de Lagrange tamsayı mertebeli diferansiyel operatörü için

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

ifadesini geliştirmiştir. Çalışmalarının sonucunda verilen şartlar altında ifadenin $n, m \in \mathbb{C}$ durumuna dönüştürülebileceğini göstermiştir [3].

Kesirli analiz alanında, kesirli türevin detaylı olarak ilk tanımı 1812 de P. S. Laplace'ın yazmış olduğu " Théoric anlytique des probabilités" adlı kitabında bulunmaktadır [2]. Laplace $\int T(t)t^{-x}dt$ şeklindeki bir integral ile gösterilebilen fonksiyonlar için bir kesirli türev tanımı bulmuştur.

S. F. Lacroix 1819 yılında yayınladığı " Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" isimli kitabının iki bölümünde: kesirli mertebeli türevin, $y(x) = x^m, m \in \mathbb{N}$ şeklinde bilinen türevin genelleştirilmesiyle elde edilebileceğini söylemiştir [2]. Bununla birlikte, Lacroix önemli sonuçlar elde etmiştir ve hala yapılan çalışmaların çoğunda

$$\frac{d^n}{dx^n}y(x) = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, m \geq n$$

şeklinde ifade etmiş olduğu notasyon kullanılmaktadır ve yine tamsayı olmayan mertebeli türevleri belirtirken Euler' in tanımladığı Gamma fonksiyonunu kullanmış ve

$$\frac{d^n}{dx^n}y(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}$$

formülünü elde etmiştir. Lacroix' un elde ettiği bu notasyonlar Riemann-Liouville' un kesirli türev tanımıyla benzerdir [4].

Bu konu üzerine bir diğer önemli çalışmada J. B. J. Fourier tarafından 1882 yılında yapılmıştır. Fourier kesirli türevin tanımını yaparken ne Lacroix'un çalışmasındaki gibi bir kuvvet fonksiyonuna ne de Laplace' ın kullandığı integral fonksiyonuna ihtiyaç duymamıştır.

Fourier' in çalışması kesirli analiz ile ilgili çalışmaların ilk döneminin sonu olarak belirtilir. İlk dönemde yapılan çalışmalar daha çok, özel fiziksel problemlerin çözümlerinde kullanılan bazı formülleri bulmaya yöneliktir.

Kesirli analizin ikinci dönemi olarak adlandırılan çalışmalar 1823 yılında, N. H. Abel'in Tautochrone probleminde ortaya çıkan bir integral denklemini kesirli türev yardımıyla çözmesiyle başlamıştır [2]. Abel' in çalışmalarına daha sonraki yıllarda Samko ve arkadaşlarının yayınlamış olduğu kitapda yer verilmiştir [5].

1830'lu yılların başına gelince kesirli analiz ile ilgili temel bir çalışma J. Liouville tarafından yapılmıştır. Liouville iki farklı türev tanımı geliştirmiştir [2]. İlk olarak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(a_k x)$$

olacak şekilde seriye açılabilen bir fonksiyonu ele almış ve $n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde bilinen

$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ türevinden hareketle $\alpha \in \mathbb{C}$ mertebeli kesirli türevi,

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha \exp(a_k x)$$

şeklinde elde etmiştir. Ancak bu tanımda α 'nın seçiminde bazı sınırlamalar olduğu gözlemlenmiştir [2]-[4]. Liouville' un geliştirdiği bir diğer tanımda a keyfi bir sabit olmak üzere; $f(x) = 1/x^a$ fonksiyonunun α mertebeli kesirli türevidir [6].

Günümüzde yapılan çalışmalarda kullanılan önemli tanımların çoğu, G. F. Bernhard Riemann tarafından bulunmuştur. Riemann kesirli analiz ile ilgili olarak ilk çalışmalarını öğrencilik yıllarında yapmıştır. Ancak çalışmaları ölümünden sonra 1872 yılında "Gesamenehte Mathematische Werke" adlı yayında basılmıştır [4].

Riemann çalışmalarında Taylor serisinin genelleştirilmiş bir hali olan

$$u(x+h) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} k_v h^v \frac{d^v u}{dx^v}$$

açılımını göz önüne alınıp, Kesirli mertebeli türev operatörü için $D_x^u D_x^v f(x) = D_x^{u+v} f(x)$

ifadesini kullanmıştır. Burada

$$u^{(r)}(x) = \frac{1}{\Gamma(-r)} \int_c^x (x-t)^{-r-1} u(t) dt$$

tanımını oluşturan Riemann

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-r-n}}{\Gamma(-r-n-1)} K_n$$

şeklinde bir tamamlayıcı fonksiyonu yukarıdaki tanıma eklemiştir. Burada K_n ' ler keyfi sabitleri ifade eder. Bunu yapmasının nedeni yukarıdaki integralde c alt sınırından kaynaklanan belirsizliktir. Kesirli operatörler için bir tamamlayıcı fonksiyonun varlığı bir çok karışıklığa neden olmuştur. Riemann tamamlayıcı fonksiyonun yapısını incelediği zaman, operasyonel sistemde belirsizliğe neden olan sabitlerin sonsuz bir grubunun oluştuğunu görmüştür. Buradan hareketle Riemann' ın çalışmalarındaki en büyük farklılığın " bir tamamlayıcı fonksiyondan dolayı keyfi sabitlerinin sonsuz bir grubunun oluşması" olarak verilebilir [4].

19. yy sonlarında Oliver Heaviside $p = d/dt$ olmak üzere $p^{1/2}$ operasyonu için genel durumu belirtmiştir [4].

Bu gün hala kullanılan bir diğer tanımda, Grünwald' un 1867 ve Letnikov' un 1868 yılında farklı iki yayımla belirttikleri

$${}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}$$

kesirli türev tanımıdır. Bu tanım Grünwald-Letnikov kesirli türevi olarak adlandırılır [2]-[7].

Kesirli analiz ile ilgili çalışmalarda kullanılabilecek matematiksel teorilerin çoğu 20 y.y dan önce geliştirilmiştir. Ancak, mühendislik ve fen bilimlerindeki ilerlemelerden dolayı matematikçiler bu gelişmelere ayak uydurabilmek için kesirli analizin yapısında bazı değişiklikler yapmışlardır. Caputo, Riemann-Liouville'in kesirli kuvvetlere sahip diferensiyel denklemlerin çözümündeki tam sayı mertebeli başlangıç şartlarını kullanmak amacıyla Riemann-Liouville kesirli türev tanımını yenilemiş ve "Caputo türevi" olarak adlandırılan yeni bir türev tanımı elde etmiştir. Yine Kolowankor her yerde diferensiyellenemeyen kesirli fonksiyonları diferensiyelleme amacıyla Riemann-Liouville kesirli türev tanımını yeniden formüle etmiştir [8].

300 yıldan daha fazla süredir yapılan çalışmaların temelini oluşturan L'Hospital' ın sorusu bu konunun yarısından azını oluşturmaktadır. Özellikle 20 y.y. da kesirli kuvvetlere sahip çok sayıda denklemin çeşitli metodlarla çözümlerinin elde edildiği görülür. Örneğin; kesirli Boussinesq denklemi [9], zaman kesirli dalga denklemi [10], kesirli mertebeli difüzyon denklemi [11], kesirli modifiye edilmiş KdV denklemi [12], kesirli Zakharov- Kuznetsov denklemi [13], kesirli Burgers denklemi [14] v.b. Bu alan ile ilgili ilk konferans Haziran 1974 yılında B. Ross tarafından New Haven Üniversitesinde düzenlenmiştir [15]. Yine bu alanda basılan ilk kitap Oldham ve Spanier tarafından 1974 yılında çıkarılmıştır [16]. 1999 yılında kesirli analiz ile ilgili olarak daha geniş kapsamlı bir kitap I. Podlubny tarafından yayımlanmıştır [17].

Kesirli türev ve integral hesabının uygulamalarının fiziksel yorumları üzerine bir çok araştırma yapılmıştır. Kesirli analiz hesabı günümüzde; biyolojik sistemleri modellemede [18], fizik alanında [19], beyin analizinde, sinir hücrelerinin karmaşık yapıli anormal davranışlarının modellenmesi çalışmalarıyla tıp alanında [20]-[21], fiyat analizi gibi doğrusal olmayan hareketlerin benzetimlerinin yapılması ile finans alanında [22], depremde fay hatlarının anormal davranışlarının analiz edilmesindeki modelleme işlemlerinde, nükleer manyetik rezonans üzerine teorik çalışmalarda, ayrıca eczacılık ve ilaç sektöründeki içerik analizinde sıkça kullanılmaktadır.

Geniş bir alan olan Kesirli analizde, Kesirli diferensiyel denklemlerin çoğunun analitik çözümü bulunmamaktadır. Bu nedenle bu tip denklemlerin yarı-analitik veya nümerik metodlar ile çözümleri üzerinde durulmuştur. Literatürde bir çok yarı-analitik metod bulunmaktadır. Bu tür metodlar arasında en iyi bilinenleri pertürbasyon teknikleridir. Pertürbasyon teknikleri lineer olmayan denklemlerin bir çok özelliğinin ortaya çıkmasında etkin olduğundan çok iyi bilinirler ve geniş bir uygulama alanına sahiptirler. Pertürbasyon teknikleri aslında, pertürbasyon niceliği olarak adlandırılan küçük veya büyük parametrelere dayanır. Temel olarak lineer yardımcı problemlerin sonlu bir grubu ile lineer olmayan bir probleme dönüşen pertürbasyon niceliği kullanılır. Sonuçta çözüm, ele alınan yardımcı problemlerin çözümlerinin toplamalarının yakınsaklığıyla elde edilir. Pertürbasyon niceliğinin varlığı tekniklerin temel noktasıdır ancak bu terim bazı sınırlamalara neden olur. İlk olarak her lineer olmayan problemin bir pertürbasyon niceliği içermesi mümkün değildir. İkinci olarak, bu teknikler kuvvetli lineer olmayan problemler için kullanışlı değildir. Bu durumlardan dolayı pertürbasyon teknikleri bir çok problemde çözümün yakınsaklığı hakkında yeterli bilgi vermez [23].

Pertürbasyon tekniklerinde kullanılan küçük veya büyük parametrelere ihtiyaç duymayan diğer bir yarı-analitik metotta Lyapunov' un 1892 de geliştirdiği metottur. Bu metod;

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1.1)$$

denkleminin ε yapay bir parametre olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x \quad (1.2)$$

şeklinde ε ile genişleyen kuvvet serilerinin hesaplanmasına dayanır. Lyapunov $\varepsilon = 1$ durumunda serilerin yakınsaklığını bir çok şekilde ispatlamıştır. Bu yaklaşım, Lyapunov' un küçük yapay parametre metodu olarak adlandırılır [24].

Karmishin, Lyapunov' un küçük yapay parametre metodunu temel alarak δ - genişleme yöntemini tanımlamıştır. δ yapay bir parametre olmak üzere,

$$x^5 + x = 1 \quad (1.3)$$

denklemini

$$x^{5+\delta} + x = 1 \quad (1.4)$$

olarak yenilemiştir [25]. Burada δ' 'nın genişletilmesi ile kuvvet serisi hesaplanabilir. Aslında bu metod ve Lyapunov' un metodu benzerdir. Çünkü her iki metod da yapay bir parametre içerir. Ancak bazı durumlarda (1.3) denkleminin (1.4) şeklindeki yenilenmiş durumu keyfidir. Örneğin; (1.3) denklemi,

$$\delta x^5 + x = 1 \quad (1.5)$$

şeklinde de olabilir.

Lyapunov' un küçük yapay parametre metodu ve Karmishin' nin δ – genişleme metodu, daha iyi yaklaşımlar elde edebilmek için ε ve δ gibi yapay parametrelerin belirlenmesinde bazı temel kurallara ihtiyaç duyulur. Çünkü parametrelerin durumu yaklaşımları etkiler. Ancak her iki metotta bu tür kuralları içermemektedir ve pertürbasyon teknikleri gibi yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızı hakkında yeterli bilgi edinilmesinde kullanışlı ve güvenilir bir yol sağlamazlar.

Lineer olmayan problemlerin çözümü için kullanılan bir diğer yarı-analitik teknik ise Adomian ayrışım metodudur [26]. Adomian ayrışım metodu küçük veya büyük bir parametre içermeksizin adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır. Bu metod ile elde edilen çözüm serilerinin hızlı yakınsadığı görülür. Buna rağmen metodun bazı sınırlamaları vardır. Şöyle ki; lineer olmayan problemlerde Adomian polinomları ortaya çıkar. Ayrıca elde edilen çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi genelde küçüktür ve yakınsaklık bölgesinin genişletilmesine ihtiyaç duyulur. Ancak metod farklı fonksiyonların kullanılabileceği keyfi durumlara izin vermez, bu nedenle yakınsaklık bölgesi sınırlanmış olur. Sonuçta bu metod da diğerleri gibi yakınsaklık bölgesi ve hızı hakkında güvenli bir yol sağlamaz.

Özet olarak, yukarıda verilen metodlar gibi teknikler ile yaklaşık serinin yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızının ayarlanması ve kontrolü için güvenli bir yol sağlanamaz. Yani kuvvetli lineer olmayan bir problemin yakınsaklık bölgesinin yeterince genişletilebilmesi ve problemin yakınsaklığının yeterince hızlı bir şekilde hesaplanabilmesi için bazı yeni yarı-analitik tekniklerin genişletilebilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu yeni oluşturulan teknik,

i) Lineer olmayan problem küçük veya büyük herhangi bir parametre içermese bile uygulanabilir olmalıdır.

ii) Metod lineer olmayan problemin yaklaşık serisinin yakınsaklık bölgesi ve hızının ayarlanmasında belirli ve güvenli bir yol sağlamalıdır.

iii) Lineer olmayan problemin bağlı olduğu fonksiyonlardan farklı olarak, yakınsaklık

bölgesinin genişletilebilmesi için keyfi olarak farklı temel fonksiyonların seçimini sağlamalıdır.

Yarı-analitik bir metod olan " Homotopi Analiz Metodu (HAM)" bu özelliklere sahiptir. Homotopi analiz metodu ilk olarak 1992 yılında Shijun Liao nun doktora tezinde tanımlanmıştır [23]. Çalışmamızın 4. bölümünde verilmiş olan homotopi analiz metodu lineer olmayan problemlerde yaklaşık çözümü elde ederken yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızının ayarlanmasında güvenilir ve kullanışlı bir yol sağlar. Kuvvetli lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanışlı olan bu metod bir çok bilim adamı tarafından farklı denklemlere uygulanmıştır. Örneğin; Zakharov-Kuznatsov denklemi [13], Korteweg-de Vries denklemi [14], Burgers' denklemi [27], Dirichlet ve Neumann sınır şartlı Laplace denklemi [28], lineer olmayan fin-tipi problem [29], Fisher denklemi [30], Fitzhugh-Naguma denklemi [31], integro-diferensiyel denklemlere [32], modifiye edilmiş KdV denklemine [33], Kuramoto-Sivashinsky denklemi [34], beşinci mertebeden KdV denklemi [35], Isı yayılımı denklemi [36], Benjamin-Bona-Mahony denklemi [37], v.b.

Bu çalışmamızda kesirli kuvvetlere sahip Kablo denklemini ve Hirota-Satsuma birleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemlerini ele aldık. Bu denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde ederken, yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızının ayarlanmasında güvenilir ve kullanışlı yol olan Homotopi analiz metodunu kullandık.

2. BÖLÜM

2.1 TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1.1

Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferensiyel denklem denir [38].

Tanım 2.1.2

Bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem denir.

n. mertebeden en genel adi diferensiyel denklem

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

biçiminde verilir [38].

Tanım 2.1.3

Bağımlı değişkenin bir yada daha çok bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferensiyel denkleme kısmi diferensiyel denklem denir ve

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0$$

formunda verilir [38].

Tanım 2.1.4

Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) *Sınır Şartları* : Kısmi diferensiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleri şu şekildedir.

$$\text{Dirichlet şartı} \quad : \quad u|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann şartı} \quad : \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = g(\text{veya } 0)$$

$$\text{Robin şartı} \quad : \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g.$$

(ii) *Başlangıç Şartı* : Sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevin kombinasyonu şeklindedir [39].

Tanım 2.1.5

Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [40].

Tanım 2.1.6

E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x 'de, değer kümesi E_y 'de bulunan $y = Ax$ operatörünü ele alalım. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa verilen bu A operatörüne lineer operatör denir [40].

$$L1) A(x + y) = Ax + Ay$$

$$L2) A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Tanım 2.1.7

X boştan farklı bir cümle ve τ da X in alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir [41].

$$T1) \emptyset, X \in \tau$$

$$T2) G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau \text{ ise } \bigcap_{i=1}^n G_{k_i} \in \tau, \text{ yani } \tau \text{ sınıfı sonlu kesişime göre kapalıdır.}$$

$$T3) \text{ Her } i \in I \text{ için } G_{k_i} \in \tau \text{ ise } \bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau, \text{ yani } \tau \text{ sınıfı keyfi birleşime göre kapalıdır.}$$

Tanım 2.1.8

X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [42].

$$M1) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$M2) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$M3) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X bir tam metrik uzay adını alır.

Tanım 2.1.9

X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0,$$

$$N2) \|x\| = 0 \iff x = \theta,$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler}),$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dır. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir [42].

Tanım 2.1.10

Bir iç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise, üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım $X \times X$ ' den X ' in K skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür, yani X ' in her x ve y vektör çifti (x, y) ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektedir [42].

- 1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
- 2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
- 3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
- 4) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Tanım 2.1.11

Bir f fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f , z_0 da analitiktir denir [43].

Eğer bir f fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f fonksiyonu S üzerinde analitiktir denir. Bu f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f ye tam fonksiyon denir [43].

Tanım 2.1.12

$B_0, \mathbb{C}$ de bir bölge ve f_0, B_0 üzerinde analitik bir fonksiyon olmak üzere (f_0, B_0) çiftine bir fonksiyon elemanı denir. B_1 bölgesi $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$ özelliğinde olmak üzere bir (f_1, B_1) fonksiyon elemanı için $B_0 \cap B_1$ üzerinde $f_0(z) = f_1(z)$ gerçekleşiyorsa, (f_0, B_0) ve (f_1, B_1) birbirinin doğrudan (direkt) analitik devamıdır, denir. Bazen bölgeler biliniyorsa kısaca f_0, f_1 birbirinin doğrudan analitik devamıdır da denir [43].

Tanım 2.1.13

Matematiksel bir terim olarak iyi tanımlı problem kavramı ilk olarak, Jacques Hadamard tarafından verilen bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

- i) Çözüm vardır,

- ii) Çözüm tektir,
- iii) Çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümü tektir denildiği zaman, bu mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Örneğin, bir problemin birkaç çözümü olsun. Fakat bu çözümlerden sadece biri sınırlı olsun. Bu durumda sınırlı fonksiyonlar uzayında çözüm tektir denir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa bunun anlamı, model hakkında elde bulunan bilgiler eksiktir. Bu durumda model için çeşitli ek özellikler verilmelidir. Eğer başlangıç ya da sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm kararlıdır denir. Bir problem kararlı değilse, bu problemin çözümü pratik bir şekilde hesaplanamaz. İyi tanımlı problemlere ilişkin örnekler Laplace denklemi için Dirichlet problemini ve özel başlangıç koşullarına sahip ısı problemi için Dirichlet problemini içermektedir. Bu problemler çözümleri için bazı fiziksel metotlar bulunan doğal problemlerdir. Fakat bunun aksine ters ısı denklemi iyi tanımlı değildir. Hadamard'a göre iyi tanımlı olmayan problemlere ill-posed problem denir. Hadamard, ters problemler, düz problemlerin ise iyi tanımlı problemler olduğunu söylemiştir. Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

X ve Y iki normlu uzay ve $K : X \rightarrow Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Kararlılık: x çözümü daima y ye bağlıdır. Yani $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \rightarrow Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için, $x_n \rightarrow x$ olmasıdır.

Kısmi diferensiyel denklemlerin klasik teorisi hemen hemen tamamıyla iyi tanımlı problemlerle ilgilenmektedir. Bu nedenle ill-posed problemler matematiksel ve bilimsel açıdan oldukça ilgi çekicidir [45]-[44].

Tanım 2.1.14 (Dirichlet Formülü)

f fonksiyonu $[a, b] \times [a, b]$ de sürekli bir fonksiyon olmak üzere Dirichlet formülü

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$$

şeklinde tanımlanır [46].

Teorem 2.1.1 (Leibniz Formülü)

Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu $\{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \leq t \leq d$ için

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

dir [47].

Eğer f fonksiyonu bu teoremdeki şartları sağlayan bir fonksiyon, $a(t)$ ve $b(t)$ de (c, d) aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t)$$

dir [47].

Teorem 2.1.2 (Riemann Kriteri)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrallenebilirdir ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$$

olacak şekilde $[a, b]$ aralığının bir P parçalaması vardır [48].

Teorem 2.1.3 (İntegral Hesabın Temel Teoremi)

f , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x \in (a, b)$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dır. Bu eşitliğe *Newton – Leibniz Formülü* adı verilir [48].

Tanım 2.1.15

X bir küme ve $\sum$, X ' in alt kümelerinin bir σ -cebiri olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mu : \sum \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ fonksiyonuna bir ölçüm denir.

$$\text{Ö1) } \mu(\emptyset) = 0,$$

Ö2) μ sayılabilir toplamsaldır, yani eğer $S_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, \dots$ ikişer ikişer ayrık kümelerse o zaman

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$$

dir. (X, Σ, μ) ölçüstüne bir ölçüm uzay denir [49].

Tanım 2.1.16 (Lebesque İntegrali)

Bazı $k \geq 1$ için $(X, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}^k, \Sigma_L, \mu_L)$ olsun. $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ ise (veya $S \in \Sigma_L$ olmak üzere $f \in L^1(S)$ ise) o zaman f 'ye Lebesque integrallenebilirdir denir [49].

Teorem 2.1.4 (Lebesque Kriteri)

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olsun.

(a) f Riemann integrallenebilirdir ancak ve ancak f , I üzerindeki Lebesque ölçümüne göre hemen hemen her yerde sürekli (yani f in süreksiz olduğu noktaların kümesi sıfır Lebesque ölçümüne sahiptir).

(b) f , I üzerinde Riemann integrallenebilir ise o zaman f , I üzerinde Lebesque integrallenebilirdir ve f nin her iki integralinde değeri aynıdır. Özellikle, I üzerinde sürekli fonksiyonlar Lebesque integrallenebilirdir [49].

Tanım 2.1.17

$L^p(X) = \{f : f \text{ ölçülebilirdir ve } (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$ ifadesi tanımlanır [49].

Teorem 2.1.5 (Cauchy İntegral Formülü)

Bir f fonksiyonu γ kapalı eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer a γ nın içinde bir nokta ise

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

dir [49].

3. BÖLÜM

3.1 ÖZEL FONKSİYONLAR

3.1.1 Euler's Gamma Fonksiyonu

Tanım 3.1.1

Euler sabiti

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \approx 0.5772156649, \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır ve Euler-Mascheroni sabiti olarak da adlandırılır [2].

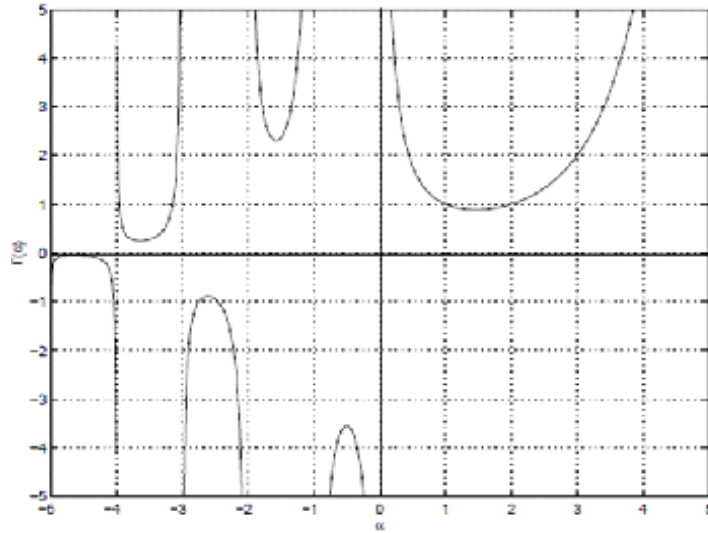
Tanım 3.1.2

$z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, \dots\}$ olmak üzere $\Gamma(z)$ Euler Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, & \text{Re}(z) > 0 \\ \Gamma(z+1)/z, & \text{Re}(z) \leq 0, z \neq 0, -1, -2, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır [2].

Bu tanıma göre Euler Gamma fonksiyonu sıfır ve negatif tam sayılar haricinde kompleks düzlemin tamamında sınırlıdır.



Şekil 3.1. $\Gamma(z)$ fonksiyonunun Maple ile çizilmiş grafiği

Teorem 3.1.1

Euler Gamma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [2].

1) $z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z) \text{ dir.}$$

2) $z \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(z) = (z-1)! \text{ dir.}$$

3) $z \in \mathbb{C}/\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ için

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$$

olur.

4) Euler Gamma fonksiyonu için limit tanımı, $\text{Re}(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Limit tanımı aynı zamanda Euler'in sonsuz çarpımıyla

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (1/n))^z}{1 + (z/n)}$$

şeklinde de verilir.

5) Weierstrass $z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ olmak üzere Euler Gamma fonksiyonunu

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

şeklinde tanımlamıştır. Buradaki γ Euler sabitidir.

6) Euler Gamma fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için analitiktir.

7) Euler Gamma fonksiyonu daima sıfırdan farklıdır.

8) Yansıma teoremi: Sıfırdan farklı $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ ve } \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

şeklinde tanımlanır.

9) $z \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Gamma(z/2)$ fonksiyonu özel olarak

$$\Gamma(z/2) = \frac{(z-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(z-1)/2}}$$

şeklinde. Burada $z!!$ ifadesi çift katlı faktöriyeldir. Buda;

$$z!! = \begin{cases} z(z-2)...5.3.1, & z > 0 \text{ (} z \text{ tek ise)} \\ z(z-2)...6.4.2, & z > 0 \text{ (} z \text{ çift ise)} \\ 1, & z = 0 \text{ ve } -1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat

$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için (3.2) de ki integral göz önüne alınırsa, kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = [-t^{z-1} e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty (z-1)t^{z-2} e^{-t} dt, \\ &= (z-1) \int_0^\infty t^{z-2} e^{-t} dt = (z-1)\Gamma(z-1), \end{aligned}$$

bulunur. Böylece birinci özellik ispatlanmış olur.

(3.2) integralinde $z = 1$ için $\Gamma(1) = 1$ olur. Birinci özellikten yararlanarak

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1\Gamma(1), \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1, \\ &\vdots \\ \Gamma(z) &= (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)!, \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla 1. özellikten yararlanarak 2. özellik ispatlanmış olur.

3. özellik 1. özelliğin kompleks düzlemin sol bölgesinde göz önüne alınmasıyla ispatlanabilir.

4. özelliğin ispatı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt,$$

şeklinde yardımcı bir fonksiyon tanımlanır. Bu fonksiyonun sağ tarafında $s = t/n$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds$$

bulunur. Bu ifadeye n-kez kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \int_0^1 s^{z+n-1} ds, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}, \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece 4. özellik ispatlanmış olur.

5. özelliğin ispatı için, Euler Gamma yardımcı fonksiyonun limiti iyi bilinen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

limiti ve yardımcı fonksiyonla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde limit ve integral ifadeleri değiştirilebilir. Böylece Euler'in sonsuz çarpımı olan ifade (3.3)' den elde edilebilir. Şöyle ki

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \\ &= \frac{n^z}{z(1+z/1)(1+z/2)\dots(1+z/n)} \end{aligned}$$

olur. Burada

$$n^z = e^{z \ln(n)} = e^{z(\ln(n)-1-1/2-1/3\dots-1/n)} e^{z+z/2+\dots+z/n}$$

ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{e^{z(\ln(n)-1-1/2-1/3\dots-1/n)} e^{z+z/2+\dots+z/n}}{z(1+z/1)(1+z/2)\dots(1+z/n)} \\ &= e^{z(\ln(n)-1-1/2-1/3\dots-1/n)} \frac{1}{z} \frac{e^z}{z+1} \frac{e^{z/2}}{(1+z/2)} \dots \frac{e^{z/n}}{(1+z/n)} \end{aligned}$$

olur. Burada (3.1) ile verilen γ Euler sabiti göz önüne alınırsa 5 özelliği 4. özellikten yararlanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = e^{z\gamma} z \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-z}(1+z) e^{-z/2}(1+z/2) \dots e^{-z/n}(1+z/n) \\ &= z e^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \end{aligned}$$

elde edilir.

6. özellikte $\forall z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için Euler Gamma fonksiyonunun analitikliğinden bahsedilmiştir. Analitikliğin gösterilmesi için iki yol vardır. Birincisi bilinen

diferensiyel tanımı ikinciside Cauchy-Riemann koşullarının sağlanmasıdır. Burada diferensiyellenebilir olduğunu göstermek için Leibniz formülü kullanılabilir. Şöyle ki;

$$\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} f(t, z) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} f(t, z) dt$$

ifadesinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \log_e t dt$$

olur. Bu ifade sürekli kısmi türevlere sahiptir ve sağdaki integral $\forall z$ için tek olarak yakınsaktır. Çünkü $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon > 0, \operatorname{Re}(z) \geq \varepsilon$ olmak üzere D_ε bölgesinde

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \log_e t dt \leq e^{-t} t^{z-1} |\log_e t|$$

dir. Dolayısıyla $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \log_e t dt < \infty$ olur. Yani yakınsaktır. Böylece $\Gamma(z)$ fonksiyonu analitiktir.

5. özellik, 6. ve 7. özelliklerde de kullanılır. Şöyle ki, Weierstrass'ın tanımı bütün z değerleri için analitikdir ve sadece $z = 0$ ve negatif sayılarda sıfırdır. Böylece $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0$ ve negatif tam sayılarda analitik olarak kabul edilir. Ayrıca $\Gamma(z)$ fonksiyonu $1/\Gamma(z)$ nin tanımsız olmasından dolayı asla sıfır olamaz.

8. özelliğin ispatı için yine 5. özellikteki Weierstrass'ın tanımından yararlanılır. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(-z)} &= -z^2 e^{\gamma z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \right] \\ &= -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, 3. özellik kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{-z}{\Gamma(1-z)} &= -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \\ \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(1-z)} &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

seri açılımı göz önüne alınırsa

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

elde edilir. 8. özelliğin ikinci ifadeside benzer şekilde gösterilebilir.

9. özelliğin ispatı [55] kaynağında açık bir şekilde gösterilmiştir.

Sonuç 3.1.1

✓ $\Gamma(z)$ fonksiyonu $\forall z > 0$ için yakınsaktır.

✓ Kompleks düzlemde 1. özelliğin tekrar tekrar uygulanmasıyla Euler Gamma fonksiyonu 0 civarında son bulur.

✓ 2. özellikten Euler Gamma fonksiyonunun genelleştirilmiş faktöriyel olduğu görülür.

✓ 3. özelliğin genelleştirilmesiyle $z \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{C}/\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ için

$$\Gamma(z-x) = (-1)^x \Gamma(-x) \prod_{j=0}^{x-1} (x-j)$$

ifadesi elde edilir.

✓ 3. ve 8. özelliklerin bir kombinasyonuyla

$$\Gamma(-z)\Gamma(1+z) = \frac{\Gamma(1-z)}{-z} \Gamma(z)z = -\Gamma(-z)\Gamma(z) = -\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

olur ve daha genel olarak $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$(-1)^{k+1} \Gamma(z-k)\Gamma(k+1-z) = \Gamma(-z)\Gamma(1+z)$$

elde edilir.

✓ 9. özellik kullanılırsa Euler Gamma fonksiyonunun bazı değerleri

z	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2
$\Gamma(z)$	$\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}/2$	$3\sqrt{\pi}/4$	$15\sqrt{\pi}/8$	$105\sqrt{\pi}/16$	$945\sqrt{\pi}/32$	$10395\sqrt{\pi}/64$

olarak bulunabilir.

3.1.2 Beta Fonksiyonu

Tanım 3.1.3

$z, w \in \mathbb{C}$ olmak üzere iki değişkenli $B(z, w)$ Beta fonksiyonu

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Teorem 3.1.2

Beta fonksiyonu şu özelliklere sahiptir.

1) $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0$ için (3.4) tanımı

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{(1+x)^{z+w}} dx \quad (3.5)$$

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2z-1} (\cos \varphi)^{2w-1} d\varphi \quad (3.6)$$

integralleri ile de tanımlanır. Bu ifadelere aynı zamanda Beta integralleri de denir.

2) $B(z+1, w+1)$ fonksiyonu $\int_0^1 t^z(1-t)^w dt$ Beta integralinin çözümüdür. Yani,

$$\int_0^1 t^z(1-t)^w dt = B(z+1, w+1).$$

3) Beta fonksiyonu

$$a) B(z, w) = B(w, z),$$

$$b) B(z, w) = B(z+1, w) + B(z, w+1),$$

$$c) B(z, w+1) = \frac{w}{z} B(z+1, w) = \frac{w}{z+w} B(z, w),$$

şeklindeki özelliklere sahiptir.

İspat

1. özellikde; (3.5) eşitliğini göz önüne alalım. Öncelikle

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$$

integralinde $t = x/(x+1)$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt = \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^{z-1} \left(1 - \frac{x}{x+1}\right)^{w-1} dt = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{(1+x)^{z+w}} dx$$

elde edilir. Benzer düşünceyle (3.5)'in yukarıdaki integralinde $t = \sin^2 \varphi$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2z-1} (\cos \varphi)^{2w-1} d\varphi$$

integrali bulunur.

2. ve 3. özelliklerin ispatlarında (3.5) Beta integralinden kolayca gösterilebilir.

Sonuç 3.1.2

✓ Euler Gamma fonksiyonu ve Beta fonksiyonu arasında ki ilişki

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)B(z, w)$$

şeklinde verilir [2]. Şöyleki; Euler Gamma fonksiyonunun (3.2) tanımından

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \times \int_0^\infty e^{-s} s^{w-1} ds$$

olur. Bu integrallerde sırasıyla; $t = x^2$, $s = y^2$ dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2z-1} dx \times \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2w-1} dy \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} x^{2z-1} y^{2w-1} dx dy \end{aligned}$$

elde edilir. Son integralde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ kutupsal koordinatları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2z+2w-1} (\cos \theta)^{2z-1} (\sin \theta)^{2w-1} r d\theta dr \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2z+2w-1} dr \times 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2z-1} (\sin \theta)^{2w-1} d\theta \end{aligned}$$

bulunur. $r = \sqrt{t}$ ve $\theta = \pi/2 - \varphi$ ifadesi kullanılırsa

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z+w-1} dt \times 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2z-1} (\cos \varphi)^{2w-1} d\varphi$$

olmak üzere

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)B(z,w)$$

elde edilir.

✓ Beta fonksiyonu $\forall z, w > 0$ için yakınsaktır.

3.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Tanım 3.1.4

$z \in \mathbb{C}$ için $E_\alpha(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır.

$E_{\alpha,\beta}(z)$ genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (3.8)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.1.3

Mittag-Leffler fonksiyonu şu özelliklere sahiptir;

1) $|z| < 1$ için genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z) dt = \frac{1}{z-1}$$

şeklindedir.

2) $|z| < 1$ için $E_\alpha(z^\alpha)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} E_\alpha(z^\alpha) dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.1.3

✓ (3.7) ile verilen Mittag-Leffler fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır.

✓ α 'nın bazı özel değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonunun değerleri

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad E_1(z) = e^z, \quad E_2(z^2) = \cosh(z), \quad E_2(-z^2) = \cos z$$

şeklindedir.

3.2 RİEAMANN-LİOUVILLE KESİRLİ TÜREV ve İNTEGRALI

Bu bölümde kesirli analiz ile ilgili tanımlar ve özellikler aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.2.1

$\alpha > 0$ ve $x > c$ olmak üzere bir f fonksiyonunun α -mertebeli Riemann-Liouville kesirli integral operatörü,

$${}_c D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanmıştır [4].

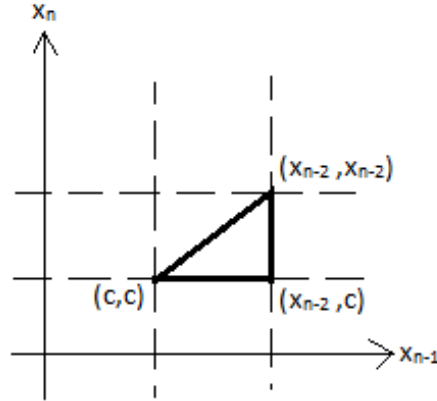
Bu integralin tanımı bir $F(x)$ fonksiyonun

$$F(x) = \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} dx_2 \int_c^{x_2} dx_3 \dots \int_c^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_c^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \quad (3.18)$$

şeklindeki n -katlı integraline eşittir. Buradan hareketle

$$A = \int_c^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_c^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

integralini ve aşağıdaki Şekil 3.1' i göz önüne alalım.



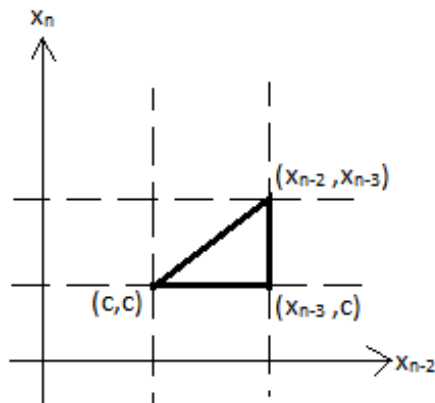
Şekil 3.2. A integralinin şekli

A ifadesi $x_n = c$, $x_{n-1} = x_{n-2}$, $x_n = x_{n-1}$ olacak şekilde integrallenebilir. Şöyle ki Dirichlet formülünden A integrali

$$\begin{aligned} A &= \int_c^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_c^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_c^{x_{n-2}} dx_n \int_{x_n}^{x_{n-2}} f(x_n) dx_{n-1} \\ &= \int_c^{x_{n-2}} f(x_n) dx_n \int_{x_n}^{x_{n-2}} dx_{n-1} = \int_c^{x_{n-2}} f(x_n) (x_{n-2} - x_n) dx_n \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde; A ifadesi Şekil 3.2' ye göre integrallenirse



Şekil 3.3. A integralinin şekli

$$\begin{aligned}
 A &= \int_c^{x_{n-3}} dx_{n-2} \int_c^{x_{n-2}} f(x_n)(x_{n-2} - x_n) dx_n = \int_c^{x_{n-3}} dx_n \int_{x_n}^{x_{n-3}} f(x_n)(x_{n-2} - x_n) dx_{n-2} \\
 &= \int_c^{x_{n-3}} f(x_n) dx_n \int_{x_n}^{x_{n-3}} (x_{n-2} - x_n) dx_{n-2} = \int_c^{x_{n-3}} f(x_n) \frac{(x_{n-3} - x_n)^2}{2!} dx_n
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durum $(n - 1)$ -kez tekrar edilirse,

$$F(x) = \int_c^x f(x_n) \frac{(x - x_n)^{n-1}}{(n - 1)!} dx_n$$

olur. Sonuçta $F(x) = {}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ yazılabilir. Böylece (3.17) Riemann-Liouville kesirli integral formülü elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.1

$f \in L_1[c, b]$ ve $\alpha > 0$ olsun. O zaman ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ Riemann-Liouville kesirli integral tanımı hemen hemen her $x \in [c, b]$ için vardır ve ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ fonksiyonu $L_1[c, b]$ 'nin bir elemanıdır.

İspat

$$\phi_1(u) = \begin{cases} u^{\alpha-1}; & 0 < u \leq b-c \\ 0; & \text{değilse} \end{cases}$$

ve

$$\phi_2(u) = \begin{cases} f(u); & c \leq u \leq b \\ 0; & \text{değilse} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x-t) \phi_2(t) dt$$

integrali yazılır.

$j \in [1, 2]$ için $\phi_j \in L_1(\mathbb{R})$ olur ve böylece Lebesgue integralinden istenilen sonuç elde edilir [4].

Teorem 3.2.2

$\alpha > 0$ için $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisi olsun. Bu taktirde ${}_a D_x^{-\alpha}$ kesirli integral operatörü ile limit işlemi yer değiştirebilir. Şöyle ki;

$$({}_a D_x^{-\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) = (\lim_{k \rightarrow \infty} {}_a D_x^{-\alpha} f_k)(x)$$

olur. Bununla birlikte, $({}_a D_x^{-\alpha} f_k)_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlarının serisi düzgün yakınsaktır [4].

İspat

(f_k) serisi $\alpha = 0$ olması durumunda düzgün yakınsaktır. $\alpha > 0$ için bakılırsa,

$$\begin{aligned} |{}_a D_x^{-\alpha} f_k(x) - {}_a D_x^{-\alpha} f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |f_k(t) - f(t)| (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f_k - f\|_{\infty} (b-a)^{\alpha} \end{aligned}$$

olur. Burada $\forall x \in [a, b]$ için $k \rightarrow \infty$ düzgün yakınsaktır.

Tanım 3.2.2

Bir f fonksiyonunun α -mertebeli Riemann-Liouville kesirli türev tanımı

$$\begin{aligned} {}_c D_x^\alpha f(x) &= {}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} f(x) \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = m - p \end{aligned} \quad (3.19)$$

şeklindedir. Burada m ; α ' dan büyük çok küçük bir tam sayı, p ; $0 < p \leq 1$, d^m/dx^m de x ' e göre adi türevdir [4].

