

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TESADÜFİ DEĞİŞKEN DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra Elif ET

Anabilim Dalı: İstatistik
Programı: Olasılık Teorisi ve Olasılıksal Süreçler
Danışman: Doç. Dr. Mahmut IŞIK
Ocak-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TESADÜFİ DEĞİŞKEN DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra Elif ET

(122133101)

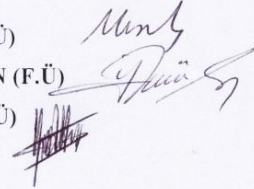
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 5 Ocak 2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 21 Ocak 2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü)

Doç. Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü)



Ocak-2015

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesi sürecinde benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, lisansüstü eğitimim boyunca, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Mahmut IŞIK'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Kübra Elif ET
ELAZIĞ–2015

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
GİRİŞ	1
1. GENEL KAVRAMLAR.....	2
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	2
1.2. İstatistiksel Yakınsaklık	8
1.3. λ -İstatistiksel Yakınsaklık	11
2. TESADÜFİ DEĞİŞKEN DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI.	13
.....	
2.1. Olasılıkta İstatistiksel Yakınsaklık	13
2.2. r-yinci Momentte İstatistiksel Yakınsaklık	18
2.3. Dağılımda İstatistiksel Yakınsaklık.....	20
3. TESADÜFİ DEĞİŞKENDİZİLERİNİN S_λ –YAKINSAKLIĞI.....	24
3.1. Tesadüfi Değişken Dizilerinin Olasılıkta S_λ – Yakınsaklığı	24
3.2. Tesadüfi Değişken Dizilerinin r-yinci Momentte S_λ – Yakınsaklığı	26
3.3. Tesadüfi Değişken Dizilerinin Dağılımda S_λ – Yakınsaklığı.....	27
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	32

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiş ve istatistiksel yakınsaklığın bazı özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde tesadüfi değişken dizilerinin olasılıkta istatistiksel yakınsaklığı, tesadüfi değişken dizilerinin r -yinci momentte istatistiksel yakınsaklığı ve tesadüfi değişken dizilerinin dağılımda istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir.

Son bölümde ise tesadüfi değişken dizilerinin S_λ – yakınsaklığı, r -yinci momentte S_λ – yakınsaklığı ve dağılımda S_λ – yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dağılım Fonksiyonu, Tesadüfi Değişken Dizisi, İstatistiksel Yakınsaklık

SUMMARY

STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES

In the first chapter of this thesis that consists of three chapters, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the next chapters and examine some properties of statistical convergence.

In the second chapter we examine the statistical convergence in probability, statistical convergence in the r^{th} moment, statistical convergence in distribution of sequences of random variables.

In the last chapter we give S_λ – convergence, S_λ – convergence in the r^{th} moment, S_λ – convergence in distribution of sequences of random variables.

Key Words: Distribution Function, Sequences of Random Variables, Statistical Convergence.

SEMBOLLER LİSTESİ

N	: Doğal sayılar cümlesi
C	:Kompleks sayılar cümlesi
W	: C üzerindetanımlı bütün diziler uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(K)$	: K 'nın doğal yoğunluğu
S_0	: Sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı
w_p	: Kuvvetli p -Cesaro toplanabilir diziler uzayı
$h.k.k$	: Hemen hemen tüm k 'lar
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
C	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı

GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [Fast,1951] ve Steinhaus [Steinhaus,1951] tarafından tanımlandı. Bu yakınsaklık tipi klasik anlamda yakınsaklığın bir genelleştirmesi olup pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık günümüze kadar çok sayıda matematikçi tarafından üzerinde çalışılmış ve halen çalışılmakta olan bir konudur. Özellikle Schoenberg [Schoenberg,1959], Salát [Salát,1980], Fridy [Fridy,1985], Connor [Connor,1988] gibi birçok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Buck [Buck,1953] reel ve kompleks diziler için istatistiksel yakınsaklığı geliştirerek bu kavramın genelleştirme fikrini ortaya atmıştır. Schoenberg [Schoenberg,1959], toplanabilme teorisi ile istatistiksel yakınsaklığın ilişkisini incelemiştir. Connor [Connor,1988] istatistiksel yakınsaklık kavramında C_1 Cesàro matrisi yerine negatif olmayan regüler A matrisi alarak A-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmıştır. İstatistiksel yakınsaklıkla ilişkili diğer önemli yakınsaklık tiplerinden biri Mursaleen [Mursaleen,2000] tarafından tanıtılan λ -istatistiksel yakınsaklıktır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde bir örnek uzayında alınan tesadüfi değişken dizilerinin olasılıkta istatistiksel yakınsaklığı tanımlanacak bu kavrama ilişkin bazı temel özellikler incelenecek, tesadüfi değişken dizilerinin r-yinci momentte istatistiksel yakınsaklığı ve tesadüfi değişken dizilerinin dağılımda istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

Çalışmanın son bölümde tesadüfi değişken dizilerinin S_λ –yakınsaklığı, r-yinci momentte S_λ –yakınsaklığı ve dağılımda S_λ – yakınsaklığı incelenecektir.

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım1.1.1.(Lineer Uzay) E boş olmayan bir küme ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : E \times E \rightarrow E$$

$$\cdot : K \times E \rightarrow E$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa E kümesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in E$ için

$$L1) x+y=y+x$$

$$L2) (x+y)+z=x+(y+z)$$

$$L3) x+\theta=x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in E \text{ vardır}$$

$$L4) \text{ Her } x \in E \text{ için } x+(-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in E \text{ vardır}$$

$$L5) 1.x=x$$

$$L6) \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$

$$L7) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$L8) \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x \quad [\text{Maddox,1970}].$$

Tanım1.1.2.(Normlu Uzay) E , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna E üzerinde bir norm ve $(E, \| \cdot \|)$ çifti ne de bir normlu uzay adı verilir.

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\|=0 \leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in K$$

$$N4) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad [\text{Kreyszing,1978}].$$

Tanım 1.1.3.(Cauchy Dizisi) Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m \geq n_0$ için $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir n_0 tamsayısı mevcut ise (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.1.4.(Yakınsak Dizi) Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir n_0 tamsayısı mevcut ise (x_n) dizisi x sayısına yakınsaktır denir. Yakınsak dizilerin kümesi c ile gösterilir ve

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer limit sıfır ise bu kümeyi c_0 ile göstereceğiz ve

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

yazacağız. Örneğin genel terimi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ olan dizi yakınsak bir dizidir ve limiti 1 dir. Genel terimi $\left(\frac{1}{n}\right)$ olan dizi ise sıfıra yakınsaktır, yani $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ dir. $c_0 \subset c$ olup ve bu kapsama kesindir, gerçekten $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \in c - c_0$ dir. Yakınsak her dizi Cauchy dizisidir, ancak tersi genelde doğru değildir. (Banach uzaylarında yani tam uzaylarda terside doğrudur). Gerçekten (x_n) dizisi x sayısına yakınsak ise $n \geq n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir n_0 tamsayısı mevcuttur. Şimdi $n, m \geq n_0$ olsun. Bu takdirde

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Bu (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması demektir. Tersinin sağlanmadığını göstermek için $E = (0,1)$ uzayını alalım ve $x = (1/n)$ olsun. Bu dizi Cauchy dizisidir, fakat E de yakınsak değildir. Eğer $E = [0,1]$ ise bu takdirde E 'de bulunan 0 noktasına yakınsar.

