

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



YARI EKSENDE SİNGÜLER PROBLEMLER İÇİN
İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ

Nesil İLHAN

Yüksek Lisans Tezi

Anabilim Dalı: Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Reşat YILMAZER

ELAZIĞ-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI EKSENDE SİNGÜLER PROBLEMLER İÇİN İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nesil İLHAN

121121104

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.03.2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 03.04.2017

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Reşat YILMAZER

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa İNÇ

Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK

NİSAN-2017

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi hazırlarken bana destek olan, bilgilerinden her alanda faydalandığım ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Hocam Doç.Dr Reşat YILMAZER'e ve her zaman yanımda olan ve çalışmalarım boyunca benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Nesil İLHAN

Elazığ-2017



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar (Kummer Denklemi).....	1
1.2. Whittaker Denklemi ve Whittaker Fonksiyonları	2
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
3. YARI EKSENDE SİNGÜLER PROBLEMLER İÇİN İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ	10
3.1. $[\alpha, \infty)$ ($a > 0$) Üzerinde Whittaker Dönüşümleri	12
KAYNAKLAR.....	26
ÖZGEÇMİŞ.....	28

ÖZET

Yarı Eksende Singüler Problemler için İntegral Dönüşümleri

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; hipergeometrik fonksiyonlar, Kummer ve Whittaker denklemlerinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; daha sonra ki bölümde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; yarı eksende singüler problemler için integral dönüşümleri ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: İntegral Dönüşümü, Paley-Wiener Teoremi, Singüler Sturm-Liouville Problemi, Whittaker Fonksiyonu

SUMMARY

Integral Transforms for Singular Problems over a Half Line

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter; There has been mentioned hypergeometric functions, Kummer and Whittaker equations.

In the second chapter; Some fundamental definitions and theorems, which will be used in the later chapter, are given.

In the third chapter; It has discussed integral transforms for singular problems over a half line.

Key Words: Integral Transform, Paley-Wiener Theorem, Singular Sturm-Liouville Problem, Whittaker Function.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamalarıyla birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

Γ : Gamma fonksiyonu

∂ : Kısmi türev

α : Alfa

μ : Mü

π : Pi

θ, ϑ : Teta

λ : Lambda

β : Beta

Φ, ϕ, φ : Phi

ρ : Ro

γ : Gamma

Ψ, ψ : Psi

$W_{k,\mu}$: Whittaker Fonksiyonu

ν : Nü

1. GİRİŞ

1.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar (Kummer Denklemi)

Bir hipergeometrik denklem, $y = y(z)$ olmak üzere,

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}) \quad (1.1)$$

şeklindedir. 0,1 ve ∞ noktaları denklemin düzgün tekil noktalarıdır. Denklemin $z = 0$ noktası komşuluğunda Frobenius seri çözümü yapıldığında,

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$$

ve

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots$$

elde edilir. Elde edilen bu seriye hipergeometrik seri denir. Serinin genel terimi

$$a_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n$$

ile gösterilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z|$$

olduğundan, D'Alembert oran testine göre $|z| < 1$ için yakınsaktır. Bu durumda

$$y(z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n \quad (1.2)$$

ile gösterilir. Hipergeometrik denklemin çözümü olan ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ fonksiyonuna hipergeometrik fonksiyon denir. ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ fonksiyonu genellikle $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ şeklinde gösterilir.

(1.1)'de z yerine $\frac{z}{\beta}$ yazıp

$$\frac{dy}{dz} = \beta \frac{dy}{dz} \text{ ve } \frac{d^2y}{dz^2} = \beta^2 \frac{d^2y}{dz^2}$$

eşitliklerini yerine yazarsak

$$\frac{z}{\beta} \left(1 - \frac{z}{\beta}\right) \beta^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1) \frac{z}{\beta} \right] \beta \frac{dy}{dz} - \alpha \beta y = 0$$

veya

$$z \left(1 - \frac{z}{\beta}\right) \frac{d^2y}{dz^2} + \left[\gamma - \left(\frac{\alpha + 1}{\beta} + 1\right) z \right] \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0$$

elde edilir. Bu yeni denklem 0, β ve ∞ ' da tekillığe sahiptir. $\beta \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$z \frac{d^2y}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0 \quad (1.3)$$

şeklinde konfluent hipergeometrik denklem (Kummer denklemi) elde edilir. Buna göre denklemin 0 ve ∞ olan iki tane tekil noktası vardır.

1.2. Whittaker Denklemi ve Whittaker Fonksiyonları

Önemli bir hipergeometrik denklem olan Whittaker denklemi (1.3) Kummer denkleminde elde edilmiştir.

$$y = e^{\frac{z}{2}} z^{\frac{-\gamma}{2}} w(z)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$w'' + \left[-\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{2} - \alpha \right) \frac{1}{z} + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{1}{z^2} \right] w = 0 \quad (1.4)$$

bulunur.

Denklemin iki lineer bağımsız çözümünü elde etmek ve daha simetrik formda yazabilmek için;

$$\gamma = 1 + 2m, \quad \frac{\gamma}{2} - \alpha = k \quad (1.5)$$

$$m = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} + m - k \quad (1.6)$$

olacak şekilde (1.4) denkleminde

$$w'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right] w = 0 \quad (1.7)$$

Whittaker denklemi elde edilir.

