

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

116 669

BURGERS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Asif YOKUŞ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2002

116669

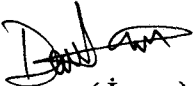
T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Asif YOKUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez, ..28.08.2022 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği / Oyçokluğu
İle Başarılı / Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.


(İmza)

Danışman

Doç. Dr. Doğan KAYA


(İmza)

Üye

Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK


(İmza)

Üye

Prof. Dr. Osman ÖZCAN

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BURGERS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI

Asif YOKUŞ

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2002, Sayfa : 74

Bu çalışmada, lineer kısmi diferansiyel denklemi çözmek için nispeten yeni olan ayrıştırma metodunu uyguladık. Bu yaklaşım uygun bir diferansiyel operatörün seçimine dayandırılır, bu operatör adi veya kısmi, lineer veya lineer olmayan, belirli veya stokastik olabilir. Bu metot aynı zamanda indisleme gerektirmez ve sonuç olarak ta diğer bir çok yinelemeli metoda göre daha kolay uygulanabilir. Bu metot ile çözüm, terimleri kolayca hesaplanabilen bir yakınsak kuvvet serisi formunda hesaplanır. Sayısal sonuçlar, yeni metodun çok hassas ve kolayca uygulanabilir olduğunu göstermektedir.

Aynı zamanda bu çalışmada, lineer ısı denklemi ve lineer olmayan Burgers denkleminin çözümü için ayrışım metodu uygun başlangıç şartları ile uygulandı. Bu metodun uygulaması t -yönünde kısmi çözümlerin oluşturulması ile karşılaştırılır ise x -yönündeki kısmi çözümlerin oluşturulmasında daha fazla hesaplamalara ihtiyaç duyulduğu fakat x -yönündeki sayısal çözümün doğruluğu ve hassaslık anlamında çok iyi performans gösterdiği uygulama ile gösterildi.

ANAHTAR KELİMELER : Burgers denklemi, ısı denklemi, Cole-Hopf dönüşümü, Fourier dönüşümü, Adomian ayrışım metodu, Adomian polinomları.

SUMMARY

Masters Thesis

ON A COMPARISON OF NUMERICAL SOLUTIONS
FOR BURGERS EQUATION

Asif YOKUŞ

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

2002, Page : 74

In this work, we apply a relatively new decomposition scheme to solve the linear partial differential equation. The approach is based on the choice of a suitable differential operator which may be ordinary or partial, linear or nonlinear, deterministic or stochastic. It does not require discretization and consequently of massive computation. In this scheme the solution is performed in the form of a convergent power series with easily computable components. The numerical results demonstrate that the new method is relatively accurate and easily implemented.

Also in this study, the decomposition method for solving the linear heat equation and nonlinear Burgers equation is implemented with appropriate initial conditions. The application of the method is demonstrated that the partial solution in the x -direction requires more computational work if compared with the partial solution developed in the t -direction but the numerical solution in the x -direction are performed extremely well in terms of accuracy and efficiency.

KEY WORDS : Burgers equation, heat equation, Cole-Hopf transformation, Fourier transformation, Adomian's Decomposition method, Adomian polynomials.

TEŞEKKÜR

Bu tezin yönlendirilmesi ve tamamlanmasında, yoğun çalışma programına rağmen bana vakit ayırıp gerekli yardım ve ilgisini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Doğan KAYA'ya minnet ve şükranlarımı, çok kıymetli hocam Prof. Dr. Ethibar PENAHOV'a teşekkürlerimi sunarım.

Asif YOKUŞ



İÇİNDEKİLER

ÖZET	III
SUMMARY	IV
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER	VI
SİMGELER	VII
TABLolar	VIII
GRAFİKLER	IX
 1 GİRİŞ	 1
1.1 Temel Tanım Ve Teoremler	4
 2. KLASİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	 10
2.1 Fourier Seri Metodu	10
2.2 D'alembert Metodu	13
2.3 Riemann Metodu	15
2.4 Fourier Dönüşüm Metodu	21
2.5 Adomian Ayrışım Metodu	26
 3 BURGERS DENKLEMİ	 32
3.1. Burgers Denklemi Elde Edilişi	32
3.2 Hareket Eden Dalga Çözümleri Ve Şok Dalga Yapısı	35
3.3 Cole-Hopf Dönüşümü Ve Burgers Denklemi İçin Tam Çözüm	38
 4. BURGERS DENKLEMİNİN AYRIŞIM METODU İLE SAYISAL SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI	 47
 KAYNAKLAR	 61

SİMGELER

L	: Diferansiyel operatör
L^{-1}	: İntegral operatörü
Nu	: Lineer olmayan terim
A_n	: Adomian Polinomu
ϕ_n	: n- terim yaklaşımı
ν	: Vizkosite
$F\{\}$	: Fourier dönüşüm operatörü
$u(x,t)$	: Çözüm fonksiyonu

TABLOLAR

1.Tablo: Lineer Burgers denkleminin ayrışım metodu kullanılarak, $0 \leq n \leq 20$ olmak üzere x -yönünde elde edilen $\phi_n(x,t)$ sayısal çözümler	47
2.Tablo: Lineer Burgers denkleminin ayrışım metodu kullanılarak, $0 \leq n \leq 20$ olmak üzere t -yönünde elde edilen $\phi_n(x,t)$ sayısal çözümler	48
3.Tablo: x -yönünde elde edilen $\phi_{20}(x,t)$ sayısal çözümün tam çözüme göre mutlak hatası	50
4.Tablo: t -yönünde elde edilen $\phi_{20}(x,t)$ sayısal çözümün tam çözüme göre mutlak hatası	51
5.Tablo: Lineer olmayan Burgers denkleminin ayrışım metodu kullanılarak, x -yönünde elde edilen $\phi_{20}(x,t)$ sayısal çözümün tam çözüme göre mutlak hatası	55

GRAFİKLER

1.Grafik: Burgers denkleminin yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	42
2.Grafik: Burgers denkleminin yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	42
3.Grafik: Burgers denkleminin yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	43
4.Grafik: Lineer Burgers denkleminin x ve t-yönündeki yaklaşık çözüm fonksiyonu.	49
5.Grafik: Lineer Burgers denkleminin x-yönündeki yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	49
6.Grafik: Lineer Burgers denkleminin $1 \leq n \leq 20$ olmak üzere t-yönünde elde edilen $\phi_n(x,t)$ yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	51-52
7.Grafik: Lineer olmayan Burgers denkleminin t-yönündeki $\phi_{20}(x,t)$ yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	55
8.Grafik: Lineer olmayan Burgers denkleminin t-yönündeki $\phi_{20}(x,t)$ yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	56
9.Grafik: Lineer olmayan Burgers denkleminin t-yönündeki $\phi_{100}(x,t)$ yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu	57

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, Adomian ayrıştırma metodu (Adomian, 1990a) ele alınarak lineer difüzyon denklemi ve lineer olmayan Burgers denkleminin değişik başlangıç şartları altında analitik ve yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bu metot, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerinin hem analitik hem de sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan yeni ve kullanışlı bir metottur. Aynı zamanda bu teknik kullanılarak bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü, indislemeye gerek duymadan sembolik programlama dilleri ile kodlama yapılarak, hesaplamak kısmen kolaydır.

Geçen birkaç yıl içinde, kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümler için bir çok genel amaçlı sayısal metotlar geliştirildi. Bu sayısal metotların birçoğu kısmi diferansiyel denklemleri indisleyerek yada günümüzde popüler olan sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerin sayısal çözümler elde edilmektedir. Ayrıca önerilen ayrıştırma metodu kullanılarak diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için indislemeye gerek duyulmaz. Sayısal çözümlerin bulunabilmesi için indisleme yapma yerine, ayrıştırma metodu ile ayrıştırma serisinin terimleri elde edilerek sayısal çözümler elde edilebilmektedir (Adomian, 1988).

Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözüm metotları ile birlikte sayısal çözüm metotları da gelişen bilgisayar teknolojisi ile birlikte gelişmektedir. Bu çalışmada ele alınan ayrışım metodu, 1980 li yıllarda G. Adomian tarafından literatüre kazandırılmıştır. Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan ayrışım yöntemi, uygulamada başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematiksel modelleri olan uzay ve zamana göre bir veya çok boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerini de bulmada kullanılmaktadır. Ayrışım metodu, bir yaklaşım yöntemi olup lineerleştirme, heyecanlandırma veya indisleme (discretization) teknikleri kullanmadan lineer olmayan diferansiyel denklemler için çözümler bulunabilir ve bu çözümler genel olarak sonsuz seri şeklindedir. Ayrışım yöntemi, lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer klasik yöntemlere göre daha basit ve daha karmaşık denklemlere uygulanabilen metottur (Adomian, 1990b). Literatürde bu metot kullanılarak lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin (Shawagfeh ve arkadaşları, 1996b), adi diferansiyel

denklem sistemlerinin (Kaya, 1999a; Shawagfeh ve arkadaşları, 1996a), kısmi diferansiyel denklemlerin (Kaya, 1999b; 2000; 2001a; 2002; Wazwaz, 1995; 1997; 1999; 2001) ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin (Kaya, 2001b) analitik çözümlerinin elde edilmesi ile birlikte bu denklemlerin sayısal çözümlerin de hesaplanabildiği ve bilinen klasik metotlar kullanılarak bu sayısal sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır (Bellomo and Sarafyan, 1987; Bellomo and Monaco, 1985; Wazwaz, 1998; van Tonningen, 1995; Kaya ve Çatalbas, 2000).

Bu çalışmada, ağırlıklı olarak Burgers denklemi ve bu denklemin lineerleştirilmiş şekli olan difüzyon denklemi ayrışım metodunun uygulamasında ele alınacağından özellikle Burgers denkleminin literatürde yerini daha detaylıca incelemek gerekmektedir. Bunun için Burgers denkleminin ortaya çıkışı, tarihteki ve tarihsel gelişimine bakacak olursak, 1915 yıllarına dayanır ve bu yıllarda Beteman, (1915) denklemin fiziksel içeriklerini açıklamıştır. Burgers denkleminin en ilginç çözümlerinden birisi seri formundaki çözümüdür. Çözümlerin elde edilişi akustiğin iskeletinin oluşturulmasına dayanmaktadır. Fay, (1931) tarafından Burgers denkleminin özel çözümleri verildi ve önemi vurgulandı. 1948 de denklemin türbülans teorisinde bir model formu olarak sonuçlandırılarak, bu teori ile Burgers denkleminin ilişkisi 1949 da keşfedildi (Lagerstrom ve arkadaşları, 1949). Burgers denklemi, Cole, (1951) tarafından lineer ısı denklemine dönüştürdü ve eş zamanlı olarak bu dönüşüm Hopf, (1950) tarafından da Cole'un bu çalışmasından bağımsız olarak bulundu; bu yüzden elde edilen bu önemli dönüşüm Cole-Hopf dönüşümü olarak bilinmektedir. Fay serileri bir sinüzoidal başlangıç şartı için denklemin yaklaşık bir çözümü olarak Cole tarafından tekrar elde edildi. Daha sonra bunlardan bağımsız olarak bir boyutlu sınırlı genişliğin, akustik sinyalin yayılımını çalışarak Burgers denklemine karşılık geldiğini görmüşler (Lighthill, 1956; Blackstock, 1964), oysa 1958'de şok yapı Navier-Stokes akışkanları tartışmalarında kullanılmıştı. Burgers denklemin bir tam çözümünü bulundu (Benton, 1966; 1967). Ayrıca, herhangi bir yardımcı şart kullanmadan Burgers denklemi için Riccati çözümü elde edildi (Rodin, 1970). Sonlu tanım kümesinde Burgers denklemi için 35 farklı başlangıç değer problemin çözümü ve sonsuz tanım kümesinde sınır ve başlangıç değerleri için iki farklı çözüm daha bularak literatüre kazandırıldı (Benton ve Platzman, 1972). Ayrıca bu denklem için, yardımcı şartlar göz önüne alınmaksızın

Morgan-Michal metodunun uygun grupların tanımlanmasında ve nasıl uygulanabileceği tartışıldı (Ames, 1972).

Son yıllarda bu analitik çözüm metotlarına ilâveten sayısal çözüm metotları da paralel olarak gelişmektedir. Bunlardan bazıları: Varoğlu ve Finn, (1980) uzay-zaman elementleri ve karakteristiklerinin birleşimine dayalı olan yeni sonlu elemanlar metodunu Burgers denkleminin sayısal çözümünü bulmak için kullandılar. Weiss ve arkadaşları, (1983) tarafından kısmi diferansiyel denkleminin Painleve özelliklerini tanımladılar. Buradan integrallenemeyen Bäcklund dönüşümleri bazı klasik lineer olmayan KdV ve değiştirilmiş KdV denklemlerinde olduğu gibi Burgers denklemi için de Lax çiftleri tanımlandı (Boisvert ve arkadaşları, 1983; Nucci, 1984; Ames, 1972).

Vorus, (1989) da ayrılma noktasında uygulanan sinüzoidal artmayı sağlama ile dengeli akı durumundan heyecanlandırılmış girdap tabakası çalıştı. Bu çalışma sonunda elde edilen diferansiyel denklem hareket alanındaki Burgers denkleminiydi. Dönüştürülmüş ters yönde sınır şartlarında lineer olmayı engellemek için, Vorus ilk denklemi ve onun şart denklemindeki uzay-zaman değişkenleri de integre edilerek Cole-Hopf dönüşümünü uyguladı. Shtelen, (1989) grup-teorisi bakışıyla Cole-Hopf dönüşümünü uyguladı. Aynı yıllarda Burgers denkleminin uzay-zaman dönüşümünde küçük değişikliklerle Galilean dönüşümü ve projektif dönüşümüne göre değişmediği gösterdiler. Bir de, Burgers denkleminin simetri cebir ve ısı denklemi arasında dikkate değer benzerlikler bulundu fakat bütün bu değişmezler yardımcı koşulları göz önüne almaksızın çıkarıldı (Fushchich ve arkadaşları, 1989).

Peralta-Fabi ve Plaschko, (1993) akışkanın kolayca akışını sağlayan ortam boyunca akıyı tanımlayan Burgers denkleminin normal formu için yerel (local) olmayan davranışlarını temsil eden bir integral ekleyerek kontrol Burgers denklemi için çözümlerin kararlılığıyla çalıştılar. Bu yazarlar, vizkozitenin kritik değerlerini bulmak için dört basamağa kadar heyecanlandırma (perturbation) tekniğini uyguladılar.

Öziş ve Özdeş, (1996) da Burgers denkleminin sayısal çözümünü direk varyasyonel metot kullanarak elde edilen çözümün tam çözüme yakınsayan bir dizi çözüm formunda bir yaklaşık çözüm buldular. Mazzia ve Mazzia, (1997) Burgers denklemini sınır değer metotları ile birleştirilen bir adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürerek daha sonra dönüşüm tekniğini (burada yaklaşık çözümler zaman eksenini boyunca doğrularda tanımlanmıştır) uyguladılar.

Yakın zamanda Mina ve Samy, (2000) çalışmalarında başlangıç ve sınır şartları ile birlikte Burgers denklemi için bir parametrelili grup dönüşümü uyguladılar. Bu dönüşüm altında ek şartlar ile kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen uygun şartlar altında bir adi diferansiyel denkleme uyguladılar. Elde edilen diferansiyel denklem analitik olarak çözülmekte ve bu çözüm kapalı formda elde edilmektedir.

Başka bir klasik metot da simetri dönüşüm metodudur. Diferansiyel denklemin simetri kavramı 19. yy sonunda Sopus Lie tarafından diferansiyel denklemlerin çözümlenmesi için genel teori için araştırırken geliştirdi. Lie, kısmi diferansiyel denklem için bir çok çözüm elde edilmiş olmasına rağmen sadece benzerlik (similarity) dönüşümü kavramı Bikhoff tarafından Lie'nin ölümünden 50 yıl sonra, sistematik bir metot olarak ortaya atıldı ve bu metot geniş uygulamalara ve birçok açık olmayan olaylara ışık tutmuştur. Detaylı bilgi için (Schwarz, 1988) çalışmasına bakılabilir. Benzerlik analizi tarihi boyunca fen ve mühendislikteki bir çok problemin çözümünün bulunmasında kullanıldı. Bazı fiziksel uygulamalar (Abd-el-Malek ve Bardan, 1990; Fushchich ve arkadaşları, 1989) çalışmalarında genişçe ele alınmıştır.

Homojen olmayan Burgers denklemi bir akışkan alanındaki şok dalga yayılımı boyunca akının yaklaşık teorisinde ve bir kanaldaki türbülans akının modelinde olduğu gibi birçok alanda fiziksel uygulamalara sahiptir (Drazin, 1989; Mazzia ve Mazzia, 1997; Ockendon ve Tayler, 1983). Bu denklem, ayrıca sabit sınır kısmı ile yarı sonsuz bir alandaki yer çekimi altında bir boyutlu yağ/su akışını tanımlar (Rogers ve Ames, 1989). Burgers denkleminin en ilginç uygulamalarından birisi de trafik akış problemine uygulanışıdır (Kevorkian, 1990).

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bilimin hemen her dalında çözümü istenen problemlerin özelliklerini taşıyan bir matematiksel model kurulması gerekebilir. Bu tür bir model çoğunlukla bilinmeyen fonksiyon ya da fonksiyonlarla bağımsız değişkenleri ve bu fonksiyonların türevini içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar, bu tür denklemlere *diferansiyel denklem* diyoruz. Çoğunlukla uygulamalı bilim dallarının ortaya koyduğu diferansiyel denklemlerle birlikte bazı şartlarda doğal olarak ortaya çıkar. Bu nedenle belli şartlar ile birlikte verilen diferansiyel denklemler, uygulamalı bilim dallarında önemli bir yere sahiptir.

Diferansiyel denklemlerin elde edilişleri üç kısımda toplanabilir:

- Problem cebirsel özelliklerle verilebilir. Örneğin, içinde birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit içeren cebirsel bir denklem ve düzlemde bir eğri ailesini oluşturabilir. Böyle bir eğri ailesinin öğelerinin bazı ortak özelliklerini bu keyfi sabitlerin verilen cebirsel denklem ve onun türevleri arasında yok edilmesi ile elde edildiği bilinmektedir. Bu yok etme işleminin sonunda bir diferansiyel denklem elde edilebilmektedir.

- Geometrik özellikleri ile problemi tanımlayıp bu özelliklere uyan bir eğrinin bulunması da bize bir diferansiyel denklem verir. Bilindiği gibi bir eğrinin bir noktadaki teğetinin eğimi o noktadaki türevin değeri ile verilmektedir.

- Uygulamalı bilim dallarında ise problemin bir matematiksel modeli elde edilerek olaya veya sisteme karşılık gelen diferansiyel denklem oluşturulabilir.

Diferansiyel denklemlerde önemli bazı genel tanım ve teoremleri verelim:

Bir denklem içerisinde türev bulunduruyorsa bu denkleme diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem sadece bir tek bağımsız değişken içeriyor ise bu tip denklemlere *adi diferansiyel denklem* denir ve genel olarak adi diferansiyel denklem

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

açık formda veya

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1.1)$$

kapalı formda gösterilir.