Tanım 1.1.5 (Banach Uzayı) Bir $(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise , yani bu uzaydan alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.6 (Sınırlı Dizi) (x_n) dizisi verilsin. $k \leq x_n \leq K$ olacak şekilde k ve K sayıları varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir. Bu tanıma göre sınırlı bir dizi hem üstten hem

de alttan sınırlı bir dizidir. Ayrıca $M \geq 0$ olmak üzere $K=M$ ve $k=-M$ alınırsa sınırlılığın tanımından $k \leq x_n \leq K$ ifadesi $|x_n| \leq M$ olarak yazılabilir. Örneğin genel terimi $(-1)^n$ olan dizi sınırlı bir dizidir. Çünkü $|(-1)^n| \leq 1$ dir. Yakınsak her dizi sınırlıdır, ancak tersi doğru değildir, yani sınırlı diziler yakınsak olmak zorunda değildir. Örneğin $x = ((-1)^n)$ dizisi sınırlıdır, ancak bu dizi -1 ve +1 sayılarına yakınsar, halbuki bir dizi yakınsak ise limiti tekdir. Sınırlı dizilerin kümesi l_∞ ile gösterilir ve

$$l_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

şeklinde ifade edilir. $c \subset l_\infty$ olup ve bu kapsama kesindir, gerçekten $((-1)^n) \in l_\infty - c$ dir. c_0 , c ve l_∞ uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach (tam) uzayıdır.

Tanım 1.1.7. (Tesadüfi Değişken) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$X: \Omega \rightarrow R$$

$$w \rightarrow X(w)$$

şeklinde tanımlanan X fonksiyonu,

$$\forall a \in R \text{ için } \{w : X(w) \leq a\} \in U$$

özellikli sağlıyorsa, X fonksiyonuna bir tesadüfi (rasgele) değişken denir.

Tanım 1.1.8. (Tesadüfi Değişkenler Dizisi) Her pozitif n tamsayısı için X_n S örnek uzayında tanımlanan tesadüfi değişken olsun. S, Δ_n bir alt kümesi olmak üzere $P: \Delta \rightarrow R$ olasılık fonksiyonu olsun. O zaman $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ dizisine tesadüfi değişkenler dizisi denir ve $\{X_n\}_{n \in N}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.9. (Dağılım Fonksiyonu) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere P olasılık ölçüsü yardımı ile reel sayılardan $[0,1]$ aralığına,

$$F: R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(\{w : X(w) \leq x\})$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna, X tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonu (birikimli dağılım fonksiyonu) denir.

Dağılım fonksiyonu için genellikle, $F(x) = P(X \leq x)$ gösterimi kullanılır. Bir X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu için öncelikle (Ω, U, P) olasılık uzayının belirli olması gerekir. X bir tesadüfi değişken olduğu için her $x \in R$ için $\{w: X(w) \leq x\} \in U$ dir [Akdi,2011].

Tanım 1.1.10.(r.moment) X rastgele değişkeninin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve her $r \in N$ için $E(X^r)$ mevcut olsun. $E(X^r)$ değerine X rastgele değişkenin r .momenti denir ve μ_r ile gösterilir. Ayrıca,

a) $r=1$ için $E(X)$ değerine X in beklenen değeri denir ve μ ile gösterilir.

b) $E(X - \mu)^r$ değerine X in μ ye göre r . merkezi momenti denir ve μ_r ile gösterilir.

c) $m_2 = E(X - \mu)^2$ değerine X in varyansı denir ve $Var(X)$ veya σ^2 ile gösterilir.

d) $E(X(X-1)(X-2)...(X-(r+1)))$ değerine X in r . çarpımsalmomentleri denir.

$Var(X) = \mu_2 - \mu_1^2$ olup X rasgele değişkenin varyansının pozitif kareköküne X in standart sapması denir. X in varyansı σ^2 ise standart sapması $\sigma(\sigma > 0)$ dir. Bir X rasgele değişkeni, herhangi bir $x_0 \in R$ noktasına göre simetrik olabilmesi için gerek ve yeter koşul bütün $x \in R$ ler için $P(X \geq x_0 + x) = P(X \leq x_0 - x)$ olmasıdır. Herhangi bir X rasgele değişkeni C noktasına göre simetrik ise, $E(X) = C$ dir. [Akdi,2011].

Tanım 1.1.11 (Örnek Uzayı) Bir deneyin tüm olası sonuçlarının kümesine örnek uzay denir ve S harfi ile gösterilir [Akdi,2011].

Tanım 1.1.12 (Olasılıkta Yakınsama) $n \in N$ için X_n tesadüfi değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ ve $\exists n_0(\varepsilon)$ ve öyle ki $n > n_0(\varepsilon)$ için

$$P(\{w: |X_n(w) - x(w)| > \delta\}) < \varepsilon$$

özellği sağlanıyorsa X_n tesadüfi değışkenlerinin dizisi $n \rightarrow \infty$ iken X tesadüfi değışkenine olasılıkta yakınıyor denir ve $X_n \xrightarrow{p} X$ şeklinde gösterilir.

X_n tesadüfi değışken dizisinin X tesadüfi değışkenine olasılıkta yakınsaması genellikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{w : |x_n(w) - x(w)| > \varepsilon\}) = 0 \quad (\text{veya} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca reel sayı dizilerinde olduğu gibi $X_n \xrightarrow{p} X$ ise $X_n = 0_p(1)$ ve f_n reel sayıların bir dizisi olmak üzere $X_n / f_n = 0_p(1)$ ise $X_n = 0_p(f_n)$ yazılır [Akdi , 2011].

Tanım 1.1.13 (Olasılıkta Sınırlılık) Her $n \in N$ için X_n tesadüfi değışkenlerinin herhangi bir dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir M_ε ve N_ε sayıları var ve $n > N_\varepsilon$ için

$$P(\{w : |X_n| > M_\varepsilon\}) < \varepsilon$$

oluyorsa X_n tesadüfi değışkenlerinin dizisi olasılıkta sınırlıdır denir ve $X_n = 0_p(1)$ ile gösterilir. Olasılıkta sınırlılık için genellikle

$P(\{w : |X_n| > M_\varepsilon\}) < \varepsilon$ yerine $P(|X_n| > M_\varepsilon) < \varepsilon$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| > M_\varepsilon) = 0$ gösterimleri kullanılır [Akdi , 2011].

Tanım 1.1.14 (Hemen Hemen Her Yerde Yakınsama) X_n tesadüfi değışkenlerin bir dizisi olsun. X_n tesadüfi değışkenlerin dizisi her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \{w : |x_n(w) - x(w)| > \varepsilon\}) = 0$$

özellği sağlanıyorsa X_n hemen hemen her yerde X tesadüfi değışkenine yakınsar ve $X_n \xrightarrow{hhhy} X$ ile gösterilir [Akdi , 2011].

Tanım 1.1.15 (Momentlerde Yakınsama) X_n tesadüfi değışkenlerin dizisi ve X de herhangi bir tesadüfi değışken olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $E(X_n - X)^r \rightarrow 0$ ise X_n tesadüfi

değişkenlerinin dizisi X değişkenine r . momentte yakınsıyor denir ve $X_n \xrightarrow{r} X$ ile gösterilir..

X_n tesadüfi değişkenlerinin dizisi X tesadüfi değişkenine momentlerde yakınsıyor ise olasılıkta da yakınsar. Yanlız bunun tersi doğru değildir [Akdi , 2011].

Örnek 1.1.1 $X_n \xrightarrow{r} X$ ise $X_n \xrightarrow{p} X$ dir. Bunun için $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{r} X$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için Chebyshev eşitsizliğinden

$$0 \leq P(|X_n - X|) \leq \frac{E(X_n - X)^r}{\varepsilon^r}$$

elde edilir. $X_n \xrightarrow{r} X$ ise $E(X_n - X)^r \rightarrow 0$ olup $n \rightarrow \infty$ iken $P(|X_n - X|) > \varepsilon \rightarrow 0$ dır. Tersinin doğru olmadığını göstermek için X_n tesadüfi değişkenleri

$$p(X_n = n^3) = \frac{1}{n^2} \text{ ve } P(X_n = 0) = 1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olacak şekilde Bernoulli tesadüfi değişkenlerinin bir dizisi olarak seçelim. Yani

$$X_n = \begin{cases} n^3, & n^{-2} \text{ ise} \\ 0, & 1 - n^{-2} \text{ ise} \end{cases}$$

Dizisi verilmiş olsun. Burada her $\varepsilon > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken

$$P(|X_n| > \varepsilon) = n^{-2} \rightarrow 0$$

olduğunda $X_n \xrightarrow{p} 0$ olup olasılıkta yakınsama gerçekleşir. Olasılıkta yakınsama gerçekleşmiş olmasına rağmen $n \rightarrow \infty$ için $r \geq 1$ için

$$E(X_n - 0)^r = E(X_n)^r = 0^r P(X = 0) + n^{3r} P(X = n^3) = n^{3r} (n^{-2}) = n^{3r-2} \rightarrow \infty$$

dır. Yani momentte yakınsama gerçekleşmez [Akdi , 2011].