Riemann kesirli türev tanımı integral tanımında $-\alpha$ yerine α yazılmasıyla direkt elde edilemez. Yani,

$${}_c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x (x-t)^{-\alpha+1} f(t) dt, \quad \alpha > 0$$

şeklinde bir tanım yapılırsa çelişki oluşur.

(3.19)' da ki kesirli türev fonksiyonu, (3.17)' de ki integral fonksiyonunun analitik devamıdır. Bu ifadenin ispatı için ilk olarak ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ ' in analitik bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

Teorem 3.2.3

Eğer $f(x)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise (3.17)' de ki ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ Riemann-Liouville integral operatörü de D bölgesinde α ($\alpha > 0$) ve x ' e göre analitik bir fonksiyondur [6].

İspat

Riemann-Liouville integrali;

$$G(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (3.20)$$

olacak şekilde $G(\alpha, x)$ fonksiyonu ile tanımlansın. Bu $G(\alpha, x)$ fonksiyonunun analitik olduğunu göstermek için bir D bölgesinin her noktasında türevlenebilir olduğunu göstermeliyiz.

$G(\alpha, x)$ fonksiyonunun her noktada türevlenebilir olduğunu göstermek için öncelikle (3.20)' nin her iki tarafının α ' ya göre türevi alınır,

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\Gamma(\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] - \left[\int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] \frac{\partial \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha}}{[\Gamma(\alpha)]^2} \quad (3.21)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha) \left[\int_c^x (x-t)^{\alpha-1} \ln(x-t) f(t) dt \right]}{[\Gamma(\alpha)]^2} - \frac{\left[\int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx}{[\Gamma(\alpha)]^2}$$

bulunur. Burada oluşan $\int_c^x (x-t)^{\alpha-1} \ln(x-t) f(t) dt$ ve $\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx$ integralleri mevcuttur. (3.21) türevinin sağlandığını göstermek için öncelikle bu iki integralin mevcut olduğunu gösterelim.

İlk olarak; $g(t) = (x-t)^{\alpha-1} \ln(x-t)$ olarak alınırsa,

$$\int_c^x g(t) dt = \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} \ln(x-t) dt$$

yazılabilir. Burada $s = (x-t)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_c^x (x-t)^{\alpha-1} \ln(x-t) dt = - \int_{x-c}^0 s^{\alpha-1} \ln(s) ds = \int_0^{x-c} s^{\alpha-1} \ln(s) ds$$

elde edilir. En son elde edilen integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^{x-c} s^{\alpha-1} \ln(s) ds = \frac{(x-c)^\alpha \ln(x-c)}{\alpha} - \frac{(x-c)^\alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \lim_{s \rightarrow 0} s^\alpha \ln(s)$$

bulunur. Burada ki $\lim_{s \rightarrow 0} s^\alpha \ln(s) = 0$ dır. Sonuçta $g(t)$ fonksiyonu $[c, x]$ aralığında integrallenebilirdir. f fonksiyonunun analitik olduğunu bildiğimiz için, integrallenebilir iki fonksiyonun çarpımında integrallenebileceğinden $\int_c^x g(t) f(t) dt$ integrali mevcuttur.

Benzer düşünceyle $\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx$ integralinin varlığını inceleyelim. Bu integral

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx = \int_0^a e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx + \int_a^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx$$

şeklinde yazılabilir. Sağ taraftaki ilk integralin varlığı bellidir. İkinci integral ise $\alpha > 1$ için $e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x < e^{-x} x^{\alpha-1} x = e^{-x} x^\alpha$ olur ve $\forall \alpha$ için $\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx$ integrali sağlandığından

$$\int_a^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx \leq \int_a^\infty e^{-x} x^\alpha dx$$

elde edilir. Yani $\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x dx$ integrali mevcuttur.

Böylece sonuç olarak $\frac{\partial G}{\partial \alpha}$ türevi mevcut olur.

(3.20) ifadesinin x' e göre türevini almadan önce kısmi integrasyon uygulayalım. Şöyle ki;

$$\begin{aligned}
G(\alpha, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(x-c)^\alpha f(c)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_c^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right] \\
\frac{\partial G(\alpha, x)}{\partial x} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{d}{dx} \left\{ \frac{(x-c)^\alpha f(c)}{\alpha} \right\} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} \int_c^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\{(x-c)^{\alpha-1} f(c)\} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} \int_c^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Sağ taraftaki integralin hesabı için analizde bilinen Leibniz kuralında

$\beta(x) = x$, $\alpha(x) = c$, $F(x, t) = (x-t)^\alpha f'(t)$ olmak üzere $\beta'(x) = 1$, $\alpha'(x) = 0$ ve $\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha(x-t)^{\alpha-1} f'(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_c^x (x-t)^\alpha f'(t) dt &= \beta'(x) F(x, \beta(x)) - \alpha'(x) F(x, \alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F}{\partial x} dt \\
\frac{d}{dx} \int_c^x (x-t)^\alpha f'(t) dt &= \alpha \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f'(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değer yukarıdaki ifade de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial G(\alpha, x)}{\partial x} = \frac{(x-c)^{\alpha-1} f(c)}{\Gamma(\alpha)} + {}_c D_x^{-\alpha} f'(x)$$

bulunur.

Sonuçta $G(\alpha, x)$ fonksiyonunun her noktada türevlenebilir olduğu görülür. Böylece ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ fonksiyonu analitik fonksiyondur.

Teorem 3.2.4

Eğer f fonksiyonu analitik bir fonksiyon ise ${}_c D_x^\alpha f(x)$ kesirli türevi ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ kesirli integralinin analitik devamıdır [6].

İspat

$\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} Q(\alpha, x) &= {}_0D_x^{-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

yazılabilir. Böylece $Q(\alpha, x)$ integrali $\forall \alpha > 0$ için yakınsaktır. Burada, $-\alpha = m - p$ için

$$\begin{aligned} P(\alpha, x) &= {}_0D_x^{-\alpha} f(x), \\ &= {}_0D_x^{m-p} f(x) \\ &= {}_0D_x^m {}_0D_x^{-p} f(x) \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

olur. Bu ifade $\forall p > 0$ için yakınsaktır. Burada önemli olan soru $Q(\alpha, x)$ ve $P(\alpha, x)$ ' in hangi durumda eşit olacağıdır. Eğer $\alpha > 0$ olursa $m = 0$ için $\alpha = p$ olacağından $Q(\alpha, x) = P(\alpha, x)$ eşit olur. Eğer $-1 < \alpha < 0$ seçilirse $m = 1$ ve $\alpha = p - 1$ olur. Bu taktirde (3.22) integrali tekrar yazılırsa

$$Q(\alpha, x) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right) dx \right] \quad (3.24)$$

ifadesi bulunur. (3.24)' de Dirichlet formülü kullanılırsa

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right) dx \right] = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} f(t) dt$$

elde edilir. Dolayısıyla $-1 < \alpha < 0$ için tekrar yazılan $Q(\alpha, x)$ integrali yakınsak olur. Benzer şekilde $-1 < \alpha < 0$ için $0 < -\alpha < 1$ olacağından $-\alpha = 1 - p$ olarak yazılabilir. Buradan (3.23) $P(\alpha, x)$ integrali yeniden yazılırsa

$$P(\alpha, x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt \right] \quad (3.25)$$

bulunur. Dolayısıyla (3.24) ve (3.25) bağıntıları $-1 < \alpha < 0$ için aynı olur.

Bu işlem $-n < \alpha < 1 - n$ için n -kez tekrarlanırsa $Q(\alpha, x)$ integrali

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0$$

şeklinde elde edilir ve bir önceki teoremden $Q(\alpha, x)$ ' in D bölgesinde analitik olduğunu biliyoruz. Yine $0 < p \leq 1$ olmak üzere $P(\alpha, x)$ integrali

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

olarak tanımlanır. Bir bölgenin her noktasında türevlenebilen fonksiyon analitik olduğundan $P(\alpha, x)$ fonksiyonu $-n < \alpha < 1 - n$ için D_2 bölgesinde analitik olur. $D_3 = D_1 \cap D_2$ olmak üzere D_3 bölgesinde $Q(\alpha, x) = P(\alpha, x)$ olur. Böylece $P(\alpha, x)$, $Q(\alpha, x)$ ' in analitik devamıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5

$b, d > -1$ ($b, d \in \mathbb{R}$) olmak üzere

$$\int_0^x (x-t)^b t^d dt = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(d+1)x^{b+d+1}}{\Gamma(b+d+2)} \quad (3.26)$$

dir [6].

İspat

(3.26)' da verilen integralde $t = xy$ için değişken değiştirilmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^b t^d dt &= \int_0^1 (x-xy)^b (xy)^d x dy \\ &= x^{b+d+1} \int_0^1 (1-y)^b y^d dy \end{aligned}$$

bulunur. Sağ taraftaki integral (3.5) ile verilmiş olan Beta integrali olduğundan

$$\int_0^1 (1-y)^b y^d dy = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(d+1)}{\Gamma(b+d+2)}$$

integralinin ifadesi elde edilir.

Örnek 3.2.1

$f(x) = 4x^3$ ve $\alpha = 3$ olmak üzere, ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ Riemann-Liouville integrali (3.17)

tanımından

$$\begin{aligned} {}_0 D_x^{-3} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^x (x-t)^2 4t^3 dt = \frac{4}{\Gamma(3)} \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)x^6}{\Gamma(7)} \\ &= 4 \frac{3!}{6!} x^6 = \frac{x^6}{30} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonun $\alpha = 3$ için integrali analizde bilindiği gibi

$$\int_0^x 4t^3 dt = x^4 \Rightarrow \int_0^x t^4 dt = \frac{x^5}{5} \Rightarrow \int_0^x \frac{t^5}{5} dt = \frac{x^6}{30}$$

olur.

Yani α bir tam sayı olduğunda analizde bilinen integral ile Riemann-Liouville kesirli integrali aynı sonucu verir.

Örnek 3.2.2

$f(x) = 4x^3$ ve $\alpha = 1/2$ olmak üzere, ${}_c D_x^{-\alpha} f(x)$ Riemann-Liouville integrali (3.17)

tanımından

$$\begin{aligned} {}_0 D_x^{-1/2} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} 4t^3 dt = \frac{4}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^3 dt \\ &= \frac{4}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(-1/2+1)\Gamma(3+1)}{\Gamma(-1/2+3+2)} x^{-\frac{1}{2}+3+1} \\ &= \frac{4}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(4)}{\Gamma(9/2)} x^{\frac{7}{2}} = \frac{2^7}{35\sqrt{\pi}} x^{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2.6 (Cauchy' nin Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Formülü)

Genelleştirilmiş Cauchy integral formülü reel ekseninde Riemann-Liouville integral tanımına eşittir [51].

Tanım 3.2.3 (Lacroix' un Tanımı)

p ve m doğal sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d(z^p)}{dz} &= pz^{p-1} \\ \frac{d^2(z^p)}{dz^2} &= p(p-1)z^{p-2} \\ &\vdots \\ \frac{d^m(z^p)}{dz^m} &= p(p-1)\dots(p-m+1)z^{p-m} = \frac{p(p-1)\dots(p-m+1)(p-m)!}{(p-m)!} z^{p-m} \\ \frac{d^m(z^p)}{dz^m} &= \frac{p!}{(p-m)!} z^{p-m} \end{aligned} \tag{3.27}$$

dir [6].

Teorem 3.2.7

$f(x) = x^a$, $a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\alpha = m - p$ (m , α ' dan büyük, çok küçük bir tam sayıdır) ve $0 < p \leq 1$ olmak üzere ${}_0D_x^\alpha f(x)$,

$${}_0D_x^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)} x^{a-\alpha} \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanır [52].

İspat

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha f(x) &= {}_0D_x^m {}_0D_x^{-p} f(x) \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt \end{aligned}$$

şeklindeki Riemann-Liouville kesirli türev tanımından $f(x) = x^a$ için

$${}_0D_x^\alpha (x^a) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} (t^a) dt$$

yazılabilir. Burada $t = xs$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} (t^a) dt &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (x-xs)^{p-1} (xs)^a x ds \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \frac{x^{p+a}}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-s)^{p-1} s^a ds \right\} \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{x^{p+a}}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+1)}{\Gamma(p+a+1)} \\ &= \frac{(a+p)! \Gamma(a+1) x^{p+a-m}}{(p+a-m)! \Gamma(p+a+1)} \\ &= \frac{\Gamma(a+p+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+p-m+1)\Gamma(p+a+1)} x^{p+a-m}, \quad \alpha = m-p \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$${}_0D_x^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)} x^{a-\alpha}$$

bulunur.

Örnek 3.2.3

$f(x) = x^3$ için $\alpha = 3$ olmak üzere kesirli türev (3.28) ifadesinden,

$$D_x^3(x^3) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-3+1)} x^{3-3} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1)} x^0 = 3! = 6$$

şeklinde. Analizden bildiğimiz gibi

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6$$

olur. Görüldüğü gibi α 'nın tam sayı değerleri için kesirli türev ile bildiğimiz türev aynıdır.

Örnek 3.2.4

$f(x) = x^3$ için $\alpha = 1/2$ olmak üzere kesirli türev (3.28) ifadesinden,

$$D_x^{1/2}(x^3) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{1}{2}+1)}x^{3-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(7/2)}x^{5/2} = \frac{3!}{15\pi/8}x^{5/2} = \frac{48}{15\sqrt{\pi}}x^{5/2}$$

bulunur.

Ayrıca bu türev (3.19) tanımından

$$\begin{aligned} D_x^{1/2}(x^3) &= {}_0D_x^1 {}_0D_x^{-1/2}x^3 \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^3 dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $b = \frac{-1}{2}$ ve $d = 3$ olmak üzere (3.26) ifadesinden ise

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(1-1/2)\Gamma(1+3)}{\Gamma(-1/2+3+2)} x^{-\frac{1}{2}+3+1} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(4)}{\Gamma(9/2)} x^{7/2} \\ &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(9/2)} \left\{ \frac{d}{dx} x^{7/2} \right\} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(9/2)} \frac{7}{2} x^{5/2} \\ &= \frac{48}{15\sqrt{\pi}} x^{5/2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8

$f(x) = x^{-a}$, $x > 0$, $a > 0$ ve alt sınır $-\infty$ olmak üzere

$${}_{-\infty}D_x^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)} x^{-\alpha-a} \quad (3.29)$$

ifadesine Riemann-Liouville' un ikinci kesirli türev tanımı denir [52].

İspat

Riemann-Liouville' un (3.19) kesirli türev tanımında c yerine $-\infty$ alınırsa

$\alpha = m - p$, $0 < p \leq 1$ için

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}D_x^\alpha x^{-a} &= {}_{-\infty}D_x^m {}_{-\infty}D_x^{-p} x^{-a} \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{p-1} t^{-a} dt \end{aligned}$$

bulunur.

Burada $t = x/(1 - u)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{(-1)}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\frac{-xu}{1-u} \right)^{p-1} \left(\frac{x}{1-u} \right)^{-a} \frac{x}{(1-u)^2} du \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{(-1)^{-p}}{\Gamma(p)} x^{p-a} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{a-p-1} du \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son integralde Beta integralinin (3.4) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}D_x^\alpha x^{-a} &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{(-1)^{-p}}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(a-p)}{\Gamma(a)} x^{p-a} \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{(-1)^{-p}\Gamma(a-p)}{\Gamma(a)} x^{p-a} \end{aligned}$$

bulunur. (3.27) ifadesini kullanırsak m . türevi

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \frac{(-1)^{-p}\Gamma(a-p)}{\Gamma(a)} x^{p-a} &= \frac{(p-a)!\Gamma(a-p)(-1)^{-p}}{(p-a-m)!\Gamma(a)} x^{p-a-m} \\ &= \frac{\Gamma(p-a+1)\Gamma(a-p)(-1)^p}{\Gamma(p-a-m+1)\Gamma(a)} x^{p-a-m} \end{aligned} \quad (3.30)$$

olur. (3.30)' da p yerine $m - \alpha$ yazılırsa,

$$\frac{\Gamma(m - \alpha - a + 1)\Gamma(a - m + \alpha)(-1)^{\alpha-m}}{\Gamma(1 - \alpha - a)\Gamma(a)} x^{-\alpha-a}$$

elde edilir. Burada $m = 1$ alınırsa

$$\frac{\Gamma(2 - \alpha - a)\Gamma(a + \alpha - 1)(-1)^{\alpha-1}}{\Gamma(1 - \alpha - a)\Gamma(a)} x^{-\alpha-a} \quad (3.31)$$

olur. $\Gamma(2 - \alpha - a) = (-1)(a + \alpha - 1)\Gamma(-a - \alpha + 1)$ ve $\Gamma(a + \alpha) = (a + \alpha - 1)\Gamma(a + \alpha - 1)$

olmak üzere (3.31) denklemi;

$$\frac{(-1)^\alpha(a + \alpha - 1)\Gamma(-a - \alpha + 1)\Gamma(a + \alpha)}{(a + \alpha - 1)\Gamma(-a - \alpha + 1)\Gamma(a)} x^{-\alpha-a}$$

olmak üzere

$${}_{-\infty}D_x^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha\Gamma(a + \alpha)}{\Gamma(a)} x^{-\alpha-a}$$

bulunur.

Benzer olarak x^{-a} 'nın α mertebeli integrasyonda elde edilebilir.

Tanım 3.2.4 (Oldham ve Spanier' in Tanımı)

Bu tanım Grünwald' un tanımına dayanır. Şöyel ki; $a < x$ ve q sabit olmak üzere

$${}_aD_x^q f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left(\frac{x-a}{n}\right)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j \left[\frac{x-a}{n}\right]\right) \right\}$$

şeklindedir [53].

3.2.1 Kesirli Türev ve İntegralin Özellikleri ve Bazı Uygulamaları

Bu bölümde kesirli analizin özellikleri verilecek. Bununla birlikte bazı uygulamalarda göz önüne alınacaktır.

Özellik 1:

Bir $f(x)$ fonksiyonunun sıfıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_cD_x^0 f(x) = f(x) \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlanır [52].

İspat

(3.17) ifadesinde $\alpha = 0$ alınırsa,

$${}_0D_x^0 f(x) = \frac{1}{\Gamma(0)} \int_c^x (x-t)^{-1} f(t) dt$$

ifadesi tanımsız olur. Çünkü $\Gamma(0)$ tanımsızdır. Bu durumda $\alpha \rightarrow 0$ iken yakınsaklığının incelenmesi gerekir. f fonksiyonunun

$$\begin{aligned} f(t) &= f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2!}(t-x)^2 + \dots \\ &= f(x) - f'(x)(x-t) + \frac{f''(x)}{2!}(x-t)^2 + \dots \end{aligned}$$

şeklindeki Taylor serisine açılımını göz önüne alalım. Riemann-Liouville kesirli integralinden

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left\{ f(x) - f'(x)(x-t) + \frac{f''(x)}{2!}(x-t)^2 + \dots \right\} dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} f(x)}{\Gamma(\alpha)} dt - \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha} f'(x)}{\Gamma(\alpha)} dt + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha+1} f''(x)}{2! \Gamma(\alpha)} dt + \dots \\ &\quad + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(x)}{n! \Gamma(\alpha)} dt + \dots \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son ifadede $\alpha \rightarrow 0$ iken limit alınırsa;

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_0D_x^{-\alpha} f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{f'(x)x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}f^{(n)}(x)x^{\alpha+n}}{(\alpha+n)n!\Gamma(\alpha)} + \dots \right\} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.32) özelliği sağlanmış olur.

Özellik 2:

u ve v pozitif reel sayılar olmak üzere,

$${}_cD_x^{-u} {}_cD_x^{-v} f(x) = {}_cD_x^{-(u+v)} f(x) \quad (3.33)$$

dir [54].

İspat

(3.17) Riemann- Liouville kesirli integral tanımından

$$\begin{aligned}{}_cD_x^{-u} {}_cD_x^{-v} f(x) &= {}_cD_x^{-u} \left\{ \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(u)} \int_c^x (x-s)^{u-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^s (s-t)^{v-1} f(t) dt \right\} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \int_c^x (x-s)^{u-1} \int_c^s (s-t)^{v-1} f(t) dt ds\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede Dirichlet formülü kullanılırsa,

$$= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \int_c^x f(t) dt \int_t^x (x-s)^{u-1} (s-t)^{v-1} ds$$

bulunur. Burada $y = \frac{s-t}{x-t}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \int_c^x f(t) dt \int_0^1 [(x-t)^{u-1} (1-y)^{u-1}] [y^{v-1} (x-t)^{v-1} (x-t)] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{u+v-1} f(t) dt \int_0^1 (1-y)^{u-1} y^{v-1} dy \quad (Beta \text{ integralinden}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{u+v-1} f(t) \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(u+v)} \int_c^x (x-t)^{u+v-1} f(t) dt = {}_cD_x^{-(u+v)} f(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Özellik 3:

m pozitif bir tam sayı olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu, $x = c$ ' de $m - 1$ ' inci mertebeden türevi sıfır olan bir fonksiyon olsun. O zaman $0 < p \leq 1$ için

$${}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} f(x) = {}_c D_x^{-p} {}_c D_x^m f(x) \quad (3.34)$$

şeklindedir [52].

İspat

$$\begin{aligned} {}_c D_x^{-p} {}_c D_x^m f(x) &= {}_c D_x^{-p} \left[\frac{d}{dx^m} f(x) \right] \\ &= {}_c D_x^{-p} f^{(m)}(x) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$${}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} f(x) = {}_c D_x^m \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t) dt \right] \quad (3.36)$$

olmak üzere (3.36) denkleminin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &= {}_c D_x^m \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + {}_c D_x^{-(p+m)} f^{(m)}(x) \right] \\ &= {}_c D_x^m \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{0(x-c)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + {}_c D_x^{-(p+m)} f^{(m)}(x) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Özellikte verilen ifadeden dolayı $x = c$ ' de f fonksiyonunun $(m - 1)$ ' inci mertebeden türevi sıfırdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} {}_c D_x^m [{}_c D_x^{-(p+m)} f^{(m)}(x)] &= {}_c D_x^m {}_c D_x^{-m-p} f^{(m)}(x) \\ &= {}_c D_x^m {}_c D_x^{-m} {}_c D_x^{-p} f^{(m)}(x) \quad (\text{Özellik 2' den}) \\ &= {}_c D_x^{-p} f^{(m)}(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.2.5

f fonksiyonu $x = c$ noktasında sıfırdan farklı olmak üzere;

$$\begin{aligned} {}_c D_x^1 {}_c D_x^{-1} f(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1)} \int_c^x (x-t)^0 f(t) dt \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt = f(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
{}_c D_x^{-1} {}_c D_x^1 f(x) &= {}_c D_x^{-1} f'(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_c^x (x-t)^0 f'(t) dt \\
&= f(x) - f(c)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla ${}_c D_x^1 {}_c D_x^{-1} f(x) \neq {}_c D_x^{-1} {}_c D_x^1 f(x)$ olduğu görülür, yani (3.34) sağlanmaz: Çünkü f fonksiyonu $x = c$ noktasında sıfır değildir.

Özellik 4:

$v > 0$, $u > 0$ ve $v = n - r$, $u = m - q$ olsun. Burada n ve m , u ve v den büyük olan çok küçük tam sayılar, $0 < r \leq 1$ ve $0 < q \leq 1$ olsun. f 'in $x = c$ de $(n-1)$ ' inci mertebeden türevleri sıfır olmak üzere

$${}_c D_x^u {}_c D_x^v f(x) = {}_c D_x^{u+v} f(x) \quad (3.37)$$

olur [52].

İspat

(3.37) bağıntısında u ve v değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
{}_c D_x^u {}_c D_x^v f(x) &= {}_c D_x^{m-q} {}_c D_x^{n-r} f(x) \\
&= {}_c D_x^m {}_c D_x^{-q} {}_c D_x^n {}_c D_x^{-r} f(x)
\end{aligned}$$

bulunur. f fonksiyonu $x = c$ de sıfır olduğundan (3.34) değişme özelliği kullanılırsa

$${}_c D_x^{-q} {}_c D_x^n = {}_c D_x^n {}_c D_x^{-q}$$

olmak üzere

$${}_c D_x^{-q} {}_c D_x^{-r} = {}_c D_x^{-q-r} = {}_c D_x^{-(q+r)}$$

olur. Bu ifadeler yerlerine yazılırsa,

$${}_c D_x^m {}_c D_x^{-q} {}_c D_x^n {}_c D_x^{-r} f(x) = {}_c D_x^{m+n} {}_c D_x^{-(q+r)} f(x)$$

elde edilir. $0 < q + r \leq 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
{}_c D_x^{m+n} {}_c D_x^{-(q+r)} f(x) &= {}_c D_x^{m+n-(q+r)} f(x) \\
&= {}_c D_x^{(m-q)+(n-r)} f(x) \\
&= {}_c D_x^{u+v} f(x)
\end{aligned}$$

olur. Eğer $0 < q + r \leq 2$ olursa $q + r = 1 + p$, $0 < p \leq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
{}_c D_x^{m+n} {}_c D_x^{-(q+r)} f(x) &= {}_c D_x^{m+n} {}_c D_x^{-1-p} f(x) \\
&= {}_c D_x^{m+n} {}_c D_x^{-1} {}_c D_x^{-p} f(x) \\
&= {}_c D_x^{m+n-1-p} f(x) \\
&= {}_c D_x^{m+n-(q+r)} f(x) \\
&= {}_c D_x^{u+v} f(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Özellik 5:

k bir sabit fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali;

$${}_0 D_x^{-\alpha}(k) = \frac{k}{\Gamma(\alpha + 1)} x^\alpha \quad (3.38)$$

şeklindedir [52].

İspat

Riemann-Liouville kesirli integral tanımından;

$$\begin{aligned}
{}_0 D_x^{-\alpha}(k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (k) dt \\
&= \frac{k}{\alpha \Gamma(\alpha)} x^\alpha = \frac{k}{\Gamma(\alpha + 1)} x^\alpha
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.6

(3.38)' de $\alpha = 2$ alınırsa,

$${}_0 D_x^{-2}(k) = \frac{k}{\Gamma(3)} x^2 = \frac{k}{2!} x^2$$

elde edilir.

Özellik 6:

k sabit bir fonksiyon, $\alpha > 0$, m' de α' dan büyük olan çok küçük bir tamsayı olmak üzere; $\alpha = m - p$ ve $0 < p \leq 1$ için

$${}_0 D_x^\alpha(k) = \frac{k}{\Gamma(-\alpha + 1)} x^{-\alpha} \quad (3.39)$$

olarak tanımlanır [52].

İspat

(3.19) kesirli türev tanımından

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha(k) &= {}_0D_x^m {}_0D_x^{-p}(k) \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{p-1} k dt \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.38) özelliğinden ise

$${}_0D_x^\alpha(k) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{k}{\Gamma(p+1)} x^p$$

bulunur. Burada Lacroix' un (3.27) tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha(k) &= \frac{kp!}{\Gamma(p+1)(p-m)!} x^{p-m} \\ &= \frac{kp!}{p!(p-m)!} x^{p-m} \\ &= \frac{k}{\Gamma(p-m+1)} x^{-\alpha} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece,

$${}_0D_x^\alpha(k) = \frac{k}{\Gamma(-\alpha+1)} x^{-\alpha}$$

sağlanmış olur. Elde edilen bu son ifadede α pozitif bir tamsayı olursa $\Gamma(-\alpha+1) = \infty$ olur.

Örnek 3.2.7

$\alpha = 1/2$ ve $k = 1$ olmak üzere,

$${}_0D_x^\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} x^{-1/2} = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

elde edilir.

Özellik 7:

(3.17) Riemann-Liouville kesirli integrali lineerdir. Şöyle ki; $\alpha > 0$ ve k herhangi bir sabit olmak üzere,

$${}_cD_x^{-\alpha}[f(x) + g(x)] = {}_cD_x^{-\alpha}f(x) + {}_cD_x^{-\alpha}g(x) \quad (3.40)$$

ve

$${}_cD_x^{-\alpha}kf(x) = k{}_cD_x^{-\alpha}f(x) \quad (3.41)$$

şeklindedir [55].

İspat

(3.17) tanımından,

$${}_c D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

ve

$${}_c D_x^{-\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}_c D_x^{-\alpha} f(x) + {}_c D_x^{-\alpha} g(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t) + g(t)] dt \end{aligned}$$

olur. Analizde bilindiği üzere belirli integral lineer olduğundan,

$${}_c D_x^{-\alpha} f(x) + {}_c D_x^{-\alpha} g(x) = {}_c D_x^{-\alpha} [f(x) + g(x)]$$

bulunur. Yine aynı tanımdan;

$$\begin{aligned} k {}_c D_x^{-\alpha} f(x) &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} k f(t) dt \\ &= {}_c D_x^{-\alpha} k f(x) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Özellik 8:

(3.19) Riemann-Liouville kesirli türevi lineerdir. Şöyle ki; $\alpha > 0$ ve k herhangi bir sabit olmak üzere,

$${}_c D_x^{\alpha} [f(x) + g(x)] = {}_c D_x^{\alpha} f(x) + {}_c D_x^{\alpha} g(x) \quad (3.42)$$

ve

$${}_c D_x^{\alpha} k f(x) = k {}_c D_x^{\alpha} f(x) \quad (3.43)$$

olur [55].

İspat

(3.19) ifadesinden $\alpha = m - p$ için $\alpha > 0$ ve $0 < p \leq 1$ olmak üzere;

$${}_c D_x^\alpha f(x) = {}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} f(x)$$

yazılabilir. Burada m , α ' dan büyük olan çok küçük bir tamsayıdır. Böylece;

$${}_c D_x^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t) dt$$

ve

$${}_c D_x^\alpha g(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} g(t) dt$$

yazılabilir. Bu ifadeler (3.42)' nin sağ tarafında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} {}_c D_x^\alpha f(x) + {}_c D_x^\alpha g(x) &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t) dt + \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} g(t) dt \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} [f(t) + g(t)] dt \end{aligned}$$

bulunur. Analizden bilindiği üzere belirli integral tanımı lineer olduğundan,

$${}_c D_x^\alpha f(x) + {}_c D_x^\alpha g(x) = {}_c D_x^\alpha [f(x) + g(x)]$$

ifadesi elde edilir. Aynı tanımdan;

$$\begin{aligned} k {}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} f(x) &= k \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t) dt = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} k f(t) dt \\ &= {}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} k f(x) = {}_c D_x^\alpha k f(x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.2.8

$(x^3 - x - 6) = \int_c^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt$ denkleminde $f(x)$ fonksiyonunu bulalım. Verilen

denklemini

$$(x^3 - x - 6) = \int_c^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} f(t) dt$$

şeklinde yazıp her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(1/2)}$ ile çarparsak;

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1/2)}(x^3 - x - 6) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_c^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} f(t) dt = {}_0D_x^{-1/2} f(x) \\ \frac{1}{\Gamma(1/2)}(x^3 - x - 6) &= {}_0D_x^{-1/2} f(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu son ifadenin her iki tarafına ${}_0D_x^{1/2}$ türev operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}{}_0D_x^{1/2} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)}(x^3 - x - 6) \right] &= {}_0D_x^{1/2} {}_0D_x^{-1/2} f(x) \\ f(x) &= {}_0D_x^{1/2} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)}(x^3 - x - 6) \right]\end{aligned}$$

bulunur. Özellik 8' de verildiği gibi ${}_0D_x^\alpha$ türev operatörü lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}f(x) &= {}_0D_x^{1/2} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)}(x^3 - x - 6) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left[{}_0D_x^{1/2} x^3 - {}_0D_x^{1/2} x - {}_0D_x^{1/2} 6 \right]\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (3.28) ve (3.35) ifadeleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left\{ \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(7/2)} x^{5/2} - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} - \frac{6x^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{16}{5} x^{5/2} - 2x^{1/2} - 6x^{-1/2} \right\}\end{aligned}$$

$f(x)$ fonksiyonu elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.9 (Kesirli Analizde Genelleştirilmiş Leibniz Teoremi)

Eğer f fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)(t-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)(x-t)^n}{n!}$$

şeklinde bir seriye genelleştirilebiliyor ve $[0, x]$ aralığında düzgün yakınsak ise

$${}_0D_x^{-\alpha} [f(x).g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+n) D^{(n)} f(x) {}_0D_x^{-(\alpha+n)} g(x)}{n! \Gamma(\alpha)} \quad (3.44)$$

olarak tanımlanır [52].

İspat

(3.17) kesirli integral tanımından;

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\alpha}[f(x).g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t).g(t)] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x) (x-t)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim integrallenebilir.

$$\begin{aligned} &= \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt - \frac{f'(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} g(t) dt + \frac{f''(x)}{2!\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha+1} g(t) dt - \dots \\ &= \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt - \frac{f'(x)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\alpha}{\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha} g(t) dt + \frac{f''(x)}{2!\Gamma(\alpha)} \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha+1} g(t) dt - \dots \\ &= f(x) {}_0D_x^{-\alpha} g(x) - \alpha f'(x) {}_0D_x^{-(\alpha+1)} g(x) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} f''(x) {}_0D_x^{-(\alpha+2)} g(x) - \dots \end{aligned}$$

olmak üzere

$${}_0D_x^{-\alpha}[f(x).g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+n) D^{(n)} f(x) {}_0D_x^{-(\alpha+n)} g(x)}{n! \Gamma(\alpha)}$$

ifadesi bulunur. Elde edilen bu son ifadede f fonksiyonu analizde bilinen anlamda türevlenebilir ve g fonksiyonunda kesirli olarak integrallenebilir.

İki fonksiyonun çarpımının kesirli türevide bu teoremden yararlanılarak benzer şekilde yapılabilir. Şöyle ki; $\alpha > 0$, $\alpha = m - p$ (m , α ' dan büyük olan çok küçük bir tamsayı) ve $0 < p \leq 1$ olmak üzere,

$${}_0D_x^{\alpha}[f(x).g(x)] = \frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(p+n) D^{(n)} f(x) {}_0D_x^{-(p+n)} g(x)}{n! \Gamma(p)} \quad (3.45)$$

şeklinde tanımlanır [52].

Teorem 3.2.10

$f(x)$ fonksiyonu sıfır noktasında analitik bir fonksiyon olmak üzere,

$${}_0D_x^{-\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha} \quad (3.46)$$

ifadesi tanımlanır. Burada $\alpha > 0$ ve $f^{(n)}(0)$ ' da sıfır noktasında f ' in adi türevidir [52].

İspat

(3.17) ifadesinden

$${}_0D_x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

olur. Bu integralde $t = xu$ değışken değıştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1} f(xu) x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^\alpha (1-u)^{\alpha-1} f(xu) du \\ &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} f(xu) du \end{aligned}$$

elde edilir. $f(xu)$ fonksiyonu için Maclaurin açılımı göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\alpha}f(x) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (xu)^n du \\ &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^n du \\ &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!} \left(\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \right) \\ {}_0D_x^{-\alpha}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^{\alpha+n}}{\Gamma(n+\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.11

Eğer $f(x)$ fonksiyonu sıfır noktasında analitik ise;

$${}_0D_x^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^{p-m+n}}{\Gamma(p-m+n+1)} \quad (3.47)$$

yazılabilir. Burada; $\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha = m - p$ dir. m, α dan büyük çok küçük bir

tamsayı ve $0 < p \leq 1$ dir ve $f^{(n)}(0)$, sıfır noktasındaki adi türevidir [52].

İspat

(3.46) ifadesinden,

$${}_0D_x^{-\alpha}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha}$$

olmak üzere (3.19) ifadesi,

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^\alpha f(x) &= {}_0D_x^m {}_0D_x^{-p} f(x) \\
&= \frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{n+p}}{\Gamma(n+p+1)} \\
&= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{f^{(0)}(0)x^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{f^{(1)}(0)x^{p+1}}{\Gamma(p+2)} + \frac{f^{(2)}(0)x^{p+2}}{\Gamma(p+3)} + \dots \right]
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Toplamdaki her terim analitik ve seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim türevlenebilir. Böylece;

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^\alpha f(x) &= \frac{f^{(0)}(0)x^{p-m}}{\Gamma(p+1-m)} + \frac{f^{(1)}(0)x^{p-m+1}}{\Gamma(p+2-m)} + \frac{f^{(2)}(0)x^{p-m+2}}{\Gamma(p+3-m)} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{p-m+n}}{\Gamma(p-m+n+1)}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir

Örnek 3.2.9

$f(x) = \sin x$ olmak üzere ${}_0D_x^{-3} \sin x = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$ olduğunu gösterebiliriz. Şöyle ki; Teorem 3.2.10' da ki (3.46) ifadesinden,

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{-3} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{n+3}}{\Gamma(n+3+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{n+3}}{\Gamma(n+4)} \\
&= \frac{f^{(0)}(0)x^3}{\Gamma(4)} + \frac{f^{(1)}(0)x^4}{\Gamma(5)} + \frac{f^{(2)}(0)x^5}{\Gamma(6)} + \dots \\
&= 0 + \frac{x^4}{\Gamma(5)} + 0 - \frac{x^6}{\Gamma(7)} + \dots = \frac{x^4}{\Gamma(5)} - \frac{x^6}{\Gamma(7)} + \frac{x^8}{\Gamma(9)} - \dots \\
&= 1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + \frac{x^2}{2!} - 1 \\
&= \cos x + \frac{x^2}{2!} - 1
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.2.10

$f(x) = x^3 + 3$ olmak üzere ${}_0D_x^{-1} f(x)$ integrali (3.46) bağıntısından

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{-1} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+2)} x^{n+1} \\
&= \frac{f^{(0)}(0)x}{\Gamma(2)} + \frac{f^{(1)}(0)x^2}{\Gamma(3)} + \frac{f^{(2)}(0)x^3}{\Gamma(5)} + \dots \\
&= 3x + \frac{6x^4}{4!}.
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.2.11

$f(x) = e^x$ olmak üzere ${}_0D_x^{-2}e^x = e^x - x - 1$ olduğu aşağıdaki ifadeden görülebilir.

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{-2}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+3)} x^{n+2} \\
&= \frac{f^{(0)}(0)x^2}{\Gamma(3)} + \frac{f^{(1)}(0)x^3}{\Gamma(4)} + \frac{f^{(2)}(0)x^4}{\Gamma(5)} + \frac{f^{(3)}(0)x^5}{\Gamma(6)} + \dots \\
&= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\
&= 1 - 1 + x - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x - x - 1.
\end{aligned}$$

Örnek 3.2.12

$f(x) = e^x$ şeklinde tanımlanmak üzere ${}_0D_x^{-1/2}e^x$ integrali;

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{-1/2}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+3/2)} x^{n+1/2} \\
&= \frac{f^{(0)}(0)x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{f^{(1)}(0)x^{3/2}}{\Gamma(5/2)} + \frac{f^{(2)}(0)x^{5/2}}{\Gamma(7/2)} + \dots \\
&= \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{x^{3/2}}{\Gamma(5/2)} + \frac{x^{5/2}}{\Gamma(7/2)} + \dots = \frac{x^{1/2}}{\sqrt{\pi}/2} + \frac{x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}/4} + \frac{x^{5/2}}{15\sqrt{\pi}/8} + \dots \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2x^{1/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{8}{15}x^{5/2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.2.13

$f(x) = \cos x$ olmak üzere ${}_0D_x^1 \cos x = \sin x$ olduğunu Teorem 3.2.10' da ki ifadeyi kullanarak,

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^1 \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{p-m+n}}{\Gamma(p-m+n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{n-1}}{\Gamma(n)} \\
&= \frac{f^{(0)}(0)x^{-1}}{\Gamma(0)} + \frac{f^{(1)}(0)x^0}{\Gamma(1)} + \frac{f^{(2)}(0)x^1}{\Gamma(2)} + \frac{f^{(3)}(0)x^2}{\Gamma(3)} + \dots \\
&= \frac{x^{-1}}{\Gamma(0)} - \frac{x}{\Gamma(2)} + \frac{x^3}{\Gamma(3)} + \dots = -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

bulunabilir.

Örnek 3.2.14

$f(x) = ae^{kx}$ ($k, a > 0$) olmak üzere $\alpha = 1$ için $f'(x) = ake^{kx}$ olduğu Teorem 3.2.10' u kullanarak,

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^1 ae^{kx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{p-m+n}}{\Gamma(p-m+n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{n-1}}{\Gamma(n)} \\
&= \frac{f^{(0)}(0)x^{-1}}{\Gamma(0)} + \frac{f^{(1)}(0)x^0}{\Gamma(1)} + \frac{f^{(2)}(0)x^1}{\Gamma(2)} + \frac{f^{(3)}(0)x^2}{\Gamma(3)} + \dots \\
&= \frac{ax^{-1}}{\Gamma(0)} + \frac{ak}{\Gamma(1)} + \frac{ak^2x}{\Gamma(2)} + \frac{ak^3x^2}{\Gamma(3)} + \dots \\
&= ak \left(1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \dots \right) = ake^{kx}
\end{aligned}$$

elde edilebilir.