Diferansiyel denklemin çözümü; çözüm kavramında daima bir fonksiyonun kaçınıcı mertebeden türevinin var olduğu ve bu türev fonksiyonlarının sürekliliği söz konusu olacaktır. Bir $A \subset \mathbb{R}$ aralığını alalım, bu aralıkta tanımlı bir fonksiyon $\mathcal{G}$ olsun, $\mathcal{G}$ nin A da ilk m inci mertebeden türevinin var olduğunu ve türevlerin sürekli olduğunu kısaca $\mathcal{G} \in C^n[A]$ ile gösterelim. Bir $\mathcal{G} \in C^n[A]$ fonksiyonunun kendisi ve gerekli türevleri (1.1.1) de yerine konulduğunda elde edilen

$$\mathcal{G}^{(n)}(x) = F(x, \mathcal{G}(x), \mathcal{G}'(x), \mathcal{G}''(x), \dots, \mathcal{G}^{(n-1)}(x))$$

fonksiyonu x bağımsız değişkene göre bir özdeşlik oluşturuyorsa $\mathcal{G}$ ye (1.1.1) diferansiyel denkleminin çözümü denir. Bu denklemin genel çözümü

$$y(x) = \mathcal{G}(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0 \quad (1.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bir diferansiyel denklemin keyfi sabitlere bağlı çözümlerinin kümesine *genel çözüm*, genel çözümün her bir ögesine *özel çözüm* ve bir özel çözümün grafiğine de integral eğrisi denir (Aydın ve arkadaşları, 1995).

İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerde genellikle iki keyfi sabit olduğundan iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar bağımsız değişkenin tek değeri için fonksiyonun kendisini ve bazı türevlerin değerlerinin verilmesi şeklinde ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin seçilmiş birkaç değeri için fonksiyonun yada türevinin değerlerinin verilmesi şeklinde ise *sınır şartları* adını alır. Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine *başlangıç değer problemi*, sınır şartları ile incelenmesine de *sınır değer problemi* denir. (1.1.1) diferansiyel denklemi

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (1.1.3)$$

başlangıç şartları ile birlikte verilmiş ise (1.1.1) denklemi ve (1.1.3) başlangıç şartları ile birlikte Cauchy problemi olarak bilinir (Aydın ve Arkadaşları, 1995)..

Benzer şekilde bir diferansiyel denklem bir veya daha çok değişkenli fonksiyonun türevlerini içeriyor ise diferansiyel denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir ve genel bir kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots + \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = 0$$

açık formda veya

$$F\left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, \dots, u_{\underbrace{tt \dots t}_{m-\text{tan } t}}\right) = 0 \quad (1.1.4)$$

kapalı formda verilebilir (Koca, 2001). Kısmi Diferansiyel denklemlerin

1. Değişkenlerine ayırma metodu,
2. D' Alembert Metodu,
3. Riemann Metodu,

gibi klasik metotlar ve diğer özel metotlar kullanılarak çözüm fonksiyonları elde edilebilir.

Elde edilen model denklemin ve bu modelin çözümlerinin, modele uygun olup olmadığını Hadamard kuralı ile iyi durumlu (well-posed) veya kötü durumlu (ill-posed) olduğu test etmek mümkündür. Modeli oluşturan kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki

- Bir çözüm mevcut ise o çözüm tektir.

- Başlangıç ve sınır şartlarının uygun sınırlamalar altında bir çözümü vardır,
- Kararlıdır,

şartlarını sağlıyorsa modele iyi durumludur, aksi taktirde kötü durumludur denir. Başlangıç veya sınır şartlarında çok küçük bir değişme yapıldığında çözümde çok büyük değişiklikler olmuyorsa sisteme kararlıdır, yani; çözüm sürekli olarak başlangıç ve sınır şartlarına bağlıdır denir (Guenther ve Lee, 1988).

Diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasında kolaylık sağladığından

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (1.1.5)$$

şeklinde verilen ikinci mertebeden bir genel kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada; u , x ve y bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon ve u nun iki kez türetilbilir olduğunu kabul edelim. $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantı için eğer

$\Delta > 0$ ise denklem *hiperbolik*,

$\Delta = 0$ ise denklem *parabolik*,

$\Delta < 0$ ise denklem *eliptik*,

olarak sınıflandırılır. (1.1.5) denklemini özel durumları için; titreşen zar, titreşen ip, uzayda ses dalgaları, bir iletkendeki elektriksel titreşim,... gibi fiziksel olayların modellenmesinde sırasıyla hiperbolik, parabolik ve eliptik tip denklemler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{Hiperbolik dalga denklemi})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{Parabolik difüzyon denklemi})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{Eliptik Laplace denklemi})$$

olarak bilinmektedir. Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyona bağlıdır. Bu nedenle de bir kısmi diferansiyel denklemin sonsuz sayıda çözümü olabilir. Modellenen fiziksel probleme uygun olan çözümün bulunabilmesi için, model oluşturulurken bazı yardımcı şartlar da belirtilmelidir. Bu yardımcı şartları iki grupta toplayabiliriz. Bu yardımcı şartlar başlangıç ve sınır şartları olarak bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerde başlangıç şartı adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibidir, bir kısmi diferansiyel denklemin tanımlandığı Ω uzaysal bölgesinin S sınırının n dış normalini boyunca

sağlanması gereken koşullara *sınır şartları* denir. α , β ve g fonksiyonları S sınırı üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere bu sınır şartları

$$\text{Dirichlet şartı: } u=g,$$

$$\text{Neumann şartı: } \frac{\partial u}{\partial n}=g,$$

$$\text{Robin şartı: } \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}=g,$$

olarak bilinmektedir (Guenther ve Lee, 1988).

Diferansiyel denklemler lineer olup olmadıklarına göre de sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklem bağımlı değişken y nin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük dereceden kuvvetlerini içeriyorsa veya y ve y nin türevlerinin çarpımını içeriyorsa bu diferansiyel denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem denir

Akışkanlar dinamiğinde kullanılan modeller kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edildiğinden çalışmamızda kullanacağımız akışkanlar dinamiğindeki bazı önemli kavramları vermemiz yararlı olacaktır. Bu kavramlar:

Vizkozluk: Sıvı kesme hareketine karşı bir direnç gösterir ve bu direnç vizkozluk adı verilen iç sürtünme şeklindedir. vizkosite komşu sıvı tabakalarının birbiri üzerinde kaymalarından kaynaklanan sürtünme nedeni ile de ortaya çıkar (Serway, 1995).

Türbülans (Girdap): Vizkoz bir sıvının, komşu tabakaları birbiri üzerinden kararlı şekilde akıyorsa kararlı akış çizgilerine laminar akış denir. Ancak, oldukça yüksek hızlardaki sıvının akışı laminar akıştan girdaplı akış adı verilen oldukça düzensiz ve rasgele akışa dönüşebilir. Girdaplı akışta hız, sıvıyı saran ortamın geometrisine ve sıvının vizkositesine bağlı olarak değişir. Söz konusu olan girdaplı akımın pek çok örnekleri vardır. Taşla dolu bir dere veya nehirdeki suyun akışı, rüzgarlı bir havada bacadan yükselen duman girdap şeklinde olduğu gibi, hız motorunun suda oluşturduğu iz ile uçakların ve hareketli araçların havada oluşturduğu izler girdaplı akışa birer örnek verilebilir (Serway, 1995).

Deneysel olarak girdabın başlangıcının *Reynold sayısı* denilen boyutsuz bir parametre ile belirlendiği bulunmuştur. Bu Reynold sayısı $R.S. = \frac{\rho v d}{\eta}$ formülü ile hesaplanmaktadır. Burada; ρ akışkanın yoğunluğunu, v akışkanın hızını, η sıvının vizkozluğunu ve d de akışkanın oluşturduğu geometrik uzunluğu göstermektedir.

Örneğin, sıvı bir tüpün içinde ise d , tüpün çapını veya sıvı küre çevresinde akış halinde ise d , kürenin çapını gösterecektir (Serway, 1995).



2. KLASİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Literatürde çok iyi bilinen Fourier seri metodu, D'Alembert metodu, Riemann metodu, özel metot olan Fourier-Laplace dönüşüm metodu ve bu metotlara göre nispeten yeni olan Adomian ayrışım metodu ile bir çok probleme uygulamaları mevcuttur. Bu çalışmada önce klasik metotları ve ayrışım metodunu basit bir örnek üzerinde uygulamalarını vereceğiz. Ayrıca klasik çözüm metotları ile çözüm fonksiyonları araştırılırken karşılaşılabilecek zorluklar ve karmaşıklıkların Adomian ayrışım metodu kullanılarak daha basitleştirildiğini göreceğiz.

Bu durumları incelemek için hem denklem hem de başlangıç ve sınır şartları iyi durumda olan

$$u_{xx} - cu_{tt} = 0 \quad (2.1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad (2.2)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad (2.3)$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. Aşağıdaki kesimlerde öncelikle hangi metot uygulanacaksa o metodun genel hatları üzerinde durulacak ve metodun uygulaması ise yukarıda verilen Cauchy problemi üzerinde tartışılacaktır.

2.1. FOURIER SERİ METODU (Değişkenlerine Ayırma Yöntemi)

Değişkenlerine Ayırma Yöntemi ile bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü araştırılırken, kısmi diferansiyel denklemin

$$u(x,t) = X(x) T(t)$$

şeklinde bir çözümünün var olduğu kabul edilir ve bu çözümün gerekli türevleri hesaplanır. Hesaplanan bu türevler kısmi diferansiyel denklemde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra denklem Sturm-Liouville şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek denklemin çözümü kolayca bulunabilir (Guenther ve Lee, 1988).

Bu metodun uygulaması için hiperbolik tipindeki (2.1) kısmi diferansiyel denklemini ile birlikte (2.2) başlangıç ve sınır şartlarını ele alalım ve bu denklemin

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (2.1.1)$$

şeklinde bir çözümünün var olduğunu kabul edelim. (2.1.1) çözümü (2.1) denklemini sağlamalıdır. Bunun için;

$$\left. \begin{aligned} u_x &= X'(x)T(t), & u_{xx} &= X''(x)T(t), \\ u_t &= X(x)T'(t), & u_{tt} &= X(x)T''(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

gerekli türevler bulunur ve hesaplanan (2.1.2) türevleri (2.1) kısmi diferansiyel denkleminde yerlerine yazılarak

$$X''T - c^2 XT'' = 0$$

buradan da

$$\frac{X''}{X} - c^2 \frac{T''}{T} = 0 \text{ veya } \frac{X''}{X} = c^2 \frac{T''}{T} = \lambda$$

bağıntısı göz önüne alınıp

$$X'' - \lambda X = 0 \text{ ve } T'' - \frac{\lambda}{c^2} T = 0 \quad (2.1.3)$$

şeklinde X ve T ye bağlı adi diferansiyel denklemleri kolayca bulunur ve bu denklemlere Sturm- Liouville denklemleri denir. Elde edilen (2.1.3) denklemlerinin genel çözümleri sırasıyla

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.1.4)$$

$$T(t) = D^* \cos(\sqrt{\lambda}ct) + E^* \sin(\sqrt{\lambda}ct) \quad (2.1.5)$$

şeklinde bulunabilir. Burada A, B, D^* ve E^* keyfi sabitlerdir. Ayrıca (2.2) eşitlikleri ile verilen $u(0, t) = 0$, $u(\ell, t) = 0$ sınır şartları göz önünde bulundurularak

$$X(0) = X(\ell) = 0 \quad (2.1.6)$$

olur. $X(0) = 0$ şartı altında $A = 0$ bulunur ve

$$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.1.7)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilebilir. $X(\ell) = 0$ şartı alındığında ise

$$B \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \quad (2.1.8)$$

olur ve burada, $B \neq 0$ olmalıdır aksi taktirde aşıkâr çözüm buluruz. (2.1.8) eşitliğinden

$$\sqrt{\lambda}\ell = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ olmalıdır ve buradan}$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.9)$$

olur. Buna göre $\forall n \in N$ için

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (2.1.10)$$

fonksiyonu (2.1.3) denkleminin (2.2) eşitliğindeki sınır şartını sağlayan çözümdür. Benzer şekilde (2.1.9) değerleri (2.1.5) çözümünde kullanılırsa

$$T_n(t) = D_n^* \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right) + E_n^* \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right) \quad (2.1.11)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.10) ve (2.1.11) çözümleri (2.1.1) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[D_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right) + E_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.12)$$

bulunur ve dalga denklemi lineer olduğundan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[D_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right) + E_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right) \right] \quad (2.1.13)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilmiş olur.

Özel olarak (2.2) başlangıç ve sınır şartlarında

$$c=1, f(x)=\sin x, g(x)=0 \text{ ve } \ell = \pi \quad (2.1.14)$$

olarak, (2.1) denkleminin

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= \sin x, \quad u_t(x,0) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

başlangıç ve sınır şartları ile çözüm fonksiyonunu araştıralım.

(2.1.13) çözüm fonksiyonunda (2.1.14) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx [D_n \cos nt + E_n \sin nx] \quad (2.1.16)$$

şeklinde bulunur ve (2.1.15) başlangıç şartları göz önüne alınarak

$$u(x,0) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx \quad (2.1.17)$$

$$u_t(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin nx \quad (2.1.18)$$

şeklinde bulunabilir. (2.1.17) ve (2.1.18) eşitliklerinde gerekli işlemler yapılırsa

$$D_n=1 \text{ ve } E_n=0 \quad (2.1.19)$$

İfadeleri elde edilir. (2.1.19) eşitlikleri (2.1.16) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \cos(nt) \quad (2.1.20)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilmiş olur.

2.2. D'ALEMBERT METODU

Bir anlamda özel bazı denklemlere uygulanabilen D'Alembert metodu sadece hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir (Guenther ve Lee, 1988). Eliptik ve parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü D'Alembert metodu ile yapılamamaktadır.

Bu metodun uygulaması için hiperbolik tipindeki (2.1) kısmi diferansiyel denklemini ile birlikte (2.2) başlangıç ve sınır şartlarını ele alalım ve bu denkleminde $u(x,t)$ fonksiyonu, x değişkenine göre t anındaki dalğanın durumu, $f(x)$ fonksiyonu dalğanın $t=0$ zamanındaki durumu, $g(x)$ ise dalğanın ilk hızını belirtmektedir.

(2.1) kısmi diferansiyel denklemini

$$Lu = D_t^2 u - c^2 D_x^2 u \quad (2.2.1)$$

şeklinde kanonik formda yazılır ve (2.2.1) ile yazılan ikinci basamaktan sabit katsayılı operatörü çarpanlarına ayırarak buradan kısmi diferansiyel denklemin karakteristikleri

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \mu &= x - ct \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

şeklinde elde edilebilir ve (2.1) denlemine (2.2.2) dönüşümleri uygulanırsa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \mu} = 0 \quad (2.2.3)$$

bir hiperbolik diferansiyel denklem elde edilir. ϕ ve φ keyfi fonksiyonlar olmak üzere (2.2.3) ile elde edilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$u(x,t) = \phi(y - cx) + \varphi(y + cx) \quad (2.2.4)$$

şeklindedir. (2.2.4) çözümü için (2.2) eşitliğinde verilen başlangıç şartları uygulanırsa

$$u(x,0) = f(x) = \phi(x) + \varphi(x) \quad (2.2.5)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = c[\phi'(x) + \varphi'(x)] \quad (2.2.6)$$

eşitlikleri bulunur ve (2.2.6) eşitliğinin integrallenmesi ile de

$$\phi(x) + \varphi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + K \quad (2.2.7)$$

ifadesi kolayca görülebilir, burada; x_0 ve K keyfi sabitlerdir. (2.2.5) ve (2.2.7) eşitliklerinin taraf tarafa toplanması ile

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + \frac{K}{2}, \quad (2.2.8)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}, \quad (2.2.9)$$

keyfi fonksiyonları elde edilir. (2.2.8) eşitliğinden

$$\phi(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{K}{2}, \quad (2.2.10)$$

ve (2.2.9) eşitliğinden de

$$\varphi(x+ct) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}, \quad (2.2.11)$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca, elde edilen bu (2.2.10) ve (2.2.11) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x_0}^{x+ct} g(\tau) d\tau - \int_{x_0}^{x-ct} g(\tau) d\tau \right] \quad (2.2.12)$$

şeklinde genel çözüm fonksiyonu bulunur. (2.2.12) de elde edilen eşitlikte gerekli cebirsel işlemler yapılırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (2.2.13)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu bulunur ve bu çözüme (2.1) şeklindeki bir boyutlu dalga denklemi için verilen Cauchy probleminin D'Alembert çözümüdür denir.

Benzer şekilde (2.1.14) eşitlikleri göz önüne alınıp (2.1.15) başlangıç ve sınır şartları ile birlikte D'Alembert metodu ile (2.1) denkleminin çözüm fonksiyonunu araştırılır.

D'Alembert metodu ile elde edilen (2.2.13) çözüm fonksiyonunda, örneğin; (2.1.14) de verilen başlangıç şartları göz önüne alınarak

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\sin(x-t) + \sin(x+t)] \quad (2.2.14)$$

şeklinde yazılır ve (2.2.14) çözüm fonksiyonunda, trigonometrik özdeşlikler kullanılarak, gerekli işlemler yapılırsa

$$u(x,t) = \sin(x) \cos(t) \quad (2.2.15)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilir.

2.3. RIEMANN METODU

Riemann metodu iki değişkenli lineer hiperbolik denklemlere ait Cauchy probleminin çözülmesi için kullanılan klasik bir metottur. Riemann formülü Cauchy probleminin çözümünün varolduğu varsayılarak elde edilmektedir. Riemann metodunda çözüm kapalı bir bölgede aranmaktadır, bu nedenle çözüm fonksiyonu bulunurken kapalı bölgede integral alınması gerekir. Dolayısıyla Green formülünün kullanılması gerekecektir. Bu sebeple $a(x,y)$, $b(x,y)$ ve $c(x,y)$ diferansiyellenebilen fonksiyonlar olmak üzere

$$L[u] = u_{xx} + u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u \quad (2.3.1)$$

denklemini ele alalım burada L bir lineer diferansiyel operatör ve $L[u]$ da lineer bir hiperbolik tip denklemi gösterebilir. $L[u]$ denklemini bir v fonksiyonu ile çarpıp, gerekli işlemleri yapılırsa (2.3.1) denklemini

$$vL[u] = uM[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \quad (2.3.2)$$

şekline gelir. (2.3.2) eşitliğindeki $M[v]$, $L[u]$ denkleminin eşlenik denklemini, H ve K fonksiyonları da

$$K = -(vu)_y - (2u_y - bu)v, \quad H = -(vu)_x + (2u_x + au)v \quad (2.3.3)$$

şeklinde dir. Eğer $vL[u] - uM[v]$ farkı H ile K nın x e ve y ye göre kısmi türevlerinin toplamına eşitse L ve M operatörlerine eşlenik diferansiyel operatörler denir. $vL[u] - uM[v]$ farkının iki katlı integralini düzgün C doğruları ile sınırlı bir G bölgesinde alalım dolayısıyla

$$\iint_G (vL[u] - uM[v]) d\xi d\mu = \int_G (H d\mu - K d\xi) \quad (2.3.4)$$

formülü bulunur ve bu formül Green formülü olarak bilinir. Burada u ve v ikinci mertebeye kadar diferansiyellenebilen fonksiyonlardır.