Tanım 1.1.16 (Dağılımda Yakınsama) X_n dağılım fonksiyonları F_n olan rasgele değişkenlerinin bir dizisi olsun. Dağılım fonksiyonu F olan X rasgele değişkeni için, F nin sürekli olduğu yerlerde $n \rightarrow \infty$ iken $F_n(x) \rightarrow F(x)$ ise X_n rasgele değişkenleri dağılımda X rasgele değişkenine yakınsıyor denir ve $X_n \xrightarrow{D} X$ ile gösterilir.

1.2. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast [Fast,1951] ve Schoenberg [Schoenberg, 1951] tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verilmiştir. O zamandan beri istatistiksel yakınsaklık, farklı isimler altında Fourier analiz, ergodic teori ve sayılar teorisinde kullanılmıştır. Her iki araştırmacı tarafından sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık, Fridy [Fridy,1985], Salat [Salat,1980], Connor [Connor,1988], Mursaleen [Mursaleen,2000] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Tanım 1.2.1. (Doğal Yoğunluk) Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K)=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:k\in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k\leq n:k\in K\}|$ K'nın n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir. Eğer $\delta(K) = 0$ ise K ya sıfır yoğunluklu cümle denir Fridy [Fridy ,1985].

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir cümle dışında bütün k lar için sağlıyorsa (x_k) dizisi P özelliğinin hemen hemen her k için sağlıyor denir ve "h.h.h.k" şeklinde gösterilir.

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından yararlanarak istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 1.2.2. (İstatistiksel Yakınsak Dizi) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun . Eğer $\forall \epsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}|\{k\leq n:|x_k - L|\geq \epsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, yani, h.h.h.k için $|x_k - L| < \epsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir, $\text{stat-lim}(x_k) = L$ veya $x_n \xrightarrow{st} L$ şeklinde gösterilir.Bütün istatistiksel yakınsak dizileri cümlesini S ile göstereceğiz. Eğer $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir ve S_0 ile gösterilir [Fridy ,1985].

Aşağıdaki dizi sıfıra istatistiksel yakınsak bir dizidir.

$x = (x_k)$ dizisi $m \in N$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

dir. Bu ise $\lim_k x_k = L$ isest- $\lim_k x_k = L$ demektir.

Bilinen anlamda yakınsak diziler istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak diziler yakınsak olmak zorunda değildir. İstatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani l_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten

$x = (x_k)$ dizisi $m \in N$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} k, & k = m^2 \\ 1 & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın $x = (x_k)$ dizisi için $S\text{-}\lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin l_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$

dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S\text{-}\lim x_k = L_1$,

$S\text{-}\lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 1.2.3. $S\text{-}\lim x_k = a$, $S\text{-}\lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

i) $S\text{-}\lim c x_k = c a$

ii) $S\text{-}\lim (x_k + y_k) = a + b$

dir. Yani istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzaydır.

Tanım 1.2.4 (p-Cesaro Yakınsak Dizi) $x \in w$, ve $p \in R^+$ olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli p -Cesaro toplanabilir denir. Kuvvetli p -Cesaro toplanabilir diziler uzayı w_p ile gösterilecek ve en az bir $L > 0, p > 0$ için

$$w_p = \{x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \rightarrow 0 \text{ en az bir } L > 0, p > 0 \text{ için, } n \rightarrow \infty\}$$

şeklinde ifade edilecektir [Maddox, 1970].

İstatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p -Cesarotoplanabilirlik arasındaki ilişki Connor [Connor, 1988] tarafından ifade edildi. Bunun için önce aşağıdaki tanımı hatırlayalım.

Kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k=1,2,...)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz. w ,

$x = (x_k), y = (y_k)$ ve α skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p -Cesaro toplanabilir diziler arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.2.5 $p \in \mathbb{R}$ $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi L ye kuvvtli p -Cesaro toplanabilir ise bu taktirde L ye istatistiksel yakınsaktır. Eğer bir dizi sınırlı ve L ye istatistiksel yakınsak ise bu dizi kuvvetli p -Cesaro toplanabilir

İspat: $x \in w$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \sum_{|x_k - L| < \varepsilon} |x_k - L|^p + \sum_{|x_k - L| \geq \varepsilon} |x_k - L|^p \\ &\geq \sum_{|x_k - L| \geq \varepsilon} |x_k - L|^p \\ &= \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \leq \varepsilon^p \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa st-lim $x_k = L$ olduğu görülür.

Şimdi $x \in L$ ve st-lim $x_k = L$ olsun $K = \|x\|_\infty + |L|$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin ve N_ε sayısını her $n \succ N_\varepsilon$ olmak üzere

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| x_k - L \right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : \left| x_k - L \right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Şimdi $n \succ N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| x_k - L \right|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k \in L_n} \left| x_k - L \right|^p + \sum_{k \notin L_n} \left| x_k - L \right|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} \right) K^p + \left(\frac{1}{n} \right) (n) \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ [Connor, 1988]}. \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan x dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesaro toplanabilir.

Bu teoreme göre sınırlı diziler üzerinde p -Cesaro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık denktir.

1.3. λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Λ ile pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ özelliğini sağlayan sonsuza giden ve azalmayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini gösterelim. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına (V, λ) -toplanabilir denir. Eğer $\lambda_n = n$ ise bu durumda (V, λ) -toplanabilme, $(C, 1)$ -toplanabilmeye indirgenir. Kuvvetli $(C, 1)$ -toplanabilir ve kuvvetli (V, λ) -toplanabilir dizilerin kümeleri sırasıyla

$$[C,1]=\left\{x=(x_n): \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0\right\}$$

ve

$$[V,\lambda]=\left\{x=(x_n): \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3.1. $\lambda \in \Lambda$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L ye λ – istatistiksel yakınsaktır veya L ye S_λ – yakınsaktır denir Bu durumda $S_\lambda \text{-}\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ yazılır [Mursaleen,2000].

2. TESADÜFİ DEĞİŞKEN DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümün ilk kısmında bir örnek uzayında alınan tesadüfi değişken dizilerinin olasılıkta istatistiksel yakınsaklığı tanımlanacak bu kavrama ilişkin bazı temel özellikler incelenecek, ikinci kısımda tesadüfi değişken dizilerinin r-yincimomentte istatistiksel yakınsaklığı, son bölümde ise tesadüfi değişken dizilerinin dağılım anlamında istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

2.1. Olasılıkta İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.1.1 (Olasılıkta İstatistiksel Yakınsaklık) $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, S örnek uzayında tanımlı tesadüfi değişkenlerin bir dizisi ve Δ örnek uzayların bir sınıfı olmak üzere $P: \Delta \rightarrow R$ olasılık fonksiyonu olsun. Eğer her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : P(|X_k - X| \geq \varepsilon) \geq \delta\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X tesadüfi değişkeni varsa veya buna denk olarak

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq 1 - P(|X_k - X| \geq \varepsilon) \geq \delta\} \right| = 0,$$

ise $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tesadüfi değişken dizisi X tesadüfi değişkenine olasılıkta istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_k - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_k - X| \leq \varepsilon) = 1 \quad \text{yada} \quad X_n \xrightarrow{st_p} X$$

şeklinde gösterilir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.1.1. (x_n) reel terimli bir dizi ve $x_n \xrightarrow{st} x$ olsun. Bu takdirde $x_n \xrightarrow{st_p} x$ dir, yani adi anlamda istatistiksel yakınsak bir dizi olasılıkta istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. (x_n) dizisi adi anlamda istatistiksel yakınsak olduğundan $M = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $d(M) = 1$ dir. Böylece herhangi bir $\delta > 0$ için $B = \{n \in \mathbb{N} : 1 - P(|x_n - x| < \varepsilon) \geq \delta\} \subseteq \mathbb{N} - M$ olmak üzere $d(B) = 1$ dir. Bu $x_n \xrightarrow{st_p} x$; yani (x_n) dizisinin olasılıkta istatistiksel yakınsak olması demektir. [Ghosal, 2013].