Whittaker denklemi ve Kummer denklemi arasındaki ilişkiden kesinlikle biliyoruz ki eğer $2m$ tam sayı değilse (1.7)'nin $z = 0$ noktasındaki iki lineer bağımsız çözümü

$$\begin{aligned} M_{k,m}(z) &= e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{\gamma}{2}} F(\alpha, \gamma, z) \\ &= e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1}{2}+m} F\left(\frac{1}{2} + m - k, 1 + 2m, z\right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} M_{k,-m} &= e^{-\frac{z}{2}} z^{1-\frac{\gamma}{2}} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \\ &= e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1}{2}-m} F\left(\frac{1}{2} - m - k, 1 - 2m, z\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

dir. $M_{k,\pm m}(z)$ fonksiyonları Whittaker fonksiyonları olarak adlandırılır [1-3].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $p(x)$, $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

şeklinde tanımlı L operatörüne **Sturm- Liouville operatörü**,

$$L[y] + \lambda s(x)y = 0$$

şeklinde tanımlı denkleme ise **Sturm-Liouville diferensiyel denklemi** denir. Sturm-Liouville diferensiyel operatörünün spektral özellikleri araştırılırken genellikle aşağıdaki üç grup önemli sınır şartları ele alınır [4-6].

$$i) \quad \left. \begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha &= 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Ayrılan sınır şartları}$$

$$ii) \quad \left. \begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned} \right\} \text{Periyodik sınır şartları}$$

ve

$$\left. \begin{aligned} y(a) &= -y(b) \\ y'(a) &= -y'(b) \end{aligned} \right\} \text{Antiperiyodik sınır şartları}$$

$$iii) \quad \left. \begin{aligned} y(a) &= y(b) = 0 \\ y'(a) &= y'(b) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Uçları bağlanmış sınır şartları}$$

Tanım 2.2. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer

$$\|Lx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne **sınırlıdır** denir [7].

Tanım 2.3. L , $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün **özdeğeri**, y fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen **özfonksiyon** denir [8].

Tanım 2.4. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L^2[a, b]$ uzayı,

$$L^2[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$) [9].

Tanım 2.5. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin keyfi bir z_0 noktasının $\mathcal{D}$ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında **analitiktir** denir [10].

Tanım 2.6. Bir $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye **tam fonksiyon** denir [10].

Tanım 2.7. $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu vektör uzayları olsun. Eğer

(i) T bire-bir ve örten

(ii) T ve T^{-1} nin her ikisinde sürekli olacak biçimde bir $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü varsa T ye bir **homeomorfizm** adı verilir [11].

Tanım 2.8. $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin **kapanışı** denir [12].

Tanım 2.9. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun. Verilen her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına, $|x - p| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in A$ için $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ olmak üzere bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ sayısı karşılık getirilebilirse, f fonksiyonu p noktasında **süreklidir** denir. f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu A kümesi üzerinde süreklidir denir [13].

Tanım 2.10. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x, y \in A$ için $|x - y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olmak üzere bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonuna **düzgün süreklidir** denir [13].

Tanım 2.11. $E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde A , $A \subset E$ kümesi için öyle bir B elementer kümesi var olsun ki, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda A kümesine **Lebesgue anlamda ölçülebilir küme** denir. Onun dış ölçümü $\mu^*(A)$ ye kümenin **Lebesgue ölçümü** denir.

Lebesgue ölçümünde olduğu gibi Stieltjes ölçümünde de (a, b) , $[a, b)$, $[a, b]$ aralıklarının ölçümünü tanımlamak gerekir. Bu aralıkların ölçümü herhangi bir F fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. F fonksiyonu monoton azalmayan (artan) ve soldan sürekli, başka bir deyişle $F(x-0) = F(x)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $F(x)$ fonksiyonu yardımıyla aralıkların Stieltjes ölçümleri,

$$\begin{aligned} m[a, b] &= F(b+0) - F(a) \\ m[a, b) &= F(b) - F(a) \\ m(a, b] &= F(b+0) - F(a+0) \\ m(a, b) &= F(b) - F(a+0) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$x_k = [x_k, x_k]$ şeklinde yazıldığı için,

$$\begin{aligned} m(x_k) &= m[x_k, x_k] \\ &= F(x_k + 0) - F(x_k) = h_k \end{aligned}$$

olur. Bu örnekten görülüyor ki Lebesgue ölçümünden farklı olarak bir noktanın Stieltjes ölçümü sıfır olmayabilir. Ancak, ölçüm kavramının dikdörtgenlerden yola çıkarak elementer kümeler için tanımlanması, daha sonra dış ölçüm kavramı ve nihayet ölçüm kavramı Lebesgue ölçümünde olduğu gibidir. Bu açıdan da şimdi ele alınan ölçüme **Lebesgue-Stieltjes Ölçümü** denir. Lebesgue integrali kavramında Lebesgue-Stieltjes integrali ölçümü dikkate alınırsa Lebesgue-Stieltjes integrali de önce fonksiyonlar için daha sonra ise genel ölçülebilir fonksiyonlar için tanımlanabilir. Lebesgue-Stieltjes ölçümü μ_F ile gösterilir. Eğer Lebesgue-Stieltjes ölçümüne göre integral tanımlanmışsa bu integral

$$\int_A f(x) d\mu_F \text{ veya } \int_A f(x) dF$$

şeklinde yazılır [14].

Tanım 2.12. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A bir **kompakt kümedir** [15].

Tanım 2.13. X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme üzerinde reel değerli negatif olmayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

- i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$
- ii) Her $x, y \in X$ için ancak ve ancak $x = y$ ise $d(x, y) = 0$
- iii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$
- iv) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

Böyle bir $d(x, y)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir **metrik** adı verilir [15].

Tanım 2.14. $A_\lambda = \lambda I - A$ operatörünün $R_\lambda = R(A_\lambda)$ değer bölgesini U normlu uzayında yoğun kılan ve A_λ operatörünün sürekli bir tersinin var olmasına yol açan λ kompleks sayılarının oluşturduğu $\rho(A) \subseteq \mathbb{C}$ kümesine A operatörünün çözücü kümesi denir. Bu kümenin $\mathbb{C}$ ye göre tümleyeni olan $\sigma(A) = [\rho(A)]^c \subseteq \mathbb{C}$ kümesine de A operatörünün **spekturumu** denir.

Buna göre $\lambda \in \sigma(A)$ ise ya A^{-1} yoktur; ya A_λ^{-1} vardır, ancak sürekli değildir; ya da $R_\lambda \neq U$ olur. A_λ^{-1} varsa $D(A_\lambda^{-1}) = R_\lambda$ olacağına dikkat edilmelidir.

$\sigma\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda^{-1} \text{ yok}\}$ kümesi **nokta spekturumu** adını alır ve bu kümenin üyeleri öz değerler olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.15. Her $x \in A$ için $|x| \leq M$ olacak şekilde M pozitif sayısı varsa A kümesine **sınırlıdır** denir [12].