Riemann metodu kullanılarak diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonunu bulabilmek için

$$L[u] = u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \quad (2.3.5)$$

iki değişkenli homojen olmayan bir lineer hiperbolik kısmi diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denklemin çözümünü xoy -düzleminde bir AB eğrisi üzerinde olduğunu varsayalım. Bu eğrinin koordinat eksenine paralel doğrularla birden fazla ortak noktası

olmasın ve AB eğrisi üzerinde ψ ve φ şeklinde iki fonksiyon tanımlansın. (2.3.5) denkleminin AB sınırı boyunca

$$u|_{AB} = \varphi \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AB} = \psi \quad (2.3.6)$$

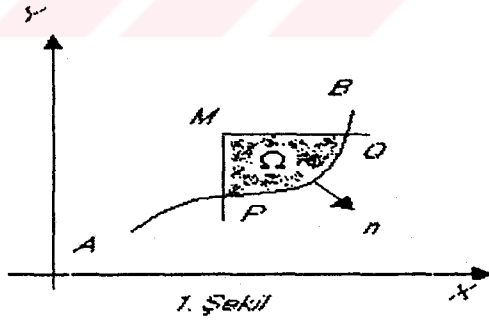
sınır şartlarını sağlayan bir çözümünün mevcut olduğunu kabul edelim. Burada n , AB eğrisinin normalidir, $\frac{\partial u}{\partial n}$ ise AB eğrisinin normalinin üzerindeki türevidir. (2.3.1) denklemi ile birlikte

$$L^*[v] = u_{xy} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv = 0 \quad (2.3.7)$$

şeklinde tanımlanan eşlenik denklemini de ele alalım. Burada a ve b katsayıları birinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır. Daha sonra

$$vL[u] - uL^*[v] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) \quad (2.3.8)$$

denklemi yazılabilir. xoy -düzleminde $M(x_0, y_0)$ keyfi bir nokta olsun ve bu noktadan $x=x_0$ ve $y=y_0$ karakteristikleri geçsin bu karakteristikler AB eğrisini sırası ile P ve Q noktalarını kessinler. Dolayısıyla 2. Şekilde de görüldüğü gibi MP ve QM karakteristikleri ile PQ eğri parçasının sınırladığı Ω bölgesini, ele alalım.



(2.3.8) eşitliğinin her iki tarafının Ω bölgesinde (2.3.4) Green formülünden yararlanarak,

$$\iint_{\Omega} (vL[u] - uL^*[v]) d\xi d\mu = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy \quad (2.3.9)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada Γ ; Ω bölgesinin sınırıdır ve bu sınır üç parçadan oluşur. QM , MP karakteristikleri ve QP eğrisi boyuca integralleri göz önüne alalım. QM boyunca sadece x değişiyor dolayısıyla (2.3.9) eşitliğinin sol tarafı

$$-\frac{1}{2} \int_{QM} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) dx = \frac{1}{2} (uv)_Q - \frac{1}{2} (uv)_M - \int_{QM} u \left(bv - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \quad (2.3.10)$$

şeklinde. Benzer şekilde

$$-\frac{1}{2} \int_{MP} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy = \frac{1}{2} (uv)_P - \frac{1}{2} (uv)_M - \int_{MP} u \left(av - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \quad (2.3.11)$$

elde edilir. (2.3.9) eşitliğinde (2.3.10) ve (2.3.11) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (uv)_M &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_{PQ} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy - \\ &\quad - \int_{QM} u \left(bv - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \int_{MP} u \left(av - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy - \iint_G (vL[u] - uM[v]) dx dy \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

şekline gelir. Burada ise kabul edelim ki; u fonksiyonu (2.3.6) başlangıç şartını sağlayan (2.3.5) denkleminin, v ise

$$L^*(v) = 0 \quad (2.3.13)$$

eşlenik denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda (2.3.12) eşitliği

$$\begin{aligned} (uv)_M &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_{PQ} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy - \\ &\quad - \int_{QM} u \left(bv - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \int_{MP} u \left(av - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy - \iint_G v f dx dy \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse (2.3.14) eşitliğinden

$$-\int_{QM} u \left(bv - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx, \quad \int_{MP} u \left(av - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \quad (2.3.15)$$

integrallerindeki QM ve MP karakteristiklerinin üzerinde u çözüm fonksiyonu bilinmiyor. Riemann metodunu kullanarak eşlenik denklemin v çözüm fonksiyonunu öyle seçelim ki bilinmeyen terimi yok edelim. Bunun için (2.3.7) denklemin

$$\triangleright \frac{\partial v}{\partial x} - bv = 0, \quad QM \text{ karakteristiği}$$

$$\triangleright \frac{\partial v}{\partial x} - av = 0, \text{ MP karakteristiği} \quad (2.3.16)$$

$$\triangleright v=1, \quad u \text{ noktasında}$$

şeklindeki üç şartı sağlayan bir çözüm olarak seçmeliyiz. (2.3.16) şartları göz önüne alındığında (2.3.15) integralleri sıfıra eşit olacağı görülür. Buradan

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_{PQ} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy - \iint_G v f(x, y) dx dy \quad (2.3.17)$$

şeklinde yazılabilir ve bu elde edilen (2.3.17) formülü Cauchy probleminin çözümünü verir ve QP boyuca integral altındaki ifadeler AB eğrisi üzerinde bilinen fonksiyonlardan oluşur, (2.3.4) eşitliğinde u ve v fonksiyonu tanımlanmıştır. $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$

fonksiyonları ise AB üzerinde (2.3.6) şartına göre

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{AB} = \frac{\partial u}{\partial s} \cos(s, x) + \frac{\partial u}{\partial n} \cos(nx) \Big|_{AB} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cos(s, x) + \psi(s) \cos(nx)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{AB} = \frac{\partial u}{\partial s} \cos(s, y) + \frac{\partial u}{\partial n} \cos(ny) \Big|_{AB} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cos(s, y) + \psi(s) \cos(ny)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\frac{\partial}{\partial s}$ AB eğrisi teğeti üzerinde alınan türevdir. (2.3.13)

eşlenik denkleminin (2.3.16) şartını sağlayan v çözümünü incelersek bu çözüm iki çift değişkene bağlı bir çözümdür. Bu değişkenler x ve y koordinatları ve belli x_0, y_0 koordinatlarıdır. Dolayısıyla v fonksiyonunu

$$v = v(x, y; x_0, y_0)$$

şeklinde yazılarak (2.3.16) şartları

$$\triangleright \frac{\partial v(x, y; x_0, y_0)}{\partial x} = b(x, y_0) v(x, y; x_0, y_0)$$

$$\triangleright \frac{\partial v(x, y; x_0, y_0)}{\partial y} = a(x_0, y) v(x, y; x_0, y_0)$$

$$\triangleright v = v(x, y; x_0, y_0) = 1$$

şeklinde yazılabilir, buradan integrasyon yolu ile

$$v = v(x, y; x_0, y_0) = e^{\int_{x_0}^x b(x, y_0) dx}$$

$$v = v(x, y; x_0, y_0) = e^{\int_{y_0}^y a(x_0, y) dy}$$

ifadeleri elde edilebilir. (2.3.13) eşlenik denkleminin $v = v(x, y; x_0, y_0)$ çözümüne Riemann Fonksiyonu adı verilir.

Benzer şekilde (2.1.14) eşitlikleri göz önüne alınıp (2.1.15) başlangıç ve sınır şartları ile birlikte Riemann metodu kullanılarak (2.1) denkleminin çözüm fonksiyonunu araştırılır.

(2.1) kısmi diferansiyel denklemini operatör formda

$$Lu = D_t^2 u - c^2 D_x^2 u = 0 \quad (2.3.18)$$

şeklinde yazılır ve (2.2.18) ile verilen ikinci mertebeden sabit katsayılı operatörü çarpanlarına ayırarak buradan kısmi diferansiyel denklemin karakteristikleri

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \mu = x - ct \end{cases} \quad (2.3.19)$$

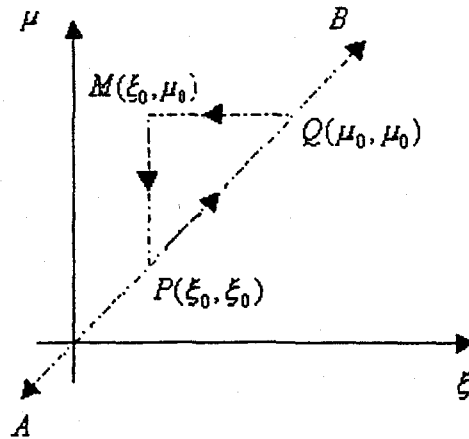
şeklinde elde edilir. (2.1) denklemine (2.3.19) dönüşümleri uygulanırsa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \mu} = 0 \quad (2.3.20)$$

şeklinde bir hiperbolik diferansiyel denklem elde edilir. Daha sonra (2.3.19) eşitlikler kullanılarak

$$x = \frac{1}{2}(\mu + \xi), \quad t = \frac{1}{2c}(\mu - \xi)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $t=0$ için AB doğrusu $\mu = \xi$ doğrusudur.



$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=\mu} = u_x x_\xi + u_t t_\xi = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\xi=\mu}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mu} \right|_{\xi=\mu} = u_x x_\mu + u_t t_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\xi=\mu}$$

(2.3) şartları göz önüne alınarak

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=\mu} = \frac{1}{2} f'(\xi) - \frac{1}{2c} g(\xi)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mu} \right|_{\xi=\mu} = \frac{1}{2} f'(\xi) - \frac{1}{2c} g(\xi)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$u \Big|_{\xi=\mu} = f(\xi)$$

olur. Buradan da Riemann metodunun yapısı gereği (2.3.12) çözüm fonksiyonunda $a=b=0$, $f=0$ değerleri göz önünde bulundurularak (2.1) ve (2.2) şartlarını sağlayan çözüm fonksiyonu

$$u(\xi_0, \mu_0) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{PQ} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \mu} \right) d\mu$$

elde ederiz.

Şimdi ise $v(\xi, \mu, \xi_0, \mu_0)$ Riemann fonksiyonunu bulmaya çalışalım. Riemann metodunun yapısı gereği $v(\xi, \mu, \xi_0, \mu_0)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \mu} = 0$$

denklemini ve

$$v(\xi, \mu_0, \xi_0, \mu_0) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} 0 d\xi} = 1,$$

$$v(\xi_0, \mu, \xi_0, \mu_0) = e^{-\int_{\mu_0}^{\mu} 0 d\mu} = 1,$$

$$v(\xi, \mu, \xi_0, \mu_0) = 1,$$

şartları ile birlikte sağlamalıdır. Burada bulmaya çalıştığımız Riemann fonksiyonudur.

$$u(\xi_0, \mu_0) = \frac{f(\xi_0) + f(\mu_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\mu_0} \left[\frac{1}{2} f'(\xi) - \frac{1}{2c} g(\xi) \right] d\xi + \int_{\xi_0}^{\mu_0} \left[\frac{1}{2} f'(\xi) + \frac{1}{2c} g(\xi) \right] d\xi \quad (2.3.21)$$

şeklinde genel çözüm fonksiyonu bulunur. (2.3.21) ile elde edilen çözüm fonksiyonunda gerekli cebirsel işlemler yapılırsa

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (2.3.22)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu bulunur ve bu çözüme (2.1) şeklindeki bir boyutlu dalga denklemi için verilen Cauchy probleminin D'Alembert çözümüdür denir.

Benzer şekilde (2.1.14) eşitlikleri göz önüne alınıp (2.1.15) başlangıç ve sınır şartları ile birlikte Riemann metodu ile (2.1) denkleminin çözüm fonksiyonunu araştıralım.

Riemann metodu ile elde edilen (2.3.22) çözüm fonksiyonunda, örneğin; (2.1.14) de verilen başlangıç şartları göz önüne alınarak

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x - t) + \sin(x + t)] \quad (2.3.23)$$

şeklinde yazılır ve (2.3.23) çözüm fonksiyonunda, trigonometrik özdeşlikler kullanılarak, gerekli işlemler yapılırsa

$$u(x, t) = \sin(x) \cos(t) \quad (2.3.24)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilir.

2.4. FOURIER DÖNÜŞÜM METODU

Özel dönüşüm metotlarından biri olan Fourier dönüşüm metodu ile kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü bulunurken karşılaşılan karmaşık hesaplamaları en aza indirmek için kullanılan bir dönüşüm metodudur. Bu dönüşüm metodu kullanılarak ele alınan kısmi diferansiyel denklem, adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek elde edilen denklemin genel çözümü bulunur. Bu genel çözümde başlangıç şartları kullanılarak özel çözüm elde edilir ve bu özel çözüme ters Fourier dönüşümü uygulanarak kısmi diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonu bulunmuş olur.

Burada önce tek değişkenli ve $(-\ell, \ell)$ aralığında sürekli ve periyodik olan bir $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu $f(x)$ fonksiyonunun $(-\ell, \ell)$ aralığında Fourier seri açılımı

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (2.4.1)$$

şeklinde olur, burada

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{n\pi t}{\ell} dt, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\ell} dt; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.2)$$

(2.4.2) eşitlikleri (2.4.1) denkleminde yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{n\pi t}{\ell} dt \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\ell} dt \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{n\pi}{\ell} (t-x) dt \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (2.4.4)$$

mutlak integrallenebilir ve yakınsak olmak üzere buradan

$$\frac{|a_0|}{2} = \frac{1}{2\ell} \left| \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(t)| dt \leq \frac{1}{2\ell} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (2.4.5)$$

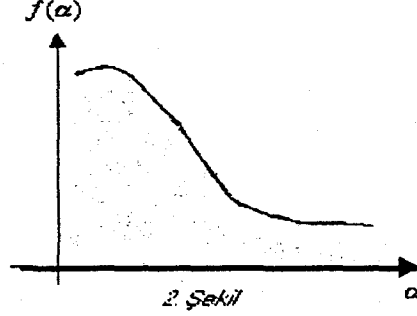
şeklinde yazılır. Dikkat edilecek olursa $\ell \rightarrow \infty$ için $a_0 \rightarrow 0$ dır ve

$$f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \left(\frac{n\pi}{\ell} (t-x) \right) dt, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (2.4.6)$$

olur, burada $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \Delta\alpha = \frac{\pi}{\ell}$ eşitliği alınır

$$f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} F(x_k) \Delta\alpha, \quad f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos[\alpha(t-x)] dt \quad f(\alpha) \quad (2.4.7)$$

şeklinde yazılabilir ve $\alpha \rightarrow f(\alpha)$ için



$$f(x) = \int_0^{\infty} f(\alpha) d\alpha = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\alpha(t-x)] dt \right] d\alpha \quad (2.4.8)$$

bulunur. Ayrıca

$$\cos \alpha(t-x) = \frac{e^{i\alpha(t-x)} + e^{-i\alpha(t-x)}}{2} \quad (2.4.9)$$

şeklinde alınabilir ve bu eşitlik (2.4.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt e^{-i\alpha x} \right] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt e^{i\alpha x} \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt e^{-i\alpha x} \right] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt e^{i\alpha x} \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt e^{-i\alpha x} \right] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt e^{i\alpha x} \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right] e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right] e^{i\alpha x} d\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$

şeklinde tek değişkenli bir fonksiyonun Fourier dönüşümü elde edilir ve elde edilen bu dönüşümün tersi ise

$$F^{-1}\{f(t)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk$$

şeklinde bulunur. Bu dönüşüm ters Fourier dönüşümü olarak adlandırılır.

Benzer şekilde iki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$F\{u(x,t)\} = u(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} u(x,t) dx \quad (2.4.10)$$

şeklinde yazılır ve bu dönüşümün tersi olan ters Fourier dönüşümü ise

$$u(x,t) = F^{-1}\{u(k,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} u(k,t) dt \quad (2.4.11)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca; $u(x,t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü altında türevleri alınabilir ve bu türevler

$$\begin{aligned} F\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= (ik)F\{u(x,t)\} = (ik)u(k,t) \\ F\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} &= (ik)^2 F\{u(x,t)\} = (ik)^2 u(k,t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde olup, Fourier dönüşümü altında bir fonksiyonun n inci mertebeden türevi ise

$$F\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\} = (ik)^n F\{u(x,t)\} = (ik)^n u(k,t) \quad (2.4.13)$$

şeklinde bulunabilir. Fourier dönüşümünün en büyük dezavantajı sabit fonksiyon ve $\sin x$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümünün olmamasıdır, çünkü;

$$F\{\sin wx\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \sin wx \, dx \quad (2.4.14)$$

(2.4.14) eşitliğindeki Riemann anlamında integrallenemez olmasındandır (Guenther ve Lee, 1988).

Şimdi ise (2.1) hiperbolik tipindeki kısmi diferansiyel denklemi ve (2.2) başlangıç şartı altında Fourier dönüşüm metodu kullanarak denklemin çözüm fonksiyonunu arayalım. (2.4.13) eşitliğinden

$$F(u\{x,t\}) = u(k,t) \quad (2.4.15)$$

olacağından (2.1) diferansiyel denklemindeki $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ifadesinin eşitini (2.4.13) eşitliğinden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 (ik)^2 u = -c^2 k^2 u \quad (2.4.16)$$

denklemini

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + k^2 c^2 u = 0 \quad (2.4.17)$$

şeklinde ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Bu denklemde, $kc > 0$ olmak üzere (2.4.17) denkleminin

$$u = c_1(k) e^{-ikct} + c_2(k) e^{ikct} \quad (2.4.18)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu bulunur ve elde edilen bu çözüm fonksiyonunda (2.2.2) başlangıç şartı kullanarak $c_1(k)$ ve $c_2(k)$ ifadelerini bulabiliriz. Buradan da

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) \quad \text{ise} \quad u(k,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx, \\ u_t(x,0) = g(x) \quad \frac{\partial u(k,0)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} g(x) dx \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

başlangıç şartları elde edilir. Daha sonra (2.4.19) eşitlikleri kullanılarak

$$u(k,0) = c_1(k) + c_2(k) = f(k) \quad (2.4.20)$$

$$u_t(k,0) = -ikc c_1(k) + ikc c_2(k) = g(k) \quad (2.4.21)$$

şekline getirilir ve (2.4.20) ile (2.4.21) denklem sistemi çözülürse

$$c_1(k) = \frac{1}{2} f(k) - \frac{1}{2ikc} g(k) \quad (2.4.22)$$

$$c_2(k) = \frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{2ikc} g(k) \quad (2.4.23)$$

ifadeleri bulunur bulunan (2.4.22) ve (2.4.23) ifadeleri (2.4.18) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa

$$u(k,t) = \frac{1}{2} f(k) [e^{-ikct} + e^{ikct}] + \frac{1}{2ikc} g(k) [e^{ikct} - e^{-ikct}] \quad (2.4.24)$$

fonksiyonu elde edilir. (2.4.24) çözüm fonksiyonuna (2.4.2) eşitliğindeki ters Fourier dönüşümü uygulanır ise

$$\begin{aligned} f^{-1}\{u(k,t)\} = u(x,t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) [e^{ik(x-ct)} + e^{ik(x+ct)}] dk \\ &+ \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \left[\frac{e^{ik(x-ct)} - e^{ik(x+ct)}}{ik} \right] dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \left(\int_{x-ct}^{x+ct} e^{ik\xi} d\xi \right) dk \\
&\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ik\xi} dk \right)
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

ifadesi bulunur. Sonuç olarak (3.4.25) çözüm fonksiyonunda gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \tag{2.4.26}$$

çözüm fonksiyonu bulunur ve bu elde edilen (2.4.26) çözümü iyi bilinen D'Alembert metodu ile elde edilen çözüm fonksiyonu ile aynıdır.

Burada (2.1) denkleminin $u(x,0)=\sin x$, $u_t(x,0)=0$ eşitlikleri göz önüne alınıp (2.1.15) başlangıç ve sınır şartları ile birlikte Fourier dönüşüm metodu uygulanırsa denklemin çözümü bulunabilir. Yani bu çözüm kesim 2.2 de olduğu gibi (2.2.14) seri formunda bir çözüm bulunur ve bu çözüm de (2.2.15) şeklindedir.

2.5. ADOMİAN AYRIŞIM YÖNTEMİ

Ayrışım yöntemi bir seri metodu olduğu ve bir çok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir (Adomian, 1990). Genel olarak bu metodu verecek olursak, kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere

$$Fu(x)=g(x) \tag{2.5.1}$$

denklemini ele alalım. (2.5.1) denkleminde L ; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, R ; lineer operatörden kalan kısmı ve N ; ise diferansiyel denklemde lineer olmayan terimi göstermek üzere

$$Lu+Ru+N u = g \tag{2.5.2}$$

şeklinde ayrıştırarak yazalım. L bir lineer operatör ve tersi de mevcut olsun. (2.5.2) eşitliği

$$Lu=g-Ru-Nu \tag{2.5.3}$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafı L^{-1} operatörü ile sol taraftan (2.3.5) eşitliğine uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.5.4)$$

eşitliği elde edilebilir.

L ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (2.5.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yapıldıktan sonra

$$u = u(0) + tu'(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.5.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.5.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu lineer olmayan terim ve

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki } A_n \text{ polinomları özel polinomlardır ve}$$

bu polinomlar daha sonra tartışılacaktır. (2.5.5) eşitliğindeki u ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terim u_0 , verilen başlangıç değeri ve denklemin sağ taraf fonksiyonunun integrali olmak üzere, $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra seri çözümün birinci terimi olan u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.5.6)$$

şeklinde yazılabilir ve serinin yakınsak olduğu varsayılacaktır. Bu seri çözümü kullanılarak (2.5.5) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.5.7)$$

şeklinde genel seri formu elde edilir. Benzer olarak, (2.5.7) eşitliği açık şekilde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 a, A_1 sadece u_0 ve u_1 e, A_2 ise, u_0, u_1, u_2 ye bağlı ve benzer şekilde (2.5.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomu da ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0), \\
A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0), \\
A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0), \\
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

şeklinde verilmektedir (Adomian,1994). Ayırıştırılmış polinomların genel hali ise

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\Phi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n > 0 \tag{2.5.10}$$

formülize edilerek literatüre (Adomian,1994; Seng ve arkadaşları, 1996) tarafından kazandırılmıştır. Bu Adomian polinomlarını elde etmek için bir alternatif metot ise (Wazwaz, 1999) tarafından geliştirilmiştir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olması istenildiği durumlarda ayırışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.5.10) genel formülün kullanılması, istenildiği kadar çok sayıda (2.5.6) ayırıştırma serisinin terimlerinin hesaplanmasında kolaylıklar sağlamaktadır.

Ayırışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için

$$\Phi_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x,t); \quad n \geq 0 \tag{2.5.11}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x,t) \tag{2.5.12}$$

ifadesinin (2.5.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolaca hesaplanabilir. Buna ilaveten (2.5.12) şeklindeki ayırışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsaklık ortaya çıkmaktadır. Ayırışım serisinin yakınsaklığı literatürde bir çok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayırışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak (Cherruault, 1989; R  paci, 1990; Cherruault ve Adomian, 1993; Abbaoui ve Cherruault, 1994; Abbaoui ve Cherruault, 1995) incelemişlerdir. Bu çalışmalarla ilaveten yakın zamanda (Abbaoui ve arkadaşları, 2001)   alışmalarında ayırışım serisinin

yakınsaklığını bulmada yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yazarlar ayrışım seri metodunun yakınsaklığını elde etmek için yeni şartlar vererek bulmuşlardır. Biz bu çalışmamızda ayrışım serisinin teorik olarak yakınsaklığını değil de sayısal yakınsaklığına bakacağımızdan dolayı detaylı bilgi yukarıdaki referanslara bakılabilir.

Yukarıda klasik metotlar için yaptığımız uygulamaya benzer olarak bu metodun uygulaması için hiperbolik tipindeki (2.1) kısmi diferansiyel denklemi ve (2.2) başlangıç ve sınır şartları ile birlikte ele alalım. Bu ele alınan başlangıç ve sınır şartları özel olarak (2.1.14) eşitlikleri göz önüne alınarak (2.1.15) şeklinde olsun. Ayrıca

$L_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ lineer operatörler olmak üzere bu operatörlerin tersleri de

mevcut ve $L_u^{-1} = \int_0^t \int_0^s (\cdot) ds dt$, $L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^s (\cdot) ds dx$ şeklinde tanımlansın. Burada (2.1)

denklemini operatör formunda yazarsak

$$L_u u - L_{xx} u = 0, \quad (2.5.13)$$

olur ve (2.5.13) denklemi t -yönünde çözülürse

$$u(x, t) = u(x, 0) + t u_t(x, 0) + L_u^{-1} L_{xx} u(x, t) \quad (2.5.14)$$

şeklinde $u(x, t)$ çözümü bulunabilir. Bu çözüm (2.5.6) seri formunda bir çözüm olacağından başlangıç şartları kullanılarak

$$u_0 = \sin x \quad (2.5.15)$$

şeklinde serinin ilk terimi bulunur. serinin diğer terimlerini bulunmak için ise (2.5.8) ile verilen indirgeme bağıntısına benzer şekilde

$$u_{n+1}(x, t) = L_u^{-1} L_{xx} u_n(x, t), \quad n \geq 0 \quad (2.5.16)$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir. $n \geq 0$ için başlangıç şartları kullanılarak serinin ilk terim (2.5.15) şeklindedir. (2.5.16) indirgeme bağıntısı kullanılarak ayrışım serisinin

$$\begin{aligned}
u_1 &= L_n^{-1} L_{xx} u_0 = -\sin x \frac{t^2}{2!}, \\
u_2 &= L_n^{-1} L_{xx} u_1 = \sin x \frac{t^4}{4!}, \\
u_3 &= L_n^{-1} L_{xx} u_2 = -\sin x \frac{t^6}{6!} \\
&\vdots \\
u_n &= L_n^{-1} L_{xx} u_{n-1} = (-1)^n \sin x \frac{t^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

terimleri kolayca elde edilebilir. Bu elde edilen terimler (2.5.6) ayrışım serisinde yerlerine yazılırsa serinin açık formu

$$u(x, t) = \sin x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) \tag{2.5.18}$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafında parantez içindeki seri $\cos t$ fonksiyonunun açılımı olduğu kolayca görülmektedir. Buradan (2.2) ile verilen hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin çözümünün kapalı formu olan

$$u(x, t) = \sin x \cos t \tag{2.5.19}$$

fonksiyonu olduğu görülür. Bu fonksiyon da başlangıç şartını ve (2.1) denklemini sağladığı kolayca görülebilir.

Sonuç olarak literatürde bilinen klasik çözüm metotları ve özel dönüşüm metotları ile çözüm fonksiyonu araştırılırken, birçok işlem yoğunluğu ile karşılaşmaktadır. Klasik çözüm yöntemlerinden olan D'Alembert ve Riemann yöntemleri sadece hiperbolik tipindeki kısmi diferansiyel denklemlerine uygulanabilmektedir. Ayrıca klasik çözüm yöntemleri ve özel dönüşüm metotları ile çözüm fonksiyonu aranırken, ele alınan diferansiyel denklemler kanonik forma indirgenerek söz konusu denklemin çözüm fonksiyonu elde edilmektedir. Bu elde edilen çözüm fonksiyonları kullanılarak da yaklaşık sayısal çözümler elde edilememektedir. Fakat ayrışım metodu, ele alınan denklemleri lineerleştirmeksizin hem klasik yöntemler ile elde edilen çözüm fonksiyonunu hem de ayrışım metodunun yapısı gereği seri formundaki çözüm fonksiyonu kullanılarak yaklaşık sayısal çözümler de elde edilebilir.

Kısmi diferansiyel denklemin çözümü D'Alembert metodu kullanılarak hesaplandığında, özellikle $u_x(x, 0) = g(x)$ başlangıç değer fonksiyonu kolay intgrallenmez ise istenmeyen karmaşık işlemler ile karşılaşıldığı iyi bilinmektedir (Guenther ve Lee,

1988). Bu yüzden (2.2.13) çözüm fonksiyonu kolayca elde edilemeye bilir. (Wazwaz, 1998) tarafından ayrışım metodu kullanılarak D'Alembert metodu ile karşılaştırmalı bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaya ilaveten bu bölümde Değişkenlerine ayırma metodu, Riemann metodu ve Fourier dönüşüm metodu ile çözüm fonksiyonu araştırılırken, $g(x)$ fonksiyonunun kolay integrallenemeyen olması durumunda hesaplamalarda zorluklar veya integral işleminin yapılamaması durumu ile karşılaşılabilir. Ancak ayrışım seri metodunda t - ve x - yönündeki çözüm eşit olduğundan bu türden karşılaşılabilecek zorluklar başlangıç şartının t ye veya x e bağlı olan fonksiyonlar esnekliği ile telafi edilebilir (Wazwaz, 1998; Kaya ve Yokuş, 2002).



3. BURGERS DENKLEMİ

Bu bölümde, lineer olmayan klasik denklemler içinde önemli bir yer tutan ve çalışmamızdaki uygulamalarda kullanacağımız Burgers denklemi modelini ele alacağız. Önce denklemin nasıl modellendiğini ve daha sonra Burgers denkleminin çözüm fonksiyonunun bulunmasında kullanılan ilk dönüşüm metotlarından biri olan Colle-Hopf dönüşümünü genel olarak ele alınacak ve daha sonra özel bir başlangıç şartı altında çözümü elde edilecektir. Tezimizde yeni metot olarak verdiğimiz ayrışım metodunun bu probleme uygulanışı ve aynı özel başlangıç şartı altında Burgers denkleminin çözümü ayrışım metodu kullanılarak hesaplanacaktır.

3.1. BURGERS DENKLEMİNİN ELDE EDİLİŞİ

Öncelikle bu Burgers denkleminin elde edilmesini kısaca açıklayalım, bunun için aşağıdaki

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.1.1)$$

lineer olmayan korunum diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem süreksiz çözümlerin veya şok dalgaların yapısını incelemek için $q = Q(p)$ fonksiyonel bağıntısının varlığını kabul edip, p ve q için sıçrama süreksizliğine sahip olduğunu varsayalım. İlgili birçok problemde q da p nin olduğu kadar p_x yoğunluk gradyetinde bir fonksiyon olduğunu kabul etmek daha iyi bir yaklaşım olacaktır. Basit bir model olarak

$$q = Q(p) - vp_x \quad (3.1.2)$$

eşitliğini alalım, burada; v pozitif sabittir. (3.1.2) ile ele alınan eşitliği (3.1.1) denkleminde yerine yazarsak

$$p_t + c(p)p_x = vp_{xx} \quad (3.1.3)$$

formunda lineer olmayan difüzyon denklemini elde ederiz ve burada $c(p) = Q'(p)$ dir. Elde edilen (3.1.3) denklemini $c'(p)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} c_t + cc_x &= v c'(p) p_{xx} \\ &= v \{c_{xx} - c''(p)p_x^2\} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

denklemini elde ederiz. Eğer $Q(p)$, p ye bağlı ikinci dereceden bir fonksiyon ise bu taktirde $c(p)$, p değişkenine göre lineerdir ve $c'(p)=0$ dır. Sonuç olarak (3.1.4) denklemi

$$c_t + cc_x = v c_{xx} \quad (3.1.5)$$

şekline dönuşür. Yukarıda elde edilen (3.1.5) denkleminde c fonksiyonu $u(x,t)$ akışkan hız alanı ile değıştirilirse

$$u_t + uu_x = v u_{xx} \quad (3.1.6)$$

denklemini bulunur. Bu (3.1.6) denklemi basit bir türbülans modeli olan ve literatürde iyi bilinen Burgers denklemidir, burada v kinematik viskozitedir. Böylece Burgers denklemi; zamandaki değışim, lineer olmayan terim ve difüzyon arasında bir dengedir. Bu denklem akışkanlar dinamiğinde, difüzyon dalgaları için en basit lineer olmayan model denklemdir. Bu denklem ilk olarak Burgers tarafından 1948'de öncelikle taşınım ve difüzyonun iki karşıt etkilerinin etkileşimi ile tanımlanan türbülans üzerinde geçen ışık için geliştirildi (Burgers, 1948). Yukarıda elde edilen (3.1.6) denklemi bir boyutlu türbülans, vizkoz elastik tüplerdeki dalgaları sonlu elektriksel geçirgenlikler ile bir alandaki magnettohidrodinamik dalgaları içeren bir çok fiziki problemde ortaya çıkar. Türbülans, hem üç boyutlu hem de doğada istatistiksel olarak nadiren olduğu için çok karmaşıktır. Dikkat edilirse burada (3.1.6) denklemi paraboliktir ancak, $v = 0$ olduğunda ise denklem hiperbolik olmaktadır. Daha da önemlisi parabolik denklemin çözümünün özellikleri önemli bir şekilde hiperbolik denklemin çözümünden farklıdır.

Burgers denklemini ve çözümlerinin daha iyi analiz etmek için bu denklemin lineer şekli olan basit difüzyon ve lineerleştirilmiş durumlarını ele alalım.

I. Durum: Yukarıdaki (3.1.6) denkleminde lineer olmayan uu_x teriminin olmadığını varsayalım. Bu durumda diferansiyel denklem iyi bilinen

$$u_t = v u_{xx}; \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.1.7)$$

difüzyon denklemdir. Bu (3.1.7) denklem lineerleştirilmiş Burgers denklemdir ve $t = 0$ durumunda

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_2, & x < 0 \end{cases} \quad (3.1.8)$$

başlangıç şartları ile x e göre Fourier dönüşümünü uygulanırsa kolaylıkla çözülebilir. (3.1.7) diferansiyel denkleminin $t > 0$ için ve (3.1.8) başlangıç şartı ile birlikte ele alındığında açık çözüm

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{vt}}\right) \quad (3.1.9)$$

fonksiyonu bulunur. Bu difüzyon teriminin varlığını ve vu_{xx} terimin $(vt)^{-1/2}$ başlangıç yayılması ile düzgün olacağını gösterir. (3.1.9) çözümü $x \rightarrow -\infty$ iken u_1 , $x \rightarrow +\infty$ iken u_2 sabit değerlerine yaklaşır. (3.1.6) diferansiyel denkleminde eğer difüzyon teriminin etkisinin olmadığı durumu ortaya çıkar ise yavaş yavaş lineer olmayan adımlara ve sonra da kırılmaya yol açar. Gerçekten (3.1.6) diferansiyel denklemi lineer olmayanlık ve difüzyonun iki zıt etkisini birleştirir. (3.1.6) diferansiyel denkleminin difüzyon terimi olmadığından sonuç denklemi, çözüm olarak ilerleyen bir bükülmüş (distorted) dalga profilini birinci mertebeden lineer olmayan dalga denklemine indirgenir. Olay sonunda bir şok dalga olarak bir süreksizliği geliştirir.

II. Durum: (3.1.6) diferansiyel denklemi, taşınım terimi ile cu_x lineerleştirilmiş bir denklem (burada c bir sabit),

$$u_t + cu_x = vu_{xx} \quad (3.1.10)$$

şeklinde lineer parabolik bir diferansiyel denkleme indirgenir. (3.1.10) diferansiyel denkleminin

$$u(x,t) = a \exp \{ i(kx - wt) \} \quad (3.1.11)$$

durumunda düzlem dalga çözümünü arıyoruz. Burada $v > 0$ olduğunda $\operatorname{Im} w = -vk^2 < 0$ alınacaktır. Böylece (3.1.10) diferansiyel denkleminin çözümü

$$u(x,t) = ae^{-vk^2t} \exp[ik(x - ct)] \quad (3.1.12)$$

olur, burada k dalga sayısı ve c faz hızı ile bir difüzyon dalgasını temsil etmek üzere, t zamanı ile dalganın genliği üstel olarak azalır ve sabit v ile k arttıkça küçülen $t_0 = (vk^2)^{-1}$ gecikme zamanı ile dalganın genliği daha da küçük hale gelir. Böylece daha küçük dalga boylu dalgalar, daha uzun dalga boylu dalgalardan daha hızlı söner. Diğer taraftan, sabit bir k dalga sayısı için v artarken, dalganın sönme zamanı azalır. Dolayısıyla buradaki v niceliğine difüzyon ölçümü olarak bakılabilir. Sonuç olarak uzun boylu dalgaları bozan etkenler, zamana bağlıdır. Oysa kısa boylu dalgalar daha hızlı

bozulacak ve $v < 0$ için (2.1.12) çözümü $t \rightarrow \infty$ için sonsuzluğa yönelir ve bu nedenle çözüm kararsız olur.

3.2 HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ VE ŞOK DALGA YAPISI

Linear olmayan ve difüzyon etkisini incelemek için

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - \kappa t \quad (3.2.1)$$

formunda (3.1.6) Burgers denkleminin hareket eden dalga çözümünü arayalım, burada κ dalga hızı olarak tanımlamaktadır. $u(\xi)$ asimtotik olarak $\xi \rightarrow -\infty$ iken u_1 , $\xi \rightarrow +\infty$ iken u_2 sabit değerlerine yönelen özelliği ile dalga formunu temsil eder. $u_1 > u_2$ olduğunu varsayalım ve (3.2.1) dönüşümlerini kullanarak (3.1.6) Burgers denkleminde yerlerine yazarsak

$$-\kappa u'(\xi) + uu'(\xi) - \nu u''(\xi) = 0$$

(3.16) denklemi şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüştür. Bu denklemin integrali alınır

$$-\kappa u(\xi) + \frac{1}{2}u^2 - \nu u'(\xi) = A$$

elde edilir, burada A integrasyon sabitidir. Yukarıdaki adi diferansiyel denklemi

$$u'(\xi) = \frac{1}{2\nu}(u^2 - 2\kappa u - 2A) \quad (3.2.2)$$

şeklinde yazıp, gerekli düzenlemeleri yaparsak ve eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlersek

$$u^2 - 2\kappa u - 2A = 0 \quad (3.2.3)$$

denklemini elde ederiz. Bu elde edilen ikinci dereceden denklemin kökleri u_1 ve u_2 olur. Böylece κ ve A (3.2.3) ikinci dereceden denkleminde u_1 ve u_2 köklerinin sırasıyla toplamı ve çarpımını tanımladığı analizden bilinmektedir. Bu gerçek, göz önünde bulundurularak

$$\kappa = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad A = -\frac{1}{2}u_1 u_2 \quad (3.2.4)$$

yazılabilir ve bu yazılandan, dalga hızının sonsuzda asimtotik durumlarda iki hızın ortalaması şeklinde olduğu sonucu söylenebilir.

Şimdi, (3.2.2) denklemini

$$2\nu \frac{du}{d\xi} = u^2 - 2\kappa u - 2A = (u - u_1)(u - u_2)$$

şeklinde yazarsak ve gerekli cebirsel işlemlerden sonra denklemin

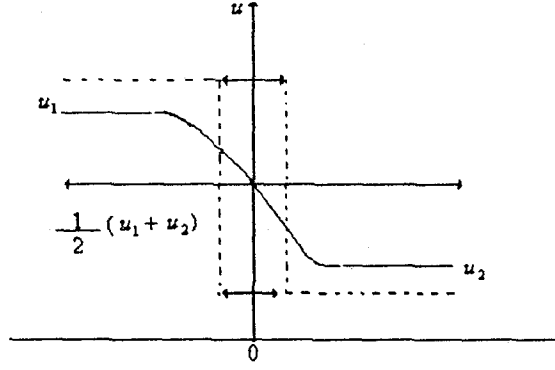
$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \frac{u_1 + u_2 \exp\left[\left(\frac{\xi}{2\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]}{1 + \exp\left[\left(\frac{\xi}{2\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]} \\
 &= u_2 + \frac{(u_1 - u_2)}{1 + \exp\left[\left(\frac{\xi}{2\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

şeklinde çözümünü buluruz. Elde edilen (3.2.5) u çözümünü

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{u_1 + u_2 \exp\left[\left(\frac{\xi}{2\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]}{1 + \exp\left[\left(\frac{\xi}{2\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]} - \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \\
 &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \tanh\left[\left(\frac{\xi}{4\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

şeklinde alalım. Bu çözümde $u_1 > u_2$ ise $u(\xi)$ dalgası, 1. Şekilde de gösterildiği gibi $\xi \rightarrow +\infty$ iken u_1 sabit değerinden $\xi \rightarrow -\infty$ iken u_2 sabit değerine ξ ile monoton olarak azalır ve $\xi = 0$ değeri için $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ olur. (3.2.6) dalga-yapısının biçimi önemli

şekilde ν difüzyon katsayısından etkilenmektedir. Bu difüzyon işlemlerinin mevcut olması dalga profilinin bozulmasını önler ve bu nedenle kırılma olmaması gereğini açıklar. Diğer taraftan difüzyon terimi (3.1.6) diferansiyel denkleminde yoksa ($\nu = 0$) kesinlikle dalga profili zaman ile bozulmadan etkilenecek ve bu nedenle şokun gelişimiyle kırılacaktır. Hareket denkleminde şok dalga, taşınımı (lineer olmayan terimin etkisini ve lineer difüzyon terimlerinin düzgün etkisi arasında bir denge oluşur).