Aşağıdaki örnekten anlaşılacağı üzere Teorem 2.1.1 in tersi doğru değildir

Örnek 2.1.1 $0 < \varepsilon, \delta < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu X_n

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ ve } n = 2^m \text{ ise} \\ 0, & \text{diger durumlarda ve } n = 2^m \text{ ise} \\ \frac{nx^{n-1}}{2^n}, & 0 < x < 2 \text{ ve } n = 2^m \text{ ise} \\ 0, & \text{diger durumlarda ve } n = 2^m \text{ ise} \end{cases}$$

şekilde tanımlansın. Bu takdirde $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$P(|X_n - 2| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 1, & n = 2^m \text{ ise} \\ 1 - P(|X_n - 2| < \varepsilon) = 1 - \{1 - (\frac{2-\varepsilon}{2})^n\} = (1 - \frac{\varepsilon}{2})^n, & n \neq 2^m \text{ ise} \end{cases}$$

olup A , $\mathbb{N}$ nin sonlu bir alt kümesi olmak üzere

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : P(|X_n - 2| \geq \varepsilon) \geq \delta\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |2^0, 2^1, 2^2, \dots\} \cup A| = 0$$

yazabiliriz. Böylece

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : P(|X_n - 2| \geq \varepsilon) \geq \delta\}| = 0$$

elde edilir.

Olasılıkta istatistiksel yakınsaklık adi anlamda istatistiksel yakınsaklıktan farklı olmasına rağmen aşağıdaki sonuçlar olasılıkta istatistiksel anlamda yakınsaklık için de sağlanır [Ghosal, 2013].

Teorem 2.1.2.

$$i) X_n \xrightarrow{st_p} X \text{ ve } Y_n \xrightarrow{st_p} Y \text{ ise } P\{X = Y\} = 1,$$

$$ii) X_n \xrightarrow{st_p} X \Leftrightarrow X_n - X \xrightarrow{st_p} 0,$$

iii) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $X_n \xrightarrow{st_p} X \Rightarrow cX_n \xrightarrow{st_p} cX$,

iv) $X_n \xrightarrow{st_p} X$ ve $Y_n \xrightarrow{st_p} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{st_p} X + Y$,

v) $X_n \xrightarrow{st_p} X$ ve $Y_n \xrightarrow{st_p} Y \Rightarrow X_n - Y_n \xrightarrow{st_p} X - Y$

vi) $X_n \xrightarrow{st_p} x \Rightarrow X_n^2 \xrightarrow{st_p} x^2$

vii) $X_n \xrightarrow{st_p} x$ ve $Y_n \xrightarrow{st_p} y \Rightarrow X_n \cdot Y_n \xrightarrow{st_p} x \cdot y$

viii) $X_n \xrightarrow{st_p} x$ ve $Y_n \xrightarrow{st_p} Y \Rightarrow X_n / Y_n \xrightarrow{st_p} x / y, y \neq 0$,

ix) $X_n \xrightarrow{st_p} X$ ve $Y_n \xrightarrow{st_p} y \Rightarrow X_n \cdot Y_n \xrightarrow{st_{rm}} X \cdot Y$,

x) $0 \leq X_n \leq Y_n$ ve $Y_n \xrightarrow{st_p} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{st_p} 0$

xi) $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $X_n \xrightarrow{st_p} X$ ise

$$d(\{n \in \mathbb{N} : P(|x_n - x_k| \geq \varepsilon) \geq \delta\}) = 0$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu son şart olasılık anlamda Cauchy şartı olarak adlandırılır.

İspat. $\varepsilon, \delta > 0$ sayıları verilsin.

$$i) \quad k \in \{n \in \mathbb{N} : P(|X_n - X| \geq \frac{1}{2}\varepsilon) < \frac{1}{2}\delta\} \cap \{n \in \mathbb{N} : P(|X_n - Y| \geq \frac{1}{2}\varepsilon) < \frac{1}{2}\delta\}$$

olsun. Bu takdirde

$$P(|X - Y| \geq \varepsilon) \leq P(|X_k - X| \geq \frac{1}{2}\varepsilon) + P(|X_k - Y| \geq \frac{1}{2}\varepsilon) < \delta$$

yazılabilir. Bu $P\{X = Y\} = 1$ olmasını gerektirir.

(ii), (iii), (iv) ve (v) in ispatları (i)' in ispatına benzerdir.

vi) Eğer $Z_n \xrightarrow{st_p} 0$ ve $Z_n^2 \xrightarrow{st_p} 0$ ise

$$\{n \in \mathbb{N} : P(|Z_n^2 - 0| \geq \varepsilon) \geq \delta\} = \{n \in \mathbb{N} : P(|Z_n - 0| \geq \sqrt{\varepsilon}) \geq \delta\}$$

yazabiliriz. Buradan

$$X_n^2 = (X_n - x)^2 + 2x(X_n - x) + x^2 \xrightarrow{st_p} x^2$$

yazılabilir.

vii) nin ispatı aşağıdaki eşitlikten elde edilir.

$$X_n Y_n = \frac{1}{4} \{ (X_n + Y_n)^2 - (X_n - Y_n)^2 \} \xrightarrow{st_p} \frac{1}{4} \{ (x + y)^2 - (x - y)^2 \} = xy.$$

viii) A ve B sırasıyla " $|Y_n - y| < |y| \geq \varepsilon$ " ve " $|1/Y_n - 1/y| \geq \varepsilon$ " olaylarını gösterebilirsin.

Buna göre

$$\left| \frac{1}{Y_n} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|Y_n - y|}{|y Y_n|} = \frac{|Y_n - y|}{|y| |y + (Y_n - y)|} \leq \frac{|Y_n - y|}{|y| (|y| - |Y_n - y|)}$$

olur A ve B eşzamanlı meydana gelirse, o zaman yukarıdaki eşitsizlikten

$$|Y_n - y| \geq \frac{\varepsilon |y|^2}{1 + \varepsilon |y|}$$

yazılabilir. $\varepsilon_0 = \varepsilon |y|^2 / (1 + \varepsilon |y|)$ olsun ve C de " $|Y_n - y| \geq \varepsilon_0$ " olayını gösterebilirsin. Bu

durumda $\bar{A}$, A nı tümleneni göstermek üzere $AB \subseteq C$ olması $P(B) \leq P(C) + P(\bar{A})$ olmasını gerektirir.

Buradan

$$\{n \in N : P\left|\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{y}\right| \geq \varepsilon\} \supseteq \{n \in N : P(|Y_n - y|) \geq \varepsilon_0 \frac{1}{2} \delta\} \cup$$

$\{n \in N : P(|Y_n - y|) \geq |y| \frac{1}{2} \delta\}$ yazabiliriz. Böylece $\neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{Y_n} \xrightarrow{st_p} \frac{1}{y}$ olur. Sonuç olarak

(vii) den $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{st_p} \frac{x}{y}$

yazılabilir.