Örnek 3.2.15

$f(x) = \sin x$ ise $\frac{d^3}{dx^3} \sin x = -\cos x$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.2.10' u kullanırsak,

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^3 \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{p-m+n}}{\Gamma(p-m+n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^{n-3}}{\Gamma(n-2)} \\
&= \frac{f^{(0)}(0)x^{-3}}{\Gamma(-2)} + \frac{f^{(1)}(0)x^{-2}}{\Gamma(-1)} + \frac{f^{(2)}(0)x^{-1}}{\Gamma(0)} + \frac{f^{(3)}(0)x}{\Gamma(1)} + \dots \\
&= -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots = - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) \\
&= -\cos x
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.2.16

${}_0D_x^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ türevi $\alpha = 1/2$, $m = 1$ ve $p = -1/2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{1/2}(1-x)^{-1/2} &= {}_0D_x {}_0D_x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{-1/2}(1-t) dt \\
&= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{-1/2} \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + \frac{5t^3}{16} + \dots \right) dt, \quad (|t| < 1)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada, (3.26) ifadesi kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{1/2}(1-x)^{-1/2} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} + \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2)}{2\Gamma(5/2)} x^{3/2} + \dots \right\} \\
&= \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\pi}} + \dots = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} (1 + x + x^2 + \dots) \\
&= (x\pi)^{-1/2} \left(\frac{1}{1-x} \right), \quad |x| < 1
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.2.17

${}_0D_x^{-2/3}f(x) = 1 + x^3$ olmak üzere burada $f(x)$ fonksiyonunu bulmak için verilen ifadenin her iki tarafına ${}_0D_x^{2/3}$ türev operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-2/3}f(x) &= 1 + x^3 \\ {}_0D_x^{2/3} {}_0D_x^{-2/3}f(x) &= {}_0D_x^{2/3}(1 + x^3) \\ f(x) &= {}_0D_x^{2/3}1 + {}_0D_x^{2/3}x^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.28) ve (3.39) ifadeleri kullanılırsa ${}_0D_x^{-2/3}$ integrali;

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(-2/3+1)}x^{-2/3} + \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-2/3+1)}x^{3-2/3} \\ &= \frac{x^{-2/3}}{\Gamma(1/3)} + \frac{6x^{7/3}}{\Gamma(10/3)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.12

$a > 0$ olmak üzere e^{-ax} üstel fonksiyonunun α -mertebeli Riemann-Liouville kesirli integral tanımı;

$${}_0D_x^{-\alpha}e^{-ax} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(ax)^{n-1}}{\Gamma(\alpha+n)}x^{\alpha} \quad (3.48)$$

ile verilir [4].

İspat

Riemann-Liouville' un (3.17) tanımından,

$${}_0D_x^{-\alpha}e^{-ax} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{-at} dt$$

olmak üzere sağ taraftaki integralde $t = ux$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\alpha}e^{-ax} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1} e^{-a(xu)} x du \\ &= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} e^{-a(xu)} du \end{aligned}$$

bulunur. Burada e^{-axu} ifadesinin seri formu göz önüne alınırsa;

$${}_0D_x^{-\alpha}e^{-ax} = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (axu)^n}{n!} du$$

olur. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim integrallenebilir. Böylece;

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{-\alpha} e^{-ax} &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} du - \frac{ax}{1!} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u du + \frac{(ax)^2}{2!} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^2 du + \dots \right] \\
{}_0D_x^{-\alpha} e^{-ax} &= x^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} ax + \frac{1}{\Gamma(\alpha+3)} (ax)^2 - \dots \right] \\
{}_0D_x^{-\alpha} e^{-ax} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (ax)^{n-1}}{\Gamma(\alpha+n)} x^\alpha
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Bu teoremden yararlanılarak e^{-ax} fonksiyonunun α -mertebeli kesirli türevide $\alpha = m - p$, $0 < p \leq 1$ için (m , α ' dan büyük olan çok küçük bir tamsayıdır)

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^\alpha e^{-ax} &= {}_0D_x^m {}_0D_x^{-p} e^{-ax} \\
&= \frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (ax)^{n-1}}{\Gamma(\alpha+n)} x^\alpha
\end{aligned}$$

olmak üzere bu seri düzgün yakınsak olduğundan,

$${}_0D_x^\alpha e^{-ax} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} a^{n-1} x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} x^\alpha \quad (3.49)$$

şeklinde tanımlanır [4].

e^{-x^2} fonksiyonunu Riemann-Liouville kesirli integrali,

$${}_0D_x^{-\alpha} e^{-x^2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{-t^2} dt$$

olmak üzere e^{-t^2} , nin Maclaurin serisine açılımı göz önüne alınırsa;

$${}_0D_x^{-\alpha} e^{-x^2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt$$

olur. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim integrallenebilir. Böylece;

$${}_0D_x^{-\alpha} e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k+1)}{\Gamma(\alpha+2k+1)} x^{\alpha+2k} \quad (3.50)$$

bulunur.

Benzer şekilde e^{-x^2} fonksiyonunu Riemann-Liouville kesirli türevi,

$${}_0D_x^\alpha e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k+1)}{k! \Gamma(2k-\alpha+1)} x^{2k-\alpha} \quad (3.51)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2.13

$\sin x$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali;

$${}_0D_x^{-\alpha} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha + 2n)} x^{2n-1+\alpha} \quad (3.52)$$

formundadır [4].

İspat

$f(x) = \sin x$ olmak üzere (3.17)' den,

$${}_0D_x^{-\alpha} \sin x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sin t dt, \quad \alpha > 0$$

yazılabilir. Burada $t = xu$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\alpha} \sin x &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \sin(xu) du \\ &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (xu)^{2n-1} du \end{aligned}$$

elde edilir. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim integrallenebilir. Böylece;

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\alpha} \sin x &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left[x \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u du - \frac{x^3}{3!} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^3 du + \frac{x^5}{5!} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^5 du - \dots \right] \\ {}_0D_x^{-\alpha} \sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha + 2n)} x^{2n-1+\alpha} \end{aligned}$$

bulunur.

$\sin x$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevide benzer bir dönüşüm kullanılarak;

$${}_0D_x^{\alpha} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(2n - \alpha)} x^{2n-1-\alpha} \quad (3.53)$$

olarak elde edilir [4].

Teorem 3.2.14

$\ln x$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali;

$${}_0D_x^{-\alpha} \ln x = \frac{x^\alpha \ln x}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\alpha + k)} \quad (3.54)$$

şeklinde tanımlanır [4].

İspat

(3.17) Riemann-Liouville kesirli integral tanımından ;

$${}_0D_x^{-\alpha} \ln x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \ln t dt$$

yazılabilir. Burada $t = x + t - x = x \left(1 + \frac{t-x}{x}\right)$ dönüşümü yapılırsa, $\ln t = \ln x + \ln \left(1 + \frac{t-x}{x}\right)$, den $-1 < \frac{t-x}{x} \leq 1$ sınırlaması ile $\ln(1+\theta)$ için Taylor serisi kullanılırsa;

$$\ln t = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (t-x)^n}{nx}$$

bulunur. Burada yakınsaklık aralığı $0 < t \leq 2\pi$ dir. Bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{\ln x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^n}{nx^n} dt$$

elde edilir. Burada,

$${}_0D_x^{-\alpha} \ln x = \frac{x^\alpha \ln x}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^x \frac{(x-t)^\alpha}{x} dt + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha+1}}{2x^2} dt + \dots + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha+n-1}}{nx^n} dt + \dots \right]$$

olmak üzere düzgün yakınsaklıktan dolayı;

$${}_0D_x^{-\alpha} \ln x = \frac{x^\alpha \ln x}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\alpha+k)}$$

bulunur.

Benzer şekilde $\ln x'$ in Riemann-Liouville kesirli türevide;

$${}_0D_x^\alpha \ln x = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{x^p \ln x}{\Gamma(p+1)} - \frac{x^p}{\Gamma(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(p+k)} \right] \quad (3.55)$$

şeklinde tanımlanır [4].

3.3 CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ

Kesirli analizde kullanılan bir diğer önemli tanımda M. Caputo tarafından geliştirilmiş olan kesirli türev tanımıdır. Bölüm 3.2' de verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı pür matematikteki çalışmalarda oldukça geniş bir kullanım alanına sahiptir. Buna rağmen gelişen teknoloji ile pür matematikteki yaklaşımlarda yeniliklere ihtiyaç duyulmuştur. Özellikle; viskoelastik ve akışkan mekaniğinde kesirli mertebeli diferensiyel denklemler doğal olarak oluşur ve başlangıç şartlarının formülasyonuna ihtiyaç duyulur.

Uygulama problemlerinde başlangıç şartlarının fiziksel yorumlarında kesirli türevlerin tanımına ihtiyaç duyulabilir. Riemann-Liouville tanımında $c = x$ için türevin limit tanımı başlangıç şartlarına dayanır [17]. Örneğin;

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} {}_c D_x^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{x \rightarrow c} {}_c D_x^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\vdots \\ \lim_{x \rightarrow c} {}_c D_x^{\alpha-n} f(t) &= b_n\end{aligned}\tag{3.56}$$

olmak üzere b_k ' lar $k = 1, 2, \dots, n$ için verilen sabitlerdir. Her ne kadar başlangıç değer problemleri matematiksel olarak kolay çözülebilsede fiziksel anlamda herhangi bir yarar sağlamaz. Çünkü başlangıç şartlarının fiziksel yorumları bilinmemektedir. Sonuçta matematiksel teori ve pratik gereksinimler arasında uyumsuzluklar oluşmuştur. Bu uyumsuzluğu ilk olarak 1967 yılında M. Caputo gözlemlemiştir [56] ve çalışmalarını 1969 yılında yayınladığı kitabında vermiştir [57].

Caputonun geliştirmiş olduğu tanım;

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad (n-1 < \alpha \leq n)\tag{3.57}$$

şeklinde. Bu tanımda $\alpha \rightarrow n$ iken Caputo türevi $f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden klasik türevi olur. Gerçekten, $0 \leq n-1 < \alpha < n$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu $\forall b > a$ için $[a, b]$ aralığında $(n+1)$. mertebeden sürekli olarak türevlenebilir. Bu taktirde;

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a^C D_x^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n)}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Caputo yaklaşımının asıl avantajı; Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç şartlarının tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlere benzer olarak alınmasıdır.

Bununla birlikte Riemann-Liouville kesirli türev için yapılan tanımlar benzer yollarla Caputo türevi içinde tanımlanır. Şöyle ki, a alt sınırın sıfır olması durumunda Riemann-Liouville kesirli türevin Laplace dönüşümü;

$$\int_0^\infty e^{-px} \{ {}_0 D_x^\alpha f(x) \} dx = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left. {}_0 D_x^{\alpha-k-1} f(x) \right|_{x=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n)\tag{3.58}$$

şeklinde tanımlanırken, Caputo türevinin Laplace dönüşümü;

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \{ {}_0^C D_x^{\alpha} f(x) \} dx = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n) \quad (3.59)$$

formundadır. Yapılan çalışmalarda görülmüştür ki Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünde fiziksel yorumlama ile ilgili sorunlara neden olan (3.56) tipindeki başlangıç şartları kullanılmaktadır. Bunun aksine Caputo türevinde, Laplace dönüşümü fiziksel yorumlamaları yapılabilen tamsayı mertebeli klasik türevlerin başlangıç şartları kullanılır. Uygun Laplace dönüşümünün seçimi kesirli türevin tipinin seçilmesinde (başka bir ifade ile başlangıç şartının belirlenmesinde) önemlidir.

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı ve Caputo türevi arasındaki bir diğer farkta "bir sabitin türevidir". Şöyle ki; bir sabitin Caputo türevi sıfır olurken, Riemann-Liouville kesirli türevi sıfırdan farklıdır (alt sınır sıfır olmak şartı ile).

Caputonun dışında Ochmann ve Makarov yaptıkları çalışmalarda alt sınırın $-\infty$ olduğu durumlarda Riemann-Liouville tanımını kullanmışlardır [2]. Ancak fiziksel yorumlamalardan ötürü bir sabitin $-\infty$ alt sınırındaki Riemann-Liouville türevini sıfır olarak göz önüne almışlardır. Sonuçta uygun şartlar altında $x \rightarrow -\infty$ olmak üzere;

$$-_{\infty} D_x^{\alpha} f(x) = {}_{-\infty}^C D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_{-\infty}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad (3.60)$$

şeklinde benzer formül elde etmişlerdir ($n-1 < \alpha < n$). Bu formülle sabit durumdaki dinamik işlemler için Riemann-Liouville ve Caputo türevlerinin benzer sonuçlar verdiklerini gözlemlemişlerdir [2].

Teorem 3.3.1

$\alpha \geq 0$ ve $\alpha \leq n < \alpha + 1$ olsun. Bir f fonksiyonunun ${}_a^C D_x^{\alpha} f(x)$ ve ${}_a D_x^{\alpha} f(x)$ şeklindeki Caputo ve Riemann-Liouville türevleri mevcut olsun. Bu takdirde;

$${}_a^C D_x^{\alpha} f(x) = {}_a D_x^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (3.61)$$

olur [2].

Teorem 3.3.2

$\alpha \geq 0$ ve $\alpha \leq n < \alpha + 1$ olmak üzere kabul edelim ki bir f fonksiyonunun ${}_a^C D_x^{\alpha} f(x)$ ve ${}_a D_x^{\alpha} f(x)$ şeklindeki Caputo ve Riemann-Liouville türevleri mevcut ve $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için $D^k f(a) = 0$ olsun. Bu takdirde;

$${}_a D_x^{\alpha} f(x) = {}_a^C D_x^{\alpha} f(x) \quad (3.62)$$

ifadesi tanımlanır [2].

Teorem 3.3.3

$\alpha \geq 0$ ve f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$${}_a^C D_x^\alpha {}_a D_x^{-\alpha} f(x) = f(x) \quad (3.63)$$

dir [2].

Teorem 3.3.4

$\alpha \geq 0$, $\alpha \leq n < \alpha + 1$ ve $f \in A^n[a, b]$ olduğunu kabul edelim. O zaman;

$${}_a D_x^{-\alpha} {}_a^C D_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k \quad (3.64)$$

olur [2].

Teorem 3.3.5 (Caputo türevi için Taylor formülü)

$\alpha \geq 0$ ve $\alpha \leq n < \alpha + 1$ olsun. Kabul edelim ki $f \in A^n[a, b]$ şeklinde tanımlansın. O zaman $f(x)$ fonksiyonu;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k + {}_a D_x^{-\alpha} {}_a^C D_x^\alpha f(x) \quad (3.65)$$

formundadır [2].

Teorem 3.3.6

f_1 ve f_2 fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlansın ve hemen hemen her yerde ${}_a^C D_x^\alpha f(x)$ ve ${}_a D_x^\alpha f(x)$ türevleri mevcut olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$${}_a^C D_x^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}_a^C D_x^\alpha f_1 + c_2 {}_a^C D_x^\alpha f_2 \quad (3.66)$$

ifadesi tanımlanır [2].

Teorem 3.3.7 (Caputo türevi için Leibnitz formülü)

$0 < \alpha < 1$ olsun ve kabul edelim ki f ve g fonksiyonları $(a-h, a+h)$ aralığında analitik olsunlar. Bu taktirde;

$${}_a^C D_x^\alpha [f \cdot g](x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(a)(f(x)-f(a)) + ({}_a^C D_x^\alpha g(x))f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_a D_k^{k-\alpha} g(x)) {}_a^C D_x^k f(x) \quad (3.67)$$

olur [2].

Tanım 3.3.1(Grünwald-Letnikov Operatörü)

Grünwald-Letnikov yaptığı çalışmalarda, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $a \leq x \leq b$ için,

$${}_a^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh=x-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh), \quad \alpha > 0 \quad (3.68)$$

şeklinde yeni bir kesirli türev tanımı elde etmiştir. (3.68) tanımına Grünwald-Letnikov kesirli türevi, ${}_a^{GL}D_x^\alpha$ ifadesine de Grünwald-Letnikov operatörü denir [2].

Bu tanımdaki $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ terimi geri farkın kesirli formudur.

3.4 KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu kısımda kesirli türev içeren diferensiyel denklemler için varlık-teklik teoremleri göz önüne alınacaktır.

Tanım 3.4.1

$\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha \leq n < \alpha + 1$ ($n - 1 < \alpha \leq n$) ve $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \quad (3.69)$$

denklemine "Riemann-Liouville tipindeki kesirli diferensiyel denklem" denir. Bu tip denklemlerin başlangıç şartları,

$$D^{\alpha-k} y(0) = b_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n-1), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} D^{-p} y(z) = b_n \quad (\alpha = m - p) \quad (3.70)$$

şeklindedir [2].

Benzer şekilde,

$${}^C D^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \quad (3.71)$$

denklemine "Caputo tipindeki kesirli diferensiyel denklem" denir. Başlangıç şartları,

$$D^k y(0) = b_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.72)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Teorem 3.4.1 (Riemann-Liouville Kesirli Diferensiyel Denklemler için Varlık-Teklik Teoremi)

$\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$ olsun. Ayrıca, $K > 0$, $h^* > 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$G = \begin{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq h^{-x}, y \in \mathbb{R}, x = 0 \text{ ise} \\ \left| x^{n-\alpha} y - \sum_{k=1}^n b_k x^{n-k} / \Gamma(\alpha - k + 1) \right| < K, x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Kabul edelim ki $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, G cümlesi sınırlandırılmış olsun. $L > 0$, $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G$ olmak üzere,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Lipshitz koşulu sağlansın. Bu şartlar altında (3.70) başlangıç şartı altında (3.69) Riemann-Liouville tipindeki kesirli diferansiyel denklem $y \in C(0, h]$ aralığında tek çözüme sahiptir.

Burada; $M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|$ ile $h = \min\{h^*, \tilde{h}, (\Gamma(\alpha+1)K/M)^{1/n}\}$ dir ve $\tilde{h} > 0$ olmak üzere;

$$\tilde{h} < \frac{\Gamma(2\alpha - n + 1)}{(\Gamma(\alpha - n + 1)L)^{1/\alpha}}$$

şeklindedir [2].

Teorem 3.4.2 (Caputo Kesirli Diferansiyel Denklemler için Varlık-Teklik Teoremi)

$\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$ ve $K > 0$, $h^* > 0$ ve $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ olsun. Burada,

$$G = [0, h^*] \times [b_0 - K, b_0 + K]$$

fonksiyonu tanımlansın ve $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $h > 0$ olmak üzere $y \in C[0, h]$ fonksiyonu (3.72) başlangıç şartlı (3.71) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

$\alpha \in (0, 1)$ için h parametresi, $M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|$ ile $h = \min\{h^*, (KT(\alpha+1)/M)^{1/\alpha}\}$ şeklindedir. Ayrıca, $L > 0$, $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G$ için f fonksiyonu,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Lipshitz koşulu sağlanırsa $y \in C[0, h]$ tektir [2].

4. BÖLÜM

4.1 HOMOTOPİ KAVRAMI

Bu bölümde yarı-analitik bir metod olan homotopi analiz metodu verilecek. Homotopi analiz metodu, topoloji ve diferensiyel geometride temel bir yapı olan homotopi kavramına dayanır. Bu nedenle ilk olarak homotopiden bahsedilecek.

Homotopi kavramını ilk olarak Fransız matematikçi Jules Henri Poincare'(1854-1912) tarafından incelenmiştir [23]. Daha sonra L. E. J. Brouwer tarafından genel tanımı yapılmıştır [58]. Kısaca bir homotopi sürekli varyasyon veya deformasyonun bir türü olarak tanımlanabilir. Örneğin, bir çember bir elipse veya bir kareye sürekli olarak deforme edilebilir ya da başka bir örnek olarak; bir kahve fincanının şekli bir simitin şekline sürekli olarak deforme edilebilir. Buna rağmen fincanın şekli bir futbol topunun şekline dönüştürülemez. Bu örnekten hareketle, bir homotopi bazı yönlerden benzer özellikler içeren farklı yapılar arasında tanımlanır [59].

Örneğin; $x \in [0, 1]$ aralığında iki farklı fonksiyon $\sin(\pi x)$ ve $8x(x - 1)$ olsun. Bu iki fonksiyon arasında

$$H(x; q) = (1 - q) \sin \pi x + q[8x(x - 1)]$$

şeklinde bir homotopi kurulabilir. Homotopideki $q \in [0, 1]$ "homotopi parametresi" olarak adlandırılır. Burada $H(x, q)$ sadece x ' e değil q ' ya da bağlı olduğundan $q = 0$ için

$$H(x; 0) = \sin \pi x, \quad x \in [0, 1]$$

ve $q = 1$ için

$$H(x; 1) = 8x(x - 1), \quad x \in [0, 1]$$

olur. Böylece $q \in [0, 1]$ homotopi parametresi 0' dan 1'e artarken $H(x; q)$ fonksiyonunda bir trigonometrik fonksiyondan bir polinom fonksiyona sürekli olarak değişir. Topolojide bu yapı homotopi olarak adlandırılıp $\sin \pi x$ ile $8x(x - 1)$ aralarında homotopiktir denir ve

$$H; \sin \pi x \sim 8x(x - 1)$$

ile gösterilir.

Bununla birlikte $\sin x$ fonksiyonu,

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

şeklinde parçalı fonksiyona sürekli olarak deforme edilemez yani aralarında bir homotopi kurulamaz [59].

Tanım 4.1.1

X ve Y iki topolojik uzay, $f(x)$ ve $g(x)$ de bu uzaylarda tanımlı sürekli iki fonksiyon olsun. $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere $x \in X$ için $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = g(x)$ eşitlikleri sağlanıyorsa H dönüşümüne $f(x)$ ve $g(x)$ arasında bir homotopidir denir [59].

Eğer f ve g homotopik ise o zaman bir parametre ailesi tanımlanabilir. Burada homotopi ailesi;

$$\{H_q : q \in [0, 1]\} \quad (4.1)$$

şeklindedir ve parametre ailesi,

$$H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonların bir parametre ailesidir ve bu fonksiyon,

$$H_q(x) = (1 - q)f(x) + qg(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad q \in [0, 1] \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır. Burada; $H_0(x) = f(x)$ ve $H_1(x) = g(x)$ dir.

İki fonksiyon arasında birden fazla homotopi tanımlanabilir [58]. Şöyle ki; $X = Y = \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = x$, $g(x) = 0$ biçiminde tanımlansın. $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H(x, q) = (1 - q)f(x)$ şeklinde tanımlanan H dönüşümü f ve g arasında bir homotopidir. Yine, $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H(x, q) = (1 - q^2)f(x)$ şeklindeki H dönüşümünde f ve g arasında bir homotopidir.

Tanım 4.1.2

$f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler ve $A \subseteq X$ olsun. $\forall q \in [0, 1]$ ve $\forall a \in A$ için $H(a, q) = f(a) = g(a)$ olacak şekilde $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ homotopisi varsa f ve g dönüşümleri A alt kümesine göre homotopiktirler denir [58].

Tanım 4.1.3

$f, g : [0, 1] \rightarrow X$ tanımlanan sürekli dönüşümler olmak üzere, f ve g aynı x_0 başlangıç ve x_1 bitiş noktalarında sahip iseler $\forall p, q \in [0, 1]$, $H(p, 0) = f(p)$ ve $H(p, 1) = g(p)$, $H(0, q) = x_0$ ve $H(1, q) = x_1$ olacak şekilde $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ dönüşümü varsa H 'ye f ve g arasındaki yol homotopisi denir [58].

Tanım 4.1.4

ϕ, q homotopi parametresinin bir fonksyonu olsun. $m \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere;

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$$

şeklinde tanımlanan $D_m(\phi)$ ' ye ϕ ' nin " m . mertebeden homotopi veya deformasyon türevi" denir. Bu türev yüksek mertebeden deformasyon denklemlerini türetmek için kullanılır [58].

4.2 HOMOTOPİ ANALİZ METODU

Homotopi analiz metodu 4.1 bölümünde bahsedilen topolojinin temel bir yapısı olan homotopi üzerine kurulmuştur. Metodun temel yapısını anlatabilmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Statik durumda bağımsız bir küre düşünelim. $\tilde{t}$ zamanı, $U(\tilde{t})$ kürenin hızı, m kütlesi ve g yer çekim ivmesi olsun. Kabul edelim ki küredeki hava rezistansı $aU^2(t)$ olsun. Bu ifadedeki a bir sabittir. Newton' nun ikinci hareket kanunundan; (net kuvvet=kütle ağırlığı-ortam kuvveti veya yay kuvveti)

$$m \frac{dU(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = mg - aU^2(\tilde{t}) \quad (4.3)$$

yazılabilir. Bu denklemin başlangıç şartı,

$$U(0) = 0 \quad (4.4)$$

şeklindedir. Fiziksel olarak sabit bir U_∞ hızına ulaşmaya kadar bağımsız kürenin hızının yerçekiminden dolayı arttığı söylenebilir. Böylece $U(\tilde{t})$ çözümü bilinmese bile (4.3) denkleminin U_∞ hızının limitinden,

$$U_\infty = \sqrt{\frac{mg}{a}} \quad (4.5)$$

ifadesi elde edilir. Kullanılan U_∞ ve U_∞/g terimleri sırasıyla karakteristik hız ve zamanı göstermek üzere;

$$\tilde{t} = \left(\frac{U_\infty}{g} \right) t, \quad U(\tilde{t}) = U_\infty V(t), \quad (4.6)$$

olur. Bu ifadelerden hareketle boyutsuz,

$$\dot{V}(t) + V^2(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (4.7)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem,

$$V(0) = 0 \quad (4.8)$$

başlangıç şartına sahiptir ve t zamanı, $\dot{V}(t)$ ise t' ye bağlı türevi ifade eder. Açık olarak; $t \rightarrow \infty$ iken $\tilde{t} \rightarrow \infty$ ve $U(\tilde{t}) \rightarrow U_\infty$ olduğunu söyleyebiliriz ve (4.7) ile (4.8) denklemlerinin çözülmesine ihtiyaç duyulmaksızın (4.6)' den,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 1 \quad (4.9)$$

ifadesi bulunur. (4.8) başlangıç şartlı (4.7) denkleminin tam çözümü;

$$V(t) = \tanh(t) \quad (4.10)$$

şeklindedir [23].

4.2.1 Sıfırıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi

$V_0(t)$, $V(t)$ ' nin başlangıç yaklaşımı olmak üzere (4.8) başlangıç adımı

$$V_0(0) = 0 \quad (4.11)$$

olsun. $q \in [0, 1]$ homotopi parametresi olmak üzere homotopi analiz metodu $V(t) \rightarrow \Phi(t; q)$ sürekli hareketine dayanır. Yani, q parametresi 0' dan 1' e yaklaşırken $\Phi(t; q)$ ' da $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımından $V(t)$ tam çözümüne yakınsar. Bu ifadenin sağlanabilmesi için yardımcı lineer operatör,

$$L[\Phi(t; q)] = \gamma_1(t) \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} + \gamma_2(t) \Phi(t; q) \quad (4.12)$$

olarak seçilebilir. Burada $\gamma_1(t) \neq 0$ ve $\gamma_2(t) \neq 0$ sonradan belirlenecek olan reel fonksiyonlardır. (4.7) denkleminde lineer olmayan operatörü ,

$$N[\Phi(t; q)] = \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} + \Phi^2(t; q) - 1 \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlanabilir. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ ifadeleri sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere $q \in [0, 1]$ parametresi kullanılarak homotopi tanımından,

$$(1 - q)L[\Phi(t; q) - V_0(t)] = \hbar q H(t) N[\Phi(t; q)] \quad (4.14)$$

denklemini yazılabilir. Bu denklemin başlangıç şartı;

$$\Phi(0; q) = 0 \quad (4.15)$$

şeklindedir.

Burada asıl vurgulanmak istenen, $\hbar$ yardımcı parametre, $H(t)$ yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı ve L yardımcı lineer operatörün keyfi seçimidir. Bu keyfi seçim homotopi analiz metodunun geçerliliği ve esnekliğinde çok önemli bir rol oynar.

$q = 0$ olduğu zaman (4.14) denkleminde,

$$L[\Phi(t; q) - V_0(t)] = 0 \quad (4.16)$$

bulunur. Bu denklem,

$$\Phi(0; 0) = 0 \quad (4.17)$$

başlangıç şartına sahiptir. (4.11) ve (4.12) denklemleri göz önünde bulundurularak (4.16) ve (4.17)' den

$$\Phi(t; 0) = V_0(t) \quad (4.18)$$

elde edilir.

$q = 1$ olduğu zaman ise (4.14) denkleminde

$$\hbar H(t) N[\Phi(t; 1)] = 0 \quad (4.19)$$

yazılabilir. Bu denklem,

$$\Phi(0; 1) = 0 \quad (4.20)$$

başlangıç şartına sahiptir. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ olmak üzere (4.13) denkleminde (4.19) ve (4.20) denklemleri yukarıda verilen (4.7) ve (4.8) denklemlerine eşit olur ve

$$\Phi(t; 1) = V(t) \quad (4.21)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece (4.18) ve (4.21) denklemlerine göre; q parametresi 0' dan 1' e artarken $\Phi(t; q)$ çözüm fonksiyonunda $V_0(t)$ ' den $V(t)$ ' ye gider. Topolojide bu durum "deformasyon" olarak adlandırılır. (4.14) ve (4.15) denklemlerine de "sıfıncı mertebeden deformasyon denklemleri" denir. Sonuçta $\Phi(t; q)$ fonksiyonu $0 \leq q \leq 1$ için (4.14) ve (4.15) sıfıncı mertebeden deformasyon denklemlerinin çözümüdür.

$\Phi(t; q)$ ' nun q ' ya göre m . mertebeden türevi;

$$V_0^{[m]}(t) = \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (4.22)$$

şeklinde. $V_0^{[m]}(t)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) m . mertebeden deformasyon türevinden $V_m(t)$;

$$V_m(t) = \frac{V_0^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlanır.

Taylor teoremi kullanılarak, $\Phi(t; q)$ çözüm fonksiyonu q ' ya göre bir kuvvet serisine,

$$\Phi(t; q) = \Phi(t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} q^m \quad (4.24)$$

şeklinde açılır. (4.18) ve (4.23) denklemlerinden yukarıdaki kuvvet serisi:

$$\Phi(t; q) = \Phi(t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) q^m \quad (4.25)$$

olur.

$\hbar$ yardımcı parametre, $H(t)$ yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı ve L yardımcı lineer operatörü $q = 1$ ' de yakınsak olan (4.25) serisine uygun olarak seçilir. O zaman $q = 1$ için (4.25) serisi;

$$\Phi(t; q) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \quad (4.26)$$

formundadır. Burada (4.21) denkleminin göz önüne alınmasıyla

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \quad (4.27)$$

bulunur. $V_m(t)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) terimleri $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı ile $V(t)$ tam çözümü arasındaki ilişkiyi sağlayan çözüm elemanlarıdır [23].

4.2.2 Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi

$$\vec{V}_n = \{V_0(t), V_1(t), \dots, V_n(t)\}$$

vektörü tanımlansın. (4.23) tanımına göre, yönetici denklem ve $V_m(t)$ ' nin başlangıç yaklaşımı, (4.14) ve (4.15) sıfırmcı mertebeden deformasyon denklemlerinden çıkartılabilir. (4.14) ve (4.15) denklemleri, q parametresine göre m -kez diferensiyellenip ve $q = 0$ için kurulduktan sonra $m!$ ile bölünürse m . mertebeden deformasyon denklemi,

$$L[V_m(t) - \chi V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{V}_{m-1}) \quad (4.28)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin başlangıç şartı,

$$V_m(0) = 0 \quad (4.29)$$

şeklindedir.

Burada;

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (4.30)$$

ve

$$\chi = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

ise tanımlanan özel bir fonksiyondur [23]. (4.13) ve (4.30) denklemlerinden,

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \dot{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m) \quad (4.32)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem (4.28) ve (4.29) denklemlerinden elde edilen

$$V_0(t), V_1(t), \dots, V_m(t)$$

terimlerine bağlıdır. Böylece L yardımcı lineer operatörünün (4.12) tanımına göre (4.28) denklemi (4.29) başlangıç şartına sahip lineer birinci mertebeden bir diferensiyel denklemdir. Böylece (4.28) ve (4.29) yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerinin $V_m(t)$ çözümü kolaylıkla hesaplanabilir. Burada özellikle vurgulanmak istenen durum, (4.7) ve (4.8) ile verilen lineer olmayan problemin (4.28) ve (4.29) yüksek mertebeden deformasyon denklemleri ile lineer alt problemlerin sonsuz bir grubuna dönüştürüldüğüdür. Bu alt problemlerin $V_m(t)$ çözümlerinin toplamı tam çözüme yakınsar. Bununla birlikte bu metot da, denklemden veya başlangıç/ sınır şartlarında her hangi küçük yada büyük bir parametreye ihtiyaç duyulmaz.

$V_m(t)$ ' nin m - inci mertebeden yaklaşımı,

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^m V_n(t) \quad (4.33)$$

ile verilir. (4.14) sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi; L yardımcı lineer operatörü, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı, $\hbar$ yardımcı parametre ve $H(t)$ yardımcı fonksiyonuna bağlı olarak belirlenir. $V(t)$ ' nin belirlenmesinde bu terimlerin seçiminin önemi ileriki kısımlarda açık olarak verilecek [23].

Teorem 4.2.1 (Yakınsaklık Teoremi)

(4.31) ve (4.32) ifadeleri altında (4.28) ve (4.29) yüksek mertebeden deformasyon denklemleri ile elde edilen $V_m(t)$ çözümleri için (4.27) serisi yakınsak ise $V_m(t)$ ifadesi (4.8) başlangıç şartlı (4.7) denkleminin tam çözümüdür [23].

İspat

Eğer;

$$\sum_{m=0}^{\infty} V_m(t)$$

serisi yakınsak ise

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(t)$$

yazılabilir ve buradan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m(t) = 0 \quad (4.34)$$

elde edilir.

χ_m ' in (4.31) tanımı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] \\ &= V_1 + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \dots + (V_n - V_{n-1}) \\ &= V_n \end{aligned}$$

bulunur. (4.34) ifadesinden ise

$$\sum_{m=1}^{\infty} [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t) = 0$$

yazılabilir.

Ayrıca yukarıdaki ifade ve L ' nin (4.12) tanımından;

$$\sum_{m=1}^{\infty} L[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = L \sum_{m=1}^{\infty} [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = 0$$

elde edilir. Bu ifade ve (4.28)' den ise

$$\sum_{m=1}^{\infty} L[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0.$$

$\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ olduğundan,

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0 \quad (4.35)$$

yazılabilir. (4.32)' den ise

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{\infty} [\dot{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t)V_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m)] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t)V_{m-1-j}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=j+1}^{\infty} V_j(t)V_{m-1-j}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{j=0}^{\infty} V_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t) \\
&= \dot{S}(t) + S^2(t) - 1
\end{aligned} \tag{4.36}$$

bulunur. Böylece (4.35) ve (4.36) denklemlerinden;

$$S(0) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(0) = V_0(0) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(0) = V_0(0) = 0$$

elde edilir. Yani yukarıdaki iki ifadeye göre $S(t)$, (4.8) başlangıç şartlı (4.7) denkleminin tam çözümüdür.

Bu teorem, çözüm serisinin yakınsaklığını gösterdiğinden önemlidir. Açık olarak söylenebiler ki (4.27) serisinin yakınsaklığı; $\hbar$ yardımcı parametresine, $H(t)$ yardımcı fonksiyonuna, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımına ve L yardımcı lineer opeeratörüne bağlıdır. Bununla birlikte metod bu terimleri seçmemizde bize büyük bir keyfiyet sağlar. Bu ifadelerin uygun seçimiyle $0 \leq t \leq t_0$ bölgesinde (4.27) serisi tam çözüme yakınsak olur. Sonuçta yakınsaklık teoremi ve terimlerin keyfi seçimleri arasındaki kombinasyondan homotopi analiz metodu' nun geçerliliği ortaya çıkar.

4.2.3 Homotopi Analiz Metodu ile İlgili Bazı Temel Kurallar

Yukarıda $\hbar$, $H(t)$, $V_0(t)$ ve L nin belirlenmesinin keyfi olduğundan bahsettik. Bu keyfi seçimde bazı temel kurallara ihtiyaç duyulmaktadır. Şöyle ki; verilen bir lineer olmayan problemde, homotopi analiz metodu temel fonksiyon olarak adlandırılan yapıların uygun bir seçimine dayanır. Lineer olmayan bir problemin çözümünde birden fazla temel fonksiyon kurulabilir ve en uygun temel fonksiyonla birlikte verilen lineer olmayan denklem için en iyi yaklaşım elde edilir.

Başlangıç, sınır şartı veya lineer olmayanlık gibi bir çok durumda temel fonksiyon lineer olmayan problemin çözümüne ihtiyaç duyulmaksızın çözüme uygunluk gösterir. Örneğin;

$$\{e_k(t)/ k = 0, 1, 2, \dots\} \tag{4.37}$$

ifadesi bu bölümde örnek olarak ele alınan problem için temel fonksiyonların kurumudur. Çözüm serisini,

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_k(t) \quad (4.38)$$

şeklinde gösterelim. Buradaki c_n ' ler keyfi sabitlerdir. Temel fonksiyonun belirlenmesiyle; L yardımcı lineer operatörü, $H(t)$ yardımcı fonksiyonu ve $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı uygun olarak seçilebilir. Böylece; L , $H(t)$ ve $V_0(t)$ ifadelerinin seçimi için temel bir kural elde edilmiş olur. Bu kural "çözüm ifadesinin kuralı (the rule of solution expression)" olarak adlandırılır ve homotopi analiz metodu için önemli rol oynar.

Yukarıdaki ifadelerde, reel bir $f(x)$ fonksiyonu bir çok temel fonksiyonla ifade edilebilir. Uygun temel fonksiyonun seçiminde de verilecek olan kuralların önemi büyüktür.

Bir diğer kuralda $H(t)$ yardımcı fonksiyonun seçiminde bazı sınırlamalar getiren "katsayının ergodikliği kuralıdır (the rule of coefficient ergodicity)". Bu kural (4.38)' de ki gibi c_n katsayılarının bütünlüğünü sağlamak için oluşturulmuştur.

Çözüm ifadesinin kuralı ve katsayıların ergodikliği kuralları ile yardımcı fonksiyon tek olarak belirlenir ve yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümünün sağlandığı görülür. Bu ifade ise "çözümün varlığı kuralı olarak adlandırılır".

4.2.4 Çözüm İfadeleri

Homotopi analiz metodunda temel fonksiyonların kurulmasıyla farklı çözümler elde edilebilir. Bu bölümde daha önceki bölümde verilmiş olan kurallar göz önünde bulundurularak bir çok farklı temel fonksiyonun nasıl elde edileceği verilecektir.

4.2.4.1 Polinom Fonksiyonlarıyla İfade Edilen Çözüm

(4.7) ile verilen denklemin pertürbasyon metodu ile çözümü,

$$V_{per}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} t^{2n+1} \quad (4.39)$$

şeklinde olup, bu ifade t ' nin bir kuvvet serisidir [23]. Bu çözümden hareketle,

$$\{t^{2m+1} / m = 0, 1, 2, \dots\} \quad (4.40)$$

şeklinde bir temel fonksiyondan bahsedebiliriz. Yani $V(t)$,

$$V(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{2m+1} \quad (4.41)$$

formundadır. Buradaki a_m ' ler katsayılarıdır. Böylece ilk kural olan çözüm ifadesinin kuralı sağlanmış olur. Bu kural altında başlangıç şartını göz önüne alırsak

$$V_0(t) = t \quad (4.42)$$

alınabilir ve yardımcı lineer operatörde,

$$L[\Phi(t; q)] = \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} \quad (4.43)$$

olur. Bu operatör,

$$L[C_1] = 0 \quad (4.44)$$

özelliğine sahiptir. Burada C_1 integral sabitidir ve (4.29) başlangıç şartı ile belirlenir. Böylece (4.41)' dan $H(t)$ yardımcı fonksiyonunu

$$H(t) = t^{2k} \quad (4.45)$$

olarak alırsak, yüksek mertebeden deformasyon denklemi

$$V_m(t) = \chi_m V_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t \tau^{2k} R_m(\vec{V}_{m-1}) d\tau + C_1$$

olur. Burada; $k \leq -1$ olduğu zaman $V_m(t)$ ' nin çözüm ifadesinde t^{-1} terimi oluşur ki bu durum (4.41) ile verilen çözüm ifadesinin kuralına uymaz. $k \geq 1$ olduğu zaman $V_m(t)$ ' nin çözümündeki t^3 teriminin katsayısı daima sıfır olduğundan yaklaşım sonsuza kadar gitse bile t^3 terimi elde edilemez. Buda katsayı ergodikliği kuralına aykırı bir durumdur. Böylece her iki kuralın sağlanması için $k = 0$ olmalıdır. Böylece $H(t)$ yardımcı fonksiyonu,

$$H(t) = 1 \quad (4.46)$$

olmak üzere tek olarak belirlenir. Böylece, çözüm serisi

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{1}{3} \hbar t^3, \\ V_2(t) &= \frac{1}{3} \hbar (1 + \hbar) t^3 + \frac{2}{15} \hbar^2 t^5, \\ V_3(t) &= \frac{1}{3} \hbar (1 + \hbar)^2 t^3 + \frac{2}{15} \hbar^2 (1 + \hbar) t^5 + \frac{17}{315} \hbar^3 t^7, \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. $V_m(t)$ ' nin m . mertebeden yaklaşımı,

$$V(t) \approx \sum_{k=0}^m V_k(t) = \sum_{n=0}^m \mu_0^{m,n}(\hbar) [\alpha_{2n+1} t^{2n+1}] \quad (4.47)$$

olarak yazılabilir. α_{2n+1} katsayıları (4.39) pertürbasyon çözümünde oluşan katsayılarla benzerdir ve $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonu,

$$\mu_0^{m,n}(\hbar) = (-\hbar)^n \sum_{j=0}^{m-n} \binom{n-1-j}{j} (1+\hbar)^j \quad (4.48)$$

ile tanımlanır.