1. Şekil: Hareket eden Dalga Çözümü $u(\xi)$, $\xi = x - \kappa t$

1. Şekilden de görüldüğü gibi çözüm profilinde düzgün süreklilik vardır. Ancak, daha sonra sürekliliği düzgün bir profile yaymaya yönelir. Bu özellikten dolayı çözüm difüzyon dalgası olarak adlandırılır. Akışkanlar akısında ν vizkoziteyi temsil eder.

(3.2.5) eşitliğinin pay ve paydasını $\exp\left[-\frac{\xi}{2\nu}(u_1 - u_2)\right]$ ile çarparsak (3.1.6) ile verilen çözüm

$$u(\xi) = \frac{u_2 + u_1 \exp\left[\left(-\frac{\xi}{2\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]}{1 + \exp\left[\left(-\frac{\xi}{2\nu}\right)(u_1 - u_2)\right]} \quad (3.2.7)$$

şekline gelir. (3.2.7) çözümündeki üstel faktör $\nu/(u_1 - u_2)$ mertebeden δ kalınlıklı ince bir geçiş tabakasının varlığını gösterir. Bu δ kalınlığı, u_1 ve u_2 sabitleri için $\nu \rightarrow 0$ a giderken şok kalınlığı sıfıra yönelerek gider. Aynı zamanda, ν sabiti için $u_1 \rightarrow u_2$ iken δ artar. Eğer δ , problemin diğer uzunluk ölçüleriyle karşılaştırıldığında küçük ise çabuk şok işlemi bir süreksizlik ile başarılı olarak yaklaşılabilir. Böylece, $\nu \rightarrow 0$ giderken limit halinde (3.1.6) ile verilen diferansiyel denklemin çözümleri

$$\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) = \kappa(u_1 - u_2) \quad (3.2.8)$$

sıçrama şartını sağlayan süreksiz şok dalgalar ile birlikte

$$u_t + uu_x = 0 \quad (3.2.9)$$

lineer olmayan denklemin çözümüne yöneleceğini bekleyebiliriz, burada;

$$\kappa = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad (3.2.10)$$

burada; κ ile verilen şok hızı göstermektedir. Bu ise yukarıdaki analizle tam uyumludur.

3.3. COLE-HOPF DÖNÜŞÜMÜ VE BURGERS DENKLEMİ İÇİN TAM ÇÖZÜM

Yukarıda verilen klasik metotlar kullanılarak lineer veya lineer olmayan denklemlerin çözümlerini elde etmek için bazı dezavantajları olduğu bilindiğinden dolayı bu tip diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için bir çok dönüşüm metotları ve bazı özel metotlar literatürde mevcuttur (Guenther ve Lee, 1988). Klasik denklemlerden biri olan (3.1.6) lineer olmayan Burgers denklemi ve bu denklemin tam çözümünü elde etmek için kullanılan ilk dönüşüm metotlarından biri Cole-Hopf dönüşüm metodudur. Biz bu kesimde, Cole-Hopf dönüşümünün Burgers denklemine uygulanışını ele alacağız.

Yukarıda elde edilen (3.1.6) Burgers denklemi ve $t=0$ için başlangıç şartı ile

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.3.1)$$

$$u(x,0) = F(x); \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.3.2)$$

denklemini ele alalım. Burgers denklemi çözülürken, ν vizkositesinin küçük değerlerine veya Reynolds sayılarının büyük değerlerine önem verilmektedir. Çünkü, deneysel olarak girdabın başlangıcının *Reynold sayısı* denilen boyutsuz bir parametre ile belirlendiği bulunmuştur, *Reynold sayısının* çok büyük alınması durumunda yayılma çok düzensiz ve rasgele bir şekilde gerçekleşebilmektedir.

Birbirlerinden bağımsız olarak (Hopf, 1950; Cole, 1951) Burgers denklemini bir lineer difüzyon denklemine dönüştürebilen bir dönüşüm buldular. İlk olarak (3.3.1) diferansiyel denklemini

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 - \nu u_x \right)_x = 0 \quad (3.3.3)$$

konumuna benzer bir şekilde yazarak, bu denklemde ψ fonksiyonu mevcut olacak şekilde

$$u = \psi_x \quad (3.3.4)$$

$$\nu u_x - \frac{1}{2} u^2 = \psi_t, \quad (3.3.5)$$

dönüşümleri yapılır ve (3.3.4) eşitliğindeki u ifadesi (3.3.5) denkleminde yerlerine yazılarak

$$v\psi_{xx} - \frac{1}{2}\psi^2_x = \psi_t \quad (3.3.6)$$

denklemini bulunur. Daha sonra (3.3.6) denkleminde yeni bir $\psi = -2v \log \phi$ dönüşümü yapıldıktan sonra

$$u = \psi_x = -2v \frac{\phi_x}{\phi} \quad (3.3.7)$$

eşitliğini elde edilir ve günümüzde bu dönüşüm, *Colle-Hopf dönüşümü* olarak bilinmektedir. (3.3.7) eşitliğinin x değişkenine göre türevi alındığında

$$\psi_{xx} = -2v \left(\frac{\phi_x}{\phi} \right)^2 - \frac{2v}{\phi} \phi_{xx} \quad \text{ve} \quad \psi_t = -2v \frac{\phi_t}{\phi} \quad (3.3.8)$$

eşitlikler elde edilir. Sonuç olarak, (3.3.6) denklemini

$$\phi_t = v\phi_{xx} \quad (3.3.9)$$

lineer difüzyon denkleminde indirgenir. Bu (3.3.9) denkleminin çözümleri 3. Bölümde verilen metotların herhangi biri ile kolayca bulunabilir. (3.3.9) denkleminin çözüm fonksiyonu bulunur ve bu çözüm kullanılarak, Burgers denkleminin çözümlerini bulmak için ϕ çözümünü yerine yazılır ve buradan da (3.3.9) denklemini

$$\phi(x,0) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.3.10)$$

başlangıç şartı ile (3.3.7) eşitliği kullanılarak $u(x,0) = F(x)$ başlangıç şartı dikkate alınarak

$$F(x) = u(x,0) = -2v \frac{\phi_x(x,0)}{\phi(x,0)} \quad (3.3.11)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.10) eşitliği integre edilerek

$$\phi(x,0) = \Phi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2v} \int_0^x F(\alpha) d\alpha \right\} \quad (3.3.12)$$

fonksiyonu bulunur.

Burada Fourier dönüşüm metodu veya bileşik Fourier-Laplace dönüşüm tekniği (3.3.9) ve (3.3.10) lineer başlangıç değer probleminin çözümünü bulmak için kullanacağız. Böylece bu problemin standart çözümü

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4vt} \right] d\xi \quad (3.3.13)$$

bulunur. Daha sonra $\Phi(\xi)$ fonksiyonu (3.3.12) eşitliği ile bulunarak $\Phi(\xi)$ fonksiyonu (3.3.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{f}{2v}\right) d\xi \quad (3.3.14)$$

şeklinde bir fonksiyon elde edilir ve bu fonksiyon da

$$f(\xi, x, t) = \int_0^{\xi} F(\alpha) d\alpha + \frac{(x - \xi)^2}{2t} \quad (3.3.15)$$

şeklindedir. Böylece

$$\phi_x(x,t) = -\frac{1}{4v\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \xi}{t}\right) \exp\left(-\frac{f}{2v}\right) d\xi \quad (3.3.16)$$

ifadesi elde edilir. Burgers denkleminin başlangıç şartı ile tam çözümü (3.3.7) dönüşümü tersine işletilerek

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \xi}{t}\right) \exp\left(-\frac{f}{2v}\right) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{f}{2v}\right) d\xi} \quad (3.3.17)$$

çözüm fonksiyonu bulunabilir. Elde edilen bu tam çözüm t nin bütün değerleri için tek değerli ve süreklidir. Bu elde edilen tam çözüm fonksiyonunun fiziksel olarak yorumunun yapılabilmesi (3.3.17) eşitliğindeki $f(x)$ fonksiyonunun bilinmesi ile mümkündür.

$f(x)$ fonksiyonunun bir özel durumunu uygun bir başlangıç şartı ve (3.3.1) Burgers denklemini ele alarak hem Cole-Hopf dönüşümü hem de Adomian ayrışım metodunu kullanarak bu denklemin çözüm fonksiyonunun hesaplayalım. Örneğin birinci uygulama için, $0 < x < \ell$ ve $t > 0$ aralığında (3.3.6) Burgers denklemini

$$u(x,0) = \left(\frac{4\pi v}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3.18)$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.3.19)$$

başlangıç ve sınır şartları ile birlikte bu denklemini Cole-Hopf dönüşümünden yararlanarak çözüm fonksiyonunu elde etmeye çalışalım.

Yukarıda elde edilen (3.3.12) denkleminden yararlanarak

$$\phi(x,0) = \exp\left[-\left(\frac{2\pi}{\ell}\right) \int_0^x \sin\left(\frac{\pi \alpha}{\ell}\right) d\alpha\right]; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= \exp \left[-2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{\ell} \right) \right], \quad (3.3.20)$$

elde edilebilir. (3.3.20) eşitliği (3.3.19) sınır şartlarını sağlar (3.3.9) lineer difüzyon denkleminin standart çözümü

$$\phi(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 v t}{\ell^2} \right) \cos \left(\frac{n \pi x}{\ell} \right) \quad (3.3.21)$$

şeklinde yazılabilir. Bu da

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \exp \left[-2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{\ell} \right) \right] dx \\ &= \exp(-2) I_0(2) \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

ve

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \exp \left[-2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{\ell} \right) \right] \cos \left(\frac{n \pi x}{\ell} \right) dx \\ &= 2 \exp(-2) I_n(2) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

olup, yukarıdaki integraller standart integraller kullanılarak hesaplanmıştır. Burada; $I_0(x)$ ve $I_n(x)$ fonksiyonları birinci çeşit değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarıdır. Başlangıç-sınır değer Burgers denkleminin çözümü

$$u(x, t) = \left(\frac{4\pi v}{\ell} \right) \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n I_n(2) \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 v t}{\ell^2} \right) \sin \left(\frac{n \pi x}{\ell} \right)}{I_0(2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(2) \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 v t}{\ell^2} \right) \cos \left(\frac{n \pi x}{\ell} \right)} \right] \quad (3.3.24)$$

şeklinde bulunur. $u(x, t)$ çözüm fonksiyonuna dikkat edilecek olunursa $t=0$ da büyük parantezdeki paydanın değeri $\exp \left[2 \cos \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \right]$ şeklindedir. (3.3.24) çözüm fonksiyonu

(3.3.18) başlangıç şartını sağladığını gerçeklemek için (3.3.16) başlangıç şartını, (3.3.18) eşitliğinden $\phi_x(x, 0)$ türev değerini ve (3.3.21) eşitliği ile birlikte kullanırız.

Burada $\left(\frac{\left(\frac{4\pi v}{\ell} \right) \ell}{v} \right) = R$ ifadesinin Reynolds sayısını temsil etmektedir. (3.3.9) lineer

difüzyon denkleminin çözümü (3.3.18) başlangıç ve (3.3.19) sınır şartlarına göre

$$\phi(x,t) = \left(\frac{4\pi v}{\ell} \right) \exp\left(-\frac{\pi^2 vt}{\ell^2} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \quad (3.3.25)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu bulunabilir.

$R \rightarrow \infty$ giderken, $u(x,t)$ fonksiyonu için asimtotik çözümü bulmak

$$I_n\left(\frac{R}{\pi}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2R}} \exp\left(\frac{R}{\pi}\right)$$

değiştirilmiş Bessel fonksiyonun asimtotik açılımı kullanılarak $u(x,t)$ çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) \sim \left(\frac{4\pi v}{\ell} \right) \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vt}{\ell^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vt}{\ell^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)} \right] \quad (3.3.26)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. Bu asimtotik çözümün tam çözüm ile özdeş olduğunu belirtmek önemli bir noktadır. Bu seri çözüm $\left(\frac{vt}{\ell^2} \right)$ nin bütün değerleri için çok hızlı

olarak yakınsar ve böylece dalga formunu hesaplamak kolaylaşır. $\frac{vt}{\ell^2} \geq 1$ olduğunda $n=1$ için (3.3.26) seri fonksiyonundaki pay, paydadan baskın olduğundan dolayı yaklaşık olarak

$$u(x,t) \sim \left(\frac{4\pi v}{\ell} \right) \exp\left(-\frac{\pi^2 vt}{\ell^2} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \quad (3.3.27)$$

çözümünü elde edilebilir. Bu çözüm, üstel olarak bozulan azalma ile bir sinüs dalgası (sinüzoidal) dalga formunu temsil eder. Böyle bir çözümün en son bozulması difüzyon ile dengelenir.

İkinci uygulama için de, örneğin; (3.1.6) Burgers denklemi ve yine özel olarak (3.1.18) başlangıç şartını ele alarak çözüm fonksiyonunu t-yönünden ayrışım metodu yardımı ile bulalım.

Ele alınan diferansiyel denklemin operatör formda yazılması gerekmektedir. 2. Bölüm, 2.5. Kesimde de açıklandığı gibi

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.3.28)$$

şeklinde L lineer türev operatörleri ve bu operatörlerin tersleride mevcut olsun, bu durumda (3.3.28) operatörlerinin

$$L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) ds, \quad L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) ds dx \quad (3.3.29)$$

şeklinde de ters türev operatörlerini tanımlayabiliriz. (3.3.28) türev operatörlerini (3.1.1) Burgers denkleminin her iki tarafına soldan uygulanırsa operatör formunda denklem

$$L_t u + uu_x - vL_{xx} u = 0 \quad (3.3.30)$$

elde edilebilir, elde edilen (3.3.30) denkleminde sol taraftan L_t^{-1} operatörü uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$u(x, t) = u(x, 0) - L_t^{-1} [uu_x + vL_{xx} u] \quad (3.3.31)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilebilir. (3.3.31) eşitliğindeki $\phi(u) = uu_x$ lineer olmayan terimi göstermek üzere bu fonksiyonel

$$\phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (3.3.32)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Ayrıca, bu metot kullanılarak

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.3.33)$$

şeklinde seri formunda çözüm fonksiyonu bulunur.

Şimdi; (3.1.16) denklemi ve (3.1.18) başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alınarak ayrışım serisinin ilk terimi

$$u_0 = u(x, 0) = \frac{4\pi v}{\ell} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (3.3.34)$$

elde edilir ve t -yönündeki aranan çözüm için indirgeme bağıntısı

$$u_{n+1} = -L_t^{-1} [A_n - vL_{xx} u_n], \quad n \geq 0 \quad (3.3.35)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.35) ile elde edilen indirgeme bağıntısı ve (3.3.34) başlangıç

şartı ile bulunan serinin ilk terimi $u_0 = \frac{4\pi v}{\ell} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ kullanılarak

$$u_1 = -L_t^{-1} [A_0 - vL_{xx} u_0] = \frac{4\pi^3 t v^2 \left[\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \right]}{\ell^3},$$

$$u_2 = -L_t^{-1} [A_1 - vL_{xx} u_1] = \frac{6\pi^5 t^2 v^3 \left[-\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + 4 \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) \right]}{\ell^5},$$

$$u_3 = -L_t^{-1}[A_2 - vL_{xx}u_2] = \frac{2\pi^7 t^3 v^4 \left[35 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) - 4 \left(-2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + 51 \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) + 32 \sin\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right) \right) \right]}{\ell^7}, \quad (3.3.36)$$

ayrışım serisinin diğer terimleri de benzer mantık ile elde edilir. Bu elde edilen u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , ayrışım serisinin terimleri (3.3.33) ayrışım seri çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılır ise

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{4\pi v}{\ell} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \frac{4\pi^3 t v^2 \left[\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \right]}{\ell^3} + \\ & + \frac{6\pi^5 t^2 v^3 \left[-\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + 4 \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) \right]}{\ell^5} + \\ & + \frac{2\pi^7 t^3 v^4 \left[35 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) - 4 \left(-2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + 51 \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) + 32 \sin\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right) \right) \right]}{\ell^7} + \dots \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

seri formunda yaklaşık çözüm fonksiyonu elde edilir. Bu çözüm fonksiyonunun kapalı formu ise

$$u(x,t) = \left(\frac{4\pi v}{\ell} \right) \exp\left(-\frac{\pi^2 v t}{\ell^2} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \quad (3.3.38)$$

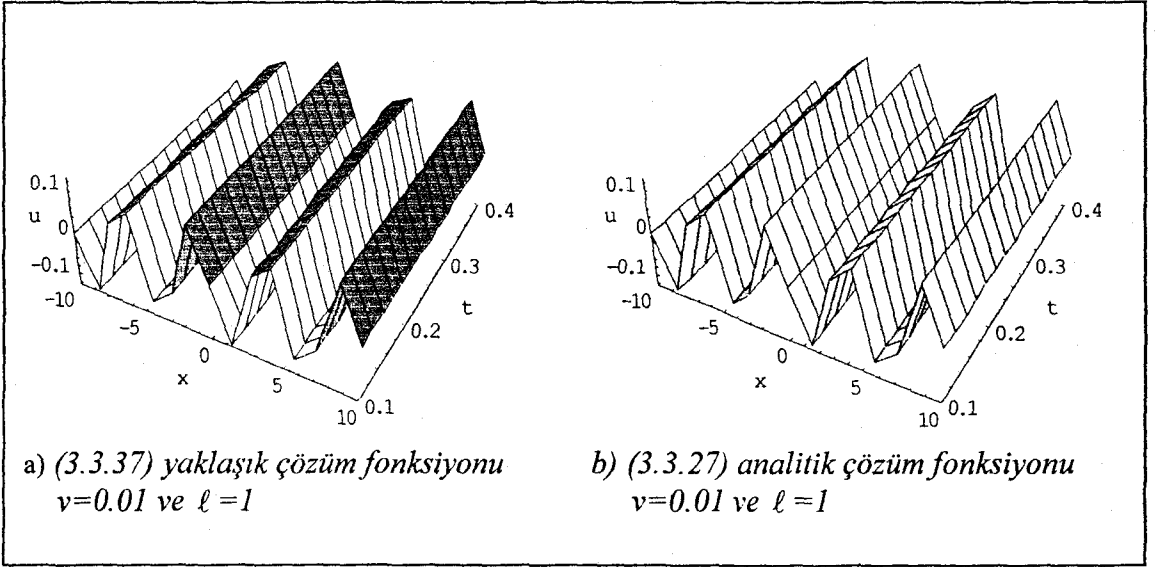
şeklinde yazılabilir.