Tanım 2.16. $\Gamma(z)$ *Gamma fonksiyonu* integral yardımıyla

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)\Gamma(z-1) = z(z-1)\dots 3.2.1 = z!$$

elde edilir. Bu nedenle bu fonksiyona *faktöriyel fonksiyon* ismi de verilir [16].

Tanım 2.17. $z \in \mathbb{C}$ ve negatif olmayan $n \in N_0$ tamsayısı için

$$(z)_0 = 1$$

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$$

biçiminde tanımlanan $(z)_n$ matemaiksel ifadesine *pochhammer sembolü* denir. Örneğin

$$(1)_n = n!$$

$$(3)_5 = 3.4.5.6.7 = 2520$$

yazabiliriz. $z = -m$ negatif bir tamsayı olsun. $(z)_n$ pochhammer sembolü

$$(z)_n = \begin{cases} (z)_n = (-m)_n, & m \geq n \\ (z)_n = 0, & m < n \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. Örneğin

$$(-3)_3 = (-3)(-2)(-1) = -6$$

$$(-3)_4 = 0$$

yazılabilir.

İntegral yardımıyla Gamma fonksiyonunu

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad R(z) > 0$$

biçiminde yazabiliriz. Bu ilişki Euler Gamma fonksiyonu $R(z) \leq 0$ yarı düzleminde

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \Leftrightarrow (z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

yardımla genişletilebilir [17].



3. YARI EKSENDE SİNGÜLER PROBLEMLER İÇİN İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ

L operatörü

$$L = -\frac{d^2}{dt^2} + q \quad (3.1)$$

ile verilen lineer bir operatör olsun. Burada q , $0 < a < \infty$ olmak üzere $[a, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyondur.

Yarı eksen üzerinde

$$Ly = \lambda y \quad (3.2)$$

singüler Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu durumda y fonksiyonu ($y = 0$ aşıkâr çözümü hariç) öz fonksiyon olup λ ile birlikte ikinci dereceden

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + [\lambda - q(t)]y = 0 \quad a \leq t < \infty \quad (3.3)$$

diferensiyel denklemini sağlamalıdır. $\varphi(t, \lambda)$ ve $\theta(t, \lambda)$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'(a, \lambda) = -\cos \alpha \quad (3.4)$$

$$\theta(a, \lambda) = \cos \alpha, \quad \theta'(a, \lambda) = \sin \alpha \quad (3.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan (3.3) denkleminin çözümleri olsun.

Çalışmalarımızda geçen $\phi'(t, \lambda) = \frac{d}{dt}\phi(t, \lambda)$ dır. Ayrıca eğer z bir kompleks sayı

ise, $\text{Re} z$, $\text{Im} z$ ve $\text{Arg} z$ sırasıyla; reel kısım, imajiner kısım ve z 'nin esas argümanı anlamına gelir.

Üst yarı düzlemde $\text{Im} \lambda > 0$ ve alt yarı düzlemde de $\text{Im} \lambda < 0$ olacak şekilde analitik bir $m(\lambda)$ fonksiyonu vardır ve böylece reel olmayan λ 'lar için; $L_2(a, \infty)$ da t 'nin bir fonksiyonu olarak

$$\psi(t, \lambda) = \theta(t, \lambda) + m(\lambda)\varphi(t, \lambda)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca tüm reel λ değerleri için

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^\lambda \text{Im} m(u + i\delta) du \quad (3.6)$$

dur. $\rho(\lambda)$ artan bir fonksiyondur, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ üzerinde Lebesgue-Stieltjes ölçüsü tanımlar. Dolayısıyla $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ uzayını göz önüne alınabilir.

Eğer $f \in L_2(a, \infty)$ ise;

$$F_n(\lambda) = \int_a^n f(t) \varphi(t, \lambda) dt,$$

integrali $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ nin uygun bir metriğiyle $F(\lambda)$ ' ya yakınsar. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(\lambda) - F(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

ve

$$f_n(t) = \int_{-n}^n F(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\rho(\lambda)$$

ifadeleri $L_2(a, \infty)$ normuna bağlı olarak $f(t)$ ' ye yakınsar. Parseval özdeşliğinden;

$$\int_a^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\rho(\lambda)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$F(\lambda) = \int_a^{\infty} f(t) \varphi(t, \lambda) dt, \quad (3.7)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\rho(\lambda) \quad (3.8)$$

dir.

3.1. $[a, \infty)(a > 0)$ Üzerinde Whittaker Dönüşümleri

Bu bölümde, Whittaker tipi adi diferensiyel denklemin $[a, \infty)(a > 0)$ yarı doğrusu üzerinde temel çözümleri üzerinden türetilen Whittaker dönüşümünü tanımlayacağız. Uygun şartlar altında bazı parametrelerle bu dönüşümün $L_2(a, \infty)$ den pozitif reel yarı eksen $R^+ = (0, \infty)$ üzerine bir homeomorfizm olduğunu göstereceğiz.

Aşağıdaki

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left[\lambda + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{t^2} + \frac{c}{t} \right] y = 0, \quad \alpha < t < \infty, \quad (\alpha > 0) \quad (3.9)$$

Sturm-Liouville probleminin yarı eksen üzerinde olduğunu varsayalım. Buradaki c sıfırdan farklı bir reel sayı, μ bir kompleks sayı ve μ^2 reel sayıdır.

$$x = -2i\sqrt{\lambda}t \quad \text{ve} \quad \kappa = \frac{ic}{2\sqrt{\lambda}} \quad \text{değişken değişirmesiyle,}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -2i\sqrt{\lambda} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-2i\sqrt{\lambda} \frac{dy}{dx} \right), \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -4\lambda \frac{d^2 y}{dx^2}$$

olur. (3.9) da yerine yazarsak

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2} + \frac{\kappa}{x} \right] w = 0 \quad (3.10)$$

Whittaker denklemi elde edilir.

(3.10) denkleminin iki lineer bağımsız çözümü $W_{\kappa, \mu}(x)$ ve $W_{-\kappa, \mu}(-x)$ Whittaker fonksiyonlarıdır.