$V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı, L yardımcı lineer operatörü ve $H(t)$ yardımcı fonksiyonunun kurallar doğrultusunda belirlenmesine rağmen, $\hbar$ yardımcı parametresinin belirlenmesinde keyfi bir durum söz konusudur. (4.47) denklemi, $\hbar$ yardımcı parametresine bağlı çözüm ifadelerinin bir ailesini gösterir. (4.48) bağıntısından

$$\mu_0^{m,n}(-1) = 1, \quad n \leq m \quad (4.49)$$

yazılabilir.

n herhangi sonlu bir tamsayı olmak üzere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0^{m,n}(\hbar) = \begin{cases} 1, & |1+\hbar| < 1 \text{ için} \\ \infty, & |1+\hbar| > 1 \text{ için} \end{cases} \quad (4.50)$$

ifadesi elde edilir. Böylece $\hbar = -1$ olduğu zaman (4.49), (4.47) ve (4.39) denklemlerinden;

$$V(t) = V_{per}(t) \quad (4.51)$$

sonucuna varılır. Böylece (4.39) pertürbasyon çözümü, Lyapunov' un küçük yapay parametre metodu ile verilen

$$V(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} t^{2n+1}, \quad (\varepsilon = 1) \quad (4.52)$$

çözümü [23] ve Adomian ayrışım metodu ile elde edilen

$$V(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} t^{2n+1} \quad (4.53)$$

çözümü [23], (4.47) çözüm ifadesinin özel durumlarıdır. Yani; (4.47) ifadesi pertürbasyon metodu, Lyapunov' un metodu ve Adomian Ayrışım metodu ile elde edilen çözümleri içerdiği için daha geneldir.

(4.47) çözümündeki katsayılar $\hbar$ yardımcı parametresine bağlıdır. (4.50)' e göre (4.47) için gerekli şart $|1+\hbar| < 1$ de yakınsak olmasıdır. Yani,

$$-2 < \hbar < 0$$

olur.

(4.47)' nin yakınsaklık bölgesi;

$$0 \leq t < \rho_0 \sqrt{\frac{2}{|\hbar|} - 1}$$

şeklindedir. Burada, $\rho_0 \approx 3/2$ terimi (4.39) pertürbasyon çözümünün yakınsaklık yarıçapıdır. Böylece $\hbar \rightarrow 0$ iken (4.47) çözüm serileri,

$$0 \leq t < \infty$$

bölgesinin tümünde $V(t) = \tanh(t)$ tam çözümüne yakınsar.

Bütün bilinen analitik tekniklerin aksine $\hbar$ ' ın uygun bir değerinin seçilmesi ile (4.47) çözüm serisinin yakınsaklık bölgesinin kontrolü ve ayarlanması yapılabilir.

4.2.4.2 Kesirli Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm

(4.47) çözüm ifadesi $\hbar \rightarrow 0$ iken ($-1 < \hbar < 0$),

$$0 \leq t < \infty$$

bölgesinin tümünde geçerli olan (4.40) temel fonksiyonları ile verilmesine rağmen $\hbar$ ' ın tam değerinin daha küçük olduğu durumlarda daha yakın sonuçlar vermesi yüksek bir ihtimaldir. Bu düşünceden polinomal fonksiyonların (4.40) cümlesinin $0 \leq t < \infty$ bölgesinin tümünde $V(t)$ için en uygun yaklaşım olduğu söylenemez.

Burada;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+t)^m} = 0, \quad m \geq 1$$

limitini ele alalım böylece temel fonksiyon cümlesi

$$\{(1+t)^{-m} / m = 0, 1, 2, \dots\} \quad (4.54)$$

şeklinde $t \rightarrow +\infty$ iken sonlu bir değere sahip olur. Kabul edelim ki $V(t)$ çözümü

$$V(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b_m}{(1+t)^m} \quad (4.55)$$

ile ifade edilebilsin ve b_m katsayılar olsun. Bu ifade bize (4.7) probleminin "çözüm ifadesinin ikinci kuralını" verir.

Çözüm ifadesinin ikinci kuralı altında; (4.8) başlangıç şartı ve (4.9) limiti göz önüne alınarak $V(t)$ nin başlangıç yaklaşımını

$$V_0(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \quad (4.56)$$

yardımcı lineer operatörü,

$$L[\Phi(t; q)] = (1+t) \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} + \Phi(t; q) \quad (4.57)$$

ve C_2 integral sabiti olmak üzere

$$L\left(\frac{C_2}{1+t}\right) = 0 \quad (4.58)$$

olarak seçebiliriz. L 'nin (4.57) tanımı ile (4.28) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümü,

$$V_m(t) = \chi_m V_{m-1}(t) + \frac{\hbar}{1+t} \int_0^t H(\tau) R_m(\vec{V}_{m-1}) d\tau + \frac{C_2}{1+t}, \quad m \geq 1$$

şeklinde olur. C_2 , (4.29) başlangıç şartı ile belirlenir. Yine (4.55) ile gösterilen çözüm ifadesinde çözümün ikinci kuralı ve (4.28) denklemlerinden $H(t)$ yardımcı fonksiyonu,

$$H(t) = \frac{1}{(1+t)^k} \quad (4.59)$$

şeklinde olmalıdır. Buradaki k bir tamsayıdır. $k \leq 0$ olduğunda (4.28) denklemi;

$$\frac{\ln(1+t)}{1+t}$$

terimini içerir ki bu durum (4.55) ile verilen çözümün ikinci kuralına aykırı bir durumdur. $k > 1$ olduğu zaman $(1+t)^{-2}$ teriminin katsayısı sıfır olduğundan $V_m(t)$ 'nin çözüm ifadesinde $(1+t)^{-2}$ terimi bulunmaz. Bu durum yine katsayıların ergodikliği kuralına aykırı bir durumdur. Her iki kuralın sağlanabilmesi için $k = 1$ olmak zorundadır. Böylece $H(t)$ fonksiyonu,

$$H(t) = \frac{1}{1+t} \quad (4.60)$$

şeklinde tek olarak belirlenir. Sonuçta;

$$\begin{aligned} V_1(t) &= -\frac{\hbar}{1+t} + \frac{2\hbar}{(1+t)^2} - \frac{\hbar}{(1+t)^3}, \\ V_2(t) &= -\hbar \left(1 + \frac{7}{12}\hbar\right) \frac{1}{1+t} + \frac{2\hbar(1+\hbar)}{(1+t)^2} - \hbar \left(1 + \frac{7}{12}\hbar\right) \frac{1}{(1+t)^3} \\ &\quad + \frac{10\hbar^2}{3(1+t)^4} - \frac{5\hbar^2}{4(1+t)^2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir [23].

$V_m(t)$ ' nin m -inci mertebeden yaklaşımı;

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{2m+1} \frac{\beta_{m,n}(\hbar)}{(1+t)^n} \quad (4.61)$$

ile ifade edilir. Burada $\beta_{m,n}$ ' ler $\hbar$ ' a bağılı katsayılarıdır.

Sonuç olarak (4.61) çözümü ve (4.39) pertürbasyon çözümü arasındaki ilişki incelenirse $\hbar = -1$ ve

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

olmak üzere (4.61)' da $V(t)$ ' nin 10. mertebeden yaklaşımı

$$V(t) \sim t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \dots$$

şeklinde. Bu ifadenin ilk bir kaç terimi (4.39) pertürbasyon serisindeki terimlerle aynıdır.

4.2.4.3 Üstel Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm

Biliyoruz ki;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-nt) = 0, \quad n \geq 1$$

dir. Böylece bir temel fonksiyon $t \rightarrow \infty$ iken

$$\{\exp(-nt) / n \geq 0\} \quad (4.62)$$

şeklindeki sonlu bir değer ile ifade edilebilir. (4.9) limiti göz önüne alındığında yukarıdaki temel fonksiyonun (4.40)' den daha iyi sonuç verdiği görülür. Kabul edelim ki, $V(t)$

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-nt) \quad (4.63)$$

ile ifade edilsin ve c_n ' ler de katsayılar olsun. Bu (4.7) problemi için "çözüm ifadesinin üçüncü kuralını" verir.

(4.8), (4.9) ve çözüm ifadesinin üçüncü kuralından $V(t)$ ' nin başlangıç yaklaşımı olarak

$$V_0(t) = 1 - \exp(-t) \quad (4.64)$$

alnabilir;

$$L[C_3 \exp(-t)] = 0 \quad (4.65)$$

olmak üzere,

$$L[\Phi(t; q)] = \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} + \Phi(t; q) \quad (4.66)$$

yardımcı lineer operatörü seçilebilir, burada C_3 bir integral sabitidir. Bu durumda (4.28) m . mertebeden deformasyon denklemi;

$$V_m(t) = \chi_m V_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t \exp(\tau) H(\tau) R_m(\vec{V}_{m-1}) d\tau + C_3 \exp(-t), \quad m \geq 1$$

şeklini alır. C_3 , (4.29) başlangıç şartı ile belirlenir. (4.28) ve (4.63) ile gösterilen çözüm ifadesinin üçüncü kuralından $H(t)$ yardımcı fonksiyonu

$$H(t) = \exp(-kt) \quad (4.67)$$

olmalıdır. $k \leq 0$ olduğu zaman (4.28) denklemi;

$$t \exp(-t)$$

terimini içerir. Bu durum (4.63) ile gösterilen çözüm ifadesinin üçüncü kuralına uymamaktadır. $k \geq 2$ olduğu zaman $\exp(-2t)$ teriminin katsayısı (4.28) denkleminde daima sıfır olur ki bu durum katsayıların ergodikliği kuralına uymaz. Böylece her iki kuralın sağlanabilmesi için $k = 1$ olması gerekir. $k = 1$ olduğu zaman,

$$H(t) = \exp(-t) \quad (4.68)$$

olacak şekilde tek olarak belirlenir. Buradan,

$$\begin{aligned} V_1(t) &= -\frac{\hbar}{2}e^{-t} + \hbar e^{-2t} - \frac{\hbar}{2}e^{-3t}, \\ V_2(t) &= -\frac{\hbar}{2}\left(1 + \frac{\hbar}{2}\right)e^{-t} + \hbar\left(1 + \frac{\hbar}{2}\right)e^{-2t} - \frac{\hbar}{2}(1 + \hbar)e^{-3t} \\ &\quad + \frac{\hbar}{2}e^{-4t} - \frac{\hbar^2}{4}e^{-5t}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

olur. $V(t)$ ' nin m -inci mertebeden yaklaşımı;

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{2m+1} \gamma_{m,n}(\hbar) \exp(-nt) \quad (4.69)$$

şeklindedir ve $\gamma_{m,n}(\hbar)$ terimi $\hbar$ ' a bağlı bir katsayıdır.

(4.69) çözüm serisi $0 \leq t < \infty$ bölgesinin tümünde tanımlıdır. $\hbar$ ' ın aynı değerlerinde (4.69) çözüm serisinin (4.61)' dan daha hızlı yakınsadığı görülür ve $\hbar = -1$ olduğu zaman

(4.69)' ün 10. mertebeden yaklaşımı bile tam çözüme yakınsar. Sonuçta; (4.69) serisinin (4.61)' dan daha etkili olduğu ve yine (4.61) ifadesinin (4.47)' den daha etkili olduğu söylenebilir. Böylece verilen bir lineer olmayan problemin HAM ile çözümünde temel fonksiyonun iyi seçiminin çok önemli olduğu görülür [23].

$V(t)$ ' nin (4.74) m -inci mertebeden yaklaşımı açık olarak,

$$V(t) \approx 1 + 2 \sum_{n=1}^m [(-1)^n \exp(-nt)] \mu_0^{m,n} \left(\frac{\hbar}{2} \right) - \exp(-t) \left[\left(1 + \frac{\hbar}{2} \right) + \frac{\hbar}{2} \exp(-2t) \right]^m, \quad (4.70)$$

şeklinde verilebilir. $\mu_0^{m,n}(x)$ fonksiyonu (4.48) ile belirlenir. (4.49) ifadesinden dolayı $\hbar = -2$ olduğunda

$$V(t) \approx 1 + 2 \sum_{n=1}^m (-1)^n \exp(-nt) + (-1)^{m+1} \exp[-(2m+1)t] \quad (4.71)$$

elde edilir.

(4.10) tam çözümü;

$$V(t) \approx 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-nt) \quad (4.72)$$

şeklindeki bir seriye açılabilir. Bu seri $0 < t < \infty$ bölgesinde tam çözüme yakınsar, fakat $t = 0$ noktasında ya 1 ya da -1 verildiğinde yakınsaktır. Bununla birlikte;

$$(-1)^{m+1} \exp[-(2m+1)t]$$

şeklindeki ilave bir terim ile (4.71) ifadesi $t = 0$ noktasında $0 \leq t < \infty$ bölgesinin tümünde tam çözüme yakınsar. (4.71) ile verilen $V(t)$ ' nin

$$V(t) \approx 1 - 2 \exp(-2t) + 2 \exp(-4t) - 2 \exp(-6t) + \exp(-7t) \quad (4.73)$$

şeklindeki 3. mertebeden yaklaşımı bile tam çözüme yakınsar.

Burada yaklaşımı genişletmeyen,

$$\ln(1+t)/(1+t), \quad t \exp(-t)$$

gibi terimlerin oluşmasından kaçınılır. Bazı pertürbasyon teknikleri, çözümlerinde

$$t \sin t, \quad t \cos t$$

gibi seküler terimlerin oluşmasından kaçınılacak şekilde geliştirilmişlerdir.

$V(t)$ ifadesi,

$$\{t^m \exp(-nt)/m \geq 0, \quad n \geq 1\} \quad (4.74)$$

temel fonksiyonları ile ifade edilebilir. (4.64)' da ki gibi benzer başlangıç şartlar kullanılır. Yardımcı lineer operatörde (4.65) ile aynıdır, fakat yardımcı fonksiyon,

$$H(t) = 1 \quad (4.75)$$

olacak şekilde (4.68)' den farklıdır. Benzer yollarla $V(t)$ ' nin m - inci mertebeden yaklaşımı elde edilebilir ve bu yaklaşımı açık olarak;

$$V(t) \approx 1 + 2 \sum_{n=1}^{m+1} \sum_{k=0}^{m+1-n} \sigma_0^{m,n,k}(\hbar) \left[(-1)^n \frac{(-nt)^k}{k!} \exp(-nt) \right] \quad (4.76)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$\sigma_0^{m,n,k}(\hbar) = \frac{1}{2} [\mu_0^{m,n+k}(\hbar) + \mu_0^{m,n+k-1}(\hbar)] \quad (4.77)$$

dır.

"Sonuç olarak söyleyebiliriz ki; homotopi analiz metodunda $V(t)$ çözümü (4.40), (4.54), (4.62) ve (4.74) şeklindeki dört farklı temel fonksiyon ile ifade edilebilir, buna rağmen örnek problemin tek bir çözümü vardır. Sonuçta; (4.47), (4.61), (4.70) ve (4.76) çözüm ifadelerinin ailesi elde edilir. Teorik olarak bu çözümlerin hepsi; $0 \leq t < +\infty$ bölgesinde $V(t) = \tanh(t)$ tam çözümüne yakınsaktır. Ancak (4.47) çözümü diğer çözümlerden daha az etkilidir. Çünkü $-2 < \hbar < 0$ ' ın verilen bir değeri için sonlu bir bölgede yakınsaktır. Birbirleriyle karşılaştırıldıklarında; üstel kuvvetlere dayanan (4.70) çözümünün, kesirli fonksiyonlara dayanan (4.61) çözümünden daha iyi olduğu görülür ve polinom ile üstel fonksiyonların birleştirilmesiyle oluşan (4.76) çözümünün en etkili çözüm olduğu görülür. Böylece ele alınan örnek problem için söylenebilir ki HAM ile verilen lineer olmayan bir problemin çözümü için bir çok farklı temel fonksiyon ifade edilebilir ve çözüm tek olsa bile temel fonksiyonun iyi bir kurumuyla en etkili yaklaşım bulunabilir [23].

Ele alınan bu örnek oldukça basittir ve tam çözümü bilinmektedir. Bununla birlikte açıkça gösterilmiştir ki, HAM ile çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi ve hızı $\hbar$ ' ın geçerlilik bölgesinde uygun bir seçimiyle kontrol edilebilir ve HAM ile yakınsaklık bölgesinin genişletilmesine ihtiyaç duymadan bile $\hbar$ ' ın uygun seçimiyle çok etkili bir çözüm elde edilebilir. Ayrıca örnek problem için başlangıç yaklaşımı, yardımcı lineer operatör ve yardımcı fonksiyonun seçiminde çözüm ifadesinin kuralı ve katsayının ergodikliği kuralının çok önemli bir rol oynadığı gösterilmiştir.

4.2.5 $\hbar$ Yardımcı Parametrenin Rolü

Yukarıda da ifade edildiği gibi HAM topolojinin temel bir kavramı olan homotopiye dayanır. Sıfırdan farklı $\hbar$ yardımcı parametresi de geleneksel bir homotopiden daha genel bir homotopi ile verilen sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi ile tanıtılmıştır. Böylece daha önceden bilinen analitik tekniklerin aksine HAM, $\hbar$ yardımcı parametresi ile çözüm ifadelerinin bir ailesini oluşturur. Sonuçta çözümün yakınsaklık bölgesi ve hızı $\hbar$ yardımcı parametresine bağlıdır ve $\hbar$ değerinin uygun seçimiyle genişletilebilir. Böylece HAM ile yakınsaklık bölgesinin kontrolünde ve ayarlanmasında uygun ve güvenilir bir yol sağlanmış olur. Bu bölümde bir yardımcı parametre ile serilerin yakınsaklık bölgesinin gerçekten ayarlanabileceği ve kontrol edilebileceğini göstereceğiz [23].

İlk olarak, (4.47), (4.70) ve (4.76) çözüm ifadesinde oluşan ve (4.48) ile verilen $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonu HAM ile elde edilir. İlginç olan benzer tanımın Newton' nun binom teoreminden direk elde edilebildiğidir [23].

Bunu göstermek için ilk önce,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m (-1)^n t^n, \quad |t| < 1 \quad (4.78)$$

serisinin göz önüne alalım.

$$\frac{1}{1+t} = -\frac{\hbar}{(1-x)}$$

ifadesini verecek şekilde

$$x = 1 + \hbar + \hbar t$$

tanımlansın. $|x| = |1 + \hbar + \hbar t| < 1$ ve $|1 + \hbar| < 1$ olduğu zaman yani,

$$-1 < t < \frac{2}{|\hbar|} - 1, \quad -2 < \hbar < 0$$

olur ve

$$\frac{1}{1+t} = -\frac{\hbar}{(1-x)} = -\hbar(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = -\hbar \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \hbar + \hbar t)^n$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{1+t} = \lim_{m \rightarrow \infty} [-\hbar \sum_{n=0}^m (1 + \hbar + \hbar t)^n]$$

ifadesi

$$-1 < t < \frac{2}{|\hbar|} - 1, \quad (-2 < \hbar < 0)$$

geçerli bölgesinde sağlanır.

Burada;

$$\begin{aligned}
& \hbar \sum_{n=0}^m (1 + \hbar + \hbar t)^n \\
&= -\hbar \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + \hbar)^{n-k} (\hbar t)^k \\
&= -\hbar \sum_{k=0}^m \sum_{n=k}^n \binom{n}{k} (1 + \hbar)^{n-k} \hbar^k t^k \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k t^k (-\hbar)^{k+1} \sum_{i=0}^{m-k} \binom{k+i}{k} (1 + \hbar)^i \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k t^k [(-\hbar)^{k+1} \sum_{i=0}^{m-k} \binom{k+i}{k} (1 + \hbar)^i] \\
&= \sum_{n=0}^m (-1)^n t^n \mu_{-1}^{m,n}(\hbar)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifadedeki $\mu_{-1}^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonu

$$\mu_{-1}^{m,n}(\hbar) = (-\hbar)^{n+1} \sum_{j=0}^{m-n} \binom{n+j}{j} (1 + \hbar)^j \quad (4.79)$$

şeklinededir. (4.49) ifadesi ile karşılaştırılırsa;

$$\mu_{-1}^{m,n}(\hbar) = \mu_0^{m+1,n+1}(\hbar) \quad (4.80)$$

şeklinde bir ilişki bulunur. Böylece,

$$\frac{1}{1+t} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \mu_0^{m+1,n+1}(\hbar) [(-1)^n t^n] \quad (4.81)$$

eşitliği,

$$-1 < t < \frac{2}{|\hbar|} - 1, \quad (-2 < \hbar < 0)$$

bölgesinde elde edilmiş olur.

Açık olarak sırasıyla, $\hbar = -1$ olduğu zaman $-1 < t < 1$ ' de, $\hbar = -1/2$ olduğu zaman $-1 < t < 3$ ' de ve $\hbar = -1/50$ olduğu zaman $-1 < t < 9$ bölgelerinin yakınsaklık bölgesi olduğu görülmüştür. Özellikle $\hbar \rightarrow 0$ iken

$$-1 < t < +\infty$$

yakınsaklık bölgesi olur. Böylece (4.81) serisinin yakınsaklık bölgesi $\hbar$ yardımcı parametresi ile ayarlanabilir ve kontrol edilebilir.

4.2.6 Homotopi Analiz Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu Arasındaki İlişki

Bu kısımda Homotopi Analiz metodundaki $\hbar \neq 0$ yardımcı parametresinin $\hbar = -1$ olması halinde Homotopi pertürbasyon yöntemine (HPM) karşılık geldiğini göstereceğiz [60]. Bunun için

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (4.82)$$

lineer olmayan diferensiyel denklemini göz önüne alalım. A lineer olmayan bir operatör, $f(r)$ bir analitik fonksiyon ve u da bilinmeyen bir fonksiyondur. $\hbar \neq 0$, $H(t) \neq 0$ olmak üzere (4.14) denkleminde

$$(1 - q)L[\tilde{v}(r, q) - u_0(r)] = q\hbar H(t)\{A[\tilde{v}(r, q)] - f(r)\}, \quad (4.83)$$

şeklindeki sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi yazılabilir.

(4.83) denkleminde $H(t) = 1$ ve $\hbar = -1$ alırsak,

$$(1 - q)L[\tilde{v}(r, q) - u_0(r)] + q\{A[\tilde{v}(r, q)] - f(r)\} = 0, \quad (4.84)$$

J. Huan He [61]-[62] tarafından kurulan HPM bulunur. Benzer olarak J. Huan He $\tilde{v}(r, q)$ bilinmeyen fonksiyonun q parametresine göre Taylor serisine açılımını HAM da ki (4.25) kuvvet serisine benzer olarak

$$\tilde{v}(r, q) = u_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r)q^m \quad (4.85)$$

şeklinde ele almıştır.

J. Huan He, HPM da Liao' dan farklı olarak q' yu küçük bir parametre olarak kabul etmiş ve (4.85) serisini (4.84) denkleminde göz önüne alarak u_m çözüm elemanlarını q' ya bağlı denklemler ile oluşturmuştur. İki metod arasındaki fark budur. Ayrıca J. Huan He çalışmalarında u_m için genel bir ifade vermemiştir. Bununla birlikte (4.85) ve L lineer operatörünü kullanarak

$$\begin{aligned} (1 - q)L[\tilde{v}(r, q) - u_0(r)] &= (1 - q)L\left[\sum_{m=1}^{\infty} u_m(r)q^m\right] = (1 - q)\sum_{m=1}^{\infty} L[u_m(r)]q^m \\ &= L[u_1(r)]q + \sum_{m=1}^{\infty} L[u_m(r) - u_{m-1}(r)]q^m \end{aligned} \quad (4.86)$$

ifadesini elde etmiştir. Benzer şekilde;

$$A[\tilde{v}(r, q)] - f(r) = A\left[u_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r)q^m\right] - f(r) = S_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m(r)q^m \quad (4.87)$$

eşitliğini yazmıştır. Analizin temel kuralına göre $A(u)$ sürekli bir operatör ise $S_m(r)$ tektir. $q = 0$ için (4.87) denklemi $S_0(r) = A[u_0(r)] - f(r)$ olur. $m \geq 1$ için (4.87) denklemi q ' ya göre m -kez türevlenip $q = 0$ için seriye açılırsa;

$$\left\{ \frac{d}{dq^m} A \left[u_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r) q^m \right] \right\} \Big|_{q=0} = m! S_m(r)$$

bulunur. Bu son ifadede (4.30) özel fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$S_m(r) = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d}{dq^m} A \left[u_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r) q^m \right] \right\} \Big|_{q=0} = R_{m+1}(r), \quad m \geq 1 \quad (4.88)$$

elde edilir. Böylece (4.85) serisi (4.84) denkleminde göz önüne alındığında (4.87) ve (4.88) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & L[u_1(r)]q + \sum_{m=2}^{\infty} L[u_m(r) - u_{m-1}(r)]q^m + q \left\{ A[u_0(r)] - f(r) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{m+1}(r)q^m \right\} \\ &= q \{ L[u_1(r)] + A[u_0(r)] - f(r) \} + \sum_{m=2}^{\infty} \{ L[u_m(r) - u_{m-1}(r)] + R_m(r) \} q^m = 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

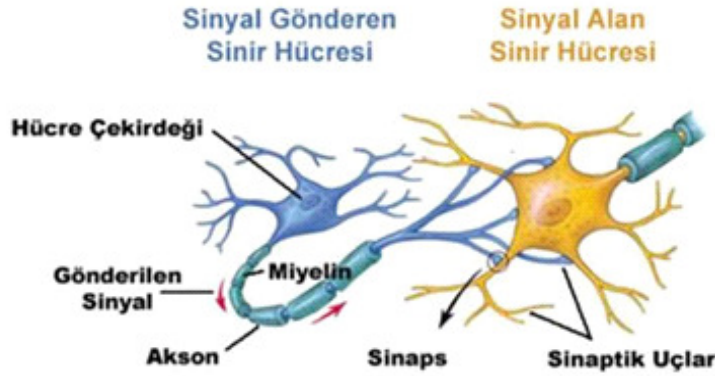
denklemini bulunur. (4.28) yüksek mertebeden deformasyon denkleminde $\hbar = -1$ alırsak (4.89) denklemini elde edilir. Yani He çalışmalarında (4.27) ve (4.28) deformasyon denklemlerine benzer ifadeler kullanarak HPM' yi kurmuştur.

5. BÖLÜM

Bu bölümde kesirli kablo denkleminin genel yapısı anlatıldı ve daha sonra 4. bölümde verilen HAM ile sayısal çözümleri elde edildi.

5.1 KESİRLİ KABLO DENKLEMİ

Kablo denklemini nöronal dinamiği modellemek için kullanılan en temel denklemlerden biridir. Nöronal dinamik "nöron" adı verilen sinir hücreleri üzerinde gerçekleşir. Tipik sinir hücreleri, bir hücre gövdesi, dentrit ve bir aksonun bağlı bulunduğu somadan meydana gelir. Hücredeki sinaptik bilgi akışı, dentritler boyunca, hücre membranının iç tarafı ve dış tarafı arasında iyonların konsantrasyonunun değişmesi ile meydana gelir. Böylece somada iyonların elektriksel difüzyonu ile bir postsinaptik potansiyel oluşur. Somada gelen potansiyeller toplanır ve hücre yangının oluşması ile bir aksiyon potansiyeli üretilerek akson boyunca iletilir ve bir sonraki uyarıya kadar hücre baştaki konumuna geri gelir. Bir sinir hücresinin membranı boyunca oluşan potansiyelin uzay-zaman değişimi için oluşan standart matematiksel model kablo denklemdir.



Şekil 5.1. İki sinir hücresi arasında gerçekleşen hareket

Sinir hücrelerinde gerçekleşen nöronal dinamiğin modellenmesi ile ilgili ilk çalışma Rall tarafından yapılmıştır [63]. Rall' un bu konuya öncülük eden çalışması tek nörona veya sinir kökünde, yalnızca pasif sinyalin modellenmesinde devrim yaratmakla kalmamıştır, aynı zamanda deneyin yorumlanmasına ve tasarımına da destek olmuştur [63]. Ayrıca bu çalışma ile Kablo denkleminin farklı yaklaşımlarının sinir hücrelerinde oluşan daha kompleks modeller için bir temel olduğu görülmüştür. Bu modeller sodyum ve potasyum akımları nedeniyle oluşan durumları ve iyonik kanalların, iyon pompalarının ve protein tamponlarının katkısının incelenmesini sağlar. Hatta bu durumlara sinaptik modelleme ve nörotransmitter salınım da dahil edilebilir. Bununla birlikte elektrodifüzyon Nersnt-

Planck denkleminin nöronların iyon hareketlerini içeren elektrodifüzyon olayı ile Kablo denkleminde eşdeğer olduğu görülmüştür. Nernst-Planck denklemi genel olarak

$$J = -D \left(\frac{dc}{dx} + \frac{zF}{RT} c \frac{d\phi}{dx} \right)$$

şeklinde tanımlanır [64]. Aynı durum kalsiyumun hızlı tamponlama reaksiyonunun difüzyonunun modellenmesi durumu içinde geçerlidir [63]-[65]. Bu yaklaşım ile iyon ve iyon tamponlama proteinlerinin hareketinin standart difüzyona bağlı olduğu varsayılmaktadır.



Şekil 5.2. Sinir hücresinin genel yapısı

Son yıllarda çok sayıda biyolojik ve fiziksel sistem üzerinde çalışma yapılmıştır. Bunların spesifik difüzyon oranları tek bir parametre ile karakterize edilememektedir. Bu durumlarda karşılaşılan "anormal difüzyon" olayı bir D difüzyon sabiti gibi bir ölçekleme parametresi olan γ tarafından karakterize edilir ve $\langle r^2(t) \rangle$ ölçekleri $\langle r^2(t) \rangle \sim t^\gamma$ lineer olmayan kuvvetli terime dönüşür. Örnek olarak, tek parçacık izleme deneyleri ve foto-ağartma (photo-bleaching) deneyleri hücre zarlarının çeşitli lipid ve proteinlerinin $0 < \gamma < 1$ durumunda yarı difüzyon (sub-difüzyon) olayını ortaya koymuştur.

Anormal yarı-difüzyon nöral hücrelerde adhezyon moleküllerinde gözlemlenmiştir. Son yıllarda Reynolds [66] adındaki bilim adamı yaptığı çalışmalarla kesirli difüzyon denkleminin çözümünün, plazma zarının içinden geçen proteinlerin difüzyonunu ifade ettiğini göstermiştir. Deneylerde görülen bu anormal difüzyonun bir açıklaması; nöral dokuların karışık yapılarından kaynaklanabileceği ortaya konmuştur. İyonların difüzyonu; yapıların düşük

hızla birbirleri ile çarpışmalarından dolayı yavaşlar. Bu durum "iyon tuzağı" veya "hop" difüzyon gibi durumlara bağlı olabilir. Buda göstermiştir ki kesirli difüzyon denklemleri ile modellenen gözenekli ortamdakine benzer difüzyon ele alınır. Özellikle çekirgeler üzerinde yapılan bir çalışma ile, potasyum iyon kanallarındaki sinyal ayırıcı özelliğine sahip kesirli bir difüzyon hareketinin kullanıldığı gözlemlenmiştir [65]. Bu çalışma anormal yavaş konformasyonel difüzyonu açıklar fakat Poisson-Nernst-Planck teorisinde görülen yüklenmiş difüzyonun olası bir etkisi yoktur [65]. Ancak iyon kanallarında azda olsa etkisi olduğu iddia edilmiştir

Anormal difüzyon için yapılan bir diğer açıklama ise tamponlama proteinleri veya deneylerde kullanılan gösterge proteinleri tarafından iyonların yakalanmasıdır. İyonların tamponlayıcı proteinler tarafından yakalanması, örneğin kalsiyum gibi iyon protein kompleksinin hareketliliğinde ve difüzyon içindeki birbirini takip eden indirgemede bir azalmaya yol açacaktır. Eğer tamponlama proteini hücre duvarına sabitlenmiş ise yüksek tamponlama yapılan kalsiyum iyonları gibi belirleyici bir faktör olabilir. Bu göstergenin tanımını karmaşıklaştıran bir durum, ölçülecek difüzyon katsayısının doğrudan etkisinde olması olabilir. Tasarlanan deneylerin yorumlanmasını karmaşıklaştıran bir konuda, bir ölçü difüzyon katsayısının tanımıdır. Çünkü bu göstergenin tanımında ölçülecek difüzyon katsayısı doğrudan etkili olabilir. Yapılan çalışmalarda, floresan boyaların doğru kalsiyum değişikliklerini izlemeye yeterli olması beklenmektedir. Bunun bir sonucu olarak iyonların sinyali gecikmiş veya bozuk olabilir yada bu gösterge kullanımına karşı hassas olabilir. Tanımlayıcı deneylerde tamponlama reaksiyon modeline ihtiyaç olur. Tıpkı standart reaksiyon-difüzyon deneylerindeki veya kesirli reaksiyon difüzyon denklemleri ile verilen anormal yarı-difüzyon durumlarına benzerdir. Eğer iyonlar anormal yarı-difüzyon ile hareket ediyorsa o zaman yanlış yada yanıltıcı difüzyon katsayısı değerlerine yol açacak, böylece standart veya normal difüzyonu varsayan modellerle karşılaşılacaktır. Bu modellerde birleştirilmiş anormal difüzyon kullanılmaktadır [65].

Bu düşünceden hareketle Langlands ve arkadaşları iyonların anormal difüzyonunu modellemede Nernst-Planck denkleminin kesirli bir değişkenini türetmişlerdir [63]-[65]. Henry ve arkadaşları ise iyonların anormal elektrodifüzyon modelinin oluşturduğu Nernst-Planck denklemlerinden bir kesirli kablo denklemi türetmişlerdir. Sonuç olarak yapılan çalışma ile Nernst-Planck denkleminin parçalanmasıyla iki adet kesirli Riemann-Liouville türevi içeren kesirli kablo denklemi elde edilmiştir [67].

Genel haliyle kesirli kablo denklemi;

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\gamma_1} \left(K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) - \mu_0^2 {}_0 D_t^{1-\gamma_2} u(x, t) + f(x, t), \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.3)$$

şeklinde. Burada; $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, $K > 0$ ve μ_0^2 sabitlerdir ve ${}_0 D_t^{1-\gamma}$ de $1 - \gamma$ mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevidir.

Genel hali (5.1) ile verilen kesirli kablo denkleminin yaklaşık çözümü literatürde çok az olup, kapalı sayısal metod (INM) [67], kompakt sonlu farklar yöntemi (IFDS) [68] ve sayısal fark metodu [69] ile yapılmıştır.

5.2 HAM' ın KESİRLİ KABLO DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu kısımda

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.4)$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.5)$$

sınır şartı ile verilen

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\gamma_1} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - {}_0 D_t^{1-\gamma_2} u(x, t) + f(x, t), \quad (5.6)$$

şeklindeki kesirli kablo denklemini gözönüne alalım [67]. (5.4)-(5.6) ile verilen problemin yaklaşık çözümünü daha önceki bölümde açıklanan Homotopi analiz yöntemi ile bulalım.

Burada;

$$f(x, t) = 2 \left(t + \frac{\pi^2 t^{1+\gamma_1}}{\Gamma(2 + \gamma_1)} + \frac{t^{1+\gamma_2}}{\Gamma(2 + \gamma_2)} \right) \sin \pi x$$

dir. (5.4) ve (5.6) kesirli kablo denkleminin analitik çözümü $u(x, t) = t^2 \sin \pi x$ dir [67].

(5.6) denkleminde yardımcı lineer operatör

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t; q) \quad (5.7)$$

olarak seçilirse $L[c] = 0$ olur. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere yüksek mertebeden deformasyon denklemi (4.28) denkleminde hareketle

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) \quad (5.8)$$

olarak bulunur. Bu denklemde $H(t)$ yardımcı fonksiyonu $H(t) = 1$ olarak alınacaktır. (5.8) denkleminin başlangıç şartı,

$$u_m(x, 0) = 0 \quad (5.9)$$

dır. Burada;

$$R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) = \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} - {}_0D_t^{1-\gamma_1} \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + {}_0D_t^{1-\gamma_2} u_{m-1}(x, t) - f(x, t) \quad (5.10)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

şeklinde dir. Böylece (5.8) yüksek mertebeden deformasyon denkleminde (5.7) yardımcı lineer operatörü göz önüne alınırsa;

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + \hbar \int_0^t (R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t))) dt \quad (5.12)$$

ifadesi elde edilir. (5.10) ve (5.11) ifadeleri (5.12) denkleminde göz önüne alınırsa kesirli kablo denkleminin çözüm elemanları

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 0, \\ u_1(x, t) &= \hbar t^2 \sin \pi x \left(-1 - \frac{2\pi^2 t^{\gamma_1}}{\Gamma(3 + \gamma_1)} - \frac{2t^{\gamma_2}}{\Gamma(3 + \gamma_2)} \right), \\ u_2(x, t) &= u_1(x, t) + \hbar \left(-t^2 \sin \pi x (2(2(1 + 2\hbar)\pi^2 t^{\gamma_1} \Gamma(3 + 2\gamma_1) \Gamma(3 + \gamma_2) \right. \\ &\quad \Gamma(2 + \gamma_1 + \gamma_2) \Gamma(3 + 2\gamma_2) + \Gamma(3 + \gamma_1) (2\hbar \pi^4 t^{2\gamma_1} \Gamma(3 + \gamma_2) \\ &\quad \Gamma(2 + \gamma_1 + \gamma_2) \Gamma(3 + 2\gamma_2) + \dots \\ u_3(x, t) &= u_2(x, t) + \hbar \left(-t^2 \sin \pi x - \frac{1}{3} \hbar t^3 \sin \pi x - \frac{2t^{2+\gamma_2} \sin \pi x}{\Gamma(3 + \gamma_2)} - \frac{2\hbar t^{3+\gamma_2} \sin \pi x}{\Gamma(4 + \gamma_2)} \right. \\ &\quad - \frac{4\hbar^2 \pi^2 t^{3+\gamma_1+\gamma_2} \sin \pi x}{\Gamma(4 + \gamma_1 + \gamma_2)} - \frac{\hbar \pi^4 t^{2+2\gamma_1} \gamma_1}{\Gamma(3 + 2\gamma_1)(1 + \gamma_1)} + \frac{(2 + \gamma_1) \pi^2 t^{2+2\gamma_1} \Gamma(\gamma_1)}{(1 + \gamma_1) \Gamma(3 + 2\gamma_1)} \sin \pi x \\ &\quad + (3 + 2\hbar t + 2\hbar^2 t + \gamma_1) \frac{2\pi^2 t^{2+\gamma_1} \sin \pi x}{\Gamma(4 + \gamma_1)} + \frac{2t^{2+\gamma_1} \sin \pi x}{\gamma_1(2 + 3\gamma_1 + \gamma_1^2)} - \dots \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Sonuçta;

$$u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots$$

terimlerinden oluşan

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) \quad (5.13)$$

çözüm serisi elde edilmiş olur.

Teorem 5.2.1 (Yakınsaklık Teoremi)

$u_m(x, t)$ ifadesi (5.12) yüksek mertebeden deformasyon denklemi ile elde edilmek üzere, $u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)$ serisi yakınsak ise $u(x, t)$, (5.4)-(5.6) kesirli kablo denklemi nin çözümüdür.

İspat

$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t)$ serisi yakınsaksa;

$$S(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = 0$$

olur. (5.12) den

$$\begin{aligned} \hbar \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_m(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] \\ &= L[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} (u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t))] \\ &= L[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\hbar \neq 0$ olduğundan dolayı $\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_m(x, t)) = 0$ olur. Bu ifadeden hareketle (5.10) denklemi göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_m(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} [D_t u_{m-1}(x, t) - {}_0 D_t^{1-\gamma_1} u_{m-1}(x, t)_{xx} + {}_0 D_t^{1-\gamma_2} u_{m-1}(x, t) - F(x, t)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D_t u_m(x, t) - \sum_{m=0}^{\infty} {}_0 D_t^{1-\gamma_1} u_m(x, t)_{xx} + \sum_{m=0}^{\infty} {}_0 D_t^{1-\gamma_2} u_m(x, t) - F(x, t) \\ &= D_t \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) - {}_0 D_t^{1-\gamma_1} \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t)_{xx} + {}_0 D_t^{1-\gamma_2} \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) - F(x, t) \\ &= D_t S(x, t) - {}_0 D_t^{1-\gamma_1} S(x, t)_{xx} + {}_0 D_t^{1-\gamma_2} S(x, t) - F(x, t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

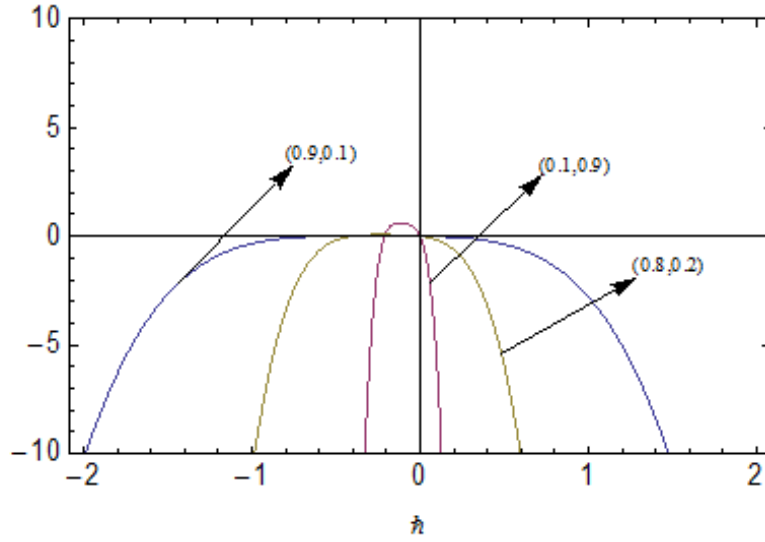
elde edilir.