2. Bölüm 5. Kesiminde de ele alındığı gibi ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonu, $n \geq 0$ için

$$\Phi_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x,t) \quad (3.3.39)$$

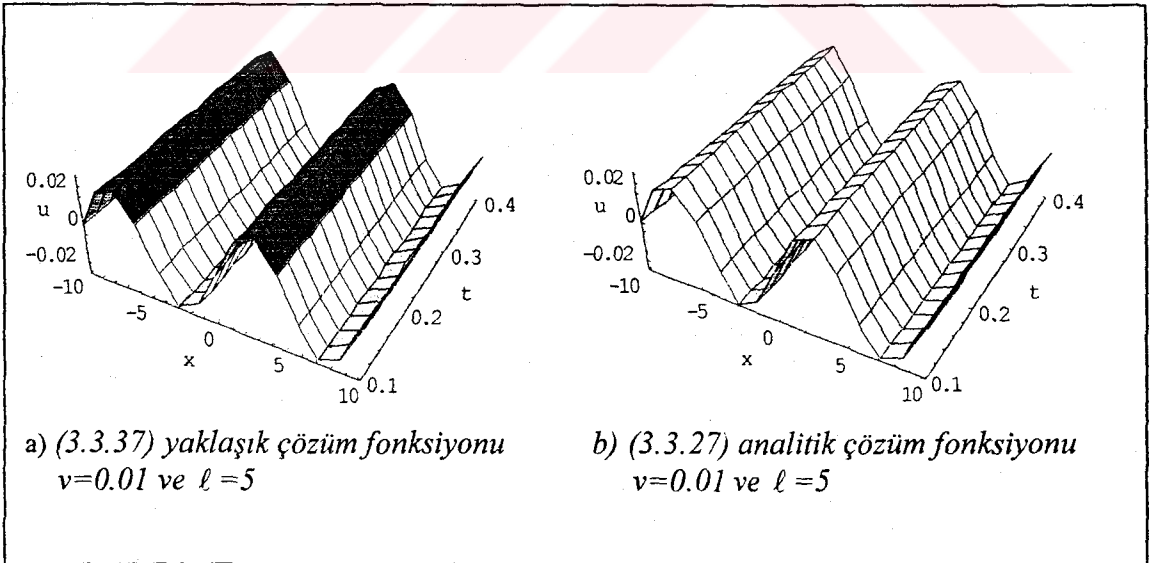
olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x,t)$ (3.3.31) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolaca hesaplanabilir.

(3.3.38) tam çözüm fonksiyonu ve (3.3.39) yaklaşık çözüm fonksiyonu kullanılarak vizkositenin yaklaşık çözümler ve dalgalar üzerinde yaptığı değişiklikleri tartışacağız.



1. Grafik Burgers denkleminin yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

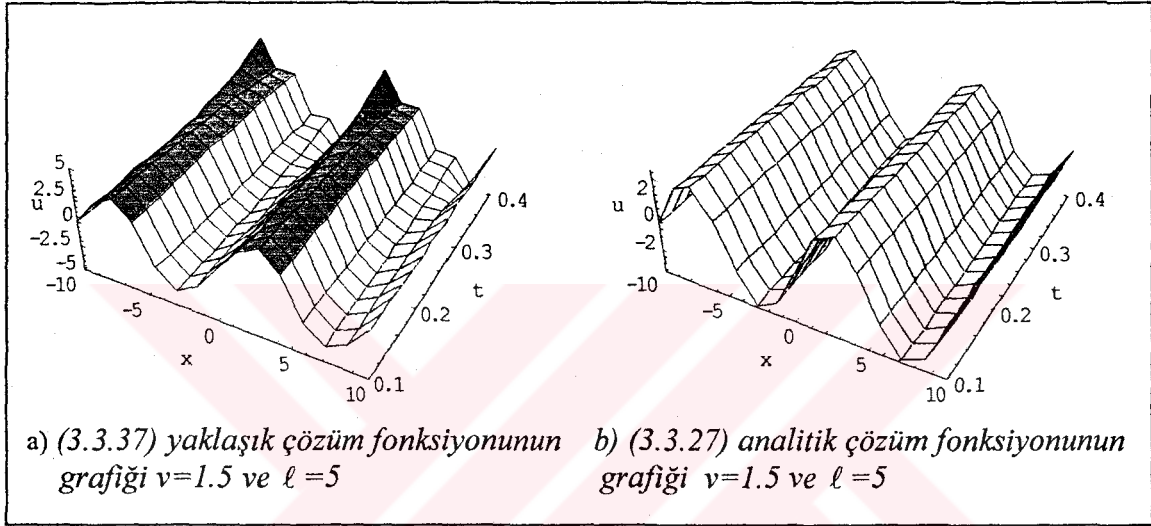
Burada yaklaşık çözüm fonksiyonunu ifade eden $\phi_n(x,t)$ ve (3.3.38) analitik çözüm fonksiyonu kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlardan bu metodun bu problem için hassas bir metot olduğu görülmektedir. Ayrıca ℓ uzunluğu ($0 \leq x \leq \ell$) arttırıldığı zaman dalga sayısı ve genliği azalacaktır. Bu durum aşağıdaki grafikte daha açık bir şekilde görülmektedir.



2. Grafik Burgers denkleminin yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Ayrıca, reynold sayısının büyük olması v vizkositesinin küçük seçilmesine bağlıdır. (3.3.37) yaklaşık çözüm fonksiyonuna dikkat edilirse ℓ nin büyük seçilmesi, ayrışım serisinin terimlerinin oluşturduğu çözüm fonksiyonunun değeri gittikçe

küçülecektir. Bu durumda, ayrışım metodu ile elde edilen sayısal sonuçlar daha hassas olacaktır. Fakat, ν vizkozitesinin büyük seçilmesi durumunda ise ayrışım serisinin terimlerinin oluşturduğu çözüm fonksiyonunun değerleri büyütecektir. Sonuç olarak ayrışım seri metodu ile elde edilen sayısal sonucun daha hassas olması için ν vizkozitesinin küçük seçilmesi gerekmektedir. ν vizkozitesinin büyük seçilmesi durumunda sayısal sonucun analitik çözüme göre nasıl farklılık gösterdiğini aşağıdaki tablodan kolayca görebiliriz.



3. Grafik Burgers denkleminin yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Sonuç olarak, Cole-Hopf dönüşümü ile Burgers denklemi lineer difüzyon denklemine indirgenerek çözüm fonksiyonu elde edilmektedir. Ayrıca başlangıç şartı ile verilen fonksiyonların integrallenemez olması, özel dönüşüm metodu ile çözüm fonksiyonu aranırken istenmeyen işlem yoğunluğu ile karşılaşılmaktadır. Ayrışım seri metodu ile çözüm fonksiyonu araştırılırken hem lineerleştirme yapmadan hem de daha karmaşık başlangıç şartları altında çözüm fonksiyonu bulunabilir. Bu ise ayrışım seri metodunun daha geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu ve daha az sınırlama ile birçok probleme uygulanışı kolaydır.

4. BURGERS DENKLEMİNİN AYRIŞIM METODU İLE SAYISAL SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu Bölümde, nispeten yeni bir metot olan Adomian ayrışım metodunu ele alınarak literatürde bilinen klasik çözüm metotları ile bu metodun diğer metotlara göre avantajları ve dezavantajları tartışılacaktır. Literatürden edindiğimiz bilgiler ışığında bu bölümde yapılan çalışma orijinaldir. Bu Bölümdeki çalışmanın bir kısmı uluslara arası bir dergide kabul edildi ve yayınlanmasını beklemekteyiz (Kaya ve Yokuş, 2002).

Ayrışım metodu uygulamalı matematikte yaklaşık ve analitik çözümler için etkili bir yöntem olup bu yeni yaklaşım uygulamada karşılaşılan lineer ya da lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılan önemli bir metottur. Bu yaklaşım kullanılarak ele alınan hem lineer hem de lineer olmayan problemleri lineerleştirmeksizin analitik çözümlerini ayrışım seri fonksiyonları şeklinde elde edilmektedir. Ayrıca, ele alınan problemlerin yaklaşık sayısal çözümleri de bu ayrışım serisinin terimleri kullanılarak kolayca hesaplanabilmektedir.

Literatürde (Adomian, 1987; Wazwaz, 1997) bilindiği gibi ayrışım metodu kullanılarak elde edilen çözüm fonksiyonlarının x -yönünde ve t -yönünde hesaplamalar yapıldığında çözümlerin aynı olduklarını teorik olarak incelemişlerdir. Bu teorik irdelemenin sayısal olarak ne ifade ettiğini, bu metodun analitik ve sayısal çözümleri elde ederken görünen avantaj veya dezavantajlar ise bu bölümde tartışılacaktır.

Şimdi yukarıda özetlenen bu durumları irdelemek için 2. Bölümde detaylıca verilen

$$u_t + \varepsilon uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (4.1.1)$$

Burgers denkleminin genel halini ele alalım. Bu denkleme ayrışım metodu uygulanırken de 2. Bölümün 5. Kesiminde ele alındığı gibi, L_t ve L_{xx} verilen diferansiyel denklemdeki t ye ve x e göre en yüksek mertebeden türevleri temsil eden lineer birer operatör ve bu operatörlerin L_t^{-1} ve L_{xx}^{-1} şeklinde tersleri de mevcut olsun. (4.1.1) Burgers denkleminin her iki tarafına sağdan L_t ve L_{xx} operatörleri uygulanırsa, operatör formundaki denklem

$$L_t u + \varepsilon uu_x - \nu L_{xx} u = 0 \quad (4.1.2)$$

denklemini yazılabilir. (4.1.2) denkleminin x ve t tarafından çözüm fonksiyonunu arayacak olursak, t -yönünde $u(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulmak için (4.1.2) denkleminde L_t^{-1} operatörünü soldan uygularsak

$$u(x,t) = u(x,0) - L_t^{-1}[\varepsilon \phi(u(x,t)) - v L_x u(x,t)] \quad (4.1.3)$$

eşitliğini bulabiliriz. x -yönündeki $u(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulmak için ise (4.1.2) denkleminde L_{xx}^{-1} operatörünü soldan uygulayarak

$$u(x,t) = u(0,t) + x u_x(0,t) - \frac{1}{v} L_x^{-1}[\varepsilon \phi(u(x,t)) - v L_t u(x,t)] \quad (4.1.4)$$

eşitliğini elde edebiliriz. (4.1.3) ve (4.1.4) eşitliklerindeki $\phi(u(x,t)) = uu_x$ lineer olmayan terimi ifade etmektedir. (4.1.1) denkleminin ile verilecek olan başlangıç şartları göz önüne alınarak t -yönündeki çözüm için serinin ilk terimi $u_0 = u(x,0)$ ve x -yönündeki çözüm için ise $u_0 = u(0,t) + x u_x(0,t)$ formülleri ile bulunur. Burada elde edilecek çözüm fonksiyonu (2.5.6) ile verilen seri formunda olacaktır. Ayrıca (4.1.1) Burgers denkleminin indirgeme bağıntısı ise t -yönündeki çözüm için

$$u_{n+1} = -L_t^{-1}[\varepsilon (A_n) - v L_x (u_n)]; \quad n \geq 0 \quad (4.1.5)$$

x -yönündeki çözüm için ise

$$u_{n+1} = \frac{1}{v} L_x^{-1}[\varepsilon (A_n) - L_t (u_n)]; \quad n \geq 0 \quad (4.1.6)$$

şeklinde formülize edilebilir. Burada $A_n = \phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ ifadesi Adomian

polinomu olarak adlandırılır. Bu Adomian polinomunun terimleri 2. Bölümde verilen (2.5.10) genel formülü veya (2.5.9) formülü kullanılarak hesaplanabilmektedir. Adomian polinomunun (2.5.10) şeklindeki genel formülü alındığında A_n polinomunun terimleri bilgisayar kullanılarak istenildiği sayıda ve kolay hesaplamalar ile oluşturulabilir. Burada, lineer olmayan $\phi(u) = uu_x$ fonksiyoneli ele alınarak A_n terimlerinin bazıları

$$A_0 = u_0 u_{0x}, \quad A_1 = u_1 u_{0x} + u_0 u_{1x}, \quad A_2 = u_2 u_{0x} + u_1 u_{1x} + u_0 u_{2x}, \dots \quad (4.1.7)$$

şeklinde elde edilebilmektedir.

Ayrışım seri çözümünün t - ve x - yönündeki çözümlerinin aynı olduğunu daha kolayca görülebilmesi için yukarıda verilen (4.1.1) Burgers denkleminde özel olarak $\varepsilon = 0$ ve $v=1$ seçilerek

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (4.1.8)$$

şeklinde bir boyutlu lineer Burgers denklemini ele alalım. Bu denklem literatürde difüzyon denklemi olarak bilinmektedir. (4.1.8) difüzyon denklemi

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \text{ ve } u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = \pi e^{-\pi^2 t} \quad (4.1.9)$$

başlangıç şartları ile birlikte, ayrışım metodunu kullanarak bu denklemin çözüm fonksiyonunu araştıralım.

Bu ele alınan denklemin t -yönündeki çözümünü (4.1.3) denklemindeki aynı mantık ile elde edebiliriz ve (4.1.9) eşitlikleri ile verilen özel başlangıç şartları kullanılarak ayrışım serisinin ilk terimi u_0 bulunabilir. (4.1.5) indirgeme bağıntısı (4.1.7) ayrışım polinomları ile birlikte kullanılarak serinin diğer terimleri olan $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri de

$$u_0 = \sin(\pi x), \quad u_1 = -(\pi^2 t) \sin(\pi x), \quad u_2 = \frac{(\pi^2 t)^2}{2!} \sin(\pi x), \quad u_3 = \frac{(\pi^2 t)^3}{3!} \sin(\pi x) \quad (4.1.10)$$

bulunur. Burada ayrışım serisinin terimleri ne kadar çok hesaplanırsa, elde edilecek sayısal sonuç da o kadar hassas olacaktır. Bu nedenle daha hassas sonuçlar elde edebilmek için bilgisayar teknolojisiinden yararlanılmaktadır. Burada elde edilen (4.1.10) ayrışım serisinin terimleri, (2.5.6) seri formundaki çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ &= \sin(\pi x) - \sin(\pi x) \pi^2 t + \frac{(\pi^2 t)^2}{2!} \sin(\pi x) - \frac{(\pi^2 t)^3}{3!} \sin(\pi x) + \dots \\ &= \sin(\pi x) \left[1 - \pi^2 t + \frac{(\pi^2 t)^2}{2!} - \frac{(\pi^2 t)^3}{3!} + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

şeklinde t -yönündeki ayrışım seri çözüm fonksiyonu elde edilmiş olur.

Diğer taraftan (4.1.8) denkleminin x -yönünden çözümü de (4.1.4) denklemindeki aynı mantık kullanılarak elde edebiliriz. Bu yöndeki çözüm için (4.1.9) de verilen şartlardan $u(0,t), u_x(0,t)$ başlangıç şartları kullanılarak serinin ilk terimi $u_0 = u(0,t) + x u_x(0,t)$ şeklinde bulunabilir ve (4.1.6) indirgeme bağıntısı (4.1.7) ayrışım polinomları ile birlikte kullanılarak

$$u_0 = (\pi x) e^{-\pi^2 t}, \quad u_1 = -\frac{(\pi x)^3}{3!} e^{-\pi^2 t}, \quad u_2 = \frac{(\pi x)^5}{5!} e^{-\pi^2 t}, \quad u_3 = -\frac{(\pi x)^7}{7!} e^{-\pi^2 t}, \dots \quad (4.1.12)$$

ayrışım serisinin terimleri ve diğer geri kalan terimleri de benzer mantık ile hesaplanabilir x -yönündeki hesaplanan (4.1.12) ayrışım serisinin terimleri, (2.5.6) seri formundaki çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\
 &= e^{-\pi^2 t} (\pi x) - e^{-\pi^2 t} \frac{(\pi x)^3}{3!} + e^{-\pi^2 t} \frac{(\pi x)^5}{5!} - e^{-\pi^2 t} \frac{(\pi x)^7}{7!} + \dots \\
 &= e^{-\pi^2 t} \left[(\pi x) - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} - \frac{(\pi x)^7}{7!} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

şeklinde çözüm ayrışım seri çözüm fonksiyonu elde edilmiş olur. (4.1.8) lineer Burgers denkleminin (4.1.9) başlangıç şartları altında elde edilen t -yönündeki (4.1.11) ve x -yönündeki (4.1.13) ile seri şeklindeki çözüm fonksiyonlarını

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \tag{4.1.14}$$

şeklinde kapalı formda da yazabiliriz.

Sayısal karşılaştırma yapabilmek için, lineer parabolik kısmi diferansiyel denklem ve Burgers denklemini göz önüne aldık. İlk denklemde x ve t yönünde çözümü araştırıldı ve her iki çözüm ile elde edilen çözüm fonksiyonlarının eşit olduğunu gördük.

(x_i, t_i)	$\phi_0(x,t)$	$\phi_5(x,t)$	$\phi_{10}(x,t)$	$\phi_{20}(x,t)$	$u(x,t)$
(0.1,0.1)	0.11516400	0.1151730	0.1151730	0.1151730	0.1151731
(0.1,0.3)	0.00596239	0.0159988	0.0159988	0.0159988	0.0159982
(0.1,0.5)	0.00222223	0.0022224	0.0022224	0.0022224	0.0022221
(0.3,0.1)	0.29926600	0.3015270	0.3015270	0.3015270	0.3015270
(0.3,0.3)	0.04157130	0.0418855	0.0418855	0.0418855	0.0418855
(0.3,0.5)	0.00577472	0.0058183	0.0058183	0.0058183	0.0058183
(0.5,0.1)	0.34469200	0.3727080	0.3727080	0.3727080	0.3727078
(0.5,0.3)	0.04788160	0.0517733	0.0517733	0.0517733	0.0517732
(0.5,0.5)	0.00665129	0.0071918	0.0071918	0.0071918	0.0071918

1.Tablo (4.1.8) denklemini tam çözüm $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ ve $0 \leq n \leq 20$ olmak üzere x -yönünde elde edilen sayısal çözümde $\phi_n(x,t)$ sayısal çözümüdür.

t -yönünde elde edilen (4.1.11) seri çözüm fonksiyonuna dikkat edilecek olursa $e^{-\pi^2 t}$ üstel fonksiyonunun $t_0=0$ noktasında Maclaurin seri açılımı, x -yönünde elde edilen (4.1.13) seri çözüm fonksiyonunda ise $\sin(\pi x)$ trigonometrik fonksiyonunun $x_0=0$ noktasında Maclaurin seri açılımına karşılık geldiği görülmektedir. Buradan t -yönünde elde edilen sayısal çözüm ile x -yönünde elde edilen sayısal çözümler birbirinden farklı olacaktır. Çünkü, buradan t -yönünde sayısal çözüm elde edilirken x değişkeni, x -yönünde sayısal çözüm elde edilirken de t değişkeni seriye açılıyormuş gibi ayrışım seri terimleri bulunmaktadır. Bu durum, 1. Tablo ile 2. Tablo ile verilen terim sayısına göre ϕ_n , ($n=0,5,10,20$) karşılaştırılarak daha iyi gözlemlenebilir.

x -yönünde elde edilen (4.1.13) çözüm fonksiyonuna dikkat edilirse x_i değerleri kadar küçük seçilirse ayrışım serisinin terimleri gittikçe küçülmektedir ve elde edilen sayısal çözümde meydana gelen kesme hatası oldukça küçülecektir.