Bunların Wronskian determinantı [17]

$$\begin{aligned} W \left(W_{\kappa, \mu}(x), W_{-\kappa, \mu}(-x) \right) &= -[W_{\kappa, \mu}(x)W'_{-\kappa, \mu}(-x) + W'_{\kappa, \mu}(x)W_{-\kappa, \mu}(-x)] \\ &= \exp[-\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} x)i\pi\kappa] \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Bu nedenle $\kappa = \frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}$ olmak üzere $W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}t)$ ve $W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}t)$ ile birlikte Wronskian

$$W\left(W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}t), W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}t)\right) = \exp\left[-\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda})\right] \quad (3.12)$$

ve (3.9) un iki lineer bağımsız çözümü ile genel çözüm

$$AW_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) + BW_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}t)$$

formundadır. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. $\varphi(t, \lambda)$, (3.9)'un (3.4) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olsun. Bu durumda,

$$AW_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) + BW_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) = \sin \alpha,$$

$$AW'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - BW'_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) = \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}}$$

olduğu açıktır. Denklem sistemini çözmek için birinci denklemi $W'_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a)$, ikinci denklemi $W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a)$ ile çarpar taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} A \left[W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) W'_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] \\ = \sin \alpha W'_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \end{aligned}$$

olur. Köşeli parantezin içi Whittaker fonksiyonlarının Wronskian'ı olup (3.12) yardımıyla

$$A = -\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda})\right] \left[\sin \alpha W'_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right]$$

bulunur. Aynı yok etme metodu ile,

$$B = -\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda})\right] \left[\sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right]$$

elde edilir.

Çözümün $\varphi(t, \lambda) = AW_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) + BW_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}t)$ olduğundan dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\varphi(t, \lambda) = & -\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})\right] \left[\sin \alpha W'_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] \\
& \times W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) - \exp\left[\frac{c\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}\right] \\
& \times \left[\sin \alpha W'_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right] W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olur. Benzer şekilde $\theta(t, \lambda)$, (3.9)' un (3.5) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü ise

$$\begin{aligned}
\theta(t, \lambda) = & -\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})\right] \left[\cos \alpha W'_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right. \\
& \left. - \frac{\sin \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) \\
& - \exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})\right] \left[\cos \alpha W'_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) + \frac{\sin \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right] \\
& \times W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}t)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olduğu açıktır.

$m(\lambda)$ üst ve alt yarı düzlemde analitik bir fonksiyon olsun. Böylece t 'nin bir fonksiyonu olarak, her reel olmayan λ için

$$\psi(t, \lambda) = \theta(t, \lambda) + m(\lambda)\varphi(t, \lambda)$$

yazılabilir. $\theta(t, \lambda)$ ve $\varphi(t, \lambda)$ yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\psi(t, \lambda) = & \left\{ \begin{aligned} & -\exp\left[\frac{c\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}\right] \left[\cos \alpha W'_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) - \frac{\sin \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] \\ & \times W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) \\ & -\exp\left[\frac{c\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}\right] \left[\cos \alpha W'_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) + \frac{\sin \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right] \\ & \times W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}t) \end{aligned} \right\} \\
+m(\lambda) & \left\{ \begin{aligned} & -\exp\left[\frac{c\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}\right] \left[\sin \alpha W'_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] \\ & \times W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) - \exp\left[\frac{c\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}\right] \\ & \times \left[\sin \alpha W'_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right] W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}t) \end{aligned} \right\}, \\
\psi(t, \lambda) = & A(\lambda) W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) + B(\lambda) W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}t) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
A(\lambda) = & -\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})\right] \left\{ \cos \alpha W'_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right. \\
& - \frac{\sin \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + [\sin \alpha W'_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \\
& \left. + \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a)] m(\lambda) \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B(\lambda) = & -\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda})\right] \left\{ \cos \alpha W'_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right. \\
& + \frac{\sin \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) + [\sin \alpha W'_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \\
& \left. - \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)] m(\lambda) \right\}
\end{aligned}$$

dır.

Whittaker fonksiyonu için asimptotik formül [17] den;

$$W_{\kappa,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\kappa} \left[1 + O|z|^{-1} \right], \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{2}, \quad |z| \rightarrow \infty$$

dir. $\text{Im } \lambda > 0$ olması $\frac{\pi}{2} < \arg(2i\sqrt{\lambda}t) < \pi$ ve $-\frac{\pi}{2} < \arg(-2i\sqrt{\lambda}t) < 0$ olmasını garantiler.

$t \rightarrow \infty$ için z yerine $-2i\sqrt{\lambda}t$ yazarsak,

$$W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) = e^{i\sqrt{\lambda}t} (-2i\sqrt{\lambda})^{\kappa} t^{\kappa} \left[1 + O|t|^{-1} \right], \quad \text{Im } \lambda > 0 \quad (3.16)$$

$$W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}t) = (2i\sqrt{\lambda})^{-\kappa} e^{-i\sqrt{\lambda}t} t^{-\kappa} \left[1 + O|t|^{-1} \right], \quad \text{Im } \lambda > 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. $\text{Re}(i\sqrt{\lambda}t) = t \text{Re}(i\sqrt{\lambda}) = -t \text{Im } \sqrt{\lambda}$ olduğu zaman $\text{Im } \lambda > 0$ olup (3.16) ve (3.17) formüllerinden

$$W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) \in L_2(a, \infty) \text{ iken } W_{-\kappa,\mu}(2i\sqrt{\lambda}t) \notin L_2(a, \infty)$$

dir. Sonuç olarak

$$\psi(t, \lambda) = [\theta(t, \lambda) + m(\lambda)\varphi(t, \lambda)] \in L_2(a, \infty)$$

ifadesi yalnız ve yalnız $B(\lambda) = 0$ olduğunda sağlanır. Yani ,

$$\left\{ \cos \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) + \frac{\sin \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) + \left[\sin \alpha W'_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \frac{\cos \alpha}{2i\sqrt{\lambda}} W_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right] m(\lambda) \right\} = 0$$

ve

$$\begin{aligned} & \left[2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right] m(\lambda) \\ & = - \left[2i\sqrt{\lambda} \cos \alpha W'_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) + \sin \alpha W_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $m(\lambda)$ 'yı çekecek olursak;

$$m(\lambda) = \frac{-2i\sqrt{\lambda} \cos \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \sin \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)}{2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)}, \quad \text{Im } \lambda > 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. $m(\lambda)$ formu üst yarı düzlemdeki noktalara sürekli genişletilebilir bir formdur.