(ix) İlk olarak $X_n \xrightarrow{st_p} X$ ve Z tesadüfi değişken olmak üzere $X_n Z \xrightarrow{st_p} XZ$ olduğunu

gösterelim. Z tesadüfi değişken olduğundan verilen her $\delta > 0$ için $P(|Z| > \alpha) \leq \frac{1}{2} \delta$ olacak

şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı vardır. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} P(|X_n Z - X Z| \geq \varepsilon) &= P(|X_n - X| |Z| \geq \varepsilon, |Z| > \alpha) + P(P(|X_n - X| |Z| \geq \varepsilon, |Z| \leq \alpha)) \\ &\leq \frac{1}{2} \delta + P\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\{n \in N : P(|X_n Z - XZ| \geq \varepsilon) \geq \delta\} \subseteq \{n \in N : P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{\alpha}) \geq \frac{1}{2} \delta\}$$

olup, buradanda $(X_n - X)(Y_n - Y) \xrightarrow{st_p} 0$ yazılabilir. Böylece $X_n Y_n \xrightarrow{st_p} XY$ elde edilir.

$$\text{xi) } k \in N \text{ doğal sayısını } P(|X_k - X| \geq \frac{1}{2} \varepsilon) < \frac{1}{2} \delta,$$

yani

$$d\left(\{n \in N : P(|X_n - X| \geq \frac{1}{2} \varepsilon) < \frac{1}{2} \delta\} = 1\right) \text{ olacak şekilde seřelim. Bu durumda}$$

$$\{n \in N : P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \delta\} \subseteq \{n : N : P(|X_n - X| \geq \frac{1}{2} \varepsilon) \geq \frac{1}{2} \delta \text{ olur} \quad [\text{Ghosal,}$$

2013].

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 2.1.2 den yararlanılarak yapılır.

Teorem2.1.3. $\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişkenlerin bir dizisi ve $\{x_n\}_{n \in N}$ de $X_n - x_n \xrightarrow{st_p} 0$ olacak şekilde reel sayıların bir dizisi olsun. $m(X_n)$, X_n tesadüfi değişkenlerin dizilerinin medyanını göstermek üzere

$$X_n - m(x_n) \xrightarrow{st_p} 0 \text{ ve } x_n - m(x_n) \xrightarrow{st_p} 0 \text{ dır} [\text{Ghosal, 2013}].$$

Teorem2.1.4. $X_n \xrightarrow{st_p} X$ ve $g : R \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $g(X_n) \xrightarrow{st_p} g(X)$ dir.

İspat: X tesadüfi değişken olduğundan her $\delta > 0$ için $P(|X| > \alpha) \leq \frac{1}{2} \delta$ olacak şekilde bir α sayısı vardır. g , $[-\alpha, \alpha]$ aralığında sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|X| \leq \alpha$ ve $|X_n - X| < \delta_0$ olduğunda $|g(X_n) - g(X)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir δ_0 sayısı vardır. Böylece

$$P(|g(X_n) - g(X)| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \delta_0) + P(|X| > \alpha) \leq$$

$$P(|X_n - X| \geq \delta_0 + \frac{1}{2} \delta)$$

dır. Buradan

$$\{n \in N : P(|g(X_n) - g(X)| \geq \delta_0) \subseteq \{n \in N : P(|X_n - X| \geq \delta_0) \geq \frac{1}{2} \delta_0$$

yazılabilir. Bu ispatı tamamalar [Ghosal, 2013].

2.2. r-yinci Momentte İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.2.1. (r-yinci Momentte İstatistiksel Yakınsaklık) Eğer her $n \in N$ için $E(|X_n|^r)$ ve $E(|X|^r)$ mevcut olacak şekilde herhangi bir $\delta > 0$ için

$$d(\{n \in N : E(|X_n - X|^r \geq \delta\}) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişken dizi bir X tesadüfi değişkenine r -yinci momentte istatistiksel yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^r) = 0$ veya $X_n \xrightarrow{st_{rm}} X$ şeklinde gösterilir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.2.1. $X_n \xrightarrow{st_{rm}} X$ ($r > 0$) olsun. Bu takdirde $X_n \xrightarrow{st_p} X$ dir, yani r -yinci momentte istatistiksel yakınsaklık, olasılıkda istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

İspat. İspat aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$P(|X - m|^r \geq \varepsilon) \leq E\{|X - m|^r \geq \varepsilon\} / \varepsilon^r.$$

Teorem 2.2.1 in tersi genelde doğru değildir. Bu durumu aşağıdaki örnek ile açıklayalım [Ghosal, 2013].

Örnek 2.2.1. $\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişkenler dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_n \in \{0, n\} \text{ olmak üzere } P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^r}$$

ve

$$r > 0, n \in N \quad P(X_n = 0) = \frac{1}{n^r}.$$

Bu takdirde $\varepsilon > 0$ için, $0 < \varepsilon \leq n$ ise $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P(X_n = n)$ dir $\varepsilon > n$ ise $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$ dir. Böylece herhangi bir $\delta > 0$ için $\{n \in N : P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) \geq \delta\} =$

sonlu küme $\Rightarrow st - \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$ dir. Fakat her $n \in N$ için $E(|X_n|^r) = 1$ ise $\{E(|X_n - 0|^r \geq \frac{1}{2})\} = N$ olur. Buradan $\{E(|X_n - 0|^r \geq \frac{1}{2})\}_{n \in N}$ kümesi 0 sayısına istatistiksel yakınsak değildir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.2.2. $X_n - X, Y_n - Y \geq 0$ olacak şekilde $X_n \xrightarrow{st_{rm}} X$ ve $Y_n \xrightarrow{st_{rm}} Y$ ise $X_n + Y_n \xrightarrow{st_{rm}} X + Y$ dir.

İspat. İspat, X ve Y negatif olmayan tesadüfi değişkenler ve $r > 0$ olmak üzere $E(X + Y)^r \leq 2^r [E(X)^r + E(Y)^r]$ yazılabilir. İspat bu eşitsizlikten çıkar [Ghosal, 2013].

Teorem 2.2.3. $\{a_n\}_{n \in N}$ dizisi $st - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve $a \geq 0$ olacak şekilde negatif olmayan bir reel sayılar dizisi olsun. Bu takdirde $q \in Q^+$ olmak üzere $st - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^q = a^q$ dir.

İspat. $q = m/r \in Q^+$ olsun. Eğer $a = 0$ ise sonuç aşıkardır. Bunun için $a > 0$ seçelim. $r \in N \setminus \{1\}$ olmak üzere $st - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ limitinin $st - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/r} = a^{1/r}$ limitini gerektirdiğini göstermek yeterlidir. Bu durumda $\{n \in N : |a_n - a| < \frac{1}{2}a\} \subseteq \{n \in N : a_n > \frac{1}{2}a\} = M$ dir. ($d(M) = 1$ diyelim) olup

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| (a_n)^{1/r} - a^{1/r} \right| \left| \{ (a_n)^{(r-1)/r} + (a_n)^{(r-2)/r} a^{1/r} + \dots + (a_n)^{1/r} a^{(r-2)/r} + a^{(r-1)/r} \} \right| \\ &\geq L \left| (a_n)^{1/r} - a^{1/r} \right| \end{aligned}$$

dir.

Buradan $L = a^{(r-1)/r} / 2(1 - 1/\sqrt[r]{2})$ dir.

Yani,

$M \subset \{n \in N : 0 \leq |(a_n)^{1/r} - a^{1/r}| \leq L^{-1}|a_n - a|\}$ dir. Buradan $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[r]{a_n} = \sqrt[r]{a}$ dir [Ghosal, 2013].

2.3. Dağılımda İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.3.1 (Dağılımda İstatistiksel Yakınsaklık) Her $n \in N$ için $F_n(x)$, X_n nin dağılım fonksiyonu olmak üzere $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisitesadüfi değişkenlerin bir dizisi olsun. x noktasında $F(x)$ dağılım fonksiyonu sürekli olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ olacak şekilde bir X tesadüfi değişkeni varsa $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisi X e dağılımda istatistiksel yakınsaktır denir . Bu durum $X_n \xrightarrow{st_d} X$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki iki teoremi ispatlı olarak vereceğiz [Ghosal, 2013].