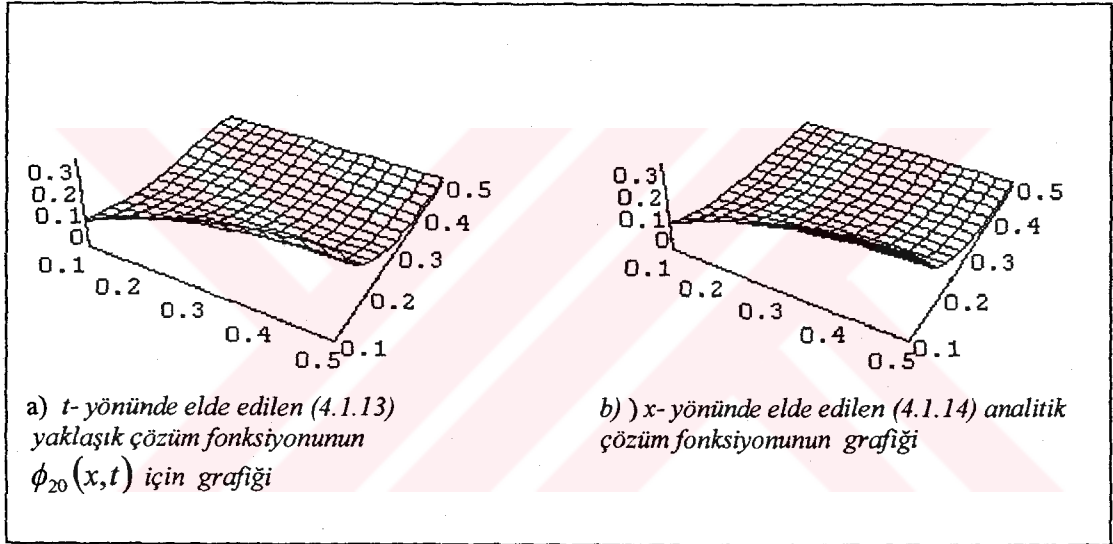
(x_i, t_i)	$\phi_0(x, t)$	$\phi_5(x, t)$	$\phi_{10}(x, t)$	$\phi_{20}(x, t)$	$u(x, t)$
(0.1,0.1)	0.0040294	0.114826	0.1151730	0.1151731	0.1151731
(0.1,0.3)	-0.605946	-0.184705	0.0169479	0.01599882	0.01599882
(0.1,0.5)	-1.215920	-3.543000	0.2324410	0.00222242	0.00222241
(0.3,0.1)	0.0105492	0.300619	0.3015270	0.3015270	0.3015270
(0.3,0.3)	-1.586390	-0.483563	0.0443702	0.0418854	0.0418855
(0.3,0.5)	-3.183320	-9.275710	0.6085390	0.0058230	0.0058183
(0.5,0.1)	0.0130396	0.371585	0.3727080	0.3727080	0.3727078
(0.5,0.3)	-1.960880	-0.597717	0.0548446	0.0571732	0.0517732
(0.5,0.5)	-3.934800	-11.46540	0.7521960	0.0071976	0.0071918

2.Tablo (4.1.8) denklemini tam çözüm $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ ve $0 \leq n \leq 20$ olmak üzere t -yönünde elde edilen sayısal çözümde $\phi_n(x, t)$ sayısal çözümüdür.

Benzer şekilde t -yönünde elde edilen (4.1.11) çözüm fonksiyonuna dikkat edilirse t_i değerleri ne kadar küçük seçilirse ayrışım serisinin terimleri gittikçe küçülecektir ve edilen sayısal çözümde meydana gelen kesme hatası da t_i değerlerine bağlı olarak küçülecektir. Bu iki tartışmada da ortak bir sonuç çıkarabiliriz. Bu ise çözümler seri formunda ve terim sayısı arttıkça yaklaşık çözümler değişkenlere bağımlı olarak azaldığı görülmektedir. Bu tartışmayı kesin bir sonuç olarak söyleyemeyiz,

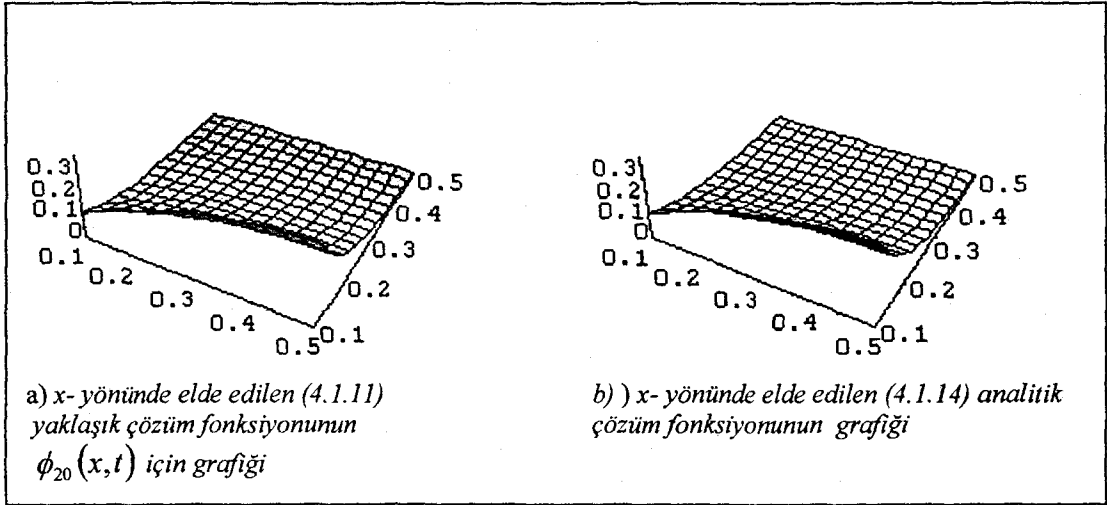
çünkü; bu durum ele alınan çözüm fonksiyonunun yapısına göre farklılık göstermektedir.

Yukarıda bahsedildiği gibi (x_i, t_i) değerleri aynı olmasına rağmen elde edilen sayısal sonuçlar birbirlerinden farklıdır. Fakat her iki durumda da elde edilen sayısal çözümler tam çözüme çok yakındır. Ayrıca x - ve t -yönünden elde edilen sayısal çözümler dikkatlice incelenirse $n=0$ ve $n=5$ için x -yönünde elde edilen sayısal çözüm ile tam çözüm arasındaki farklar, t -yönündekilere göre daha küçüktür. Bu ise bize x -yönünde elde edilen (4.1.13) çözüm fonksiyonundaki ayrışım serisinin terimleri, t -yönünde elde edilen (4.1.11) çözüm fonksiyonundaki ayrışım serisinin terimlerine göre daha hızlı küçüldüğünü göstermektedir.



4. Grafik lineer Burgers denkleminin t - ve x - yönündeki yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Yukarıdaki grafiklerde de görüldüğü gibi x - ve t -yönündeki çözüm fonksiyonları biri birlerine eşittir. Ayrıca t -yönünde kullanılan (4.1.5) indirgeme bağıntısı ile bulunan çözüm fonksiyonu elde edilirken bir kez integral alınmış olup, x -yönünde kullanılan (4.1.6) indirgeme bağıntısı ile çözüm fonksiyonu elde edilirken ise iki kez integral alınmıştır. İlk bakışta t -yönünde yapılan hesaplamalardaki işlemlerin daha kısa olduğu kanaati uyanmaktadır, fakat; sayısal sonucun daha hassas olması için ayrışım serisinin terimlerinin daha fazla hesaplanması gerekmektedir. x -yönündeki çözüm bulunurken ise t -yönünde çözümlerin bulunmasına göre daha fazla işlem yapılmaktadır, ve bu sonucunda ise ayrışım serisinin daha fazla terimi hesaplanarak daha hassas sayısal sonuçlar elde edilmesine imkan vermektedir.



5. Grafik lineer Burgers denkleminin x - yönündeki yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Yukarıda 1. ve 2. Tablolarda tartışılan sayısal sonuçlar ayrışım serisinin terim sayısının çokluğuna bağlı olarak değişimleri gözlemledik.

Şimdi ise yukarıda tartışılan (4.1.8) lineer difüzyon denkleminin çözümü için (4.1.6) indirgeme bağıntısı kullanılarak hesaplanan ϕ_{20} yaklaşık çözümü ve (4.1.14) $u(x,t)$ çözümü arasındaki mutlak hataları verelim. Bu sayısal sonuçları x -yönündeki çözüm için mutlak hatalar 3.Tabloda ve t -yönündeki çözüm için mutlak hataları 4.Tablo ile vereceğiz.

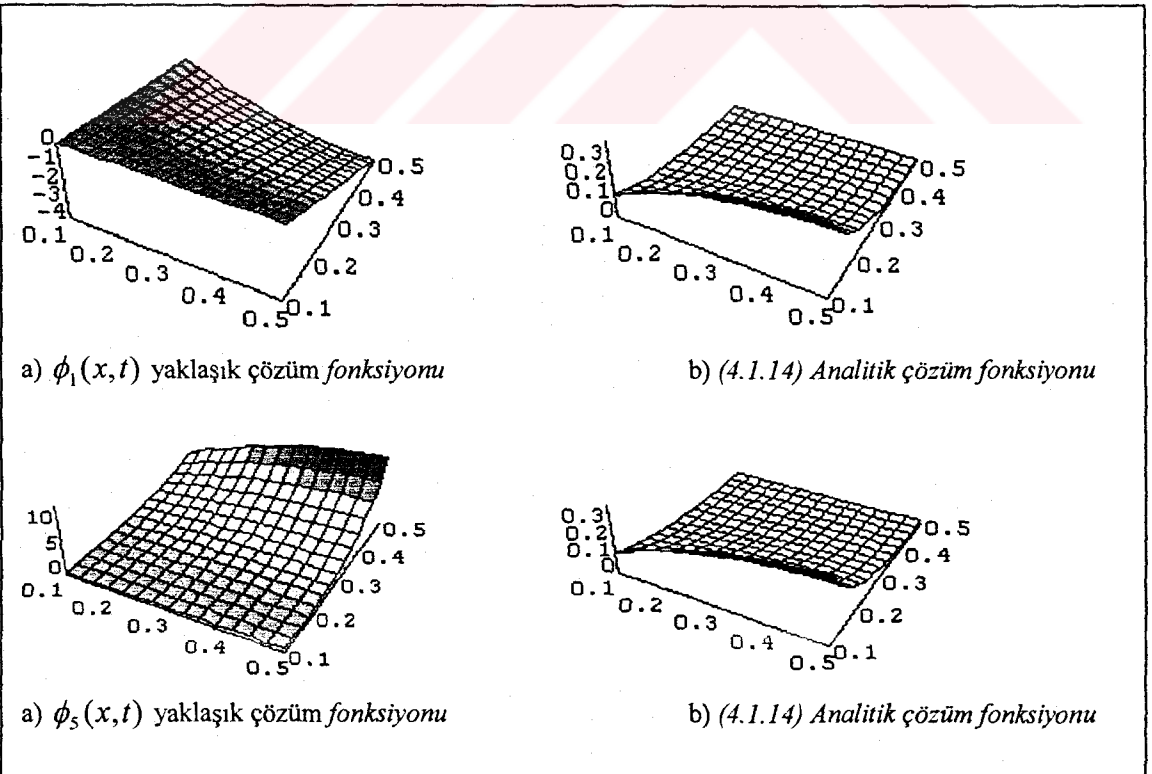
t_i	x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		1.38778E-17	0.0000E+00	3.46945E-18	8.67362E-19	8.67362E-19
0.2		2.77556E-17	0.38778E-17	0.0000E+00	1.73472E-18	0.0000E+00
0.3		1.11022E-16	0.38778E-17	6.93889E-18	6.93889E-18	1.73472E-18
0.4		0.0000E+00	5.55112E-17	6.93889E-18	3.46945E-18	2.60209E-18
0.5		1.11022E-16	0.0000E+00	6.93889E-18	0.0000E+00	3.46945E-18

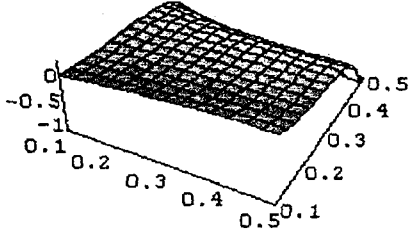
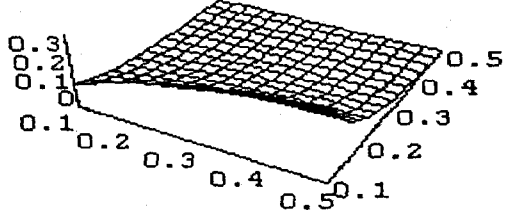
3.Tablo x -yönünde elde edilen $\phi_{20}(x,t)$ sayısal çözümün $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ tam çözümüne göre mutlak hata.

T_i	x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		1.38778E-17	0.0000E+00	3.46945E-18	8.67362E-19	8.67362E-19
0.2		2.77556E-17	0.38778E-17	0.0000E+00	1.73472E-18	0.0000E+00
0.3		1.11022E-16	0.38778E-17	6.93889E-18	6.93889E-18	1.73472E-18
0.4		0.0000E+00	5.55112E-17	6.93889E-18	3.46945E-18	2.60209E-18
0.5		1.11022E-16	0.0000E+00	6.93889E-18	0.0000E+00	3.46945E-18

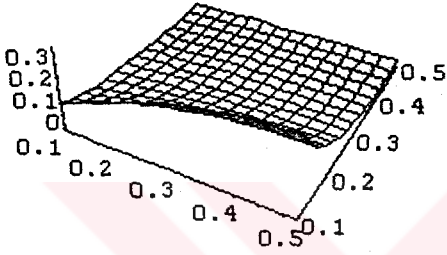
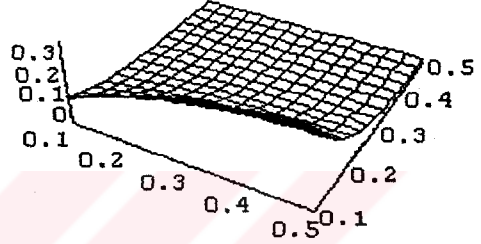
4.Tablo t -yönünde elde edilen $\phi_{20}(x,t)$ sayısal çözümün $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ tam çözümüne göre mutlak hata.

Bu çalışmada hesaplanan mutlak hatalar $|u(x,t) - \phi_n(x,t)|$ formülü kullanılarak hesaplanmıştır. Burada ayrışım serisinin terim sayısı arttıkça elde edilen sayısal çözüm daha hassas olacağından n değeri 20 seçilmiştir. 3. ve 4.Tablolara dikkat edilecek olursa x_i ve t_i değişkenlerinin bazı değerlerinde on dokuzuncu basamağa kadar tam çözüm ile eşit olduğu görülmektedir. Buradan da sayısal çözümün hassaslığı x_i ve t_i değerlerinin seçimine, ayrışım serisinin terimlerinin çokluğuna ve ele alınan denklemin çözüm fonksiyonunun yapısına bağlı olduğu sonucu çıkarılabilir.

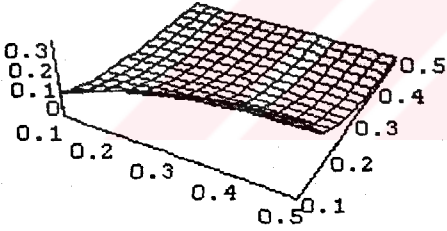
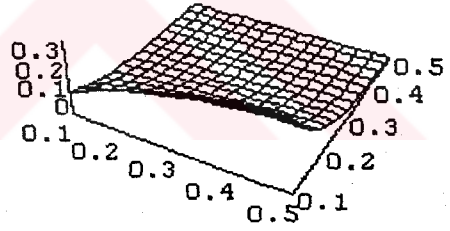


a) $\phi_{10}(x, t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonu

b) (4.1.14) Analitik çözüm fonksiyonu

a) $\phi_{15}(x, t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonu

b) (4.1.14) Analitik çözüm fonksiyonu

a) $\phi_{20}(x, t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonu

b) (4.1.14) Analitik çözüm fonksiyonu

6. Grafik lineer Burgers denkleminin $1 \leq n \leq 20$ olmak üzere $\phi_n(x, t)$ t -yönündeki yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Yukarıdaki grafiklerdeki yaklaşık çözüm fonksiyonunun grafikleri t -yönündeki çözümden elde edilmiştir. Bu grafiklere dikkat edilecek olunursa ayrışım serisinin terim sayısı arttıkça, yaklaşık çözüm fonksiyonu analitik çözüm fonksiyonuna yaklaşmaktadır. Sayısal çözümün hassaslığı x_i ve t_i değerlerinin seçimine bağlı olarak değişmektedir.

Lineer diferansiyel denklem için durum böyle ise şimdi de lineer olmayan Burgers denklemin sayısal durumunu irdeleyelim. Bunun için yukarıda ele alınan lineer olmayan (4.1.1) denkleminin analitik çözümü Colle-Hopf dönüşümü yardımı ile

$$u(x,t) = \frac{x}{t} - \frac{\pi}{t} \tanh\left[\frac{\pi x}{2vt}\right] \quad (4.1.15)$$

şeklinde (Kamenschhik ve arkadaşları,1997) tarafından bulunan problemi ele alalım. Bu çözüm fonksiyonuna dikkat edecek olursak $t=0$ durumunda tanımsızdır. Şimdi lineer olmayan (4.1.1) Burgers denkleminin (4.1.15) çözüm fonksiyonunu kullanarak

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = \frac{1}{t} - \frac{\pi^2}{2vt^2}, \quad u(x,1) = x - \pi \tanh\left[\frac{\pi x}{2v}\right] \quad (4.1.16)$$

başlangıç şartları altında ayrışım metodunu kullanarak bilinen (4.1.15) analitik ve sayısal çözümünü x -yönünden hesaplamak için (4.1.6) indirgeme bağıntısını kullanalım.

Yukarıda tanımlanan L_t ve L_{xx} operatörleri kullanılarak (4.1.1) Burgers denklemini önce (4.1.2) şeklinde yazılır ve x -yönünden çözüm fonksiyonu arandığından, (4.1.1) Burgers denkleminin çözüm fonksiyonu (4.1.4) şeklinde yazılabilir. Ayrıca (4.1.6) indirgeme bağıntısı ve (4.1.7) Adomian polinomları göz önüne alınarak ayrışım serisinin bazı terimleri

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x,t) + xu_x(0,t) = \frac{x}{t} - \frac{\pi^2 x}{2vt^2}, \\ u_1 &= \frac{1}{v} L_x^{-1}[A_0 + L_t(u_0)] = \frac{\pi^4 x^3}{24v^3 t^4}, \\ u_2 &= \frac{1}{v} L_x^{-1}[A_1 + L_t(u_1)] = -\frac{\pi^6 x^5}{240v^5 t^6}, \\ u_3 &= \frac{1}{v} L_x^{-1}[A_2 + L_t(u_2)] = \frac{\pi^8 x^7}{40320v^7 t^8}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

şeklinde bulunabilir. (4.1.17) ayrışım serisinin terimleri ikinci bölümde açıklanan (2.5.6) ayrışım serisinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ &= \frac{x}{t} - \frac{\pi^2 x}{2vt^2} + \frac{\pi^4 x^3}{24v^3 t^4} - \frac{\pi^6 x^5}{240v^5 t^6} + \frac{\pi^8 x^7}{40320v^7 t^8} + \dots \\ &= \frac{x}{t} - \frac{x}{t} \left[\frac{\pi^2}{2vt} + \frac{\pi^4 x^2}{24v^3 t^3} - \frac{\pi^6 x^4}{240v^5 t^5} + \frac{\pi^8 x^6}{40320v^7 t^7} + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilir. Bu elde edilen (4.1.18) çözüm fonksiyonu kapalı formda ise

$$u(x,t) = \frac{x}{t} - \frac{\pi}{t} \tanh \left[\frac{\pi x}{2vt} \right] \quad (4.1.19)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çözüm ise (4.1.15) ile verilen çözümün aynısıdır.

Yukarıda da bahsedildiği gibi ayrışım yöntemi ile bir diferansiyel denkleminin çözüm fonksiyonu araştırılırken x - ve t -yönündeki çözümler eşittir. Bu gerçek ışığında Burgers denkleminin çözüm fonksiyonunda $t=0$ değeri için süreksizlik olduğundan, x -yönünden çözüm fonksiyonunu araştırdık. Gerçekten $t=1$ veya t nin diğer değerleri için Burgers denkleminin t -yönünden çözümleri bulunabilir. Fakat, bu durumda hesaplamalar çok karmaşıktır. Ayrıca ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonu,

$$\Phi_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_n(x,t); \quad n \geq 0 \quad (4.1.20)$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x,t) \quad (4.1.21)$$

(4.1.6) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolaca yazılabilir.