Bu nedenle paydaya $D(\lambda)$ dersek

$$D(\lambda) = 2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{-\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a), \quad \kappa = \frac{ic}{2\sqrt{\lambda}} \quad (3.19)$$

olup kesinlikle sıfırdan farklıdır.

Eğer $\lambda > 0$ ise $\kappa = \frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}$ tamamen imajinerdir. $z = -2i\sqrt{\lambda}a$ için $W_{\kappa,-\mu}(x) = W_{\kappa,\mu}(x)$

tüm x ' ler için sağlanır. Whittaker fonksiyonlarının κ ve μ indisleri değişken boyunca yayıldığından, μ reel veya sadece imajinerse

$$W_{-\kappa,\mu}(-z) = \overline{W_{\kappa,\mu}(z)} \quad \text{ve} \quad W'_{-\kappa,\mu}(-z) = \overline{W'_{\kappa,\mu}(z)},$$

dir. Böylece

$$W_{-\kappa,\mu}(-z)W'_{\kappa,\mu}(z) + W'_{-\kappa,\mu}(-z)W_{\kappa,\mu}(z) = W[W_{-\kappa,\mu}(-x), W_{\kappa,\mu}(x)](z) = \exp\left[-\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right]$$

olup, $\lambda > 0$ için

$$W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \neq 0 \quad \text{ve} \quad W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \neq 0$$

dır. Buradan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{W'_{\kappa,\mu}(z)}{W_{\kappa,\mu}(z)}\right) = -\frac{W(W_{\kappa,\mu}(x), W_{-\kappa,\mu}(-x))(z)}{W_{\kappa,\mu}(z)W_{-\kappa,\mu}(-z)} = \frac{\exp\left[-\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right]}{|W_{\kappa,\mu}(z)|^2}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{D(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}W_{\kappa,\mu}(z)}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{2i\sqrt{\lambda}\sin\alpha W'_{\kappa,\mu}(z) - \cos\alpha W_{\kappa,\mu}(z)}{2\sqrt{\lambda}W_{\kappa,\mu}(z)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(i\sin\alpha \frac{W'_{\kappa,\mu}(z)}{W_{\kappa,\mu}(z)} - \frac{\cos\alpha}{2\sqrt{\lambda}}\right) \\ &= \sin\alpha \operatorname{Re}\left(\frac{W'_{\kappa,\mu}(z)}{W_{\kappa,\mu}(z)}\right) = \frac{\exp\left[\frac{-c\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right]\sin\alpha}{|W_{\kappa,\mu}(z)|^2} \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden $\sin\alpha \neq 0$ ise $D(\lambda) \neq 0$ dır. Eğer $\sin\alpha = 0$ ise o zaman

$D(\lambda) = W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}\alpha) \neq 0$ olmalıdır. Yani $m(\lambda)$ 'nin herhangi bir $\lambda > 0$ için genişletilebilir olduğunu göstermiş olduk.

Eğer $\lambda < 0$ ise $\kappa = \frac{ic}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{c}{2\sqrt{|\lambda|}}$ reeldir. $W_{\kappa,\mu}(x)$ ve $W'_{\kappa,\mu}(x)$ reel x 'ler için reel

değerlidir.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)W_{\kappa,\mu}(x) = 2^{-2\mu}x^{\frac{1}{2}+\mu}\int_1^\infty e^{-\frac{xs}{2}}(s-1)^{\mu-\kappa-\frac{1}{2}}(s+1)^{\mu+\kappa-\frac{1}{2}}ds \quad (3.20)$$

integral gösterimini ele alalım[17]. Burada $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right) > 0$ dır.

Farz edelim ki $\mu \geq 0$ ve $c < 0$ olsun. Bu varsayımların altında $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right) > 0$ olduğundan, $\frac{1}{2} + \mu - \kappa = \frac{1}{2} + \mu - \frac{c}{2\sqrt{|\lambda|}} > 0$ olur. Dolayısıyla $x > 0$ için $W_{\kappa,\mu}(x) > 0$ ve bu yüzden $\sin \alpha = 0$ olacak şekilde α seçilirse herhangi bir $\lambda < 0$ için $D(\lambda) \neq 0$ olur. (3.20) den x 'e göre integral ile

$$xW'_{\kappa,\mu}(x) - \left(\frac{1}{2} + \mu\right)W_{\kappa,\mu}(x) = \frac{-2^{-2\mu-1}x^{\frac{3}{2}+\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)^1} \int_0^\infty e^{-\frac{xs}{2}} s(s-1)^{\mu-k-\frac{1}{2}} (s+1)^{\mu+k-\frac{1}{2}} ds \quad (3.21)$$

elde edilir. $x > 0$ için (3.21) in sağ tarafı negatiftir. Ayrıca

$$W'_{\kappa,\mu}(x) \leq \left(\frac{1}{2} + \mu\right)x^{-1}W_{\kappa,\mu}(x), \quad x > 0$$

dır. Çünkü $W_{\kappa,-\mu}(x) = W_{\kappa,\mu}(x)$ ve $W'_{\kappa,-\mu}(x) = W'_{\kappa,\mu}(x)$ olup,

$$W'_{\kappa,\mu}(x) \leq \left(\frac{1}{2} + |\mu|\right)x^{-1}W_{\kappa,\mu}(x), \quad x > 0, \quad c < 0 \quad (3.22)$$

ve μ reeldir. $-\infty < \cot \alpha < -\frac{1}{a}\left(|\mu| + \frac{1}{2}\right)$ şeklinde şart koyacak olursak, $\sin \alpha \neq 0$ ve

(3.22) den

$$\begin{aligned} \frac{D(\lambda)}{\sin \alpha W_{\kappa,\mu}(2\sqrt{|\lambda|}a)} &= -2\sqrt{|\lambda|} \frac{W'_{\kappa,\mu}(2\sqrt{|\lambda|}a)}{W_{\kappa,\mu}(2\sqrt{|\lambda|}a)} \\ &\quad - \cot \alpha > -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} + |\mu|\right) + \frac{1}{a}\left(|\mu| + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden eğer α , $-\infty < \cot \alpha < -\frac{1}{a}\left(|\mu| + \frac{1}{2}\right)$ olacak şekilde seçilirse herhangi bir $\lambda < 0$ için $D(\lambda) \neq 0$ olur.