Teorem 2.3.1. $\{X_n\}_{n \in N}$ bir tesadüfi değişkenler dizisi olsun. Ayrıca, her $i \in N$ için $f_n(x_i) = P(X_n = x_i)$, X_n ($n \in N$) nin olasılıksal kütle fonksiyonu ve her $i \in N$ için $f(x_i) = P(X = x_i)$ de X in olasılıksal kütle fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$f_n(x) \xrightarrow{st} f(x), \forall x \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{st_d} X$$

dir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.3.2. $\{a_n\}_{n \in N}$ ve $\{b_n\}_{n \in N}$, her $n \in N$ için $a_n \leq b_n$ olacak şekilde iki reel sayı dizisi olsun. Bu takdirde

$$st - \lim a_n \leq st - \lim b_n \text{ and } st - \overline{\lim} a_n \leq st - \overline{\lim} b_n$$

dir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.3.3. $X_n \xrightarrow{st_p} X$ olsun. Bu takdirde $X_n \xrightarrow{st_d} X$ dir, yani olasılıkda istatistiksel yakınsaklık, dağılımda istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

İspat. $F_n(x)$ ve $F(x)$, sırasıyla X_n ve X in dağılım fonksiyonları olsun. $x < y$ olmak üzere herhangi iki x ve y reel sayıları için

$$(X \leq x) = (X_n \leq y, X \leq x) + (X_n > y, X \leq x)$$

elde edilir. $(X_n \leq y, X \leq x) \subset (X_n \leq y)$ olduğundan

$$(X \leq x) \subseteq (X_n \leq y) + (X_n > y, X \leq x)$$

dir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &\leq P(X_n \leq y) + P(X_n > y, X \leq x) \\ &\leq P(X_n \leq y) + P(X_n > y, X \leq x) \\ &\Rightarrow F_n(y) \geq F(x) - P(X_n > y, X \leq x) \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde eğer $X_n > y, X \leq x$ olursa $X_n > y, -X \geq -x$ ve böylece $X_n - X > y - x$, yani $(X_n > y, X \leq x) \subseteq (X_n - X > y - x) \subseteq (|X_n - X| > y - x)$ olur ki bu da

$$P(X_n > y, X \leq x) \leq P(|X_n - X| > y - x)$$

olmasını gerektirir.

$x < y$ ve $X_n \xrightarrow{st_p} X$ olduğundan

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > y, X \leq x) = 0$$

elde edilir. Böylece $st - \underline{\lim} F_n(y) \geq F(x)$ bulunur.

Benzer şekilde eğer $y < z$ ise bu durumda

$$(X_n \leq y) = (X \leq z, X_n \leq y) + (X > z, X_n \leq y)$$

olur ve böylece

$$F_n(y) \leq F(z) + P(X > z, X_n \leq y) = 0 \text{ ve } st - \lim_{n \rightarrow \infty} P(X > z, X_n \leq y) = 0$$

olur. Sonuç olarak $st - \overline{\lim} F_n(y) \geq F(z)$ elde edilir. Buna göre $x < y < z$ için

$$F(x) \leq st - \underline{\lim} F_n(y) \leq st - \overline{\lim} F_n(y) \leq F(z)$$

bulunur.

Eğer F , y de sürekli ise

$$F(y) = \lim_{x \rightarrow y-} F(x) \leq st - \underline{\lim} F_n(y) \leq st - \overline{\lim} F_n(y) \leq \lim_{x \rightarrow y+} F(x) = F(y)$$

olur. Bu $st - \underline{\lim} F_n(y) \leq st - \overline{\lim} F_n(y) = F(y)$ olmasını yani $X_n \xrightarrow{st_d} X$ yi gerektirir.

Teorem 2.3.3 ün tersi genelde doğru değildir. Bunun için $X, X_1, X_2, \dots$ tesadüfi değişkenlerinin birim dağılıma sahip olduğunu kabul edelim. İki boyutlu (X_n, X) değişkeninin spektrumu $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ ve

$$P(X_n = 0, X = 0) = 0 = P(X_n = 1, X = 1),$$

$$P(X_n = 0, X = 1) = \frac{1}{2} = P(X_n = 1, X = 0),$$

olsun. Böylece, X_n nin marjinal dağılımı $p_{x_n,0} = \frac{1}{2} = p_{x_n,1}$ olmak üzere $p_{x_n,i} = P(X_n = i)$ olasılıksal kütle fonksiyonu yardımıyla $X_n = i$ ($i = 0,1$) şeklinde; $p_{x,0} = \frac{1}{2} = p_{x,1}$ olmak üzere $p_{x,j} = P(X = j)$ olasılıksal kütle fonksiyonu yardımıyla $X = j$ ($j = 0,1$) şeklinde verilir.

Eğer $F_n(x)$ ve $F(x)$, sırasıyla X_n ve X in dağılım fonksiyonları ise

$$F(x) = F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

dir. Bu nedenle her $x \in R$ için $st - \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$, yani $n \rightarrow \infty$ için $X_n \xrightarrow{st_d} X$ dir.

Fakat,

$$P(|X_n - X| \geq \frac{1}{2}) = P(|X_n - X| = 1) = P(X_n = 0, X = 1) + P(X_n = 1, X = 0) = 1$$

Dir. Bu nedenle $st - \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \frac{1}{2}) \neq 0$ dir. Bu takdirde

$st - \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \neq 0$ dir [Ghosal, 2013].

Aşağıdaki teoremleri ispatları Teorem 2.1.2 nin ispatına benzerdir, bu yüzden bu teoremleri ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 2.3.4. $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisi $X_n \xrightarrow{st_d} X$ olacak şekilde bir tesadüfi değişkenler dizisi ve c bir sabit olsun. Bu takdirde,

$$(a) X_n + c \xrightarrow{st_d} X + c \text{ ve}$$

$$(b) cX_n \xrightarrow{st_d} cX, c \neq 0 \text{ dir [Ghosal, 2013].}$$

Teorem 2.3.5. c bir sabit olmak üzere $X_n \xrightarrow{st_d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{st_p} c$ dir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.3.6. c bir sabit olmak üzere $X_n \xrightarrow{st_d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{st_p} c$ dir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.3.7. $\{X_n\}_{n \in N}$ ve $\{Y_n\}_{n \in N}$ dizileri $X_n - Y_n \xrightarrow{st_p} 0$ ve $Y_n \xrightarrow{st_d} X$ olacak şekilde

bir ihtimal uzayında tesadüfi değişkenler dizisi ise $X_n \xrightarrow{st_d} X$ dir [Ghosal, 2013].

Teorem 2.3.8. $\{X_n\}_{n \in N}$ ve $\{Y_n\}_{n \in N}$ bir ihtimal uzayında tesadüfi değişkenler dizisi ve c bir sabit olsun, bu takdirde

$$(i) \quad X_n \xrightarrow{st_d} X, Y_n \xrightarrow{st_p} c \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{st_d} X + c,$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{st_d} X, Y_n \xrightarrow{st_p} 0 \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{st_d} 0,$$

$$(iii) \quad X_n \xrightarrow{st_d} X, Y_n \xrightarrow{st_p} c \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{st_d} cX, (c \neq 0)$$

$$(iv) \quad X_n \xrightarrow{st_d} X, Y_n \xrightarrow{st_p} c \Rightarrow X_n / Y_n \xrightarrow{st_d} X / c, (c \neq 0) \text{ [Ghosal, 2013].}$$

3. TESADÜFİ DEĞİŞKENDİZİLERİNİN S_λ –YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde tesadüfi değişken dizilerinin olasılıkta S_λ –yakınsaklığı, r-yinci momentte S_λ –yakınsaklığı ve dağılımda S_λ – yakınsaklığı incelenecektir.

3.1.Tesadüfi Değişken Dizilerinin Olasılıkda S_λ –Yakınsaklığı

Tanım 3.1.1. (Tesadüfi Değişken Dizilerinin Olasılıkda S_λ –Yakınsaklığı) Δ olaylar sınıfının bir S alt sınıfı verilsin. Her bir X_n aynı bir S olay uzayı üzerinde tanımlı olmak üzere $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisi bir tesadüfi değişkenler dizisi olsun ve bir $P: \Delta \rightarrow R$ olasılık fonksiyonu verilsin. Bu takdirde eğer herhangi bir $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : P(|X_k - X| \geq \varepsilon) \geq \delta \right\} \right| = 0$$

veya buna denk olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : P(|X_k - X| < \varepsilon) \geq \delta \right\} \right| = 0$ ise $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisi

bir X tesadüfi değişkenine S_λ –yakınsaktır denir ve $S_\lambda - \lim P(|X_k - X| \geq \varepsilon) = 0$ veya

$S_\lambda - \lim P(|X_k - X| < \varepsilon) = 1$ veya $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} X$ ile gösterilir.