(5.4) ve (5.9) ifadelerinden,

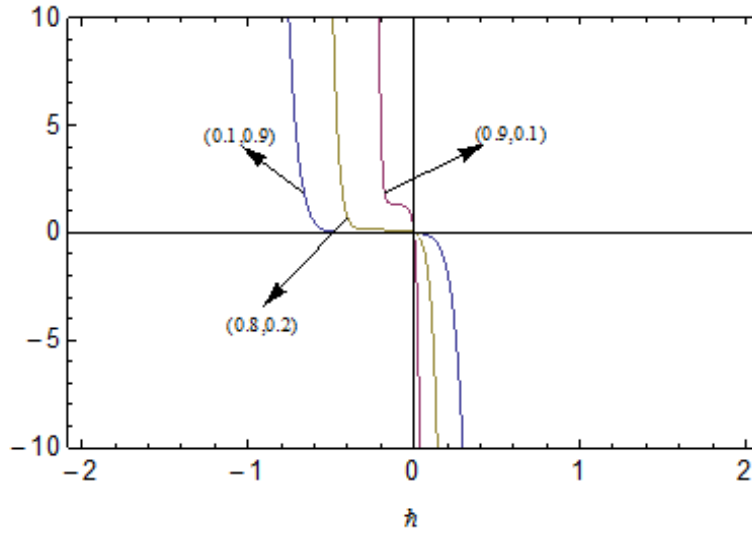
$$S(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, 0) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m-1}(x, 0) = 0$$

bulunur. Böylece $u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)$ çözüm serisi yakınsak olduğunda $u(x, t)$ kesirli kablo denkleminin çözümü olur.

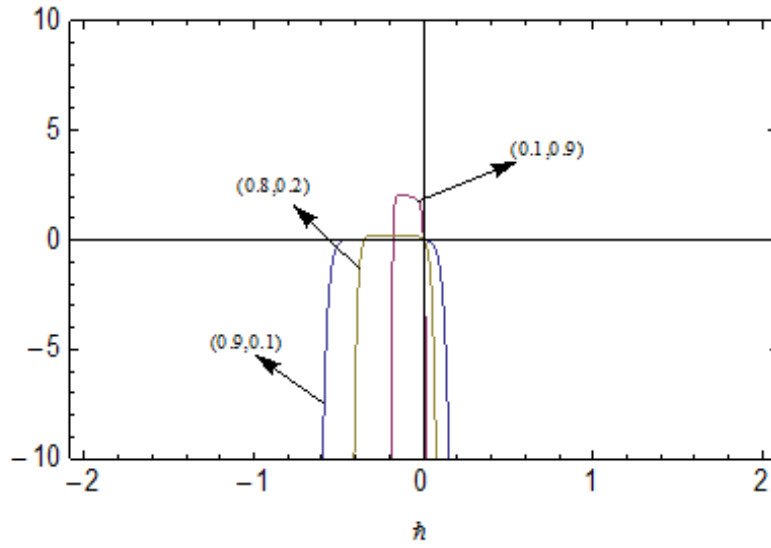
(5.6) denkleminin homotopi analiz metodu ile elde ettiğimiz çözüm serisini kullanırsak aşağıdaki tablo ve şekiller elde edilir.



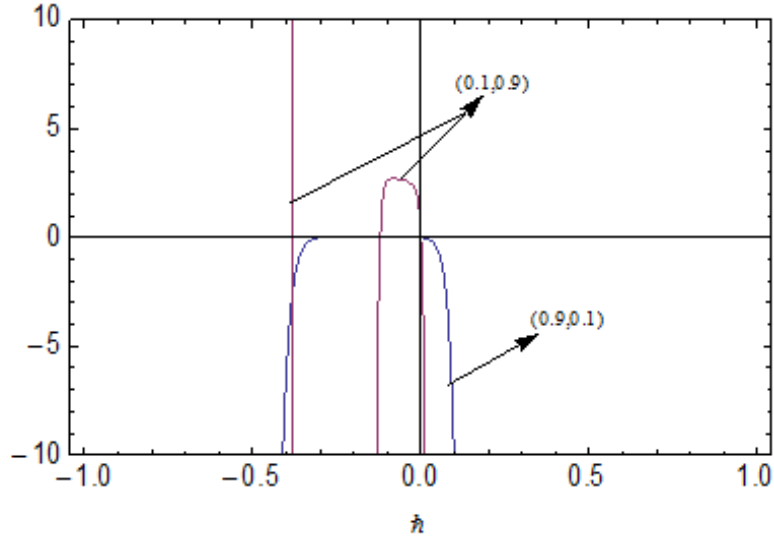
Şekil 5.3. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 5 teriminin h eğrisi



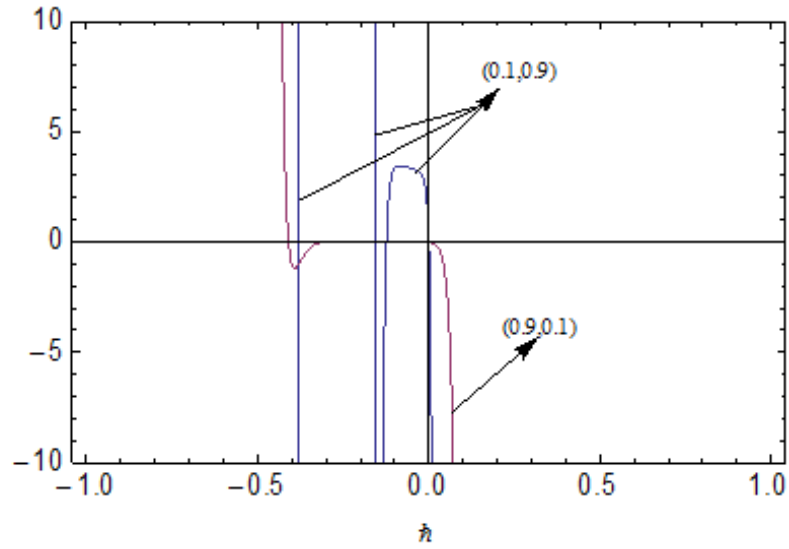
Şekil 5.4. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin h eğrisi



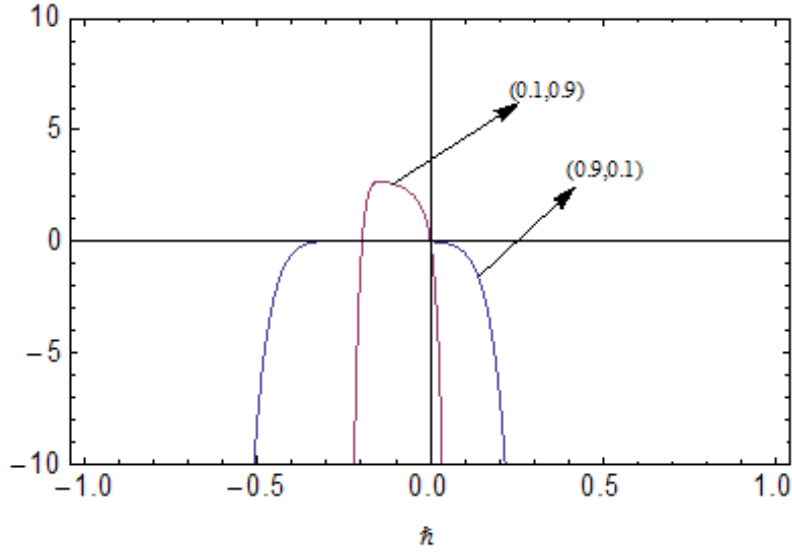
Şekil 5.5. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 15 teriminin h eğrisi



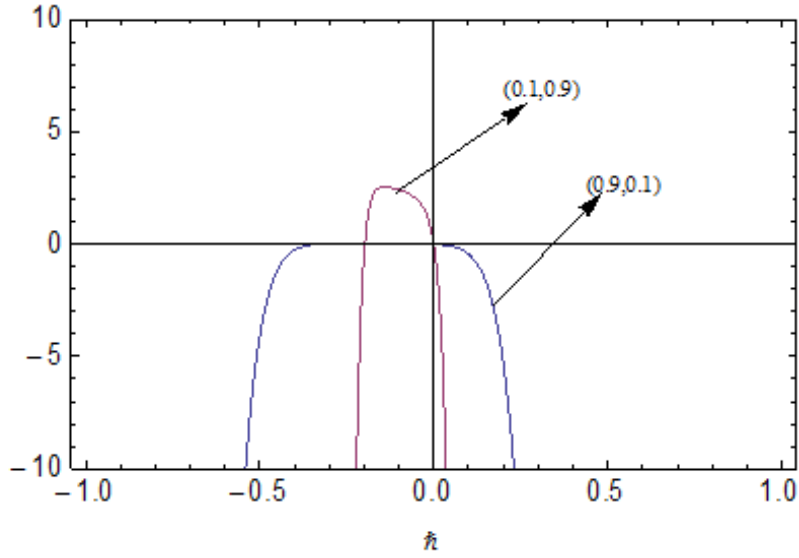
Şekil 5.6. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 20 teriminin h eğrisi



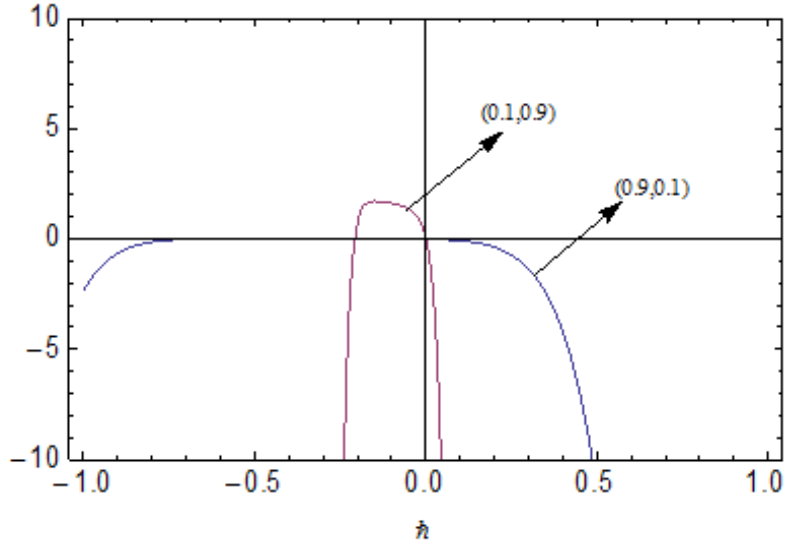
Şekil 5.7. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 25 teriminin h eğrisi



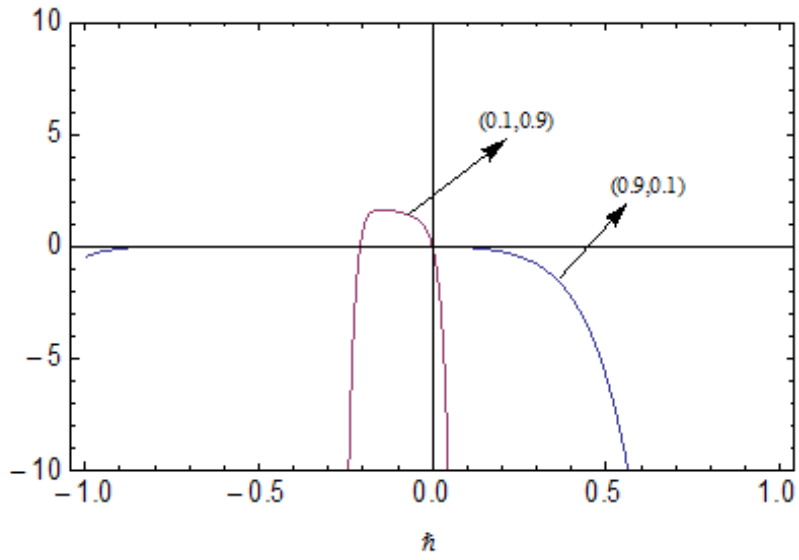
Şekil 5.8. $\gamma_1 = 0.25$, $\gamma_2 = 0.25$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin h eğrisi



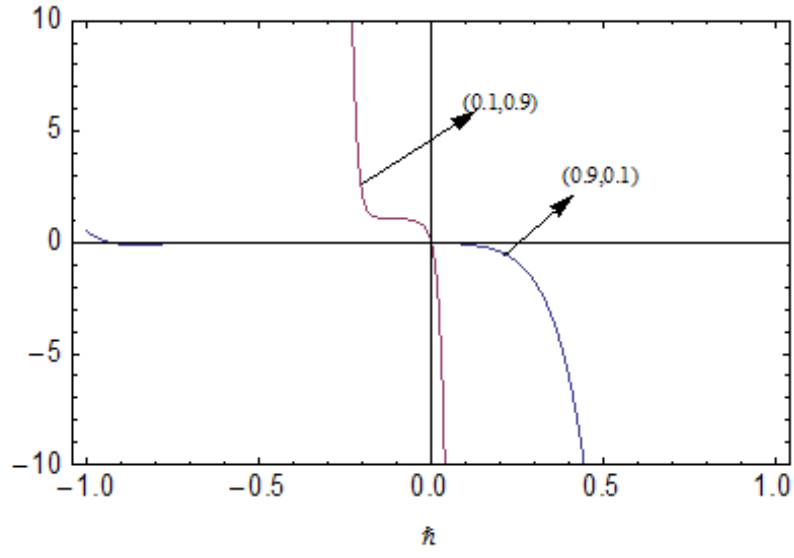
Şekil 5.9. $\gamma_1 = 0.25$, $\gamma_2 = 0.75$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin h eğrisi



Şekil 5.10. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.25$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x,t)$ ' nin 10 teriminin h eğrisi



Şekil 5.11. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.75$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x,t)$ ' nin 10 teriminin h eğrisi



Şekil 5.12. $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.3$ durumunda x ve t ' nin değerleri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 teriminin h eğrisi

Tablo 5.1. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0395$ değerleri için hesaplanan 5 terimin
HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası

x	HPM	HAM	A..	HPM Mutlak Hata	HAM Mutlak Hata
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	-0.340367	0.00309062	0.00309017	0.343458	4.53322×10^{-7}
0.2	-0.647417	0.00587871	0.00587785	0.653295	8.6227×10^{-7}
0.3	-0.891093	0.00809136	0.00809017	0.899184	1.18681×10^{-6}
0.4	-1.04754	0.00951196	0.00951057	1.05705	1.39518×10^{-6}
0.5	-1.10145	0.0100015	0.01	1.11145	1.46698×10^{-6}
0.6	-1.04754	0.00951196	0.00951057	1.05705	1.39518×10^{-6}
0.7	-0.891093	0.00809136	0.00809017	0.899184	1.18681×10^{-6}
0.8	-0.647417	0.00587871	0.00587785	0.653295	8.6227×10^{-7}
0.9	-0.340367	0.00309062	0.00309017	0.343458	4.53322×10^{-7}
1.0	-1.34889×10^{-16}	-1.22483×10^{-18}	-1.22465×10^{-18}	1.36114×10^{-16}	1.79653×10^{-22}

Tablo 5.2. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.004$ değerleri için hesaplanan 10 terimin
HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası

x	HPM	HAM	A..	HPM Mutlak Hata	HAM Mutlak Hata
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	-8614.19	0.00302986	0.00309017	8614.2	6.0306×10^{-5}
0.2	-16385.2	0.00576314	0.00587785	16385.2	1.14709×10^{-5}
0.3	-22552.2	0.00793229	0.00809017	22552.3	1.57883×10^{-4}
0.4	-26511.8	0.00932496	0.00951057	26511.8	1.85603×10^{-4}
0.5	-27876.1	0.00980485	0.01	27876.1	1.95154×10^{-4}
0.6	-26511.8	0.00932496	0.00951057	26511.8	1.85603×10^{-4}
0.7	-22552.2	0.00793229	0.00809017	22552.3	1.57883×10^{-4}
0.8	-16385.2	0.00576314	0.00587785	16385.2	1.14709×10^{-5}
0.9	-8614.19	0.00302986	0.00309017	8614.2	6.0306×10^{-5}
1.0	-3.41384×10^{-12}	1.20075×10^{-18}	-1.22465×10^{-18}	3.41384×10^{-12}	2.38995×10^{-20}

Tablo 5.3. $\gamma_1 = 0.25$, $\gamma_2 = 0.75$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0043$ değerleri için hesaplanan 10 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası

x	HPM	HAM	A..	HPM Mutlak Hata	HAM Mutlak Hata
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	-5022.62	0.00305436	0.00309017	5022.62	3.58117×10^{-5}
0.2	-9553.59	0.00580973	0.00587785	9553.6	6.8118×10^{-5}
0.3	-13149.4	0.00799641	0.00809017	13149.4	9.37564×10^{-5}
0.4	-15458.	0.00940035	0.00951057	15458.	1.10217×10^{-4}
0.5	-16253.5	0.00988411	0.01	16253.6	1.15889×10^{-4}
0.6	-15458.	0.00940035	0.00951057	15458.	1.10217×10^{-4}
0.7	-13149.4	0.00799641	0.00809017	13149.4	9.37564×10^{-5}
0.8	-9553.59	0.00580973	0.00587785	9553.6	6.8118×10^{-5}
0.9	-5022.62	0.00305436	0.00309017	5022.62	3.58117×10^{-5}
1.0	-1.99049×10^{-12}	1.21045×10^{-18}	-1.22465×10^{-18}	1.99049×10^{-12}	1.41923×10^{-20}

Tablo 5.4. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.25$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0108$ değerleri için hesaplanan 10 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası

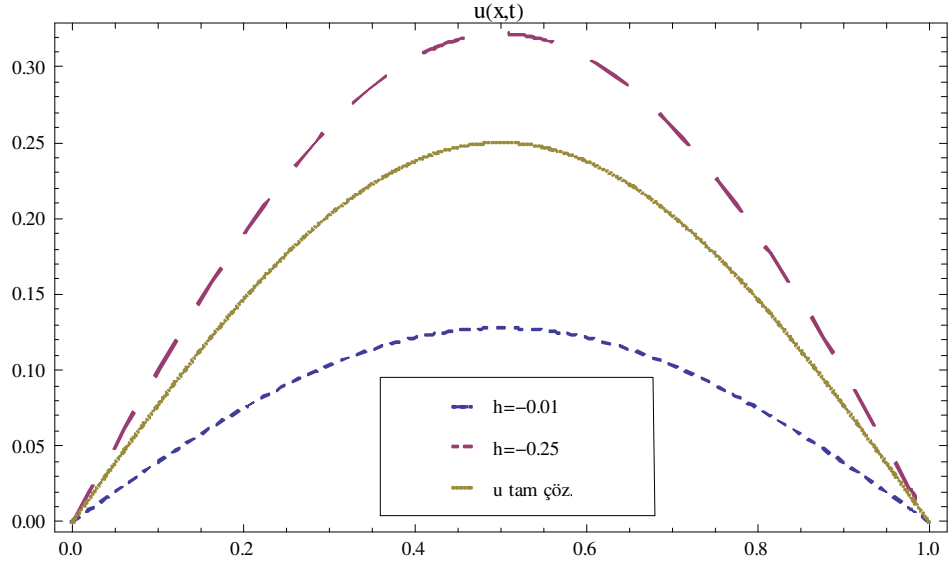
x	HPM	HAM	A..	HPM Mutlak Hata	HAM Mutlak Hata
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	-2.33281	0.00308546	0.00309017	2.3359	4.71366×10^{-6}
0.2	-4.43727	0.00586889	0.00587785	4.44315	8.96591×10^{-6}
0.3	-6.10738	0.00807783	0.00809017	6.11547	1.23405×10^{-5}
0.4	-7.17965	0.00949606	0.00951057	7.18916	1.45072×10^{-5}
0.5	-7.54913	0.00998475	0.01	7.55913	1.52537×10^{-5}
0.6	-7.17965	0.00949606	0.00951057	7.18916	1.45072×10^{-5}
0.7	-6.10738	0.00807783	0.00809017	6.11547	1.23405×10^{-5}
0.8	-4.43727	0.00586889	0.00587785	4.44315	8.96591×10^{-6}
0.9	-2.33281	0.00308546	0.00309017	2.3359	4.71366×10^{-6}
1.0	-9.24502×10^{-16}	1.22278×10^{-18}	-1.22465×10^{-18}	9.25727×10^{-16}	1.86804×10^{-21}

Tablo 5.5. $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.75$, $t = 0.1$ ve $\hbar = -0.0129$ değerleri için hesaplanan 10 terimin HPM, HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası

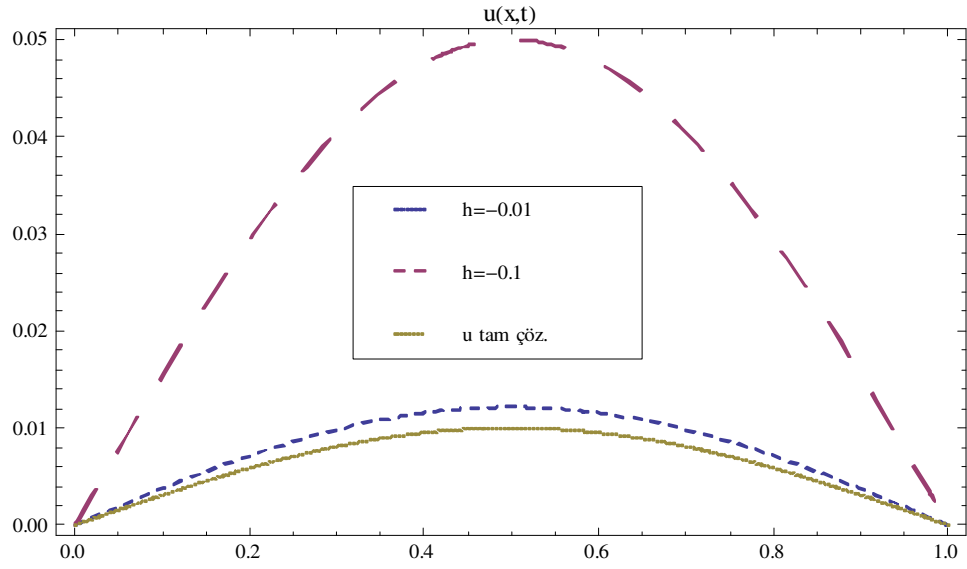
x	HPM	HAM	A..	HPM Mutlak Hata	HAM Mutlak Hata
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	-0.460767	0.00308507	0.00309017	0.463857	5.10409×10^{-6}
0.2	-0.876432	0.00586814	0.00587785	0.882309	9.70856×10^{-6}
0.3	-1.2063	0.00807681	0.00809017	1.21439	1.33627×10^{-5}
0.4	-1.4181	0.00949486	0.00951057	1.42761	1.57088×10^{-5}
0.5	-1.49107	0.00998348	0.01	1.50107	1.61572×10^{-5}
0.6	-1.4181	0.00949486	0.00951057	1.42761	1.57088×10^{-5}
0.7	-1.2063	0.00807681	0.00809017	1.21439	1.33627×10^{-5}
0.8	-0.876432	0.00586814	0.00587785	0.882309	9.70856×10^{-6}
0.9	-0.460767	0.00308507	0.00309017	0.463857	5.10409×10^{-6}
1.0	-1.82604×10^{-16}	1.22262×10^{-18}	-1.22465×10^{-18}	1.22465×10^{-18}	2.02277×10^{-21}

Tablo 5.6. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, $x = 10^{-4}$ ve $\hbar = 1/10^8$ değerleri için hesaplanan mutlak hata

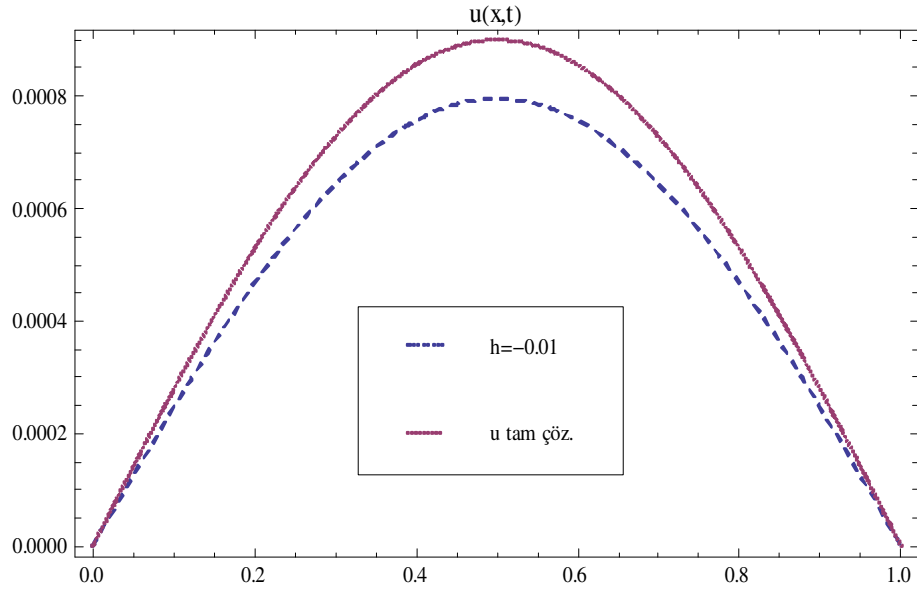
t	INM [67]	ICFDS [68]	HAM
0.1	4.7796×10^{-5}	3.4436×10^{-6}	3.14159×10^{-8}
0.2	2.1914×10^{-4}	6.8604×10^{-6}	6.28319×10^{-8}
0.3	5.2286×10^{-4}	9.8036×10^{-6}	9.42478×10^{-8}
0.4	9.6227×10^{-4}	1.2163×10^{-5}	1.25664×10^{-7}
0.5	1.5392×10^{-3}	1.3893×10^{-5}	1.5708×10^{-7}
0.6	2.2552×10^{-3}	1.4974×10^{-5}	1.88496×10^{-7}
0.7	3.1110×10^{-3}	1.5394×10^{-5}	2.19911×10^{-7}
0.8	4.1015×10^{-3}	1.5141×10^{-5}	2.51327×10^{-7}
0.9	5.2452×10^{-3}	1.4211×10^{-5}	2.82743×10^{-7}
1.0	6.5246×10^{-3}	1.2596×10^{-5}	3.14159×10^{-7}



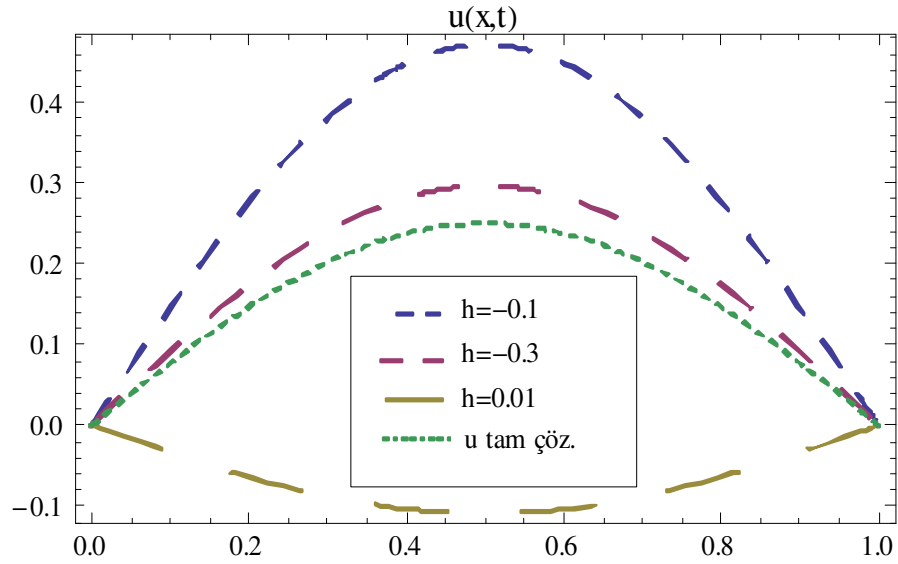
Şekil 5.13. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $t = 0.5$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 5 terimi



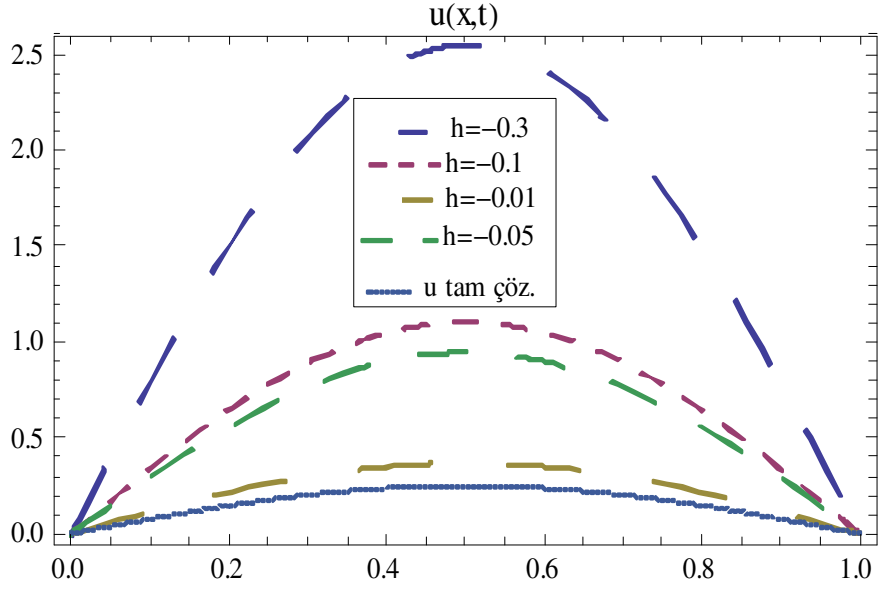
Şekil 5.14. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $t = 0.1$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 terimi



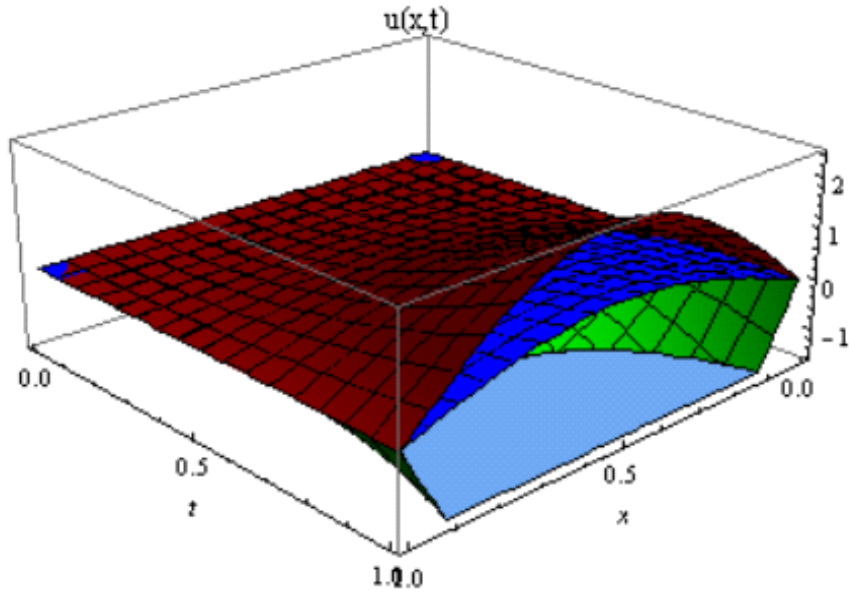
Şekil 5.15. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $t = 0.03$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 terimi



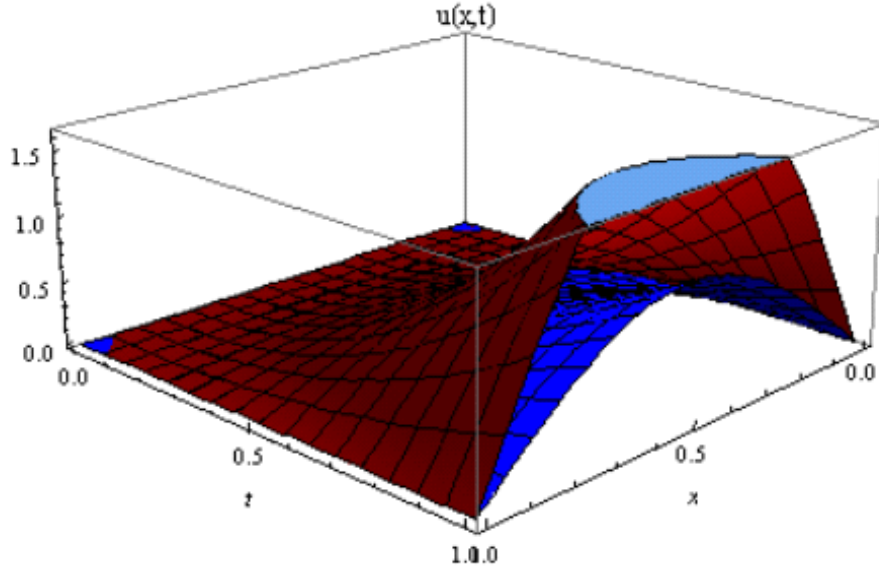
Şekil 5.16. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $t = 0.5$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 5 terimi



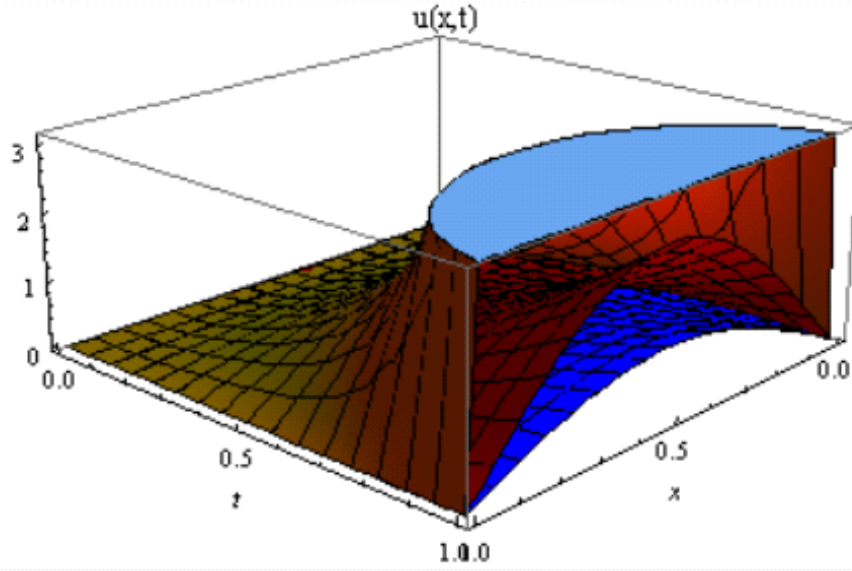
Şekil 5.17. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $t = 0.5$ değeri için hesaplanan $u(x, t)$ ' nin 10 terimi



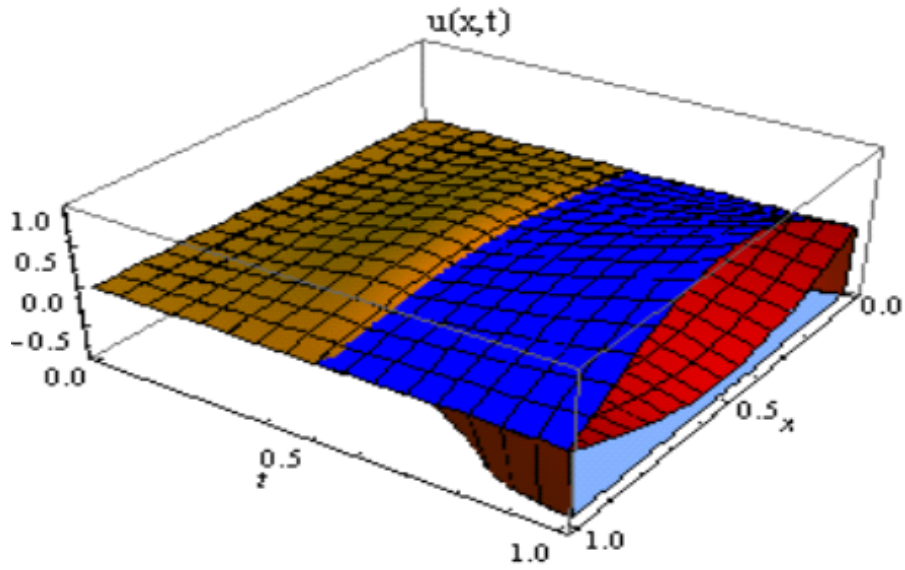
Şekil 5.18. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = 0.01$ (yeşil bölge), $\hbar = -0.01$ (kırmızı bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği



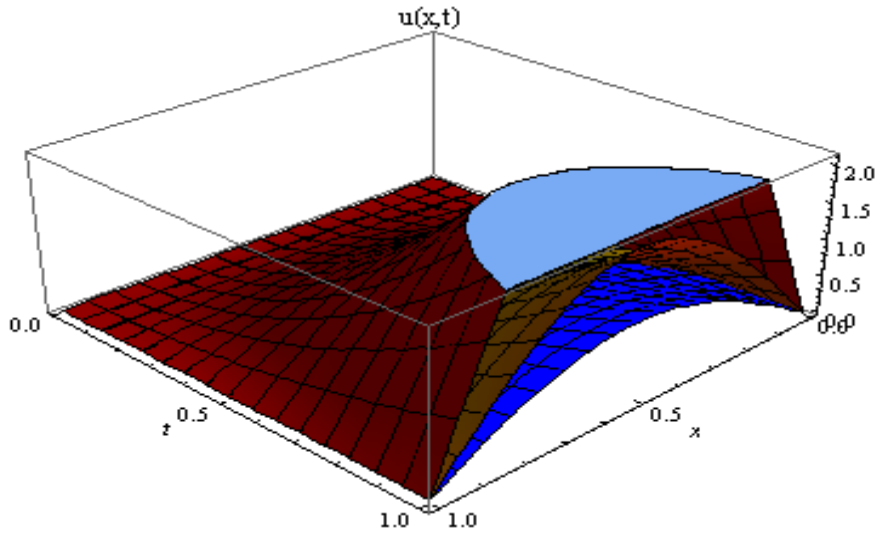
Şekil 5.19. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.01$ (kırmızı bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği



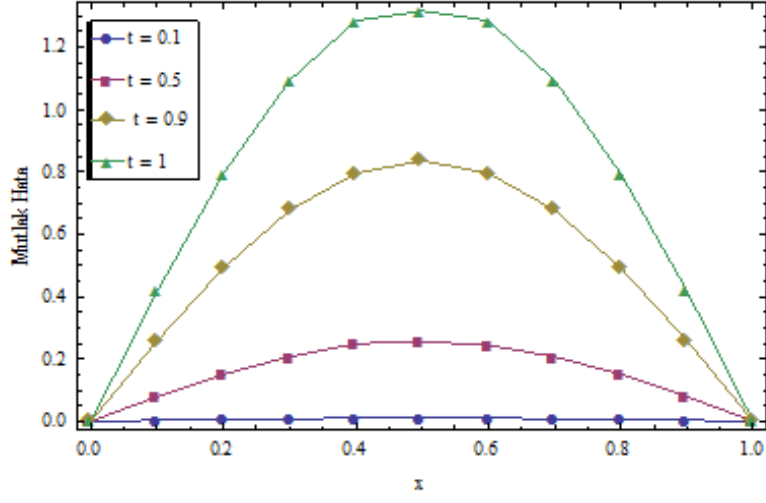
Şekil 5.20. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ durumunda $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.01$ (kırmızı bölge), $\hbar = -0.2$ (turuncu bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği



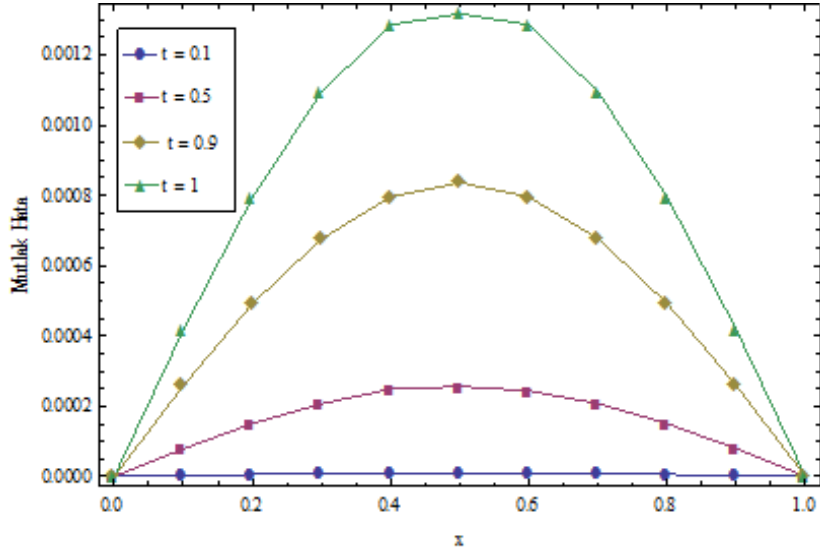
Şekil 5.21. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = 0.01$ (kırmızı bölge), $\hbar = -0.3$ (turuncu bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği



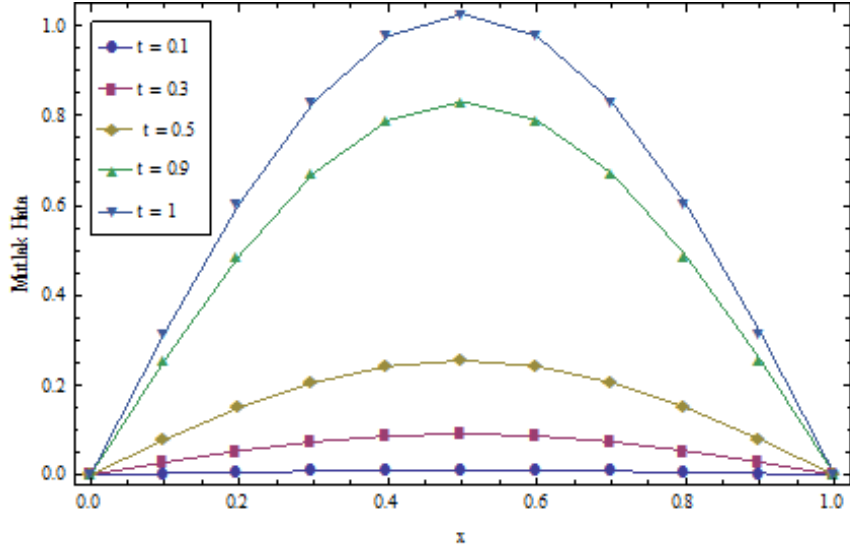
Şekil 5.22. $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ durumunda $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.1$ (kırmızı bölge), $\hbar = -0.01$ (turuncu bölge) ve analitik çözümün (mavi bölge) üç boyutlu grafiği



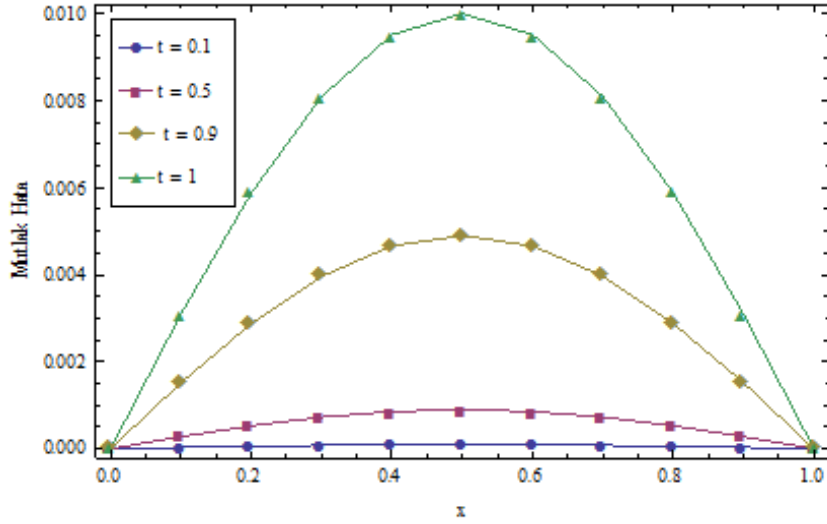
Şekil 5.23. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki Mutlak Hata



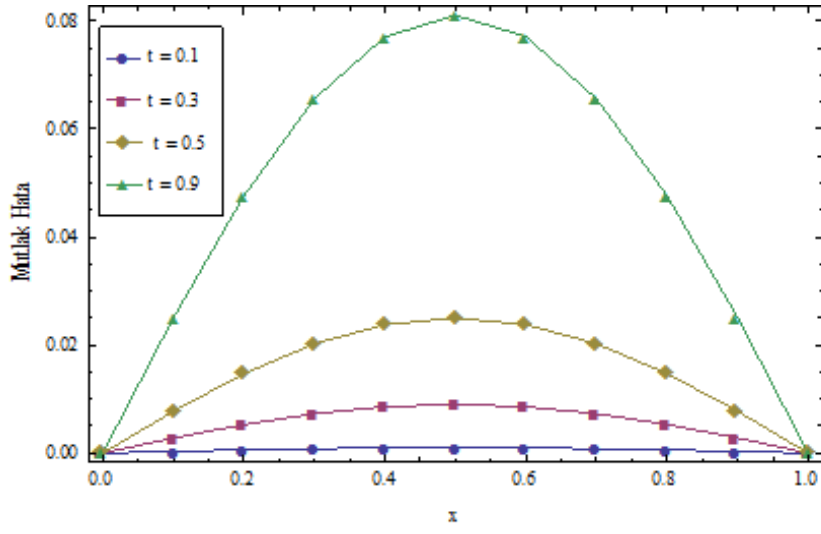
Şekil 5.24. $u(x, t)$ nin 20 terimi için $\hbar = 0.000001$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki Mutlak Hata



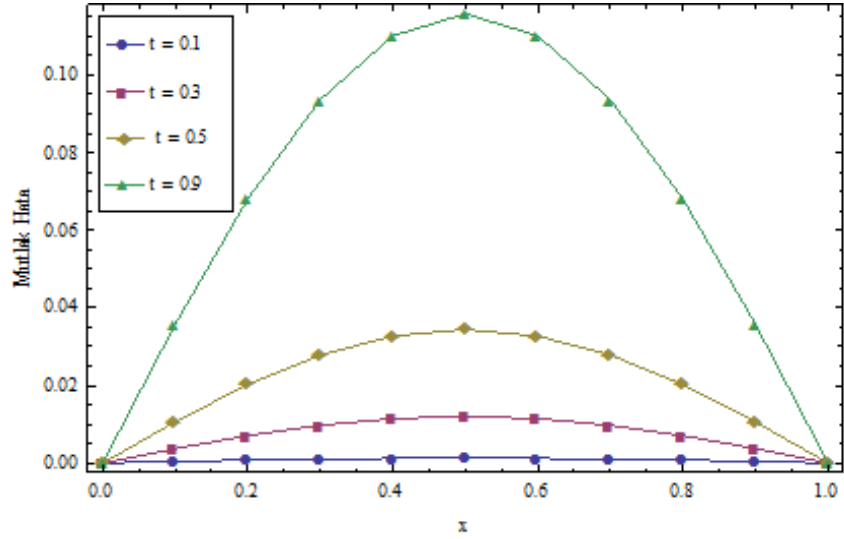
Şekil 5.25. $u(x,t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$, $\gamma_1 = 0.8$ ve $\gamma_2 = 0.3$ değerlerindeki Mutlak Hata



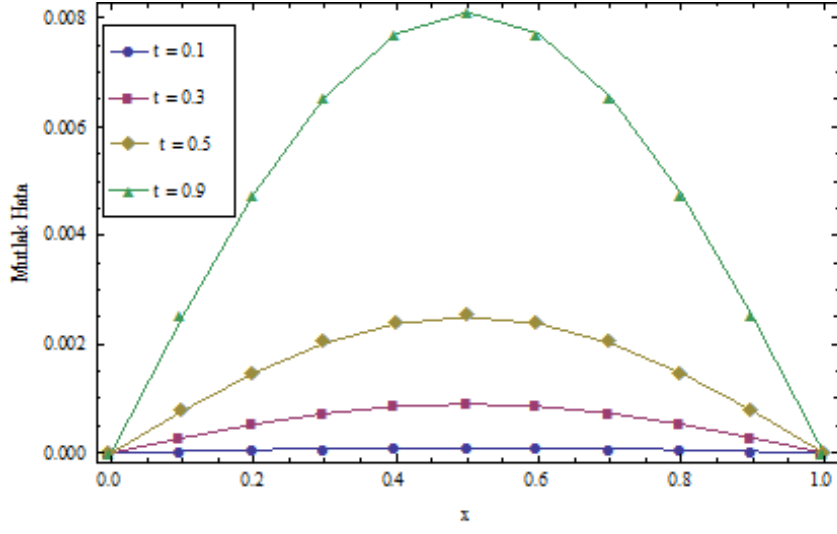
Şekil 5.26. $u(x,t)$ nin 20 terimi için $\hbar = 1/10^8$, $\gamma_1 = 0.8$ ve $\gamma_2 = 0.3$ değerlerindeki Mutlak Hata



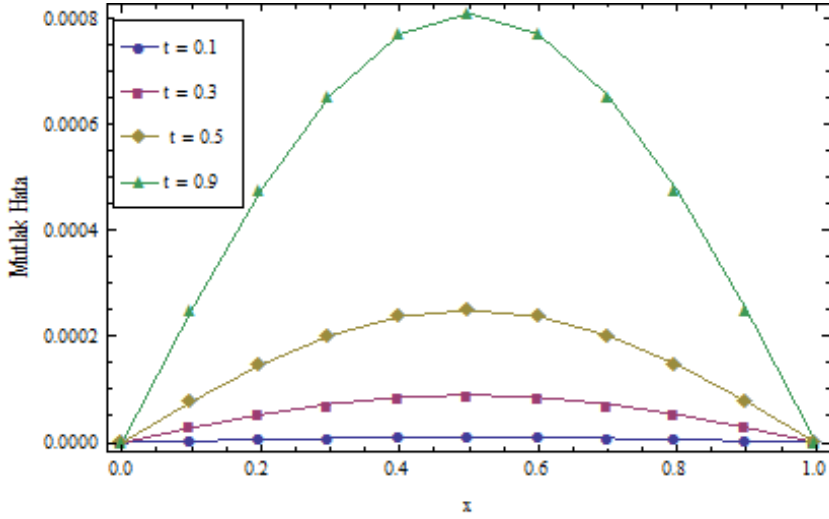
Şekil 5.27. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$, $\gamma_1 = 0.25$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata



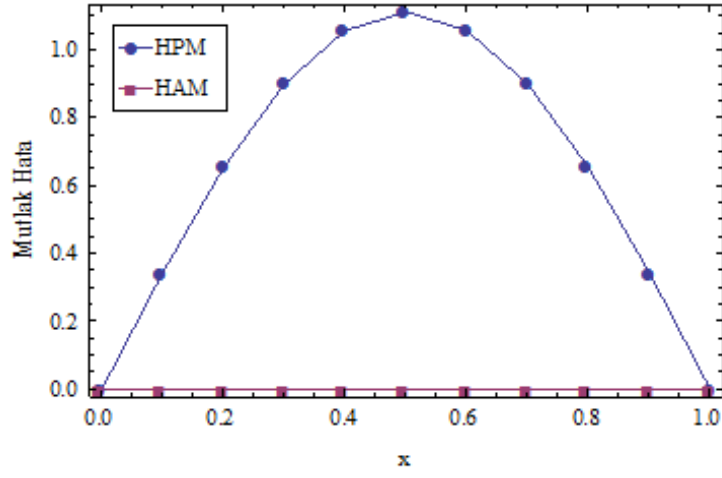
Şekil 5.28. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.001$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata



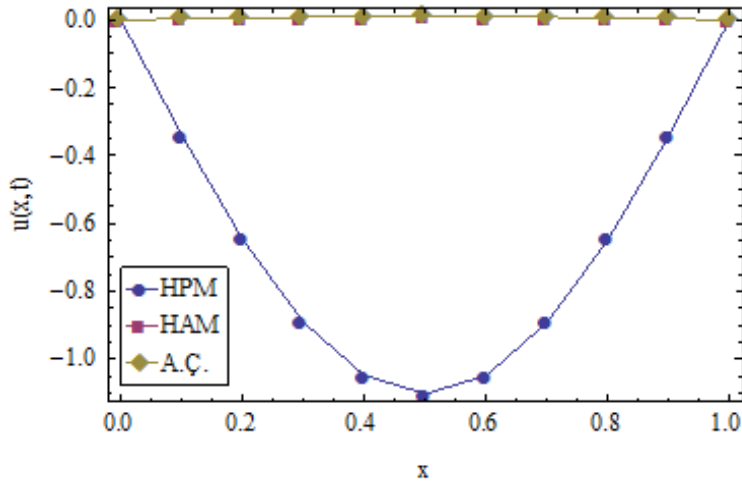
Şekil 5.29. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.0001$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata



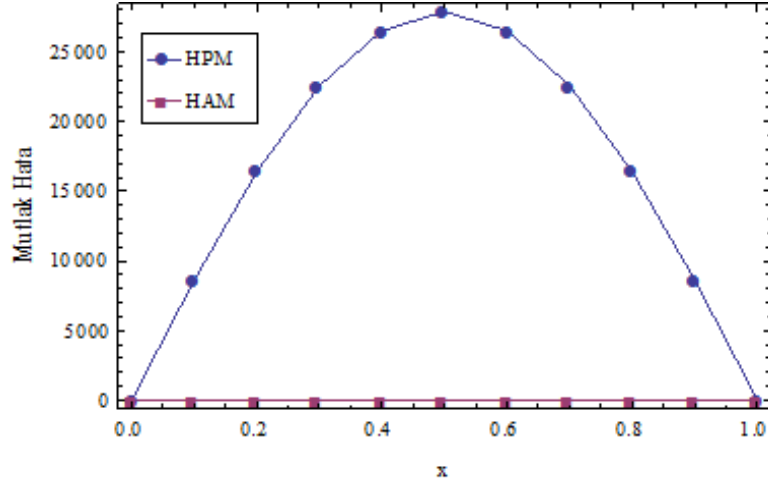
Şekil 5.30. $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = 0.0001$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata



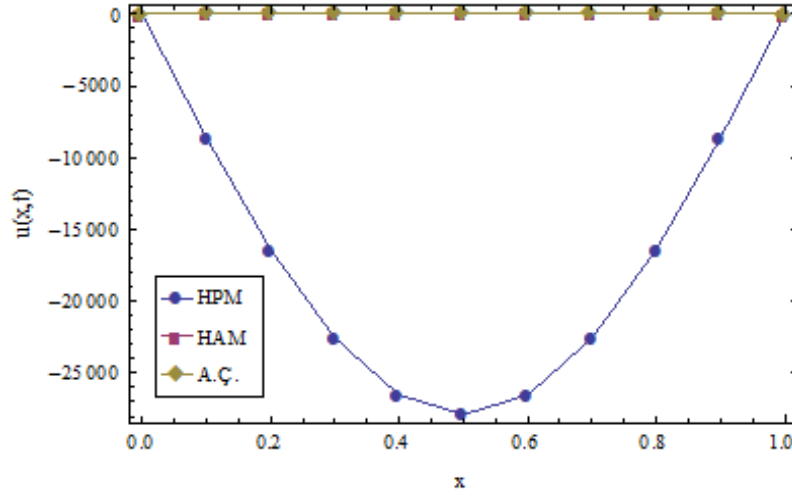
Şekil 5.31. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = -0.0395$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki Mutlak Hata



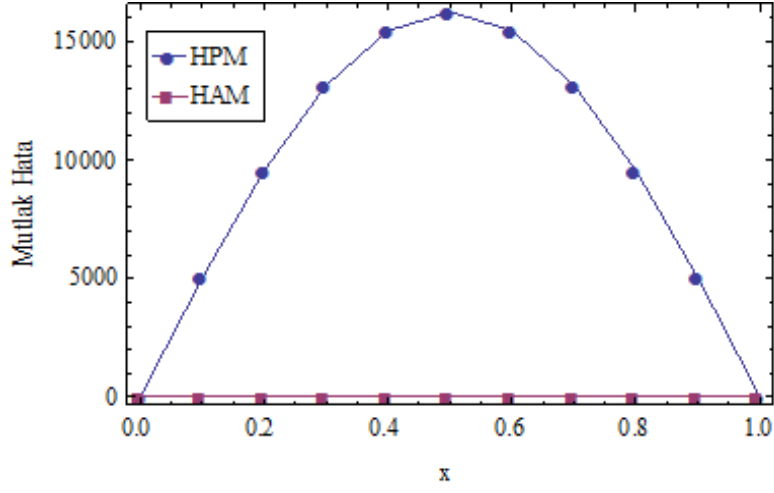
Şekil 5.32. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 5 terimi için $\hbar = -0.0395$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm



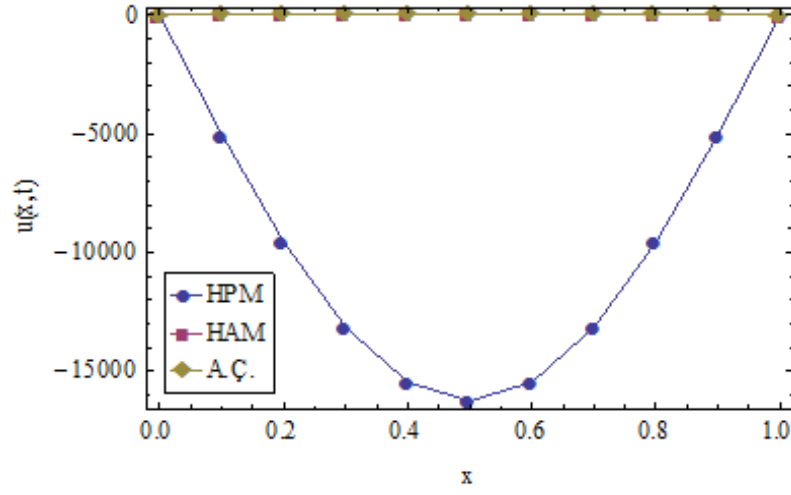
Şekil 5.33. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.004$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata



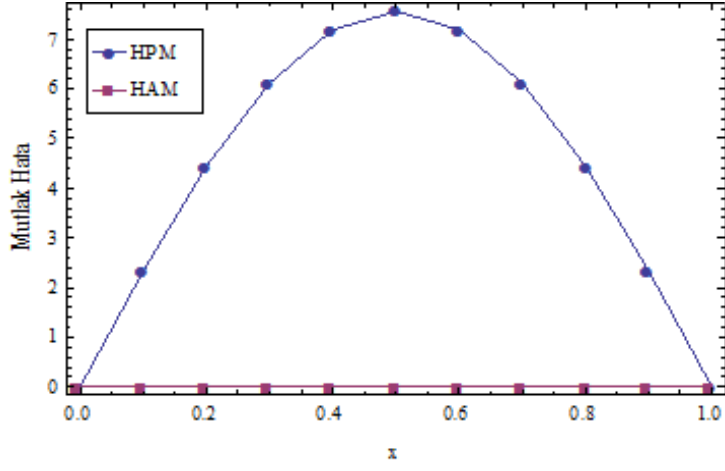
Şekil 5.34. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.004$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm



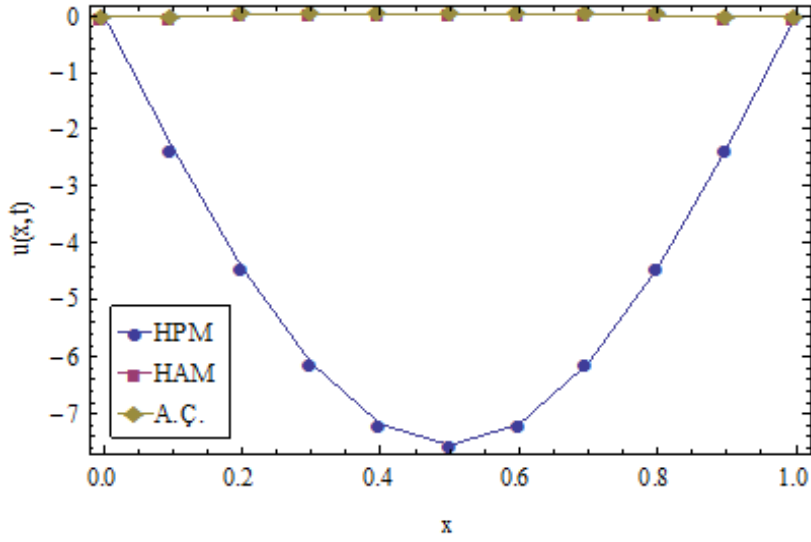
Şekil 5.35. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0043$, $\gamma_1 = 0.25$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata



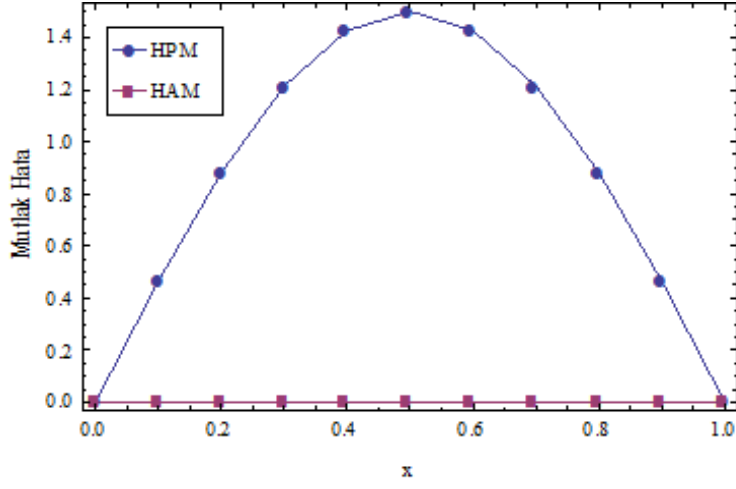
Şekil 5.36. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0043$, $\gamma_1 = 0.25$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm



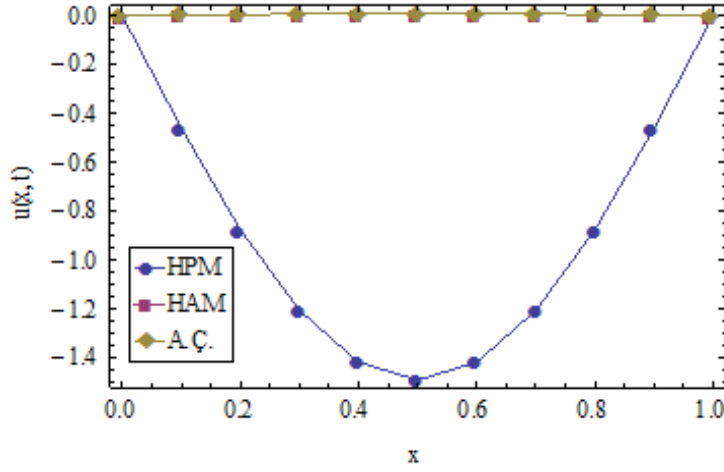
Şekil 5.37. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0108$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki Mutlak Hata



Şekil 5.38. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0108$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.25$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm



Şekil 5.39. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0129$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki Mutlak Hata



Şekil 5.40. $t = 0.1$ noktasında $u(x, t)$ nin 10 terimi için $\hbar = -0.0129$, $\gamma_1 = 0.75$ ve $\gamma_2 = 0.75$ değerlerindeki HPM, HAM ve analitik çözüm

5.3 SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde nöronal dinamikleri modellemek için kullanılan ve γ_1, γ_2 gibi iki Riemann-Liouville kesirli türevi bulunduran başlangıç ve sınır şartlı (5.4)-(5.6) Kablo denklemini göz önüne aldık. Bu denklemin yaklaşık çözümünü bir yarı-analitik yöntem olan Homotopi Analiz yöntemiyle bulmaya çalıştık. Kesirli kısmi türevli denklemlerin analitik çözümünü bulmak çoğu zaman mümkün değildir. Bu nedenle bu tip denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması önemlidir. Ayrıca bu bölümde göz önüne aldığımız kesirli Kablo denkleminin yarı-analitik yöntemlerle çözümü yapılmamış olup, yalnız sonlu farklar yöntemiyle yaklaşık çözümü bulunmuştur.

Homotopi Analiz metoduyla (HAM) elde ettiğimiz sonuçları Tablo 5.1-5.6 ve Şekil 5.31-5.40 ile verdik. Şekil 5.3-5.7' de çözüm serisinin farklı sayıda terimleri alınarak $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin hangi aralıkta değiştiği belirlendi. $\hbar \neq 0$ yardımcı parametresinin x ve t değerlerine göre uygun seçilmesiyle yakınsak sonuçlar elde edilebildiğini gösterdik.

Şekil 5.8' de $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$, Şekil 5.9' da $\gamma_1 = 0.25, \gamma_2 = 0.75$, Şekil 5.10' da $\gamma_1 = 0.75, \gamma_2 = 0.25$, Şekil 5.11' de $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.75$ ve Şekil 5.12' de $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.3$ kesirli türev mertebeleri için $\hbar$ yakınsaklık aralığını x ve t ' nin farklı değerleri için belirledik.

Tablo 5.1-5.5' de γ_1, γ_2 ve $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin çeşitli değerleri için Homotopi Analiz metodu (HAM), Homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ve Analitik çözüm (A.Ç) arasında bir karşılaştırma sunduk. Burada $t = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 1$ alındı. Tablolardan da görüldüğü gibi x değeri bire yaklaştıkça HPM' nin analitik çözümünden uzaklaştığı buna rağmen HAM' ın analitik çözümle yakın sonuçlar verdiği ve mutlak hatanın 10^{-4} civarında olduğu belirlendi.

Tablo 5.6' da ise Kapalı sayısal Metod [67], Kapalı kompakt sonlu farklar yöntemi [68] ve HAM ile elde edilen mutlak hata görülmektedir. Burada $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ ve $0.1 \leq t \leq 1.0$ olarak alındı. Bu tablodan da görüldüğü gibi $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin sıfıra yakın bir değer alınması durumunda diğer iki yöntemle göre daha iyi bir sonuç elde edildi.

Şekil 5.13-5.17' de ise $\hbar$ parametresinin farklı değerleri için elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün γ_1, γ_2 kesirli mertebeden türevler ve t zamanının bazı değerleri için karşılaştırmalar sunuldu. Bu şekillere göre $t = 0.1$ ve $\hbar$ ' ın sıfıra yakın değerlerinde analitik ve yaklaşık çözümün birbirine çok yakın olduğu belirlendi.

Şekil 5.18-5.22' de ise yaklaşık ve analitik çözümün γ_1, γ_2 ve $\hbar$ sabitlerinin bazı değerleri için üç boyutlu resmi çizildi. Bu resimlerin $\hbar$ parametresinin sıfıra yakın değerleri için

yaklaşık çözümün analitik çözüme yakın olduğu görüldü.

Şekil 5.31-5.40' da ise $0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$ kesirli mertebeden türev değerleri ve $\hbar \neq 0$ yardımcı parametresinin bazı değerleri için $t = 0.1$ olması durumunda HPM, HAM ve A.Ç. arasında bir karşılaştırma yapıldı. Görüldüğü gibi HAM ve A.Ç.' ün hemen hemen birbiri ile çakıştığı, HPM' nin ise A.Ç.' den uzaklaştığı tespit edildi.

Sonuç olarak, γ_1 ve γ_2 gibi iki kesirli Riemann-Liouville türevi bulunduran Kablo denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için HAM tavsiye edilebilir bir yöntemdir. Bunun için elde edilen tablo ve şekillere bakmak yeterlidir. Elde edilen yaklaşık çözümler yadımıyla karmaşık problemin fiziksel yorumunu yapmak mümkün olabilir.

Özellikle son yıllarda yapılan çalışmalarda HAM ve HPM arasında bir karşılaştırma yapıldı. Bizde kesirli Kablo denklemi için bu karşılaştırmayı yaptık ve bu iki yöntem arasında;

HAM' da $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi sayesinde bağımsız değişkenlerin hemen hemen her değeri için analitik çözüme yakın sonuçlar elde edilmesine rağmen HPM' de bağımsız değişkenlerin küçük veya büyük bazı değerlerinde yaklaşık çözümün ıraksadığı görüldü. Yani HAM kullanılarak analitik çözüme hızlı yakınsayan sonuçlar bulmak mümkündür.

HAM, HPM' nin bir genel hali olup, HAM' da $\hbar$ yardımcı parametresinin -1 alınmasıyla HPM elde edildi.

HAM' da başlangıç ve sınır şartlarını kullanarak başlangıç adımını belirleyebilmemize rağmen HPM' de böyle bir kolaylık yoktur.

HAM' da $\hbar$ yakınsaklık parametresine, $H(t)$ yardımcı fonksiyonuna ve başlangıç adımın uygun seçilmesine bağlı olmasına rağmen, HPM başlangıç adımına ve kurulan homotopiye bağlıdır.

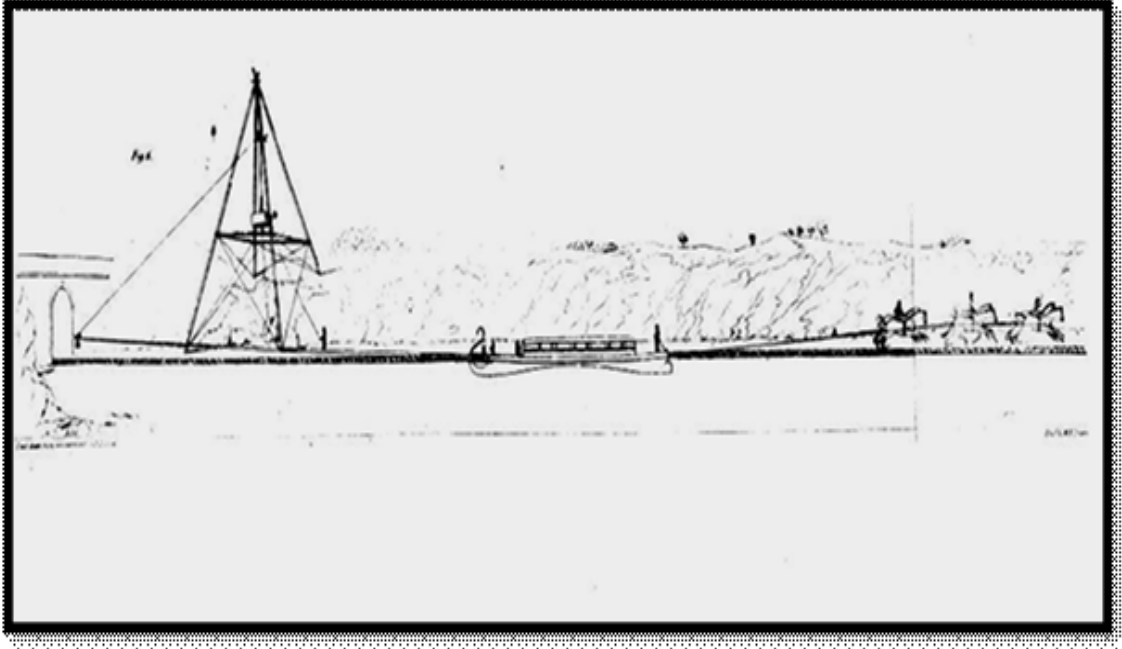
HAM' da genelleştirilmiş Taylor serisine dayanan bir yöntem olup, HPM pertürbasyon serisini kullanarak yaklaşık çözümü hesaplayan bir metottur.

6. BÖLÜM

Bu bölümde zaman kesirli genelleştirilmiş Hirota Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi göz önüne alındı ve 4. bölümde verilen HAM ile sayısal çözümleri elde edildi.

6.1 ZAMAN KESİRLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ HIROTA-SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİ

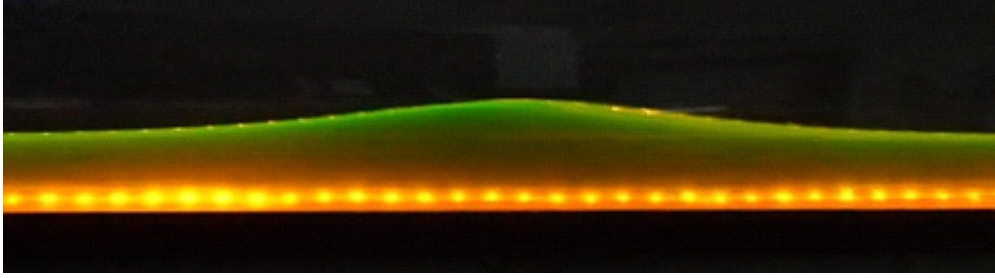
KdV denklemi olarak bilinen denklem geçen y.y dan beri var olmasına rağmen fiziksel özellikleri tam olarak elde edilememiştir. KdV denklemi 1834' de İskoç bilim adamı John Scott Russell (1808-1882) tarafından Edinburg-Glasgow kanalında sığ sularda şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgasında gözlemlenmiş "tek dalgalar (solitary wave)" için en basit ve faydalı modellerden biridir [70].



Şekil 6.1. Edinburgh-Glasgow Kanalı (1834)

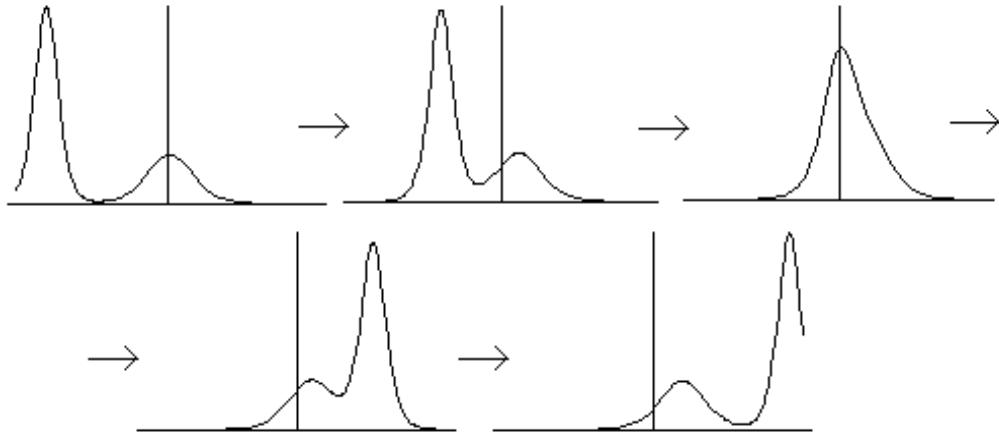
Russell bu dalgayı "büyük dalga kayması" olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844' de "Report on wave" isimli yayınında vermiştir. Bu makalede, tek dalgaların periyodik bir dalga olmayıp şeklini koruyan, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş bir biçimde yayılan bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bu çalışmadan 50 yıl kadar sonra 1885' de Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) ve öğrencisi olan Gustav de Vries (1866-1934) adındaki iki Hollandalı bilim adamı, Scott tarafından yapılan gözlemlerin bir açıklamasını veren matematiksel bir yapı ortaya koyarak KdV denklemini elde etmişlerdir [70]-[71]. Martin Kruskal ve Norman Zabusky adındaki iki bilim adamıda, dalga hareketine benzer

tekrarlamaları KdV denklemleri ile oluşmuş bir sistemle gözlemlemişlerdir [72]. Bu tek dalganın önemli özelliklerinden biride birbirleriyle çarpışmaları ve bu çarpışma hareketi sonucunda şekil ve biçimlerini korumalarıdır. Buda tek dalgalar için KdV denkleminin elastik olduğunu gösterir.



Şekil 6.2. Tek dalga (solitary wave)

Dalganın doğal yapısından dolayı Zabusky ve Kruskal bu tek dalga' yı "soliton" olarak adlandırmışlardır. Soliton kavramı ilk olarak Fermi, Pasta, Ulam sistemindeki modelleme ile anlatılmıştır [73]. Buna rağmen soliton kavramının kesin bir tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümünü ilişkilendirilebilir. KdV denklemleri ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü genellikle tek dalga olarak kullanılır. Eğer birden fazla soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Bununla birlikte bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonları bulundurmazken, KdV gibi denklemler solitonlar olan tek dalgalara sahiptir.



Şekil 6.3. Solitonların hareketinin bir şekli

KdV denkleminin çözümünde solitonlar dağılma özelliği göstermezler. Bununla birlikte genelleştirilmiş Kortewe-de Vries denklemi (GKdV)

$$u_t + \varepsilon u^n u_x + u_{xxx} = 0$$

şeklinde verilebilir [70]. Burada $u^n u_x$ ve u_{xxx} terimleri sırasıyla iletim ve dağılma terimlerini gösterir. GKdV denkleminin solitonları lineer olmayan iletim ve dağılma terimleri arasındaki ilişkiyle oluşur ve oluşan solitonlar karşılıklı etkileşimlerine rağmen yapılarını korurlar. Lineer olmayan iletim terimi dalga formunun şeklini oluştururken, dağılma terimide hızını oluşturur. Bu iki terimin karşılıklı etkileşimi ile sabit bir dalga formu yani tek dalga (solitary wave) oluşur.

Daha sonraki yıllarda Gardner ve Hirota gibi bilim adamları her hangi bir pozitif n tamsayısı için n -soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin, analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır [74]-[75]. Bu analitik metod çalışmalarından beri çeşitli doğrusal olmayan dağılma sahip sistemler öne sürülmüştür [76]. Bu sistemler arasında farklı modlara sahip bir kaç dalganın birleşimi ile oluşan sistemler oldukça ilginçtir. Ses dalgaları ile Langmuir' in etkileşimleri açıklayan denklemi bu duruma bir örnektir [76]. Birleştirilmiş KdV denklemi (cKdV) farklı dağılım bağıntıları ile iki uzun dalganın etkileşimini tanımlayan bir sistemdir. Eğer bu iki uzun dalgadan birinin diğeri üzerinde etkisi yoksa oluşan sistemdeki ikinci denklem bilinen KdV denklemi olur. Bununla birlikte, ilk denklemin varlığı solitonları etkiler ve çözümler sonucunda görülür ki KdV solitonunun hızı ilk denkleme bağlıdır. Eğer iki uzun dalganın dağılım ilişkileri arasında özel bir bağıntı söz konusu ise birleştirilmiş KdV denklemi iki veya üç soliton çözüme sahiptir. R. Hirota ve J. Satsuma yaptıkları öncü çalışmada birleştirilmiş KdV denklemlerini

$$u_t - a(u_{xxx} + 6uu_x) = 2b\phi\phi_x, \quad (6.1)$$

$$\phi_t + \phi_{xxx} + 3u\phi_x = 0 \quad (6.2)$$

şeklinde tanımlamışlardır [76]. Burada a ve b keyfi sabitlerdir. (6.1) denklemindeki $2b\phi\phi_x$ terimi $w = ak^3$ lineer dağılım ilişkisi ile KdV dalga sistemindeki bir kuvvet terimi gibidir. Hirota ve Satsuma çalışmalarında ϕ' nin etkisinin yokluğunda (6.1) denkleminin bilinen KdV denklemine indirgendığını ve soliton çözümünde

$$u = 2P^2 \sec h^2 P(x + 4aP^2 t) \quad (6.3)$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir [77]. Buna rağmen, ϕ' nin varlığı KdV solitonunun

davranışını etkiler ve denklem

$$\phi = \pm \sqrt{-6P^4/b} \sec hP(x - P^2t) \quad (6.4)$$

şeklindeki bir soliton çözümü bulundurur [77]. Bu aşama (6.2) denklemi ile belirlenir. Hirota ve Satsuma (6.3) ve (6.4) denklemlerini cKdV' nin solitonu olarak adlandırmışlardır [77]. (6.1) ve (6.2) denklemlerinin $a = 1/2$ için integrallenebilir olduğunu göstermişlerdir [76].

(6.1) ve (6.2) denklemlerinin genelleştirilmesiyle elde edilen

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} - 3uu_x + 3(vw)_x, \\ v_t &= -v_{xxx} + 3uv_x, \\ w_t &= -w_{xxx} + 3uw_x \end{aligned} \quad (6.5)$$

denklem sistemi genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi olarak adlandırılır [78]. (6.5) HS-birleştirilmiş KdV denklemi analitik ve yaklaşık çözümleri birçok farklı yöntem ile elde edilmiştir. Örneğin; (G'/G) metodu [79], $\sec_q - \tanh_q$ metodu [80], Diferensiyel transform metodu [81], Jacobi eliptik fonksiyonlar ile periyodik çözümler [82], Adomian ayrışım metodu [83], homotopi pertürbasyon metodu [84], homotopi analiz metodu [85], Jacobi eliptik açılım metodu [86], v.b.

Bu bölümde (6.5) ile verilen genelleştirilmiş HS-birleştirilmiş KdV denkleminin zaman kesirli kuvvetlere sahip durumu göz önüne alınacak.

6.2 HAM' ın ZAMAN KESİRLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ HIROTA-SATSUMA BİRLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu kısımda

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{\beta - 2k^2}{3} + 2k^2 \tanh^2(kx), \\ v(x, 0) &= -\frac{4k^2 c_0(\beta + k^2)}{3c_1^2} + \frac{4k^2(\beta + k^2) \tanh(kx)}{3c_1}, \\ w(x, 0) &= c_0 + c_1 \tanh(kx) \end{aligned} \quad (6.6)$$

başlangıç şartları ile verilen

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha u &= \frac{1}{2}u_{xxx} - 3uu_x + 3(vw)_x, \\ {}^C D_t^\alpha v &= -v_{xxx} + 3uv_x, \\ {}^C D_t^\alpha w &= -w_{xxx} + 3uw_x \end{aligned} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (6.7)$$

zaman kesirli genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleşmiş KdV denklemini göz önüne alalım [78]-[87]. Burada ki k , c_0 , $c_1 \neq 0$ ve β keyfi sabitlerdir. (6.6) ve (6.7) zaman kesirli HS-birleşmiş KdV denkleminin analitik çözümü $\alpha = 1$ durumunda, $c = -\beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\beta - 2k^2}{3} + 2k^2 \tanh^2(k(x - ct)), \\ v(x, t) &= -\frac{4k^2 c_0(\beta + k^2)}{3c_1^2} + \frac{4k^2(\beta + k^2)}{3c_1} \tanh(k(x - ct)), \\ w(x, t) &= c_0 + c_1 \tanh(k(x - ct)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

şeklindedir [78]-[88].

(6.7) denklem sisteminin yardımcı lineer operatörü

$$L[\phi_i(x, t, q)] = {}^C D_t^\alpha [\phi_i(x, t, q)], \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.9)$$

şeklinde alabiliriz. Lineer operatör $L[c_i] = 0$ özelliğine sahiptir.