Özet olarak eğer μ reel, $c < 0$ ve α , $\sin \alpha = 0$ veya $-\infty < \cot \alpha < -\frac{1}{a}\left(|\mu| + \frac{1}{2}\right)$

olacak şekilde seçilmiş ise $m(\lambda)$ herhangi bir $\lambda < 0$ 'a kadar sürekli genişletilebilir.

Dolayısıyla bu varsayımlarla birlikte,

$$d\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \neq 0$$

dır.

Şimdi $\lambda \neq 0$ reel sayısı için $m(\lambda)$ 'nın imajiner kısmı olan $\operatorname{Im} m(\lambda)$ 'yı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{-2i\sqrt{\lambda} \cos \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \sin \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)}{2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \left(|W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)|^2 - 4|\lambda| |W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)|^2 \right)}{|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)|^2} \\ &\quad + \frac{4\sin^2 \alpha \operatorname{Im} \left[\sqrt{\lambda} W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \overline{W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)} \right]}{|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)|^2} \\ &\quad + \frac{2i\sqrt{\lambda} W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \overline{W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)}}{|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)|^2} \end{aligned}$$

şeklinde olup ilk iki terim reel olduğundan,

$$\operatorname{Im} m(\lambda) = \frac{2 \operatorname{Re} \left(\sqrt{\lambda} W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \overline{W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)} \right)}{|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)|^2}, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0$$

dır.

Eğer $\lambda < 0$ ise $\sqrt{\lambda} = i\sqrt{|\lambda|}$ dır ve $K = \frac{ci}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{c}{2\sqrt{|\lambda|}}$ reeldir. Her x için

$W_{\kappa,-\mu}(x) = W_{\kappa,\mu}(x)$ olduğundan her reel x için μ reel olsun ya da olmasın

$$\overline{W_{\kappa,\mu}(x)} = W_{\kappa,\mu}(x) \quad \text{ve} \quad \overline{W'_{\kappa,\mu}(x)} = W'_{\kappa,\mu}(x)$$

olur. Bu nedenle,

$$\operatorname{Re} \left(\sqrt{\lambda} W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \overline{W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)} \right) = -\sqrt{|\lambda|} \operatorname{Im} \left(W'_{\kappa,\mu}(2\sqrt{|\lambda|}a) \overline{W_{\kappa,\mu}(2\sqrt{|\lambda|}a)} \right) = 0$$

dır. Sonuç olarak $\lambda < 0$ için $\operatorname{Im} m(\lambda) = 0$ olduğu görülür.

Şimdi farz edelim ki $\lambda > 0$ olsun. O zaman $\kappa = \frac{-c}{2i\sqrt{\lambda}}$ tamamen imajinerdir, öyle ki

$\kappa = \bar{\kappa}$ dir. $z = -2i\sqrt{\lambda}a$ alalım. (3.11) den dolayı

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left[W'_{\kappa,\mu}(z)\overline{W_{\kappa,\mu}(z)}\right] &= W'_{\kappa,\mu}(z)\overline{W_{\kappa,\mu}(z)} + \overline{W'_{\kappa,\mu}(z)}W_{\kappa,\mu}(z) \\ &= W'_{\kappa,\mu}(z)W_{-\kappa,\mu}(-z) + W'_{-\kappa,\mu}(-z)W_{\kappa,\mu}(z) \\ &= -W(W_{\kappa,\mu}(x), W_{-\kappa,\mu}(-x))(z) \\ &= -\exp\left[-\operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)i\pi\kappa\right] = -\exp\left[-\frac{\pi c}{2\sqrt{\lambda}}\right] \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden,

$$\operatorname{Im} m(\lambda) = \frac{-\sqrt{\lambda} \exp\left[\frac{-\pi c}{2\sqrt{\lambda}}\right]}{\left|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)\right|^2}, \quad \lambda > 0$$

dır. Bundan dolayı (3.6) dan ,

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda} \exp\left[-\frac{\pi c}{2\sqrt{\lambda}}\right]}{\pi \left|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa,\mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)\right|^2}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

yazılır. (3.7) ve (3.8) yardımıyla, $\varphi(t, \lambda)$ (3.13) de ki gibi olmak üzere,

$$F(\lambda) = \int_a^\infty f(t)\varphi(t, \lambda)dt, \quad \lambda > 0, \quad f \in L_2(a, \infty),$$

ve

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(\lambda)\varphi(t, \lambda)\sqrt{\lambda} \exp\left[-\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right]}{\left|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)\right|^2} d\lambda, \quad a \leq t < \infty$$

integral dönüşüm çifti bulunur. Parseval özdeşliğinden,

$$\int_a^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} \exp\left[-\frac{\pi c}{2\sqrt{\lambda}}\right] |F(\lambda)|^2}{\left|2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)\right|^2} d\lambda \quad (3.23)$$

dir. $\lambda > 0$ için $\varphi(t, \lambda)$ fonksiyonu kompakt olarak

$$\varphi(t, \lambda) = -\frac{\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right]}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Im} \left\{ \left[2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + \cos \alpha W_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla dönüşümler çiftimiz

$$F(\lambda) = -\frac{\exp\left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right]}{\sqrt{\lambda}} \times \int_{\alpha}^{\infty} f(t) \operatorname{Im} \left\{ \left[2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + \cos \alpha W_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) \right\} dt \quad (3.24)$$