Aşağıdaki örnek bir $\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişkenler dizisinin X e olasılıksal S_λ –yakınsak fakat olasılıkta yakınsak olmadığını göstermektedir [Ghosal, 2014].

Örnek 3.1.1. Bir $\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişkenler dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k = \begin{cases} \{-1,1\}, & P(X_k = 1) = P(X_k = -1), \\ \{0,1\}, & P(X_k = 0) = (1 - \frac{1}{k}) \text{ ve } P(X_k = 1) = \frac{1}{k} \end{cases} \quad \begin{matrix} n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ \text{diğer durumlarda} \end{matrix}$$

$0 < \varepsilon < 1$ olsun. Bu durumda

$$P(|X_k - 0| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 1, & n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ \frac{1}{k}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. Böylece $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} 0$ dır, fakat olasılıkta yakınsak değildir.

Açıktır ki $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} X$ ve $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} Y$ ise $P\{X = Y\} = 1$ dir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.1.1. Eğer $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} x$ ve $g: R \rightarrow R$ fonksiyonu x de sürekli ise $g(X_n) \xrightarrow{S_\lambda^p} g(x)$ dir.

İspat. g, x de sürekli olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ için

$$|x_k - x| < \delta_0 \Rightarrow |g(x_k) - g(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir δ_0 mevcuttur. Buradan

$$P(|g(X_k) - g(X)| \geq \varepsilon) \leq P(|X_k - X| \geq \delta_0)$$

bulunur. Bu $\{k \in I_n : P(|g(X_k) - g(X)| \geq \varepsilon) \geq \delta\} \subseteq \{k \in I_n : P(|X_k - X| \geq \delta_0) \geq \delta\}$ olmasını gerektirir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.1.2. Eğer $\{X_n\}_{n \in N}$, herhangi bir n için sonlu bir m ortalamaya sahip tesadüfi değişkenler dizisi ise bu durumda $\sigma_n \xrightarrow{S_\lambda} x$ iken $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} m$ dir [Ghosal, 2014].

Örnek 3.1.2. Aşağıdaki örnek, bir $\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişkenler dizisi herhangi bir n için sonlu bir m ortalama ve σ sonlu standart sapmaya sahipse

$$X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} m, \text{ fakat } \lim \sigma_n \neq 0 \text{ dır.}$$

Aşağıdaki tesadüfi değişkenler dizisini tanımlayalım:

$$X_k = \begin{cases} \{-k, k\}, & P(X_k = k) = P(X_k = -k), \quad n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ \{0\}, & P(X_k = 0) = 1 \quad \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda $m = E(X_k) = 0, \forall k \in N$ ve

$$\sigma_k = \begin{cases} k, & n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim \sigma_k \neq 0$ fakat $\sigma_k \xrightarrow{S_\lambda} 0$ dır. Buradan

$$P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}, \forall n \in N \text{ ve } \varepsilon > 0$$

elde edilir. $\sigma_n \xrightarrow{S_\lambda} 0$ olduğundan $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} 0$ bulunur [Ghosal, 2014].

3. 2. Tesadüfi Değişken Dizilerinin r-yinci Momentte S_λ – Yakınsaklığı

Tanım 3.2.1. (Tesadüfi Değişken Dizilerinin r-yinci Momentte S_λ – Yakınsaklığı) Eğer herhangi bir $\delta > 0$ için ve her n için $E(|X_n|^r)$ ve $E(|X|^r)$ mevcut iken

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : E(|X_k - X|^r \geq \varepsilon) \geq \delta \right\} \right| = 0$$

limiti varsa bir $\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişkenler dizisi, $X : S \rightarrow R$ olmak üzere X tesadüfi değişkenine r-yinci momentte S_λ –yakınsaktır denir ve $S_\lambda - \lim E(|X_n - X|^r) = 0$

veya $X_n \xrightarrow{S_\lambda^{rm}} X$ şeklinde yazılır [Ghosal, 2014].

$\{X_n\}_{n \in N}$ tesadüfi değişken dizisi r-yinci momentte s_λ yakınsaktır ama X r-yinci momentte yakınsak değildir. Bunu örnekte görebiliriz.

Örnek 3.2.1. Bir $\{X_k\}_{k \in N}$ tesadüfi değişkenler dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X_k = \begin{cases} \{0,1\}, & P(X_k = 0) = P(X_k = 1) \\ \{0,k\}, & P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k^{r+1}} \text{ ve } P(X_k = k) = \frac{1}{k^{r+1}} \end{cases} \quad \begin{matrix} n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ \text{diğer durumlarda} \end{matrix}$$

Bu takdirde

$$E(|X_k - 0|^r) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ \frac{1}{k}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur ve bu $X_n \xrightarrow{S_\lambda^{rm}} 0$ olmasını gerektirir fakat X e r-yinci momentte alışılmış yakınsak değildir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.2.1. $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisi, her n ve sabit $M > 0$ için $P(|X_n| \leq M) = 1$ olacak şekilde bir tesadüfi değişkenler dizisi olsun. Kabul edelim ki $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} X$ olsun. bu takdirde herhangi bir $r > 0$ için $X_n \xrightarrow{S_\lambda^{rm}} X$ dir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.2.2. Eğer herhangi bir $r > 0$ için $X_n - X, Y_n - Y \geq 0$ olacak şekilde

$X_n \xrightarrow{S_\lambda^{rm}} X$ ve $Y_n \xrightarrow{S_\lambda^{rm}} Y$ ise bu takdirde $X_n + Y_n \xrightarrow{S_\lambda^{rm}} X + Y$ dir.

İspat. X ve Y non-negatif tesadüfi değişkenler ve $r > 0$ olmak üzere $E(X + Y)^r \leq 2^r [E(X)^r + E(Y)^r]$ eşitsizliğinden elde edilir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.2.4. $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisi $X_n \xrightarrow{S_\lambda^{2m}} X$ olacak şekilde bir tesadüfi değişkenler dizisi olsun. Bu takdirde $S_\lambda - \lim E(X_n) = E(X)$ ve $S_\lambda - \lim E(X_n^2) = E(X^2)$ dir [Ghosal, 2014].

3.3 Tesadüfi Değişken Dizilerinin Dağılımda S_λ – Yakınsaklığı

Teorem 3.3.1. $\{X_n\}_{n \in N}$ bir tesadüfi değişkenler dizisi olsun. Ayrıca her n için $f_n(x) = P(X_n = x)$, X_n nin olasılık kütle fonksiyonu ve $f(x) = P(X = x)$ de X in olasılık kütle fonksiyonu olsun. Eğer $f_n(x) \xrightarrow{S_\lambda} f(x)$ ise $X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X$ dir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.3.2. $\{X_n\}_{n \in N}$ bir tesadüfi değişkenler dizisi olsun. Eğer $X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} X$ ise $X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X$ dir, yani olasılıkta S_λ –yakınsaklık dağılımda S_λ –yakınsaklığı gerektirir.

İspat. $F_n(x)$ ve $F(x)$, sırasıyla X_n ve X in olasılık dağılım fonksiyonları ve $x < y$ olsun.

$$\begin{aligned} (X \leq x) &\subseteq (X_n \leq y, X \leq x) + (X_n > y, X \leq x) \\ &\Rightarrow (X \leq x) \subseteq (X_n \leq y) + (X_n > y, X \leq x) \\ &\Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X_n \leq y) + P(X_n > y, X \leq x) \\ &\Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X_n \leq y) + P(|X_n - X| > y - x, ((X_n > y, X \leq x) \text{ iken})) \\ &\subseteq (|X_n - X| > y - x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq F_n(y) + P(|X_n - X| > y - x)$$

$$\Rightarrow S_\lambda - \underline{\lim} F(x) \leq S_\lambda - \underline{\lim} F_n(y) \quad (X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} X \text{ old. } S_\lambda - \lim P(|X_n - X| > y - x) = 0)$$

$$\Rightarrow F(x) \leq S_\lambda - \underline{\lim} F_n(y)$$

$S_\lambda - \overline{\lim} F_n(y) \leq F(z)$ olduğu ise $y < z$ olarak benzer şekilde gösterilir.