Burada, dikkat edecek olursak; ayrışım seri metodunun doğası gereği ayrışım serisinin birinci terimi olan u_0 , ilgili çözüm fonksiyonunun sıfır noktasında Maclaurin serisinin birinci terimine karşılık geliyordu. Fakat ele alınan bu problemde, ayrışım serisinin ilk terimi olan u_0 Maclaurin serisinin ilk iki terim toplamından oluşmaktadır.

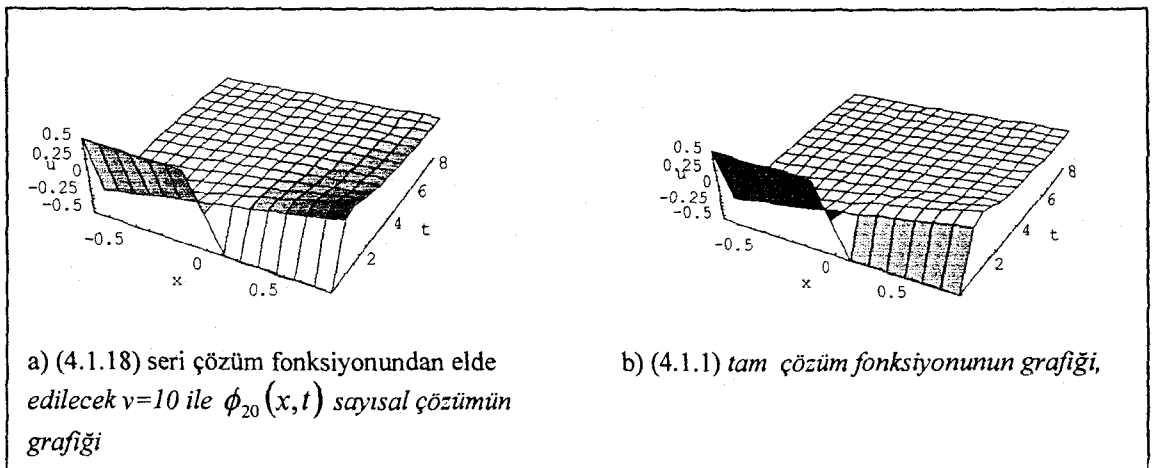
Bu denklemin sayısal çözümlerini elde edilebilmek için bulunan indirgeme bağıntısı kullanılarak hesaplanan (4.1.20) ayrışım serisinin yakınsak olan $\Phi_n(x,t)$ terimleri göz önüne alınarak, seri formundaki (4.1.21) çözüm fonksiyonunda x_i değerlerini küçük t_i ve v değerlerinin büyük seçilmesi durumunda elde edilecek sayısal çözümlerin daha hassas olacağı açıktır. Çünkü, t_i ve v parametreleri (4.1.21) çözümündeki serinin teriminin paydasında, x_i değişkeni ise payında bulunmaktadır. Bu durumu $v \approx 10$ olmak üzere (4.1.21) seri formundaki çözüm fonksiyonu ile elde edilen sayısal çözümün mutlak hatası aşağıdaki tablo ile verilebilir.

t_i	x_i	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.1		1.11022E-16	2.77556E-17	6.93889E-18	6.93889E-18	3.46945E-18
0.2		4.44089E-16	5.55112E-17	1.38778E-17	1.38778E-17	0.0000E+00
0.3		4.44089E-16	5.55112E-17	5.55112E-17	0.0000E+00	0.0000E+00
0.4		4.44089E-16	2.22045E-16	0.0000E+00	2.77556E-17	0.0000E+00
0.5		4.44089E-16	0.0000E+00	0.0000E+00	2.77556E-17	0.0000E+00

5.Tablo $v=0.1$ olmak üzere x -yönünde elde edilen $\phi_{20}(x,t)$ sayısal çözümün

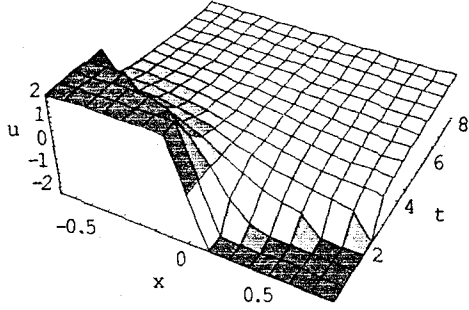
$$u(x,t) = \frac{x}{t} - \frac{\pi}{t} \tanh\left[\frac{\pi x}{2vt}\right] \text{ tam çözüme göre mutlak hata.}$$

5. Tabloya dikkat edilirse t_i değerleri ve v değerlerinin küçük seçilmesi durumunda (4.1.21) çözüm fonksiyonundaki serinin terimlerinin sayısal değerleri daha yavaş küçülecektir. Bu durumda ise ayrışım serisinin daha çok terimleri hesaplanarak elde edilecek sayısal çözümlerin hassaslığı artırılabilir. 5. Tablo ile verilen sayısal değerler (4.1.19) $u(x,t)$ analitik çözüm ile (4.1.20) sayısal çözümündeki $\Phi_n(x,t)$ ayrışım serisinin terimleri $n=20$ ve $v=0.1$ olmak üzere elde edilen sayısal sonucun ne kadar hassas olduğu görülmektedir. Bu yaklaşık sayısal çözüm ve (4.1.19) analitik çözümü kullanılarak elde edilen çözümlerin grafikler üzerinde de görüldüğü gibi sonuçlar benzerdir. Bu grafiklerdeki tam ve sayısal çözüm, ayrışım metodu kullanılarak x -yönünden elde edilen seri formundaki (4.1.18) çözümü ve bu seri çözümünün kapalı formu olan (4.1.19) çözümü kullanılarak elde edilmiştir.

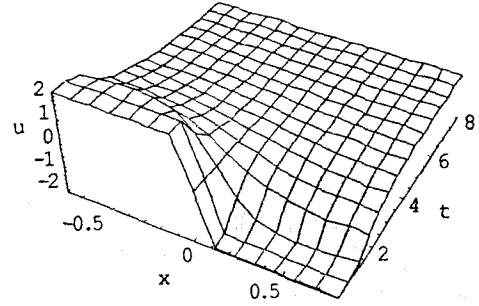


7.Grafik lineer olmayan Burgers denkleminin t - yönündeki $\phi_{20}(x,t)$ yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Ayrıca v değerinin küçük seçilmesi durumunda elde edilecek sayısal sonuçların hassas olmayacağı (4.1.18) seri formundaki çözümde gözlenebilir. Çünkü, v değerinin küçük seçilmesi durumunda ayrışım serisinin terimleri yavaş küçülecektir. Bu durum aşağıdaki grafikte daha iyi gözlemlenebilir.



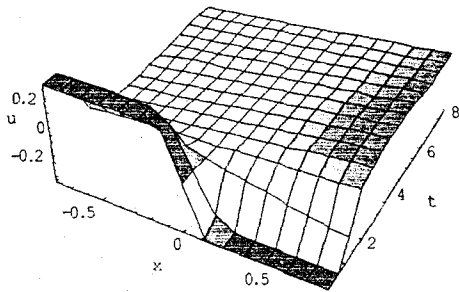
a) (4.1.18) seri çözüm fonksiyonunun $v=0.3$ ve $\phi_{20}(x,t)$ için sayısal çözüm



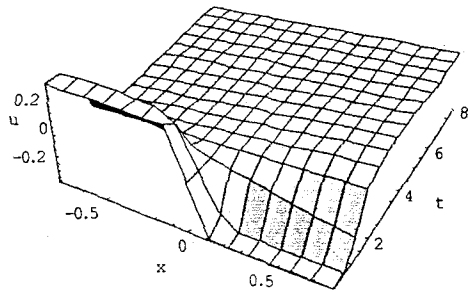
b) (4.1.1) tam çözüm fonksiyonunun grafiği,

8. Grafik lineer olmayan Burgers denkleminin t - yönündeki $\phi_{20}(x,t)$ yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Bu yavaş küçülmeyi ve kesim hatasını aza indirmek istenirse ayrışım serisinin terim sayısı artırılmalıdır. Bu durumda ayrışım serisinin terimlerini sayısı arttırıldığında çok gelişmiş bir bilgisayara ihtiyaç vardır.



a) (4.1.18) seri çözüm fonksiyonunun $v=0.3$ ve $\phi_{100}(x,t)$ için sayısal çözüm



b) (4.1.1) tam çözüm fonksiyonunun grafiği,

9. Grafik lineer olmayan Burgers denkleminin t - yönündeki $\phi_{100}(x,t)$ yaklaşık ve analitik çözüm fonksiyonu

Çağımızda kullanılan bilgisayarlar ile istenilen sayıda ayrışım serisinin terimlerini hesaplamak için uzun bir süre beklemek gerekmektedir. Bu çalışmada $n=100$ seçilerek aşağıdaki grafik 12 saatlik bir süre sonunda elde etmiştir.

Sonuç olarak; lineer olmayan Burgers denkleminin sayısal çözümün hassaslığı, v vizkozitesinin değerinin büyük seçimine bağlıdır. Ayrıca x_i ve t_i değerlerinin uygun seçimine, ayrışım serisinin terimlerinin çokluğuna ve ele alınan denklemin çözüm fonksiyonunun yapısına bağlı olduğu sonucu çıkarılabilir.



KAYNAKLAR

- Abbaoui, K. and Cherruault, Y., 1994, Convergence of Adomian's Method Applied to Differential Equations, *Comp. Math. Appl.*, 28, 103-109.
- Abbaoui, K. and Cherruault, Y., 1995, New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods, *Comp. Math. Appl.*, 29, 103-108.
- Abbaoui, K. , Pujol, M.J., Cherruault, Y., Himoun, N. and Grimalt, P., 2001, A New Formulation of Adomian Method: Convergence Result, *Kybernetes*, 30, 1183-1191.
- Abd-el-Malek, M.B. and Badran, N.A., 1990, Group method analysis of unsteady free-convective laminar boundary-layer flow on a nonisothermal vertical circular cylinder, *Acta Mech.*, 85, 193-206.
- Abd-el-Malek, M.B. and Badran, N.A., 1991, Group method analysis of steady free-Convective laminar boundary-layer flow on a nonisothermal vertical circular cylinder, *J. Comp. Appl. Math.*, 36, 227-238.
- Abd-el-Malek, M.B. and El-Mansi, S.M.A., 2000, Group Theoretic Methods Applied to Burgers' Equation, *J. Comp. Appl. Math.*, 115, 1-12.
- Adomian, G., 1990, A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations, *Math. Comp. Modell.*, 13, 17-43.
- Adomian, G. and Rach, R., 1990, Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations, *Comp. Math. Appl.*, 19, 9-12.
- Adomian, G., 1994, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston, 352 s.
- Adomian, G., 1998, A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 501-544.
- Ames, W.F., 1972, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol. II, Academic Press, New York, 305 s.
- Ames, W.F. and Nucci, M.C., 1985, Analysis of fluid Equations by Group Method, *J. Eng. Math.*, 20, 181-187.
- Aydın, M., Kuryel B., Gündüz, G. and Oturanç, G., 1995, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, İzmir, 494 s.

- Bateman, H., 1915, Some Recent Researches on the Motion of Fluids, *Mon. Weather Rev.*, 43, 163-170.
- Bellomo, N. and Monaco, R., 1985, A Comparison Between Adomian's Decomposition Methods and Perturbation Techniques for Nonlinear Random Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 110, 495-502.
- Bellomo, N. and Sarafyan, D., 1987, On Adomian's Decomposition Method and Some Comparisons with Picard's Iterative Scheme, *J. Math. Anal. Appl.*, 123, 389-400.
- Benton, E.R., 1966, Some New Exact, Viscous, Non-Steady Solutions of Burgers Equation, *Phys. Fluids*, 9, 1247-1248.
- Benton, E.R., 1967, Solutions Illustrating the Decay of Dissipation Layers in Burgers' Nonlinear Diffusion Equation, *Phys. Fluids*, 10, 2113-2119.
- Benton, E.R. and Platzman, G.W., 1972, A Table of Solutions of the One-dimensional Burgers' Equation, *Quart. Appl. Math.*, 30, 195-212.
- Blackstock, D.T., 1964, Thermoviscous Attenuation of Plane, Periodic, Finite Amplitude Sound Waves, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 36, 534-542.
- Boisvert, R.E., Ames, W.F. and Srivastava, U.N., 1983, Group Properties and New Solutions of Navier-Stokes Equations, *J. Eng. Math.*, 17, 203-221.
- Burgers, J.M., 1948, *A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence*, Academic Press, New York.
- Cherruault, Y. and Adomian, G., 1993, Decomposition Methods: A New Proof of Convergence, *Math. Comp. Model.*, 18, 103-106.
- Cherruault, Y., 1989, Convergence of Adomian's Method, *Kybernetes*, 18, 31-38.
- Cole, J.D., 1951, On A Quasilinear Parabolic Equation Occurring In Aerodynamic, *Quart. Appl. Math.*, 9, 225-236.
- Drazin, P.G., 1989, *Solutions: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 226 s.
- Fay, R.D., 1931, Plane Sound Waves of Finite Amplitude, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 3, 222-241.

- Fushchich, W.I., Shtelen, W.M. and Serov, N.I., 1989, Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Kluwer Academic Pub., The Netherlands, 435 s.
- Guenther, R.B., Lee, J.W., 1988, Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations, Dover Publications, New York, 562 s.
- Hopf, E., 1950, The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., 3, 201-230.
- Kamenshchik, A.Y., Khalatnikov, I.M., Martellini, M., 1997, Singularity in Solutions of Burgers' Equation, Phys. Lett. A, 232, 87-90.
- Kaya, D., 1999a, On The Solution of a Korteweg-de Vries Like Equation by the Decomposition Method, Intern. J. Computer Math., 72, 531-539.
- Kaya D., 1999b, On One Method for the Numerical Solution of the Kinematics Problems, Proceeding of the Conference TSU "Actual Problems of Appl. Math., Phys. and Engineering", Ilham. Ashgabad, Turkmenistan, 43-46.
- Kaya, D., 2000, An Application of the Decomposition Method on Second Order Wave Equations, Intern. J. Computer Math., 75, 235-245.
- Kaya, D., 2001a, Explicit Solution of a Generalized Nonlinear Boussinesq Equation, J. Appl. Math., 1, 29-37.
- Kaya, D., 2001b, An Explicit Solution of Coupled Viscous Burgers' Equation by the Decomposition Method, Intern. J. Math. and Math. Sci., 27, 675-680.
- Kaya, D. and Aassila, M., 2002, An Application for a Generalized KdV Equation by Decomposition Method, Phys. Lett. A, 299 201-206.
- Kaya D. and Çatalbaş, N., 2000, A Computer Program for the Implementation of Adomian's Decomposition Method, J. Inst. Math. Comp. Sci., 11, 185-194.
- Kaya, D. and Yokuş, A., 2002, A Numerical Comparison of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear and Nonlinear Partial Differential Equations, Math. Comp. Simulation, 2061, 1-6.
- Kevorkian, J., 1990, Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques, Brooks/Cole Pub. Company, California, 630 s.

- Koca, K., 2001, *Kısmi Türevli Denklemler*, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara, 233s.
- Lagerstrom, P.A., Cole, J.D. and Trilling, L., 1949, Problems in the Theory of Viscous Compressible fluids, *Calif. Inst. Tech.*, 232, 1-12.
- Lighthill, M.J., 1956, *Viscosity Effects in Sound Waves of Finite Amplitude*, Cambridge Univ. Press, London.
- Mazzia, A., Mazzia, F., 1997, Higher-Order Transverse Schemes for the Numerical Solution of Partial Differential Equations, *J. Comp. Appl. Math.*, 82, 299-311.
- Moran, M.J., and Gaggioli, R.A., 1968, Reduction of the Number of Variables in Systems of Partial Differential Equations With Auxiliary Conditions, *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 202-215.
- Nucci, M.C., 1984, Group Analysis of MHD Equations, *Atti Semi Mat. Fis. Univ. Modena*, 33, 21-34.
- Ockendon, H. and Tayler, A.B., 1983, *Inviscid Fluid Flows*, Springer, New York, 146 s.
- Ozis, T. and Ozdes, A., 1996, A Direct Variational Methods to Burgers' Equation, *J. Comp. Appl. Math.*, 71, 163-175.
- Peralta-Fabi, R. and Plaschko, P., 1993, Bifurcation of Solutions to the Controlled Burgers' Equation, *Acta Mech.*, 96, 155-161.
- Rèpaci, A., 1990, Nonlinear Dynamical Systems: On the Accuracy of Adomian's Decomposition Method, *Appl. Math. Lett.*, 3, 35-39.
- Rodin, E.Y., 1970, A Riccati Solution for Burgers' Equation, *Quart. Appl. Math.*, 27, 541-545.
- Seng, V., Abbaoui K. And Cherruault, Y., 1996, Adomian's Polynomials for Nonlinear Operators, *Math. Comput. Modelling*, 24, 59-65.
- Serway, R.A., 1995, *Fen ve Mühendislik için Fizik*, Palme Yayıncılık, Ankara, (Çeviri Kemal Çolakoğlu), 623 s.
- Schwarz, F., 1988, Symmetries of Differential Equations; From Sophus Lie to Computer Algebra, *SIAM Review*, 30, 450-481.
- Shawagfeh, N. T., 1996b, Analytic Approximate Solution for a Nonlinear Oscillator Equation, *Comp. Math. Appl.*, 31, 135-141.
- Shawagfeh, N. T. And Adomian, G., 1996a, Non-Perturbative Analytical Solution of the General Lotka-Volterra Three-Species System, *Appl. Math. Comp.*, 76, 251-266.

- Shtelen, W.M., 1989 On Group Method of Linearization of Burgers' Equation, Math. Phys. Nonlinear Mech. (Kiev), 11, 89-91.
- Seng, V., Abbaoui, K. and Cherruault, Y., 1966, Adomian Polynomials for Nonlinear Operators, Math. Comp. Model., 24, 59-65.
- van Tonningen, S., 1995, Adomian's Decomposition Method: A Powerful Technique for Solving Engineering Equations by Computer, Comp. Education Journal, 5, 30-34.
- Varoglu, E. and Finn, W.D.L., 1980, Space-Time Finite Elements Incorporating Characteristics for the Burgers' Equation, Int. J. Numer. Methods Eng., 16, 171-184.
- Vorus, W.S., 1989, The Solution of Burgers' Equation for Sinusoidal Excitation at the Upstream Boundary, J. Eng. Math., 23, 219-237.
- Wazwaz, A. M., 1995, The Decomposition for Approximate Solution of the Goursat Problem, Appl. Math. Comp., 69, 299-311.
- Wazwaz, A.M., 1997, Equality of Partial Solutions In The Decomposition Method for Partial Differential Equations, Int. J. Comput. Math., 65, 293-308.
- Wazwaz, A.M., 1998, A Comparison Between Adomian's Decomposition Methods And Taylor Series Method In The Series Solutions, Appl. Math. Comp., 97, 37-44.
- Wazwaz, A.M. 1999, A Reliable Modification of Adomian Decomposition Method, Appl. Math. Comp., 102, 77-86.
- Wazwaz, A.M., 2001, A Study of Nonlinear Dispersive Equations with Solitary-Wave Solutions Having Compact Support, Math. Comp. Simulation, 56, 269-276.
- Weiss, J.M., Tabor, M. and Carnevale, G., 1983, The Painlevé Property of Partial Differential Equations, J. Math. Phys., 3, 522-526.
- Whitham, G.B., 1974, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley and Sons, New York, 656 s.