ve

$$f(t) = -\int_0^{\infty} \frac{F(\lambda)}{\pi \left| 2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right|^2} \times \operatorname{Im} \left\{ \left[2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) + \cos \alpha W_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}a) \right] W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) \right\} d\lambda$$

formlarına dönüşür. $z \neq 0$ olmak üzere z ve w kompleks sayıları için

$$\frac{\operatorname{Im}(zw)}{|z|^2} = \operatorname{Im}\left(\frac{zw}{zz}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z}\right),$$

olduğundan $f(t)$ formülünü yeniden düzenlersek

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \operatorname{Im} \left(\frac{W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t)}{2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{-\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)} \right) d\lambda \quad (3.25)$$

bulunur. Eğer $f(t)$ ile $F(\lambda)$ arasında (3.25) de ki gibi bir ilişki varsa $f(t) \in L_2(a, \infty)$

fonksiyonunu $F(\lambda) \in L_2(\mathbb{R}^+, d\rho(\lambda))$ 'nın Whittaker dönüşümü olarak adlandırırız.

Sonuçlarımızı aşağıda ki teoremden özetleyelim.

Teorem 3.1. $c < 0$ olmak üzere μ ve $\mathcal{C}$ reel sayılar, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ için $\sin \alpha = 0$ veya

$$-\infty < \cot \alpha < -\frac{1}{a} \left(\left| \mu \right| + \frac{1}{2} \right) \text{ olsun. O zaman (3.24) integral dönüşümü } L_2(a, \infty)$$

uzayından

$$L_2 \left(\mathbb{R}^+, \frac{\sqrt{\lambda} \exp \left[-\frac{\pi c}{2\sqrt{\lambda}} \right]}{\pi \left| 2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right|^2} d\lambda \right)$$

uzayı üzerine bir homeomorfizmdir. Ayrıca (3.25) formunda yazılmış ters dönüşüm (3.23) Parseval özdeşliğini sağlar.

Özellikle Teorem (3.1)'de $\alpha = 0$ alınması $L_2(a, \infty)$ den

$$L_2 \left(\mathbb{R}^+, \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} \exp \left[-\frac{\pi c}{2\sqrt{\lambda}} \right] \left| W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right|^{-2} d\lambda \right)$$

uzayına

$$F(\lambda) = -\frac{\exp \left[\frac{c\pi}{2\sqrt{\lambda}} \right]}{\sqrt{\lambda}} \int_a^\infty f(t) \operatorname{Im} \left[W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}\alpha) W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t) \right] dt \quad (3.26)$$

ve $f \in L_2(a, \infty)$ için

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda) \operatorname{Im} \left[\frac{W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(2i\sqrt{\lambda}t) d\lambda}{W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)} \right] d\lambda \quad (3.27)$$

olacak şekilde dönüşümlerin izometrik çiftini verir. Parseval özdeşliği ile birlikte,

$$\begin{aligned} \int_a^\infty |f(t)|^2 dt &= \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\lambda} \exp \left[-\frac{\pi c}{2\sqrt{\lambda}} \right] |F(\lambda)|^2 \left| W_{\frac{ic}{2\sqrt{\lambda}}, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) \right|^{-2} d\lambda \end{aligned}$$

olur[18-21].

Teorem 3.2. (Paley-Wiener Tipi Teorem) μ ve c reel sayılar, $c < 0$ ve $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

için $\sin \alpha = 0$, veya $-\infty < \cot \alpha < -\frac{1}{a} \left(|\mu| + \frac{1}{2} \right)$ olsun.

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{t^2} + \frac{c}{t}$$

ile verilsin. O zaman

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda) \operatorname{Im} \left[\frac{W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}t)}{2i\sqrt{\lambda} \sin \alpha W'_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a) - \cos \alpha W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)} \right] d\lambda,$$

$\left(\kappa = \frac{ic}{2\sqrt{\lambda}} \right)$ fonksiyonu (a, ∞) üzerinde sonsuz diferensiyellenebilir ise

$$F(\lambda) \in L_2 \left[\mathbb{R}^+, \sqrt{\lambda} \exp \left(-\frac{\pi c}{2\sqrt{\lambda}} \right) |W_{\kappa, \mu}(-2i\sqrt{\lambda}a)|^{-2} d\lambda \right]$$

fonksiyonunun Whittaker dönüşümüdür. Bu durumda $n = 0, 1, 2, \dots$ için

1. $L^n f(t) \in L_2(a, \infty),$
2. $\lim_{t \rightarrow a^+} \left[\cos \alpha (L^n f)(t) + \sin \alpha \frac{d}{dt} (L^n f)(t) \right] = 0,$
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} [(L^n f)(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} (L^n f)(t) = 0.$

dır.

İspat 1. L^n diferensiyel operatörünü

$$f(t) = \int_0^\infty F(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\rho(\lambda)$$

eşitliğinin her iki tarafına uygulayacak olursak,

$$\begin{aligned} (L^n f)(t) &= \int_0^\infty F(\lambda) L^n \varphi(t, \lambda) d\rho(\lambda) \\ &= (-1)^n \int_0^\infty \lambda^n F(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\rho(\lambda) \end{aligned} \tag{3.28}$$

elde ederiz. Burada $\lambda^n F(\lambda) \in L_2(\mathbb{R}^+, d\rho)$ olup, $L^n f \in L_2(\mathbb{R}^+)$ şeklindedir.