Lineer olmayan N operatörü ise,

$$\begin{aligned} N_1[\phi_1(x, t, q)] &= {}^C D_t^\alpha \phi_1(x, t, q) - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1(x, t, q)}{\partial x^3} + 3\phi_1(x, t, q) \frac{\partial \phi_1(x, t, q)}{\partial x} \\ &\quad - 3\phi_2(x, t, q) \frac{\partial \phi_3(x, t, q)}{\partial x} - 3 \frac{\partial \phi_2(x, t, q)}{\partial x} \phi_3(x, t, q), \\ N_2[\phi_2(x, t, q)] &= {}^C D_t^\alpha \phi_2(x, t, q) + \frac{\partial^3 \phi_2(x, t, q)}{\partial x^3} - 3\phi_1(x, t, q) \frac{\partial \phi_2(x, t, q)}{\partial x}, \\ N_3[\phi_3(x, t, q)] &= {}^C D_t^\alpha \phi_3(x, t, q) + \frac{\partial^3 \phi_3(x, t, q)}{\partial x^3} - 3\phi_1(x, t, q) \frac{\partial \phi_3(x, t, q)}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.10)$$

olarak tanımlanır.

$\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere yüksek mertebeden deformasyon denklemi (4.28) denkleminde hareketle;

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)), \quad (6.11)$$

şeklinde olduğunu 4. bölümden biliyoruz. (6.11) denkleminde $H(t)$ yardımcı fonksiyonu $H(t) = 1$ olarak alınacaktır.

(6.11) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin başlangıç şartı,

$$u_m(x, 0) = 0, \quad v_m(x, 0) = 0, \quad w_m(x, 0) = 0 \quad (6.12)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}
R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) &= {}^C D_t^\alpha u_{m-1}(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} + 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t) \frac{\partial u_{m-1-i}(x, t)}{\partial x} \\
&\quad - 3 \sum_{i=0}^{m-1} \left(v_i(x, t) \frac{\partial w_{m-1-i}(x, t)}{\partial x} + w_i(x, t) \frac{\partial v_{m-1-i}(x, t)}{\partial x} \right) \\
R_m(\vec{v}_{m-1}(x, t)) &= {}^C D_t^\alpha v_{m-1}(x, t) + \frac{\partial^3 v_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} - 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t) \frac{\partial v_{m-1-i}(x, t)}{\partial x}, \quad (6.13) \\
R_m(\vec{w}_{m-1}(x, t)) &= {}^C D_t^\alpha w_{m-1}(x, t) + \frac{\partial^3 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} - 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t) \frac{\partial w_{m-1-i}(x, t)}{\partial x}
\end{aligned}$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (6.14)$$

şeklindeir.

Böylece (6.11) yüksek mertebeden deformasyon denkleminde (6.9) yardımcı lineer operatörü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
u_m(x, t) &= \chi_m u_{m-1}(x, t) + \hbar D_t^{-\alpha} (R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t))), \\
v_m(x, t) &= \chi_m v_{m-1}(x, t) + \hbar D_t^{-\alpha} (R_m(\vec{v}_{m-1}(x, t))), \\
w_m(x, t) &= \chi_m w_{m-1}(x, t) + \hbar D_t^{-\alpha} (R_m(\vec{w}_{m-1}(x, t))),
\end{aligned} \quad (6.15)$$

bulunur.

(3.64) formülünden yararlanılarak

$$u_m(x, t) = D_t^{-\alpha} {}^C D_t^\alpha u(x, t) = u(x, t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0, \quad n-1 < \alpha < n \quad (6.16)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik (6.15) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
u_m(x, t) = & (\chi_m + \hbar)u_{m-1}(x, t) - \hbar u_{m-1}(x, 0) + \hbar \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_{m-1}(x, \tau)}{\partial x^3} \right. \\
& + 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, \tau) \frac{\partial u_{m-1-i}(x, \tau)}{\partial x} - 3 \sum_{i=0}^{m-1} (v_i(x, \tau) \frac{\partial w_{m-1-i}(x, \tau)}{\partial x} \\
& \left. + w_i(x, \tau) \frac{\partial v_{m-1-i}(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau, \tag{6.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_m(x, t) = & (\chi_m + \hbar)v_{m-1}(x, t) - \hbar v_{m-1}(x, 0) + \hbar \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^3 v_{m-1}(x, \tau)}{\partial x^3} \right. \\
& \left. - 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, \tau) \frac{\partial v_{m-1-i}(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_m(x, t) = & (\chi_m + \hbar)w_{m-1}(x, t) - \hbar w_{m-1}(x, 0) + \hbar \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^3 w_{m-1}(x, \tau)}{\partial x^3} \right. \\
& \left. - 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, \tau) \frac{\partial w_{m-1-i}(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau,
\end{aligned}$$

olur. (6.6) ve (6.14) ifadeleri (6.17) denkleminde göz önüne alınırsa zaman kesirli genelleştirilmiş HS-birleşmiş KdV denkleminin çözüm elemanları

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \frac{\beta - 2k^2}{3} + 2k^2 \tanh^2(kx), \\
u_1(x, t) &= -4\hbar k^3 \beta \sec h^2(kx) \tanh(kx) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\
u_2(x, t) &= -4\hbar(1 + \hbar)k^3 \beta \sec h^2(kx) \tanh(kx) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&\quad - 4^{1-\alpha} \hbar^2 k^4 \sqrt{\pi} \beta^2 \sec h^4(kx) (-2 + \cosh(2kx)) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}, \\
u_3(x, t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} 2^{1-2\alpha} \hbar k^3 \beta \sec h^4(kx) (-\hbar k \beta (t^{2\alpha} \Gamma(\alpha) (-8(1 + \hbar) \sqrt{\pi} \\
&\quad \cosh^2(kx) (-2 + \cosh(2kx) \Gamma(\alpha + 1) + \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} 4\hbar k \sqrt{\pi} t^\alpha (-104k^2 + \beta + 40k^2 \\
&\quad \cosh(2kx) - \beta \cosh(4kx) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(2\alpha + 1) \sinh(kx) + \dots, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_0(x, t) &= -\frac{4k^2 c_0(\beta + k^2)}{3c_1^2} + \frac{4k^2(\beta + k^2) \tanh(kx)}{3c_1}, \\
v_1(x, t) &= -\frac{4\hbar k^3 \beta(\beta + k^2) \sec h^2(kx)}{3c_1^2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\
v_2(x, t) &= -\frac{4\hbar(1 + \hbar)k^3 \beta(\beta + k^2) \sec h^2(kx)}{3c_1^2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&\quad - \frac{8\hbar^2 k^4 \beta^2(k^2 + \beta)(4^{-\alpha} \sqrt{\pi} t^{2\alpha} \Gamma(\alpha)) \sec h^2(kx) \tanh(kx)}{1} \\
&\quad \frac{1}{3\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1) c_1 \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}, \\
v_3(x, t) &= -\frac{1}{3\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) c_1} 2^{1-2\alpha} \hbar k^3 \beta(k^2 + \beta) \sec h^2(kx) (\hbar k \beta \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\
&\quad t^{2\alpha} \Gamma(\alpha) (-3(4^{2+\alpha} \hbar k^3 t^\alpha \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\alpha + 1) \sinh^2(kx) + \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1) (\hbar k t^\alpha (-\dots, \\
&\quad \vdots \\
w_0(x, t) &= c_0 + c_1 \tanh(kx), \\
w_1(x, t) &= -\hbar k \beta \sec h^2(kx) c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\
w_2(x, t) &= -\hbar(1 + \hbar) k \beta \sec h^2(kx) c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&\quad - \frac{2\hbar^2 k^2 \beta^2 4^{-\alpha} \sqrt{\pi} \sec h^2(kx) c_1 \tanh(kx)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \frac{t^{2\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}, \\
w_3(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} 2^{1-2\alpha} \hbar k \beta \sec h^2(kx) c_1 (\hbar k \beta \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{2\alpha} \Gamma(\alpha) \\
&\quad (-3(4^{2+\alpha} \hbar k^3 t^\alpha \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\alpha + 1) \sinh^2(kx) + \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1) (\hbar k t^\alpha (-48k^2 \\
&\quad -3\beta + (48k^2 - 2\beta) \cosh(2kx) + \beta \cosh(4kx)) \Gamma(2\alpha + 1) + 4(1 + \hbar) \cosh^3(kx) + \dots, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Sonuçta;

$$\begin{aligned}
&u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots, \\
&v_0(x, t), v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t), \dots, \\
&w_0(x, t), w_1(x, t), w_2(x, t), w_3(x, t), \dots
\end{aligned}$$

terimlerinden oluşan

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t), \\ & \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, t), \\ & \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t), \end{aligned} \tag{6.18}$$

çözüm serileri elde edilmiş olur.

Teorem 6.2.1 (Yakınsaklık Teoremi)

$u_m(x, t)$, $v_m(x, t)$ ve $w_m(x, t)$ ifadeleri (6.15) yüksek mertebeden deformasyon denklemleri ile elde edilmek üzere, $u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)$, $v(x, t) = v_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, t)$ ve $w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t)$ serileri yakınsak ise (6.6) ve (6.7) zaman kesirli genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminin çözümü olur.

İspat

$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t)$, $\sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, t)$ ve $\sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t)$ serileri yakınsaksa,

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t), \\ S_2(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, t), \\ S_3(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x, t) &= 0, \end{aligned}$$

olur. (6.15)' den

$$\begin{aligned} \hbar \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] \\ &= L[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} (u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t))] \\ &= L[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)] = 0, \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
\hbar \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{v}_{m-1}(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} L[v_m(x, t) - \chi_m v_{m-1}(x, t)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} L[v_m(x, t) - \chi_m v_{m-1}(x, t)] \\
&= L[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} (v_m(x, t) - \chi_m v_{m-1}(x, t))] \\
&= L[\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t)] = 0,
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
\hbar \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{w}_{m-1}(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} L[w_m(x, t) - \chi_m w_{m-1}(x, t)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} L[w_m(x, t) - \chi_m w_{m-1}(x, t)] \\
&= L[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} (w_m(x, t) - \chi_m w_{m-1}(x, t))] \\
&= L[\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x, t)] = 0
\end{aligned} \tag{6.21}$$

şeklinde bulunur. $\hbar \neq 0$ olduğundan $\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) = 0$, $\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{v}_{m-1}(x, t)) = 0$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{w}_{m-1}(x, t)) = 0$ olur. Bu üç ifadeden hareketle (6.13) ifadesindeki denklemler göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} [D_t^\alpha u_{m-1}(x, t) - \frac{1}{2}(u_{m-1}(x, t))_{xxx} + 3 \sum_{i=0}^{m-1} (u_i(x, t)(u_{m-1-i}(x, t))_x \\
&\quad - v_i(x, t)w_{m-1-i}(x, t) - w_i(x, t)v_{m-1-i}(x, t))] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} D_t^\alpha u_{m-1}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (u_{m-1}(x, t))_{xxx} + 3 \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{i=0}^{m-1} (u_i(x, t)(u_{m-1-i}(x, t))_x \\
&\quad - v_i(x, t)(w_{m-1-i}(x, t))_x - w_i(x, t)(v_{m-1-i}(x, t))_x] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} D_t^\alpha u_m(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (u_m(x, t))_{xxx} + 3 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=i+1}^{\infty} [(u_i(x, t)(u_{m-1-i}(x, t))_x \\
&\quad - v_i(x, t)(w_{m-1-i}(x, t))_x - w_i(x, t)(v_{m-1-i}(x, t))_x] \\
&= D_t^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) - \frac{1}{2} (\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t))_{xxx} + 3 (\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) \sum_{m=i+1}^{\infty} (u_{m-1-i}(x, t))_x \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x, t) \sum_{m=i+1}^{\infty} (w_{m-1-i}(x, t))_x - \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x, t) \sum_{m=i+1}^{\infty} (v_{m-1-i}(x, t))_x) \\
&= D_t^\alpha S_1(x, t) - \frac{1}{2} (S_1(x, t))_{xxx} + 3(S_1(x, t)(S_1(x, t))_x - S_2(x, t)(S_3(x, t))_x \\
&\quad - S_3(x, t)(S_2(x, t))_x) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.22}$$

olmak üzere, (6.19) ve (6.22) denklemlerinden

$$S_1(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, 0) = u_0(x, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m-1}(x, 0) = f(x, t)$$

elde edilir. Dolayısıyla $u(x, t)$ için teorem ispatlanmış olur.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{v}_{m-1}(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} [D_t^\alpha v_{m-1}(x, t) + (v_{m-1}(x, t))_{xxx} - 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t)(v_{m-1-i}(x, t))_x] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} D_t^\alpha v_{m-1}(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (v_{m-1}(x, t))_{xxx} - 3 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t)(v_{m-1-i}(x, t))_x \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D_t^\alpha v_m(x, t) + \sum_{m=0}^{\infty} (v_m(x, t))_{xxx} - 3 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=i+1}^{\infty} u_i(x, t)(v_{m-1-i}(x, t))_x \\ &= D_t^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, t) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, t) \right)_{xxx} - 3 \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) \sum_{m=i+1}^{\infty} (v_{m-1-i}(x, t))_x \\ &= D_t^\alpha S_2(x, t) + (S_2(x, t))_{xxx} - 3S_1(x, t)(S_2(x, t))_x \tag{6.23} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere, (6.19) ve (6.23) denklemlerinden

$$S_2(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, 0) = v_0(x, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m-1}(x, 0) = g(x, t)$$

bulunur ve $v(x, t)$ için teorem ispatlanmış olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{w}_{m-1}(x, t)) &= \sum_{m=1}^{\infty} [D_t^\alpha w_{m-1}(x, t) + (w_{m-1}(x, t))_{xxx} - 3 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t)(w_{m-1-i}(x, t))_x] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} D_t^\alpha w_{m-1}(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (w_{m-1}(x, t))_{xxx} - 3 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t)(w_{m-1-i}(x, t))_x \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D_t^\alpha w_m(x, t) + \sum_{m=0}^{\infty} (w_m(x, t))_{xxx} - 3 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=i+1}^{\infty} u_i(x, t)(w_{m-1-i}(x, t))_x \\ &= D_t^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) \right)_{xxx} - 3 \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) \sum_{m=i+1}^{\infty} (w_{m-1-i}(x, t))_x \\ &= D_t^\alpha S_3(x, t) + (S_3(x, t))_{xxx} - 3S_1(x, t)(S_3(x, t))_x \tag{6.24} \\ &= 0 \end{aligned}$$

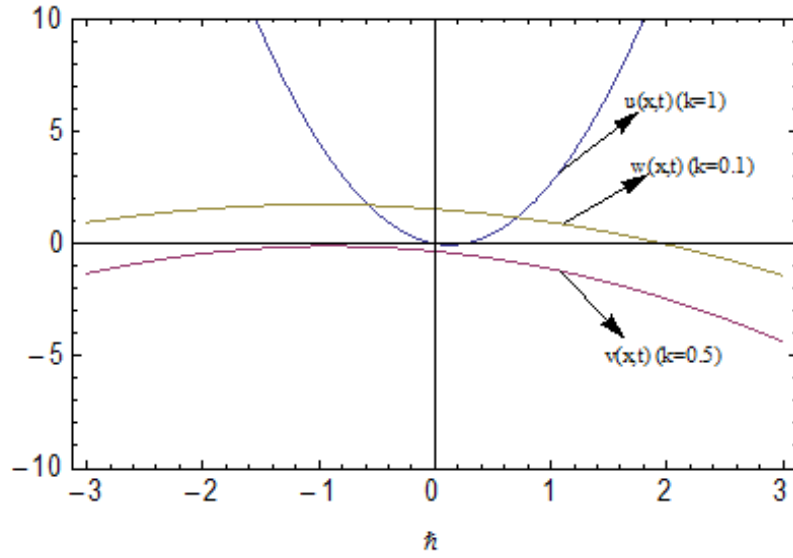
ifadesi elde edilir. (6.19) ve (6.24) den

$$S_3(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, 0) = w_0(x, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} w_{m-1}(x, 0) = h(x, t)$$

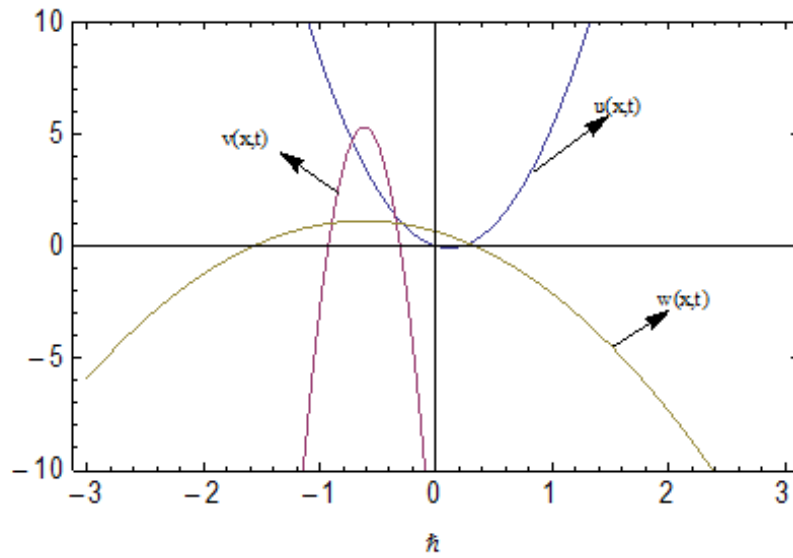
bulunur. Teorem $w(x, t)$ içinde ispatlanmış olur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

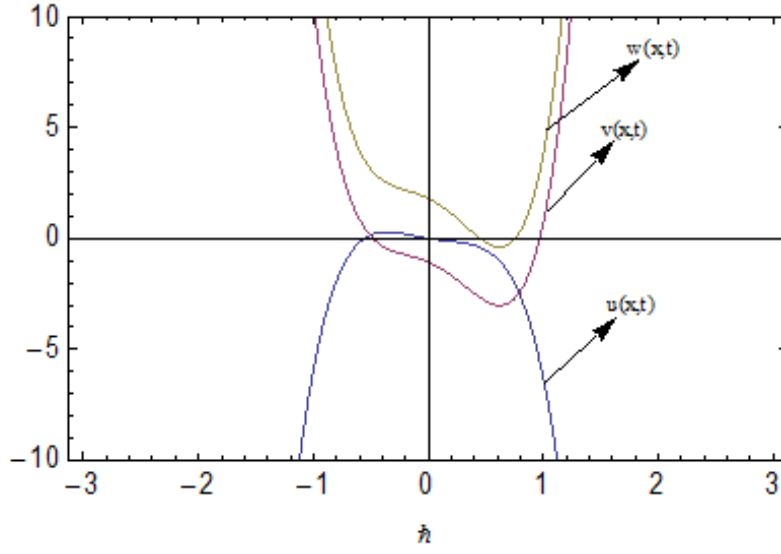
(6.7) denklem sisteminin homotopi analiz metodu ile elde ettiğimiz çözüm serilerini kullanırsak aşağıdaki tablo ve şekiller elde edilir.



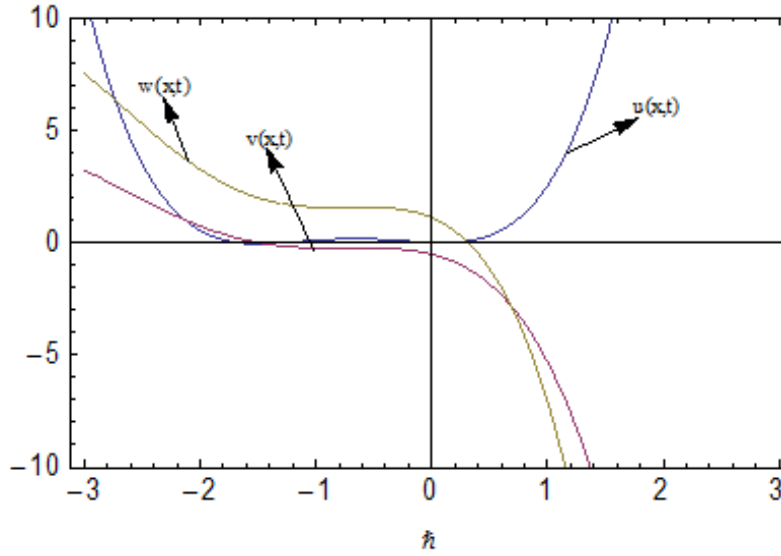
Şekil 6.4. $\alpha = 0.5$ durumunda $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ ' nin 3 teriminin $\hbar$ eğrisi



Şekil 6.5. $\alpha = 0.75$ durumunda $k = \beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x, t)$, $v(x, t)$ ve $w(x, t)$ ' nin 3 teriminin $\hbar$ eğrisi



Şekil 6.6. $\alpha = 0.5$ durumunda $k = 1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x,t)$, $v(x,t)$ ve $w(x,t)$ ' nin 5 teriminin $\hbar$ eğrisi



Şekil 6.7. $\alpha = 0.75$ durumunda $k = 0.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerleri için hesaplanan $u(x,t)$, $v(x,t)$ ve $w(x,t)$ ' nin 5 teriminin $\hbar$ eğrisi

Tablo 6.1. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	x	DTM [88]	HPM [78]	HAM	$A.Ç.$
		0.25	0.493601	0.493414	0.494442	0.494432
-2.6	0.2	0.5	0.493712	0.493501	0.494353	0.49493
		0.75	0.493847	0.493612	0.494283	0.495426
		1.0	0.494004	0.493746	0.494235	0.495919
		0.25	0.49381	0.493509	0.495037	0.495029
-2.2	0.4	0.5	0.493953	0.493637	0.495014	0.495525
		0.75	0.494116	0.493788	0.495009	0.496017
		1.0	0.4943	0.493962	0.49502	0.49506
		0.25	0.494015	0.493635	0.496213	0.495623
-2.35	0.6	0.5	0.494179	0.493798	0.496121	0.496115
		0.75	0.494364	0.493984	0.49604	0.496604
		1.0	0.494568	0.494191	0.495971	0.497088
		0.25	0.494215	0.493792	0.496755	0.496213
-2.2	0.8	0.5	0.494398	0.493986	0.496701	0.496701
		0.75	0.4946	0.494201	0.496654	0.497185
		1.0	0.494821	0.494437	0.496616	0.497664

Tablo 6.2. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri

$\hbar$	t	x	DTM	HPM	HAM
		0.25	8.3121×10^{-4}	0.00101858	9.37906×10^{-6}
-2.6	0.2	0.5	0.00121759	0.00142938	5.77383×10^{-4}
		0.75	0.00157887	0.00181403	0.0011422
		1.0	0.0019151	0.0021725	0.00168405
		0.25	0.00211736	0.00152022	7.56337×10^{-6}
-2.2	0.4	0.5	0.00157146	0.00188767	5.10103×10^{-4}
		0.75	0.00190093	0.00222893	0.00100838
		1.0	0.00220597	0.00254416	0.00148653
		0.25	0.00160777	0.00198837	5.89537×10^{-4}
-2.35	0.6	0.5	0.00193597	0.00231728	5.55×10^{-6}
		0.75	0.00223997	0.0026201	5.63801×10^{-4}
		1.0	0.00252006	0.00289715	0.00111735
		0.25	0.00199789	0.00242094	5.4219×10^{-4}
-2.2	0.8	0.5	0.00230311	0.00271511	4.0728×10^{-7}
		0.75	0.00258453	0.00298344	5.30556×10^{-4}
		1.0	0.00284254	0.00322643	0.00104724

Tablo 6.3. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $x = 0.5$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin değerleri

$\hbar$	t	DTM [88]	HPM [78]	HAM	$A.Ç$
	0.0	0.260438	0.260438	0.260438	0.757568
-1.2	0.1	0.74286	0.601044	0.752605	0.976673
-1.57	0.2	1.14115	0.926129	1.1613	1.16141
-0.723	0.3	1.53659	1.25593	1.31275	1.3129
-0.598	0.4	1.93784	1.59615	1.43404	1.43433
-0.5204	0.5	2.34766	1.94976	1.5299	1.5299
-0.464	0.6	2.76715	2.31864	1.60468	1.60404
-0.42	0.7	3.19672	2.70411	1.66302	1.6609
-0.383	0.8	3.63648	3.10713	1.70422	1.70415
-0.353	0.9	4.0864	3.52847	1.73861	1.73683
-0.3267	1.0	4.54637	3.96872	1.76168	1.76139

Tablo 6.4. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $x = 0.5$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri

$\hbar$	t	DTM	HPM	HAM
	0.0	0.49713	0.49713	0.49713
-1.2	0.1	0.233813	0.37563	0.224068
-1.57	0.2	0.0202584	0.235278	1.09686×10^{-4}
-0.723	0.3	0.223693	0.0569657	1.51284×10^{-4}
-0.598	0.4	0.503505	0.161817	2.89036×10^{-4}
-0.5204	0.5	0.817763	0.419856	1.61002×10^{-6}
-0.464	0.6	1.16312	0.714602	6.3973×10^{-4}
-0.42	0.7	1.53582	1.0432	2.11879×10^{-3}
-0.383	0.8	1.93233	1.40298	6.37757×10^{-5}
-0.353	0.9	2.34958	1.79164	1.78857×10^{-3}
-0.3267	1.0	2.78498	2.20733	2.9581×10^{-4}

Tablo 6.5. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	x	DTM [88]	HPM [78]	HAM	$A.Ç.$
		0.25	-0.0120744	-0.0124176	-0.0126518	-0.0126847
-1.75	0.2	0.5	-0.0117442	-0.0120841	-0.0123267	-0.0123507
		0.75	-0.0114161	-0.0117522	-0.012003	-0.012018
		1.0	-0.0110905	-0.0114224	-0.0116809	-0.0116871
		0.25	-0.0116569	-0.0118612	-0.0122758	-0.0122841
-1.651	0.4	0.5	-0.0113305	-0.0115296	-0.0119587	-0.0119517
		0.75	-0.0110067	-0.0112004	-0.0116432	-0.0116212
		1.0	-0.0106858	-0.0108739	-0.0113298	-0.0112928
		0.25	-0.0113372	-0.0113784	-0.0118624	-0.0118854
-1.54	0.6	0.5	-0.0110144	-0.0110493	-0.11551	-0.0115553
		0.75	-0.0106945	-0.010723	-0.0112418	-0.0112274
		1.0	-0.010378	-0.0104001	-0.0109351	-0.0109023
		0.25	-0.0110681	-0.0109553	-0.0114926	-0.0114926
-1.45	0.8	0.5	-0.0107489	-0.010629	-0.0111859	-0.0111622
		0.75	-0.0104328	-0.0103062	-0.0108817	-0.0108376
		1.0	-0.0101204	-0.00998714	-0.0105803	-0.0105161

Tablo 6.6. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri

$\hbar$	t	x	DTM	HPM	HAM
		0.25	2.67156×10^{-4}	2.67156×10^{-4}	3.298×10^{-5}
-1.75	0.2	0.5	2.66655×10^{-4}	2.66655×10^{-4}	2.4006×10^{-5}
		0.75	2.65823×10^{-4}	2.65823×10^{-4}	1.50684×10^{-5}
		1.0	2.64663×10^{-4}	2.64663×10^{-4}	6.21112×10^{-6}
		0.25	5.48278×10^{-4}	4.22879×10^{-4}	8.26031×10^{-6}
-1.651	0.4	0.5	5.40902×10^{-4}	4.22079×10^{-4}	6.95901×10^{-6}
		0.75	5.32891×10^{-4}	4.20752×10^{-4}	2.20595×10^{-5}
		1.0	5.24284×10^{-4}	4.18905×10^{-4}	3.69671×10^{-5}
		0.25	6.27219×10^{-4}	5.07021×10^{-4}	2.30449×10^{-5}
-1.54	0.6	0.5	6.21223×10^{-4}	5.06039×10^{-4}	4.2746×10^{-6}
		0.75	6.1449×10^{-4}	5.04418×10^{-4}	1.43728×10^{-5}
		1.0	6.07052×10^{-4}	5.02166×10^{-4}	3.28054×10^{-5}
		0.25	4.21413×10^{-4}	5.34246×10^{-4}	3.10968×10^{-6}
-1.45	0.8	0.5	4.13316×10^{-4}	5.33157×10^{-4}	2.36771×10^{-5}
		0.75	4.04734×10^{-4}	5.31381×10^{-4}	4.40889×10^{-5}
		1.0	3.95709×10^{-4}	5.28925×10^{-4}	6.42444×10^{-5}

Tablo 6.7. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	DTM [88]	HPM [78]	HAM	$A.Ç.$
	0.0	-5.31516	-5.31516	-5.31516	-5.31516
-1.436	0.1	-2.8087	-3.09427	-3.8886	-3.88838
-1.2507	0.2	-1.65201	-1.36586	-2.73642	-2.73638
-1.1372	0.3	-1.00627	0.0133961	-1.86823	-1.8683
-1.06267	0.4	-0.716347	1.08381	-1.24756	-1.24759
-0.289	0.5	-0.708269	1.8665	-0.824471	-0.82022
-0.9703	0.6	-0.93775	2.3748	-0.533707	-0.533568
-0.244	0.7	-1.37505	2.61799	-0.336519	-0.344661
-0.2232	0.8	-1.99845	2.60295	-0.221185	-0.22161
-0.2053	0.9	-2.79147	2.33502	-0.142511	-0.142066
-0.19	1.0	-3.74103	1.8185	-0.0863998	-0.090897

Tablo 6.8. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $v(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri

$\hbar$	t	DTM	HPM	HAM
	0.0	0.	0.	0.
-1.436	0.1	1.07967	0.79411	2.18511×10^{-4}
-1.2507	0.2	1.08437	1.37052	3.86942×10^{-5}
-1.1372	0.3	0.862032	1.8817	7.12418×10^{-5}
-1.06267	0.4	0.531244	2.3314	3.27464×10^{-5}
-0.289	0.5	0.11195	2.68672	4.25074×10^{-3}
-0.9703	0.6	0.404207	2.90837	1.39479×10^{-4}
-0.244	0.7	1.03039	2.96265	8.14119×10^{-3}
-0.2232	0.8	1.77684	2.82456	4.25223×10^{-4}
-0.2053	0.9	2.64941	2.47709	4.45165×10^{-4}
-0.19	1.0	3.65013	1.9094	4.50717×10^{-3}

Tablo 6.9. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	x	DTM [88]	HPM [78]	HAM	$A.Ç.$
		0.25	1.65063	1.61227	1.58226	1.58242
-2.222	0.2	0.5	1.68752	1.64954	1.61961	1.61974
		0.75	1.72419	1.68663	1.65681	1.65692
		1.0	1.76058	1.72349	1.69381	1.69391
		0.25	1.69729	1.67445	1.62714	1.62719
-0.336	0.4	0.5	1.73376	1.71151	1.66434	1.66434
		0.75	1.76995	1.7483	1.70134	1.70128
		1.0	1.80581	1.74879	1.73809	1.73797
		0.25	1.73302	1.72841	1.67176	1.67174
-0.438	0.6	0.5	1.76909	1.76519	1.70876	1.70864
		0.75	1.80483	1.80165	1.7455	1.74528
		1.0	1.84021	1.83774	1.78194	1.78162
		0.25	1.76308	1.77569	1.71602	1.71599
-0.54	0.8	0.5	1.79876	1.81215	1.75274	1.75257
		0.75	1.83408	1.84823	1.78915	1.78885
		1.0	1.869	1.88389	1.8252	1.82478

Tablo 6.10. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri

$\hbar$	t	x	DTM	HPM	HAM
		0.25	0.0682081	0.029856	1.52907×10^{-4}
-2.222	0.2	0.5	0.0677777	0.02998	1.35667×10^{-4}
		0.75	0.0672655	0.029707	1.81435×10^{-4}
		1.0	0.066674	0.0295775	1.01296×10^{-4}
		0.25	0.0700948	0.0472588	5.78771×10^{-5}
-0.336	0.4	0.5	0.0694248	0.0471694	1.28267×10^{-7}
		0.75	0.0686723	0.470211	5.67946×10^{-5}
		1.0	0.067841	0.0468147	1.12621×10^{-4}
		0.25	0.0612728	0.0566621	1.57312×10^{-5}
-0.438	0.6	0.5	0.0604485	0.0565524	1.21137×10^{-4}
		0.75	0.0595532	0.0563712	2.24283×10^{-4}
		1.0	0.0585914	0.0561196	3.24695×10^{-4}
		0.25	0.047095	0.0597046	3.00018×10^{-5}
-0.54	0.8	0.5	0.0461901	0.059583	1.6585×10^{-4}
		0.75	0.045231	0.0593844	2.97377×10^{-4}
		1.0	0.0442225	0.05911	4.24023×10^{-4}

Tablo 6.11. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	DTM [88]	HPM [78]	HAM	$A.Ç.$
	0.0	0.645656	0.645656	0.645656	0.645656
-0.286	0.1	0.812753	0.793716	0.74068	0.740775
-0.323	0.2	0.889866	0.908942	0.817651	0.817574
-0.325	0.3	0.932915	1.00089	0.875227	0.875447
-0.311	0.4	0.952244	1.07225	0.916771	0.916827
-0.29	0.5	0.952782	1.12443	0.945774	0.945319
-0.266	0.6	0.937482	1.15832	0.96451	0.964429
-0.244	0.7	0.90833	1.17453	0.977565	0.977023
-0.224	0.8	0.86677	1.17353	0.986172	0.985226
-0.205	0.9	0.813902	1.15567	0.990112	0.990529
-0.19	1.0	0.750598	1.12123	0.994241	0.99394

Tablo 6.12. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.2$ ve $\alpha = 0.75$ için $w(x, t)$ nin 3 teriminin mutlak hata değerleri

$\hbar$	t	DTM	HPM	HAM
	0.0	0.	0.	0.
-0.286	0.1	0.0719782	0.0529407	9.50759×10^{-5}
-0.323	0.2	0.0722912	0.0913679	7.6693×10^{-5}
-0.325	0.3	0.0574688	0.125446	2.20011×10^{-4}
-0.311	0.4	0.0354163	0.155427	5.59238×10^{-5}
-0.29	0.5	0.00746336	0.179115	4.55275×10^{-4}
-0.266	0.6	0.0269472	0.193891	8.07307×10^{-5}
-0.244	0.7	0.0686924	0.19751	5.42746×10^{-4}
-0.224	0.8	0.118456	0.188304	9.4556×10^{-4}
-0.205	0.9	0.176627	0.165139	4.1662×10^{-4}
-0.19	1.0	0.243342	0.127293	3.00478×10^{-4}

Tablo 6.13. $k = 1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	HAM	$A.Ç.$	$Mutlak Hata$
	0.0	0.	0.0101627	0.0101627
-0.9	0.1	0.0826045	0.0826252	2.07372×10^{-5}
-0.388	0.2	0.172619	0.172751	1.31932×10^{-4}
-0.416	0.3	0.259719	0.259898	1.79292×10^{-4}
-0.42	0.4	0.343514	0.343798	2.84257×10^{-4}
-0.417	0.5	0.424265	0.424234	3.03379×10^{-5}
-0.411	0.6	0.501284	0.50104	2.43098×10^{-4}
-0.404	0.7	0.574846	0.574099	7.46711×10^{-4}
-0.396	0.8	0.643616	0.64334	2.75958×10^{-4}
-0.388	0.9	0.70864	0.708736	9.58075×10^{-5}
-0.381	1.0	0.77238	0.770298	2.08196×10^{-3}

Tablo 6.14. $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	HAM	$A.Ç.$	$Mutlak Hata$
	0.0	0.	-0.0101627	0.0101627
-0.665	0.1	1.41622	1.41672	5.01559×10^{-4}
-0.3642	0.2	2.05014	2.05002	1.23255×10^{-4}
-0.273	0.3	2.51788	2.51813	2.44146×10^{-4}
-0.2237	0.4	2.84809	2.84816	7.36188×10^{-5}
-0.191	0.5	3.07356	3.07317	3.90618×10^{-4}
-0.167	0.6	3.21835	3.22308	4.73295×10^{-3}
-0.149	0.7	3.32829	3.32144	6.85359×10^{-3}
-0.1343	0.8	3.38601	3.38532	6.94561×10^{-3}
-0.13	0.9	3.42868	3.42654	2.13879×10^{-4}
-0.747	1.0	0.770388	0.770298	9.03189×10^{-5}

Tablo 6.15. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri

$\hbar$	t	HAM	$A.Ç.$	$Mutlak Hata$
	0.0	-0.0196301	-0.0196301	3.46945×10^{-18}
-0.079	0.1	-0.0193281	-0.0193284	3.09595×10^{-7}
-0.12	0.2	-0.0190208	-0.0190271	6.29367×10^{-6}
-0.153	0.3	-0.0187258	-0.0187263	4.90707×10^{-7}
-0.185	0.4	-0.0184285	-0.0184261	2.39303×10^{-6}
-0.218	0.5	-0.0181262	-0.0181267	5.32422×10^{-7}
-0.25	0.6	-0.0178328	-0.0178282	4.62445×10^{-6}
-0.285	0.7	-0.0175349	-0.0175306	4.26116×10^{-6}
-0.324	0.8	-0.0172347	-0.0172343	4.4655×10^{-7}
-0.37	0.9	-0.0169306	-0.0169392	8.63545×10^{-6}
-0.419	1.0	-0.0166457	-0.0166455	1.75463×10^{-7}

Tablo 6.16. $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.75$ için $v(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri

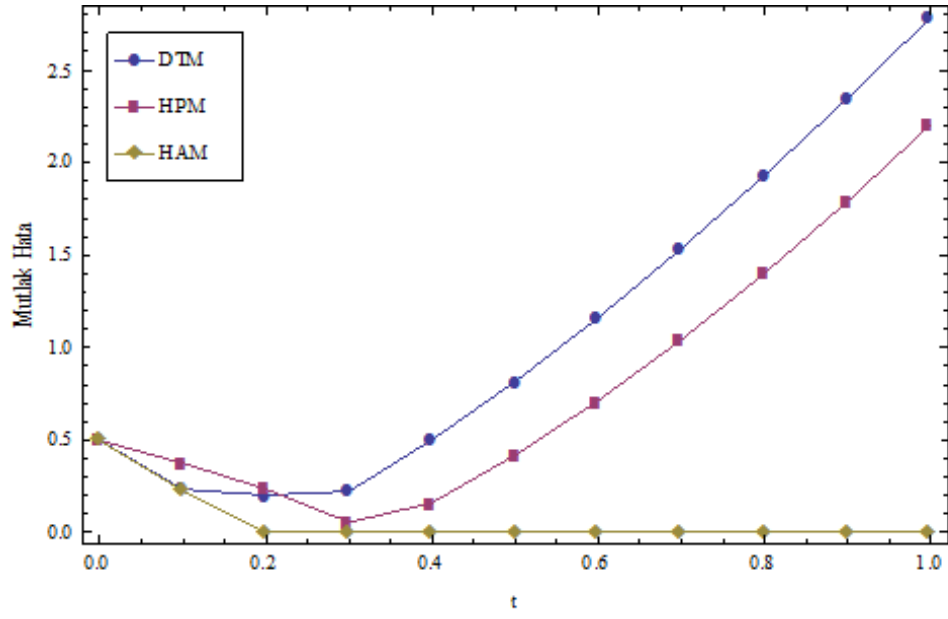
$\hbar$	t	HAM	$A.Ç.$	$Mutlak Hata$
	0.0	-0.0196301	-0.0196301	3.46945×10^{-18}
-0.159	0.1	-0.0193383	-0.0193284	9.90415×10^{-6}
-0.217	0.2	-0.0190175	-0.0190271	9.60619×10^{-6}
-0.252	0.3	-0.0187166	-0.0187263	9.71702×10^{-6}
-0.283	0.4	-0.0184168	-0.0184261	9.33865×10^{-6}
-0.312	0.5	-0.0181182	-0.0181267	8.44344×10^{-6}
-0.341	0.6	-0.0178189	-0.0178282	9.24489×10^{-6}
-0.37	0.7	-0.0175211	-0.0175306	9.57906×10^{-6}
-0.4	0.8	-0.0172244	-0.0172343	9.8689×10^{-6}
-0.431	0.9	-0.0169312	-0.0169392	7.96275×10^{-6}
-0.467	1.0	-0.0166361	-0.0166455	9.42175×10^{-6}

Tablo 6.17. $k = 0.1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.5$ için $w(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri

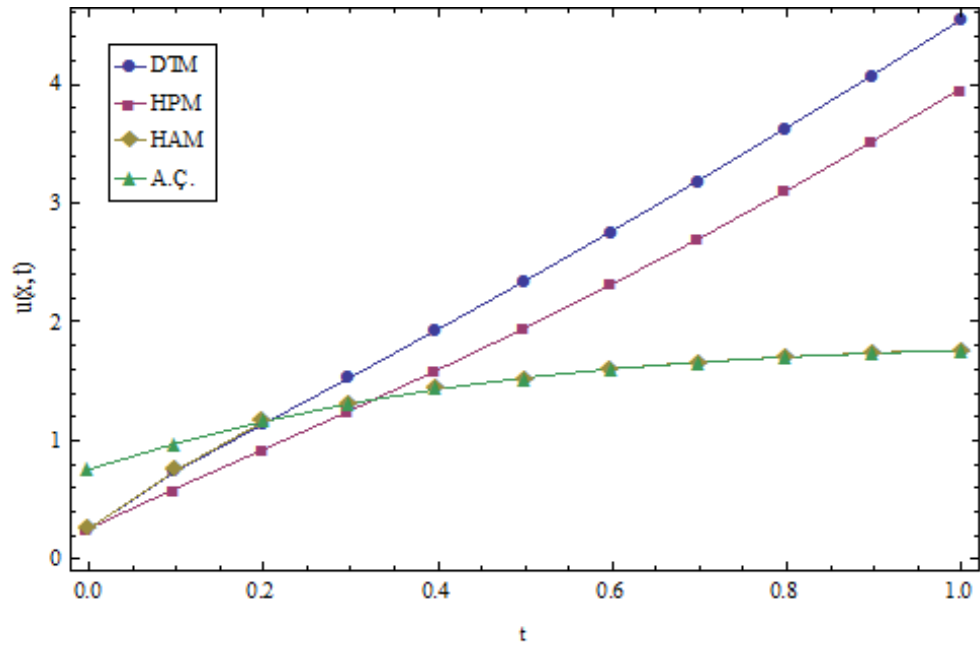
$\hbar$	t	HAM	$A.Ç.$	$Mutlak Hata$
	0.0	0.512497	0.512497	0.
-0.079	0.1	0.514998	0.514996	2.23619×10^{-6}
-0.1187	0.2	0.517499	0.517493	5.76808×10^{-6}
-0.153	0.3	0.519989	0.519989	2.1848×10^{-7}
-0.1859	0.4	0.522491	0.522485	6.30129×10^{-6}
-0.218	0.5	0.52497	0.524979	9.60925×10^{-6}
-0.2516	0.6	0.527472	0.527472	4.41146×10^{-6}
-0.287	0.7	0.52997	0.529964	6.24215×10^{-6}
-0.325	0.8	0.532452	0.532454	2.527737×10^{-6}
-0.3685	0.9	0.534951	0.534943	8.18447×10^{-6}
-0.419	1.0	0.537423	0.53743	6.6887×10^{-6}