$y, F(x)$ fonksiyonunun süreklilik noktası olsun. Bu takdirde $\lim_{x \rightarrow y^-} F(x) = \lim_{z \rightarrow y^+} F(z) = F(y)$ olur. Böylece $S_\lambda - \lim F_n(y) = F(y)$ elde edilir.

Şimdi Teorem 3.3.2 nin tersinin genelde doğru olmadığını gösterelim. Yani dağılımda S_λ -yakınsaklık olasılıkta S_λ -yakınsaklığı gerektirmez [Ghosal, 2014].

Örnek3.3.1. $k \in [n - \sqrt{\lambda_n} + 1, n]$ için X, X_k aynı dağılıma sahip tesadüfi değişkenler olsun.

$$P(X_k = 1, X = 1) = 0 = P(X_k = -1, X = 0)$$

$$P(X_k = -1, X = 1) = \frac{1}{2} = P(X_k = 1, X = 0)$$

olmak üzere iki boyutlu (X_k, X) tesadüfi değişkenlerinin spektrumu $(-1,0), (-1,1), (1,0), (1,1)$ olsun. Böylece $f_{X_k}(-1) = f_{X_k}(1) = \frac{1}{2}$ olmak üzere X_k nin marjinal dağılımı $X_k = i (i = -1,1); f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{2}$ olmak üzere X in marjinal dağılımı $X = i (i = 0,1)$ dir.

Şimdi de $k \notin [n - \sqrt{\lambda_n} + 1, n]$ için X, X_k aynı dağılıma sahip tesadüfi değişkenler olsun.

$$P(X_k = 0, X = 0) = 0 = P(X_k = 1, X = 1)$$

$$P(X_k = 1, X = 0) = \frac{1}{2} = P(X_k = 0, X = 1)$$

olmak üzere iki boyutlu (X_k, X) tesadüfi değişkenlerinin spektrumu $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ olsun. Böylece $f_{X_k}(0) = f_{X_k}(1) = \frac{1}{2}$ olmak üzere X_k nin marjinal dağılımı $X_k = i (i = 0,1); f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{2}$ olmak üzere X in marjinal dağılımı $X = i (i = 0,1)$ dir.

$k \in [n - \sqrt{\lambda_n} + 1, n]$ tamsayıları için $F_k(x), X_k$ nin olasılık dağılım fonksiyonu olsun.

Bu takdirde

$$F_k(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Şimdi de $k \in I_n$ ve $k \notin [n - \sqrt{\lambda_n} + 1, n]$ tamsayıları için $F_k(x)$ ve $F(x)$ sırasıyla X_k ve X in olasılık dağılım fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$F_k(x) = F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

$[-1, 0)$ aralığını göz önüne alalım. Aşağıda tanımlı $\{y_k\}_{k \in N}$ dizisinin 0'a λ -istatistiksel yakınsak bir dizi olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $\{y_k\}_{k \in N}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0, & k \in I_n \text{ ve } k \notin [n - \sqrt{\lambda_n} + 1, n] \end{cases}$$

Açıktır ki $\{y_k\}_{k \in N}$ dizisi 0'a λ -istatistiksel yakınsaktır. Bu $F_n(x) \xrightarrow{S_\lambda} F(x), \forall x \in R$ olmasını gerektirir (fakat, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \neq F(x), \forall x \in [-1, 0)$). Bu $X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X$ olmasını gerektirir. Herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ için

$$P(|X_k - X| \geq \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k \in [n - \sqrt{\lambda_n} + 1, n] \\ 1, & k \in I_n \text{ ve } k \notin [n - \sqrt{\lambda_n} + 1, n] \end{cases}$$

Bu $S_\lambda - \lim P(|X_k - X| \geq \varepsilon) \neq 0$ olduğunu fakat $\{X_n\}_{n \in N}$ dizisinin X e olasılıkta S_λ -yakınsak olmadığını göstermektedir [Ghosal, 2014].

Aşağıdaki teoremleri ispatları Teorem 2.1.2 nin ispatına benzerdir, bu yüzden bu teoremleri ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 3.3.3 $\{X_n\}_{n \in N}, X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X$ olacak şekilde bir tesadüfi değişkenler dizisi ve c bir sabit olsun. Bu takdirde

$$(a) \quad X_n + c \xrightarrow{S_\lambda^d} X + c \text{ ve}$$

$$(b) \quad cX_n \xrightarrow{S_\lambda^d} cX, c \neq 0$$

dir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.3.4 c bir sabit ise $X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{S_\lambda^p} c$ dir [Ghosal, 2014].

Teorem 3.3.5. Eğer $\{X_n\}_{n \in N}$ ve $\{Y_n\}_{n \in N}$ dizileri bir olasılık uzayında iki tesadüfi değişkenler dizisi ve c bir sabit ise bu takdirde

$$(i) \quad X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X, Y_n \xrightarrow{S_\lambda^p} c \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X + c, ,$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X, Y_n \xrightarrow{S_\lambda^p} 0 \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{S_\lambda^p} 0,$$

$$(iii) \quad X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X, Y_n \xrightarrow{S_\lambda^p} c \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{S_\lambda^d} cX, c \neq 0$$

$$(iv) \quad X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X, Y_n \xrightarrow{S_\lambda^p} c \Rightarrow X_n / Y_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X / c, c \neq 0 \text{ [Ghosal, 2014].}$$

Teorem 3.3.6. Eğer $\{X_n\}_{n \in N}$ ve $\{Y_n\}_{n \in N}$ dizileri $X_n - Y_n \xrightarrow{S_\lambda^p} 0$ olmak üzere bir olasılık uzayında tesadüfi değişkenler dizisi ve $Y_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X$ ise $X_n \xrightarrow{S_\lambda^d} X$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $x, x \pm \varepsilon$, F dağılım fonksiyonunun X tesadüfi değişkenine karşılık gelen süreklilik noktaları olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} P(X_n \leq x) &= P(Y_n \leq x + Y_n - X_n) \\ &= P(Y_n \leq x + Y_n - X_n; Y_n - X_n \leq \varepsilon) + P(Y_n \leq x + Y_n - X_n; Y_n - X_n > \varepsilon) \\ &\leq P(Y_n \leq x + \varepsilon) + P(Y_n - X_n > \varepsilon) \\ &\Rightarrow S_\lambda - \overline{\lim} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) \end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$F(x - \varepsilon) \leq S_\lambda - \underline{\lim} F_n(x) \text{ olur. Böylece } F(x) = \lim F_n(x) \text{ dir [Ghosal, 2014].}$$

KAYNAKLAR

- [1] **Fast, H., 1951**, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
- [2] **Steinhaus, H., 1951**, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math. 2, 73-74.
- [3] **Schoenberg, I.J., 1959**, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
- [4] **Šalát, T., 1980**, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.
- [5] **Fridy, J.A., 1985**, On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.
- [6] **Connor, J.S., 1988**, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.
- [7] **Buck, R.C. 1953**, Generalized asymptotic density, Amer. J. Math. 75, 335-346.
- [8] **Mursaleen, M., 2000**, $\tilde{I}_p$ Statistical convergence, Math. Slovaca., 50 (1), 111-115.
- [9] **Maddox, I.J., 1988**, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [10] **Kreyszig, E., 1978**, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York
- [11] **Akdi, Y. , 2011** Matematiksel İstatistik Giriş, Gazi Kitabevi, Beşevler-Ankara,
- [12] **Ghosal, S. 2013** Statistical Convergence of a Sequence of Random Variables and Limit Theorems, Applications of Mathematics, No : 4, 423-437.
- [13] **Ghosal, S. 2014** S_λ –Convergence of a Sequence of Random Variables, Journal of the Egyptian Mathematical Society, Baskıda.

ÖZGEÇMİŞ

1990 Elazığ doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 2008 yılında kazandığım Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'nden 2012'de mezun oldum. 2013'de F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalında Yüksek lisansa başladım.

Kübra Elif ET