2. $t \rightarrow a^+$ iken (3.28) in limitini alacak olursak,

$$\lim_{t \rightarrow a^+} (L^n f)(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} (-1)^n \int_0^\infty \lambda^n F(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\rho(\lambda)$$

elde ederiz. Lebesgue teoremi yardımıyla integralin içinde limit alma işlemini uygularsak,

$$\lim_{t \rightarrow a^+} (L^n f)(t) = (-1)^n \int_0^\infty \lambda^n F(\lambda) \varphi(a, \lambda) d\rho(\lambda)$$

$$= (-1)^n \sin \alpha \int_0^{\infty} \lambda^n F(\lambda) d\rho(\lambda)$$

elde edilir. Ayrıca (3.28)'in diferensiyelini ve ardından limitini alacak olursak,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{d}{dt} (L^n f)(t) &= \lim_{t \rightarrow a^+} (-1)^n \int_0^{\infty} \lambda^n F(\lambda) \varphi'(t, \lambda) d\rho(\lambda) \\ &= (-1)^n \int_0^{\infty} \lambda^n F(\lambda) \varphi'(a, \lambda) d\rho(\lambda) \\ &= -(-1)^n \cos \alpha \int_0^{\infty} \lambda^n F(\lambda) d\rho(\lambda) \end{aligned}$$

elde etmiş oluruz. Dolayısıyla,

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \left[\cos \alpha (L^n f)(t) + \sin \alpha \frac{d}{dt} (L^n f)(t) \right] = 0$$

olur.

3. $q(t)$ fonksiyonu sınırlıdır, $qL^n f \in L_2(a, \infty)$ ve dolayısıyla

$$\frac{d^2}{dt^2} (L^n f)(t) = q(t) (L^n f)(t) + (L^{n+1} f)(t),$$

$L_2(a, \infty)$ uzayına aittir.

Şimdi,

$$\begin{aligned} 2 \int_a^t (L^n f)(t) \frac{d}{dt} (L^n f)(t) dt &= \int_a^t \frac{d}{dt} (L^n f)^2(t) dt \\ &= (L^n f)^2(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} (L^n f)^2(t) \\ &= (L^n f)^2(t) - \left[(-1)^n \sin \alpha \int_0^{\infty} \lambda^n F(\lambda) d\rho(\lambda) \right]^2 \end{aligned}$$

eşitliğini ele alalım. Eşitliğin en solunda $t \rightarrow \infty$ iken limitin var olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (L^n f)^2(t) \text{ mevcuttur. Fakat } (L^n f)(t) \in L_2(a, \infty) \text{ dir. O zaman limit sıfır olmalıdır.}$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (L^n f)(t) = 0$$

dır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
2 \int_a^t \frac{d}{dt} (L^n f)(t) \frac{d^2}{dt^2} (L^n f)(t) dt &= \int_a^t \frac{d}{dt} \left[\frac{d(L^n f)(t)}{dt} \right]^2 dt \\
&= \left[\frac{d}{dt} (L^n f)(t) \right]^2 - \lim_{t \rightarrow a^+} \left[\frac{d}{dt} (L^n f)(t) \right]^2 \\
&= \left[\frac{d}{dt} (L^n f)(t) \right]^2 - \left[(-1)^n \cos \alpha \int_0^\infty \lambda^n F(\lambda) d\rho(\lambda) \right]^2
\end{aligned}$$

ve $\left[\frac{d}{dt} (L^n f)(t) \right]^2 \in L_1(a, \infty)$ olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} (L^n f)(t) = 0$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç olarak, singülerliğe sahip Whittaker denkleminin $[a, \infty)$, $(a > 0)$ yarı doğrusu üzerinde temel çözümlerinden türetilen Whittaker integral dönüşümü elde edilmiş ve bu dönüşümün Paley-Wiener[22] tipi teoremi sağladığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Levitan, B.M.**, 1964, Generalized Translation Operators and Some of Its Applications, Jerusalem.
- [2] **Bailey, W. N.**, 1964, Generalized Hypergeometric Series, Cambridge University Press, New York, London,
- [3] **Wang Z.X., Guo, D.R.**, 1989, Special Functions, World Scientific.
- [4] **Levitan, B.M., Sargsyan, I.S.**, 1970, Introduction to Spectral Theory, Nauka, Moskow.
- [5] **Machie, A.G.**, 1965, Boundary Value Problems. New York, Academic Press.
- [6] **Powers, D.L.**, 1979, Boundary Value Problems. New York, Academic Press.
- [7] **Kreyszig, E.**, 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, New York.
- [8] **Kostyuchenko, A.G. and Sargsyan, I.S.**, 1979, Distribution of Eigenvalues, Nauka, Moskow
- [9] **Liusternik, L.A. and Sobolev, V.J.**, 1961, Elements of Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York.
- [10] **Markushevich, A.I.** 1977, Introduction to Analytic Functions Theory, Moskow.
- [11] **Soykan Y.**, 2008, Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın No:1328
- [12] **Dönmez .A.**, 2007, Soyut Matematik, Üniversiteli.
- [13] **Dernek A.**, 2009, Analiz I, Nobel Yayın No:639
- [14] **Şamilov A.**, 2007 Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue İntegrali, Anadolu Üniversitesi Yayınları, no.1734, Fen Fakültesi Yayınları No.30, Eskişehir Anadolu Üniveristesi.
- [15] **Şuhubi E. S.**, 2001, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları No.38, İTÜ.
- [16] **Podlubny, I.**, 1999, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, NewYork, London, Tokyo and Toronto.
- [17] **Slater, L.J.**, 1966, Generalized Hipergeometric Functions, Cambridge.
- [18] **Whittaker, E.T., Watson, G.N.**, 1927, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] **Titchmarsh, E.C.**, 1962, Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, Part 1, Clarendon Press, Oxford.
- [20] **Al-Musallam, F.**, 2001, A Whittaker Transform Over a Half-Line, Integral Transforms and Special Functions, 12 (3), 201-212.

- [21] **Al-Musallam, F., Tuan, V.K.**, 2003, A Finite and an Infinite Whittaker Integral Transform, Computers and Mathematics with Applications, 46 (12), 1847–1859.
- [22] **Tuan V. K., Zayed, A.I.**, 2002, Payley-Wiener-type theorems for a class of integral transforms, J. Math. Anal. Appl. 266 (1), 200-226.



ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ’ da doğdu.1996 yılında Tevfik Yaramanoğlu İlköğretim okulunda öğrenimine başladı. 2004 yılında Balıkesir Lisesi’nde orta öğretime başlayıp 2007 yılında mezun oldu. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü lisans programına girmeye hak kazandı ve 2012 yılında mezun oldu. Aynı sene Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2014 yılının bahar döneminde Erasmus değişim programıyla Stockholm Üniversitesi’nde bir dönem bulundu.