Tablo 6.18. $k = 0.1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$, $x = 0.25$ ve $\alpha = 0.75$ için $w(x, t)$ nin 5 teriminin sayısal değerleri

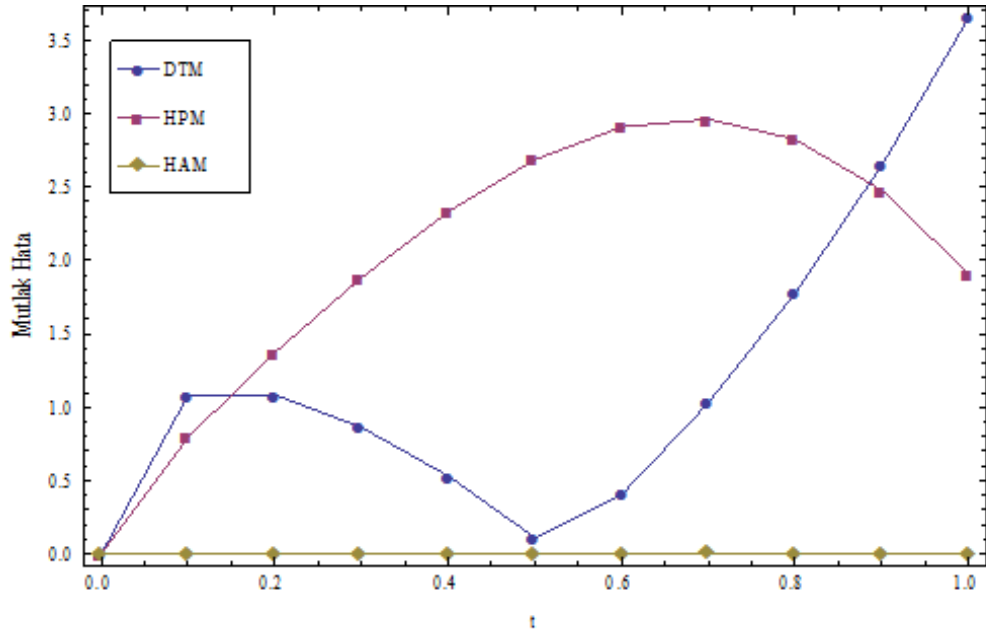
$\hbar$	t	HAM	$A.Ç.$	$Mutlak Hata$
	0.0	0.512497	0.512497	0.
-0.167	0.1	0.515004	0.514996	8.3075×10^{-6}
-0.212	0.2	0.517492	0.517493	9.74041×10^{-7}
-0.248	0.3	0.519991	0.519989	1.46665×10^{-6}
-0.28	0.4	0.522492	0.522485	7.06408×10^{-6}
-0.309	0.5	0.524969	0.524979	9.9083×10^{-6}
-0.339	0.6	0.527481	0.527472	8.92634×10^{-6}
-0.368	0.7	0.529966	0.529964	2.2314×10^{-6}
-0.398	0.8	0.53245	0.532454	4.40399×10^{-6}
-0.43	0.9	0.534934	0.534943	9.35856×10^{-6}
-0.466	1.0	0.537429	0.53743	9.91597×10^{-7}



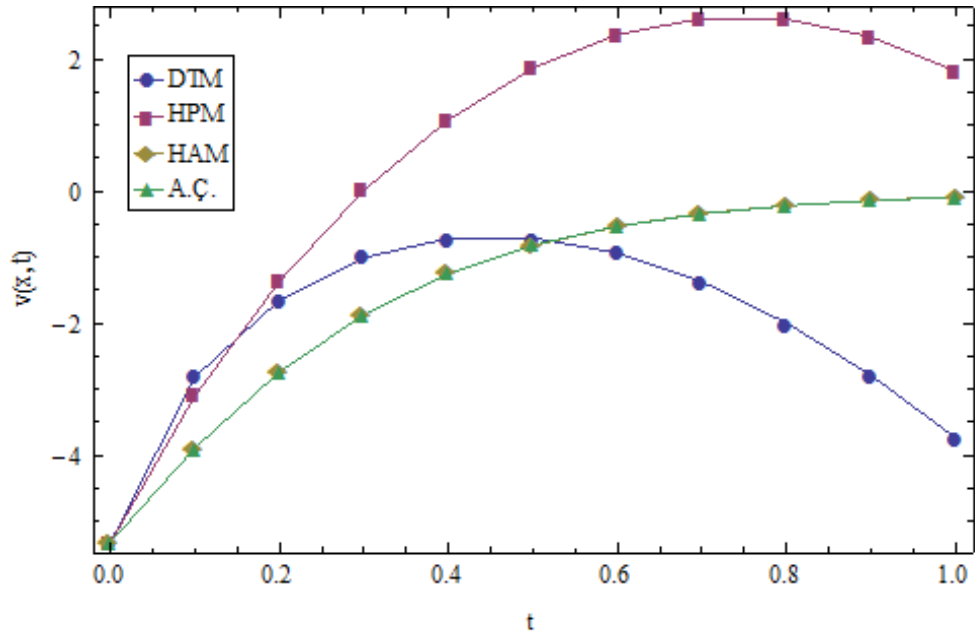
Şekil 6.8. $\alpha = 0.75$, $k = 1$, $\beta = 1.5$ ve $x = 0.5$ olduğu zaman $u(x,t)$ ' nin 3 teriminin mutlak hata grafiği



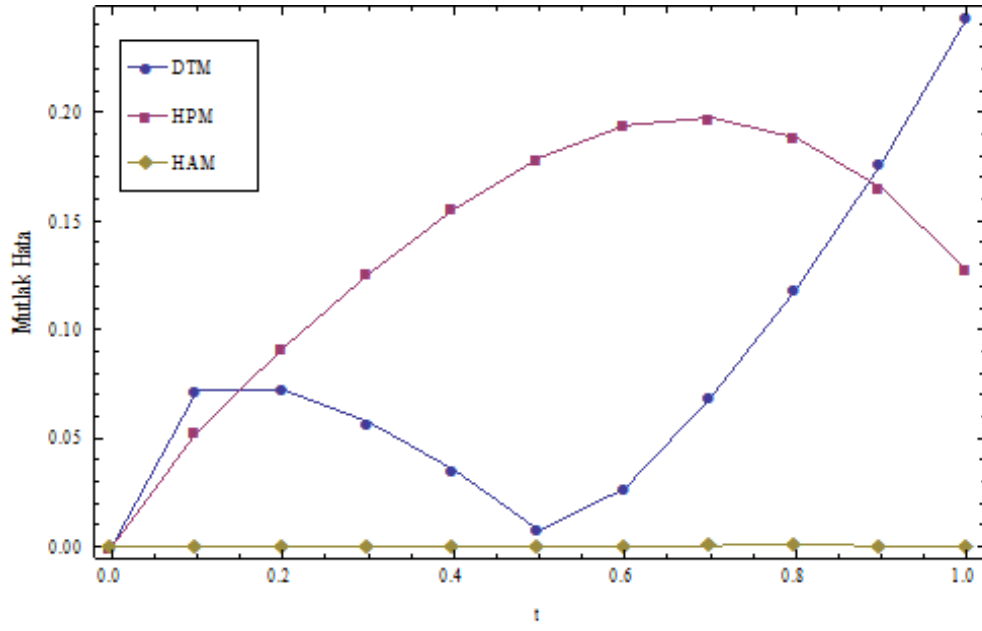
Şekil 6.9. $\alpha = 0.75$, $k = 1$, $\beta = 1.5$ ve $x = 0.5$ olduğu zaman $u(x,t)$ ' nin 3 teriminin DTM, HPM, HAM ve analitik çözümünün grafiği



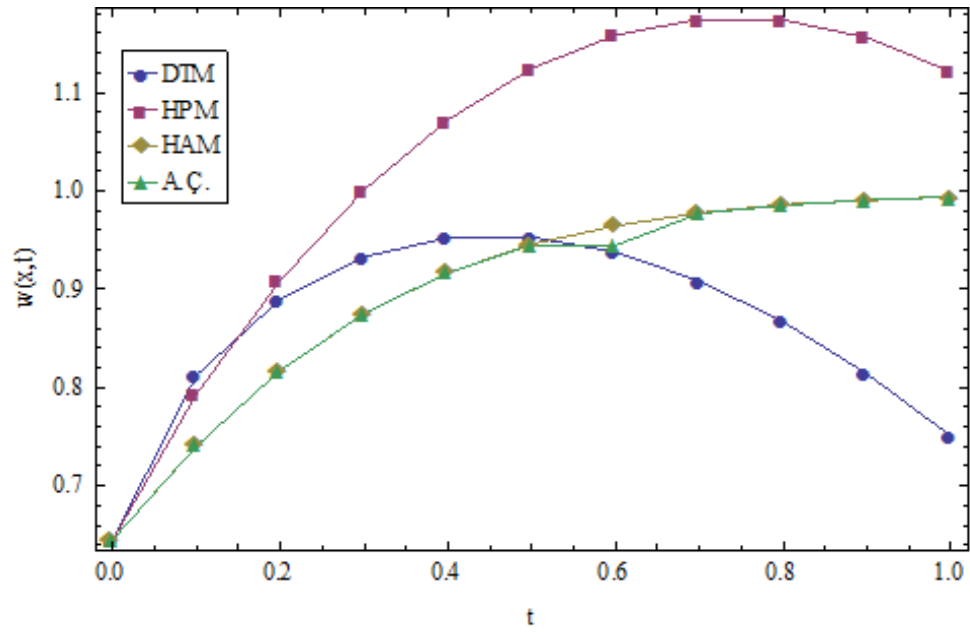
Şekil 6.10. $\alpha = 0.75$, $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $v(x, t)$ 'nin 3 teriminin mutlak hata grafiği



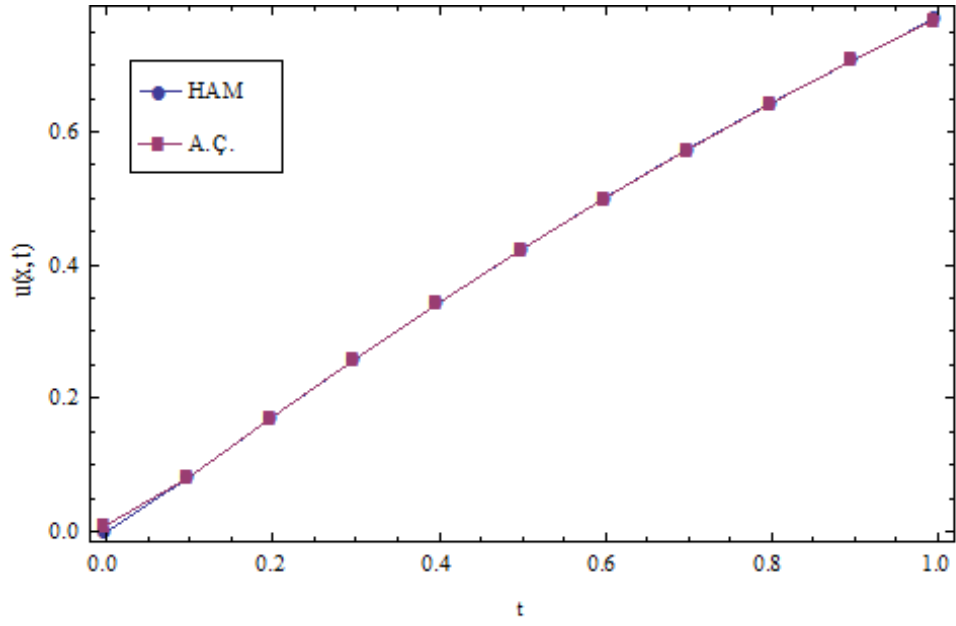
Şekil 6.11. $\alpha = 0.75$, $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $v(x, t)$ 'nin 3 teriminin DTM, HPM, HAM ve analitik çözümünün grafiği



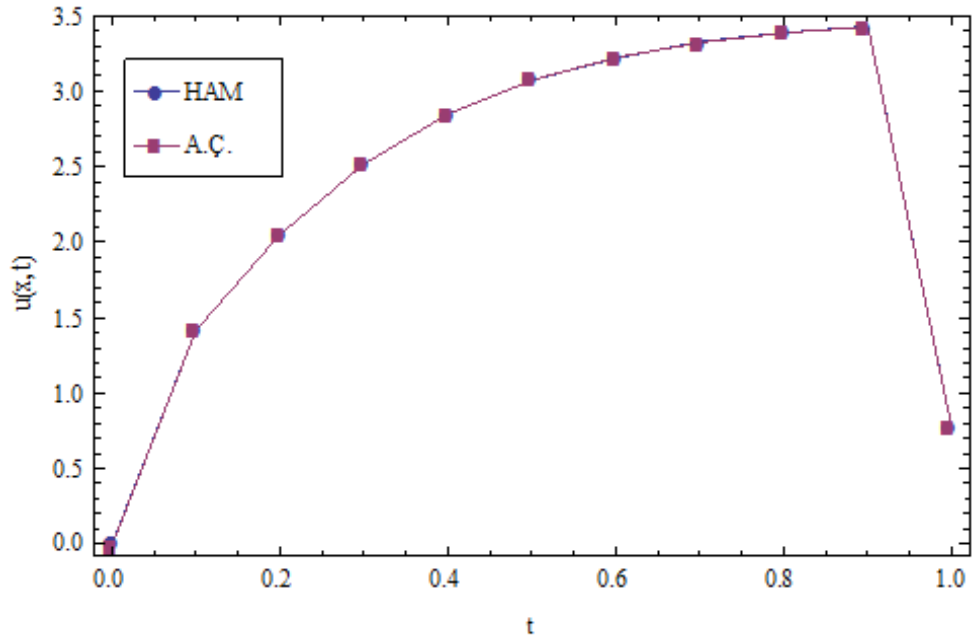
Şekil 6.12. $\alpha = 0.75$, $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $w(x, t)$ 'nin 3 teriminin mutlak hata grafiği



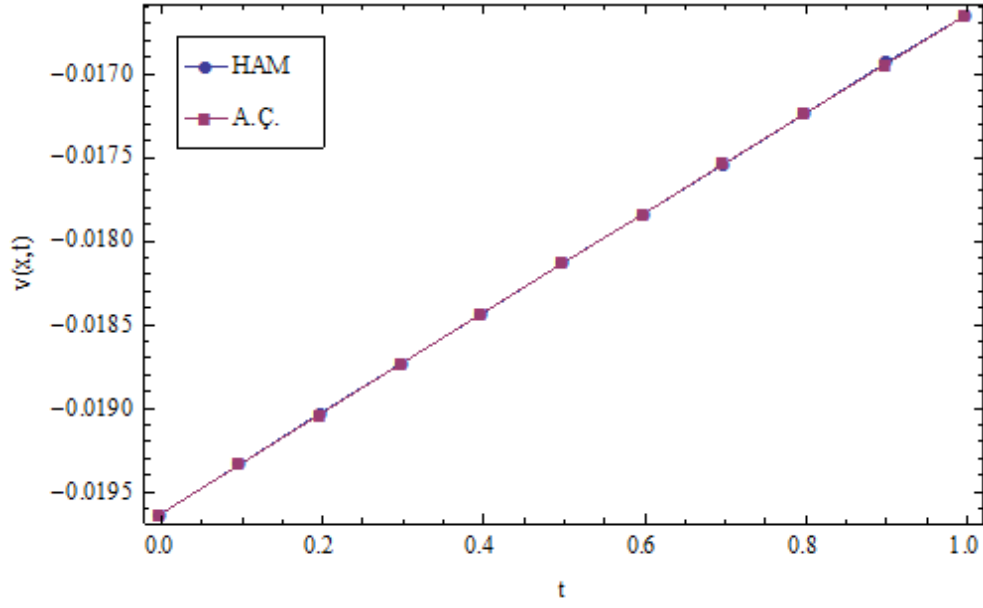
Şekil 6.13. $\alpha = 0.75$, $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.2$ olduğu zaman $w(x, t)$ 'nin 3 teriminin DTM, HPM, HAM ve analitik çözümünün grafiği



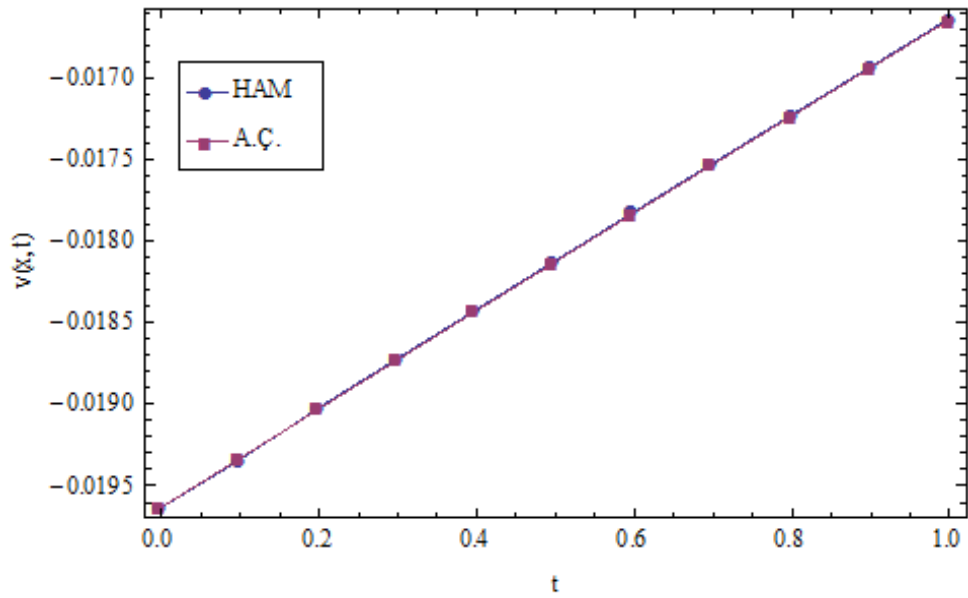
Şekil 6.14. $\alpha = 0.5$, $k = 1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $u(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği



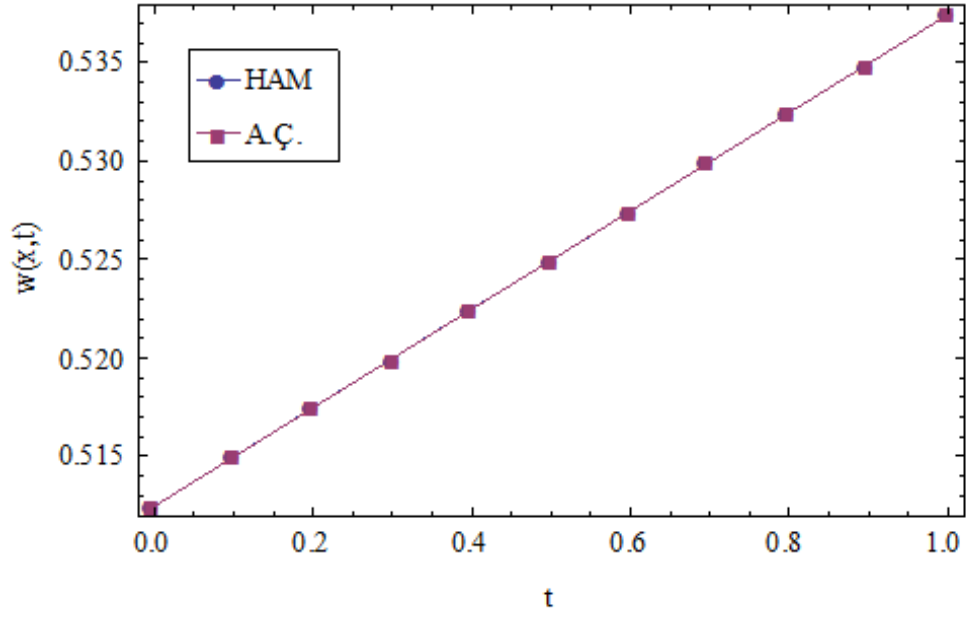
Şekil 6.15. $\alpha = 0.75$, $k = 1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $u(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği



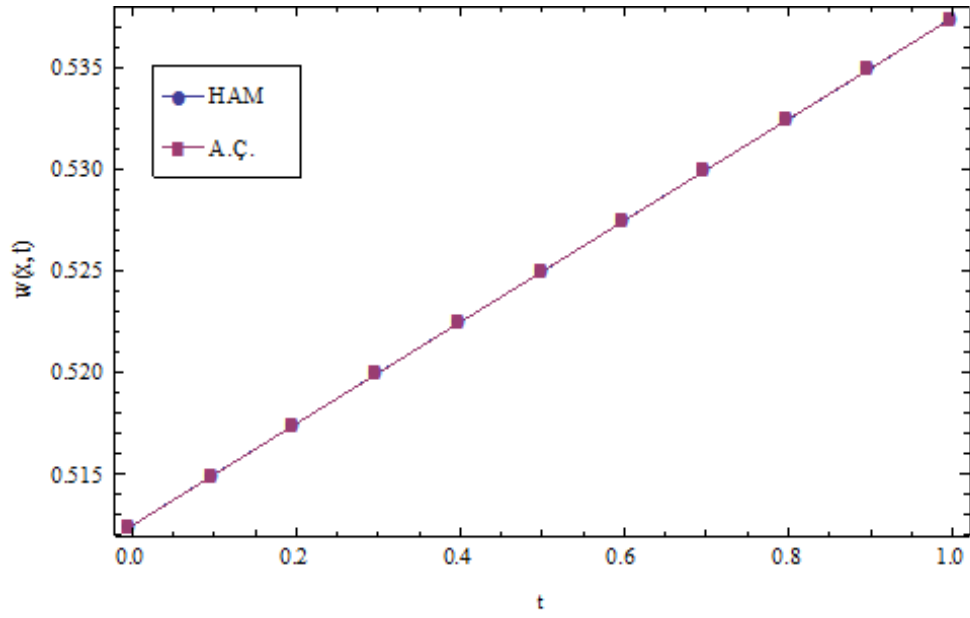
Şekil 6.16. $\alpha = 0.5$, $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $v(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği



Şekil 6.17. $\alpha = 0.75$, $k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $v(x, t)$ ' nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği



Şekil 6.18. $\alpha = 0.5$, $k = 0.1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $w(x, t)$ 'nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği



Şekil 6.19. $\alpha = 0.75$, $k = 0.1$, $\beta = 0.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.25$ olduğu zaman $w(x, t)$ 'nin 5 teriminin HAM ve analitik çözümünün grafiği

6.3 SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde, iki uzun su dalgasının etkileşimini modelleyen zaman kesirli genelleştirilmiş Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemini göz önüne aldık. (6.6) ve (6.7) ile verilen lineer olmayan bu sistemin Homotopi analiz yöntemiyle yaklaşık çözümünü bulduk. Yöntemin yakınsaklık analizini yaptık ve $\hbar \neq 0$ yardımcı parametresinin hangi değerleri için yaklaşık çözümün yakınsak olduğunu gösterdik (Şekil 6.4-6.7). Ayrıca bulduğumuz sonuçları Tablo 6.1-6.18 ve Şekil 6.8-6.19 ile ifade ettik.

Şekil 6.4-6.7' de elde edilen yaklaşık çözümün keyfi sabitler ve (x, t) ' nin farklı değerleri için yakınsaklık kontrol parametresi olan $\hbar$ ' ın hangi aralıkta değiştiğini belirledik.

$k = 0.1$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $\alpha = 0.5$ olması halinde x, t ve $\hbar$ ' ın çeşitli değerleri için $u(x, t), v(x, t)$ ve $w(x, t)$ çözüm serisinin üç terimi kullanılarak Diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) [88], Homotopi pertürbasyon metodu (HPM) [78] ve analitik çözüm (A.Ç.) arasında bir karşılaştırma $u(x, t)$ için Tablo 6.1-6.4' de, $v(x, t)$ için Tablo 6.5-6.8' de ve $w(x, t)$ için Tablo 6.9-6.12' de verildi. Tablolardan da görüldüğü gibi $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin uygun seçilmesiyle HAM ile elde edilen sonuçlar DTM ve HPM' ye göre analitik çözüme daha yakın ve HAM' da mutlak hata 10^{-5} iken DTM ve HPM ile bulunan mutlak hata 10^{-1} civarındadır.

Tablo 6.13-6.18' de ise k, β, c_0, c_1, x ve α ' nın farklı değerleri için $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $u(x, t), v(x, t)$ ve $w(x, t)$ için bulunan çözüm serilerinin beş terimi kullanılarak elde edilen mutlak hatalar verildi.

Şekil 6.8' de $u(x, t)$, Şekil 6.10' de $v(x, t)$ ve Şekil 6.12' de $w(x, t)$ çözüm serilerinin üç terimi kullanılarak $\alpha = 0.75$, $k = 1.5$, $\beta = 1.5$, $c_0 = c_1 = 0.5$ ve $x = 0.2$ olması halinde DTM, HPM ve HAM için elde edilen mutlak hataların iki boyutlu şekli verildi. Yine aynı sabitler için çözüm serilerinin üç terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümün DTM, HPM ve A.Ç. ile karşılaştırılması sırayla, Şekil 6.9, Şekil 6.11 ve Şekil 6.13' de sunuldu. Görüldüğü gibi HAM kullanılarak bulunan yaklaşık çözümler DTM ve HPM' ye göre daha hassas sonuçlar verdi.

Şekil 6.14- 6.19' da ise $\alpha = 0.75$, $k = 1$, $c_0 = c_1 = 1.5$ ve $x = 0.25$ için çözüm serilerinin beş terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözüm arasındaki karşılaştırma iki boyutlu grafik olarak verildi. HAM ile A.Ç.' ün karşılaştığı gözlemlendi.

Sonuç olarak, matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden biri olan zaman kesirli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi için Homotopi analiz yöntemi elde ettiğimiz sonuçlara göre tavsiye edilir bir yöntemdir. Kesirli lineer olmayan kısmi diferansiyel denk-

lem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini içeren çalışmalar literatürde azdır. Bu nedenle elde edilen sonuçlar önemlidir ve bu sayede kesirli diferansiyel denklem ve sistemlerinin modellediği olay hakkında daha iyi bilgi edinilebilir. Ayrıca, kesirli diferansiyel denklem ve sistemlerinin analitik çözümünü bulmak çok zordur. Fakat son zamanlarda yapılan çalışmalarda kesirli kompleks dönüşüm yardımıyla [89]-[90] kesirli diferansiyel denklemler normal bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülüp daha sonra bilinen analitik yöntemlerle soliton çözümleri bulunmuştur [79]-[94].

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u - \frac{1}{2} D_x^{3\alpha} u + 3u D_x^\alpha u - 3D_x^\alpha(vw) &= 0 \\ D_t^\alpha v + D_x^{3\alpha} v - 3D_x^\alpha v &= 0 \\ D_t^\alpha w + D_x^{3\alpha} w - 3D_x^\alpha w &= 0 \end{aligned}$$

şeklindeki zaman ve uzay kesirli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi Bin [79] tarafından (G'/G) - Açılım yöntemi kullanılarak ve Guo ve diğer [91] tarafından iyileştirilmiş kesirli sub-denklemler yöntemiyle çözülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] **Nishimoto, K.**, 1991. An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus, Descarter Press Co.
- [2] **Weilbeer, M.**, 2005. Efficient Numerical Methods for Frcational Differential Equations and their Analytical Background, PhD Thesis, Von der Carl-Friedrich-Gaub-Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universität Braunschweig, Germany.
- [3] **Lagrange, J., L.**, 1849. Sur une: Nouvelle Espece de Calcul Relatif. A la Différentiation et a L'intégration des QuantitésVariables, Gauthier-Villars.
- [4] **Ross, B.**, 1974. The Development, Theory and Applications of the Gamma Function and a Profile of Fractional Calculus, PhD Thesis, New York University, New York.
- [5] **Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O.**, 1993. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers.
- [6] **Fowler, A. F.**, 1975. A Study of Fractional Calculus: Its Definitions and Properties, PhD Thesis, Texas State University, Texas.
- [7] **Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.**, 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Press.
- [8] **Hilfer, K.**, 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing Co.
- [9] **Qi, W.**, 2007. Numerical solutions of fractional Boussinesq equation, Communications in Theoretical Physics, **47**, 413-420.
- [10] **Ray, S.S.**, 2007. Exact solutions for time- fractional diffusion- wave equations by decomposition method, Physica Scripta, **75**, 53-61.
- [11] **Das, S.**, 2009. Analytical solution of a fractional diffusion equation by variational iteration method, Computers and Mathematics with Applications, **57**, 483-487.

- [12] **Abdulaziz, O., Hashim, I., Ismail, E. S.**, 2008. Approximate analytical solution to fractional modified KdV equations, *Mathematical and Computer Modelling*, **49**, 136-145.
- [13] **Molliq, Y. R., Noorani, M. S. M., Hashim, I., Ahmad, R. R.**, 2009. Approximate solutions of fractional Zakharov- Kuznetsov equations by VIM, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 2, 103-108.
- [14] **Inc, M.**, 2009. Korteweg-de Vries (KdV) Equation, Some Numerical Methods for Solving the, *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, 469-485.
- [15] **Ross., B.** 1975. *Fractional Calculus and its Applications*, Springer Press.
- [16] **Oldham. K. B., Spainer, J.**, 1974. *The Fractional Calculus*, Academic Press.
- [17] **Podlubny, I.**, 1999. *Fractional Differential Equations*, Academic Press.
- [18] **Yuste, S., B., Lindenberg, K.**, 2001. Subdiffusion-limited A+A Reactions, *Physical Review Letters*, **87**, 11, 118301.
- [19] **Barkai, E., Metzler, R., Klafter, J.**, 2000. From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck Equation, *Physical Review E*, **61**, 1, 132-138.
- [20] **Henry, B., I., Langlands, S., L., Wearne, S., L.**, 2008. Fractional Cable Models for Spiny Neuronal Dendrites, *Physical Review Letters*, **100**, 128103.
- [21] **Magin, R., Feng, X., Baleanu, D.**, 2009. Solving the Fractional Order Bloch Equation, *Concepts in Magnetic Resonance Part A*, **34A**, 1, 16-23.
- [22] **Wyss, W.**, 2000. The Fractional Black- Scholes Equation, *Fractional Calculus Applied Analysis*, **3**, 51-61.
- [23] **Liao, S. J.**, 2000. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, CRC Press.
- [24] **Lyapunov, A. M.**, 1992. *General Problem on Stability of Motion*, Taylor & Francis.
- [25] **Karmishin, A. V.**, 1990. *Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-Walled Structures*, Mashinostroyenia.
- [26] **Adomian, G.**, 1986. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press.

- [27] **Inc, M.**, 2008. On numerical solution of Burgers' equation by homotopy analysis method, *Physics Letters A*, **372**, 356-360.
- [28] **Inc, M.**, 2007. On exact solution of Laplace equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions by the homotopy analysis method, *Physics Letters A*, **365**, 5-6, 412-415.
- [29] **Chowdhury, M. S. H., Hashim, I., Abdulaziz, O.**, 2009. Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method for purely nonlinear fin-type problems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 371-378.
- [30] **Tan, Y., Xu, H., Liao, S.**, 2007. Explicit series solution of travelling waves with a front of Fisher equation, *Chaos Solitons and Fractals*, **31**, 462-472.
- [31] **Abbasbandy, S.**, 2007. Soliton solutions for the Fitzhugh- Nagumo equation with the homotopy analysis method, *Applied Mathematical Modelling*, **32**, 12, 2706-2714.
- [32] **Abbasbandy, S., Shivanian, E.**, 2009. Series solution of the system of integro-differential equations, *Verlag der Zeitschrift für Naturforschung A*, **64a**, 811-818.
- [33] **Yinping, L., Zhibin, L.**, 2007. The homotopy analysis method for approximating the solution of the modified Korteweg-de Vries equation, *Chaos Solitons and Fractals*, **39**, 1,1-8.
- [34] **Abbasbandy, S.**, 2008. Solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky equation by means of the homotopy analysis method, *Nonlinear Dynamics*, **52**, 35-40
- [35] **Abbasbandy, S., Zakaria, F. S.**, 2008. Soliton solutions for the fifth-order KdV equation with the homotopy analysis method, *Nonlinear Dynamics*, **51**, 83-87.
- [36] **Abbasbandy, S.**, 2007. Homotopy analysis method for heat radiation equations, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **34**, 2, 380-387.
- [37] **Abbasbandy, S.**, 2008. Homotopy analysis method for generalized Benjamin- Bona- Mahony equation, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **59**, 51-62.
- [38] **Debnath, L.**, 1998. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhauser.

- [39] **Myint-U, T., Debnath, L.**, 2006. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser.
- [40] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.**, 1957. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Presses, Rochester, N. Y.
- [41] **Mucuk, O.**, 2009. Topoloji, Nobel Yayınları.
- [42] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons.
- [43] **Başkan, T.**, 2010. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Dora Yayıncılık.
- [44] **Kirsh, A.**, 1996. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer.
- [45] http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed_problem, Well-posed Problem, 20 Aralık 2011.
- [46] **Miller, K., S., Ross, B.**, 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons.
- [47] **Balcı, M.**, 1997. Matematik Analiz 2, Balcı Yayınları.
- [48] **Balcı, M.**, 2008. Genel Matematik, Balcı Yayınları.
- [49] **Soykan, Y.**, 2008. Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayınları.
- [50] **Arfken, G. B., Weber, H. J.**, 1995. Mathematical methods for physicists, Academic Press Inc. Fourth Edition.
- [51] **Osler, T. J.**, 1970. Leibniz Rule of Fractional Derivatives Generalized and an Application to Infinite Series, SIAM Journal Applied Mathematics, **18**, 658-674.
- [52] **Ross, B.**, 1973. Unpublished notes on fractional calculus, University of New Haven, Connecticut.
- [53] **Oldham, K. B., Jerome, S.**, 1970. The Replacement of Fick's Laws by a Formulation Involving Semidifferentiation, Journal of Electro Analytical Chemistry, **26**, 331-341.
- [54] **Davis, H. T.**, 1936. The Theory of Linear Operators, Principia Press.

- [55] **Weber, H.**, 1953. Collected Works of Bernhard Riemann, Dover Publications.
- [56] **Caputo, M.**, 1967. Linear Model of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent-II, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **13** (5), 529–539.
- [57] **Caputo, M.**, 1969. Elasticità e Dissipazione, Zanichelli.
- [58] **Ağırseven D.**, Bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin yarı analitik yöntemlerle çözümleri üzerine, PhD Thesis, Tırakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü-Matematik Bölümü, Türkiye.
- [59] **Liao, S., J.**, 2012. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations, Higher Education Press.
- [60] **Hayat, T., Sajid, M.**, 2007. On analytic solution for thin film flow of a fourth grade fluid down a vertical cylinder, Physics Letters A, **361**, 316-322.
- [61] **He, J. H.**, 2005. Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems, Donghua University, Shanghai.
- [62] **He, J. H.**, 2005. Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, Chaos, Solitons and Fractals, **26** (3), 695-700.
- [63] **Langlands, T. A. M., Henry, B., Wearne, S.**, 2005. Solution of a fractional cable equation: Finite case, Preprint Submitted to Elsevier Science, <http://www.maths.unsw.edu.au/applied/files/2005/amr05-33.pdf>.
- [64] **Keener, J., Sneyd, J.**, 1991. Mathematical Physiology, Springer-Verlag.
- [65] **Langlands, T. A. M., Henry, B., Wearne, S.**, 2005. Solution of a fractional cable equation: Infinite case, Preprint Submitted to Elsevier Science, <http://www.maths.unsw.edu.au/applied/files/2005/amr05-34.pdf>.
- [66] **Reynolds, A.**, 2005. On the anomalous diffusion characteristics of membrane bound proteins, Physics Letters A, **342**, 439-442.
- [67] **Liu, F., Yang, Q., Turner, I.**, 2009. Stability and Convergence of Two New Implicit Numerical Methods for The Fractional Cable Equation, Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, California, USA.

- [68] **Hu, X., Zhang, L.**, 2012. Implicit compact difference schemes for the fractional cable equation, *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 9, 4027-4043
- [69] **Quintana-Murillo, J., Yuste, S. B.**, 2011. An Explicit Numerical Method for the Fractional Cable Equation, *International Journal of Differential Equations*, doi: 10.1155/2011/231920.
- [70] **Wazwaz, A. M.**, 2008. *The KdV Equation*, Elsevier, **4**, 485-568.
- [71] **Korteweg, D. J., de Vries, G.**, 1895. On the change of from of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, *Philosophical Magazine*, **39**, 5, 422-443.
- [72] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states , *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.
- [73] **Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S.**, 1955. Studies of nonlinear problems, Los Alamos Report LA 1940, *Lectures in Applied Mathematics* (ed. A.C. Newell) Amer. Math. Soc., **15**, 143-156.
- [74] **Gardner, C.S., Greene, J.M., Kuruskal, M.D., Miura, R.M.**, 1974. Korteweg-de Vries equation and generalizations, Methods for exact solution, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **27**, 97-133.
- [75] **Hirota, R.**, 1971. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, *Physical Review Letters*, **27**, 1192-1194.
- [76] **Hirota, R., Satsuma, J.**, 1981. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries Equation, *Physics Letters A*, **85**, 407-408.
- [77] **Satsuma, J., Hirota, R.**, 1982. A coupled KdV equations one case of the four-reduction of the KP hierarchy, *Journal of the Physical Society of Japan*, **51**, 10, 3390-3397.
- [78] **Ganji, Z. Z., Ganji, D. D., Rostamiyan, Y.**, 2009. Solitary wave solutions for a time-fraction generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by an analytical technique, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 3107-3113.

- [79] **Bin, Z.**, 2012. (G'/G) -Expansion method for solving fractional differential equations in the theory of mathematical Physics, *Communications Theoretical Physics*, **58**, 623-630.
- [80] **Zayed, E. M. E., Zedan, H. A., Gepreel, K. A.**, 2004. On the solitary wave solutions for nonlinear Hirota-Satsuma coupled KdV equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, **22**, 285-303.
- [81] **Xie, M., Ding, X.**, 2011. A new method for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 17, 7117-7125.
- [82] **Fan, E., Hon, B. Y. C.**, 2002. Double periodic solutions with Jacobi elliptic functions for two generalized Hirota-Satsuma coupled KdV systems, *Physics Letters A*, **292**, 6, 335-337.
- [83] **Kaya, D.**, 2004. Solitary wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, *Applied Mathematics and Computation*, **147**, 1, 69-78.
- [84] **Ganji, D. D., Rafei, M.**, 2006. Solitary wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by homotopy perturbation method, *Physics Letters A*, **356**, 2, 131-137.
- [85] **Abbasbandy, S.**, 2007. The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation, *Physics Letters A*, **361**, 6, 478-483.
- [86] **Yan, Z.**, 2003. The extended Jacobian elliptic function expansion method and its application in the generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system, *Chaos, Solitons and Fractals*, **15**, 3, 575-583.
- [87] **Shateri, M., Ganji, D. D.**, 2010. Solitary wave solutions for a time-fraction generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by a new analytical technique, *International Journal of Differential Equations*, doi:10.1155/2010/954674.
- [88] **Liu, J., Li, H.**, 2012. Approximate analytic solutions of time-fractional Hirota-Satsuma coupled KdV equation and coupled MKdV equation, *Abstract and Applied Analysis*, <http://www.hindawi.com/journals/aaa/aip/561980/>.

- [89] **Li, Z. B., He, J. H.**, 2011. Application of the fractional complex transform to fractional differential equations, *Nonlinear Science Letters A*, **2**, 121-126.
- [90] **He, J. H., Li, Z. B.**, 2012. Converting fractional differential equations into partial differential equations, *Thermal Science*, **16**, 331-334.
- [91] **Guo, S., Mei, L., Li, Y., Sun, Y.**, The improved fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in fluid mechanics, *Physics Letters A*, **376**, 4, 407-411.
- [92] **Zhang, S., Zhang, H. Q.**, 2011. Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional partial differential equations, *Physics Letters A*, **375**, 1069-1073.
- [93] **Jafari, H., Tajadodi, H., Kadkhoda, N., Baleanu, D.**, 2013. Fractional sub-equation method for Cahn-Hilliard and Klein-Gordon equations, *Abstract Applied Analysis*, **58**, 7179-7184.
- [94] **Gepreel, K. A., Omran, S.**, 2012. Exact solutions for nonlinear partial fractional differential equations, *Chinese Physics B*, **21**, 110204, doi:10.1088/1674-1056/21/11/110204.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2002 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2006 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2007 yılı ekim ayında Fen Bilimleri Enstitüsünün açtığı araştırma görevliliği kadrosunu kazandım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora başladım. Halen Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.