

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-BOYUTLU MİNKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ÇİÇEK
(121121109)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Geometri

Danışman : Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

HAZİRAN-2014

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ÇİÇEK

(121121109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28 Mayıs 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Haziran 2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)

Doç.Dr. Ahmet YILDIZ (İ.Ü)



HAZİRAN - 2014

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışmada, de Sitter 3-uzayında yeni özel yüzeyler, Minkowski S_1^3 uzayında space-like eğrilerin temel geometrisi ve space-like eğriler ile özel space-like regle yüzeyler incelenmiştir. Çalışmada S_1^3 küresinin eğrilerinin genel helis ve dairesel helis olma şartlarına ilişkin teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yol gösteren ve yardımcı olan sayın hocam; Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ' a ve diğer saygı değer hocalarıma teşekkür eder, saygılar sunarım.

Esra ÇİÇEK
ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY	V
1. GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM.....	3
2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Teoremler	3
2.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Tanım ve Teoremler	6
3.BÖLÜM.....	11
3.1. De Sitter 3-Uzayında Yeni Özel Yüzeyler.....	11
3.2. Minkowski S_1^3 Uzayında Space-like Eğrilerin Temel Geometrisi	12
3.3.Space-like Eğriler ile Özel Space-like Regle Yüzeyler	16
4.BÖLÜM.....	20
4.1. Genel Helisler.....	20
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	33

ÖZET

4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm tezin giriş kısmıdır.

İkinci bölümde: bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, de Sitter 3-uzayında yeni özel yüzeyler, Minkowski S_1^3 uzayında space-like eğrilerin temel geometrisi ve space-like eğriler ile özel space-like regle yüzeyler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise, Lorentz uzayında genel helislerin karakterizasyonları ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Minkowski Uzayı, Helis ve Frenet Vektörleri

SUMMARY

CURVES IN THE 4-DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACETIME

This study is consisted of four chapter:

The First chapter is the introduction of thesis.

In chapter 2, some basic definition and theorems are given.

In chapter 3, new special surfaces in de Sitter 3-space, basic geometry of space-like curves in Minkowski S_1^3 and space like curves and special space-like ruled surfaces are researched.

In chapter 4, characterizations of general helices in Lorentz space are expressed and proved.

Key Words : Minkowski Spacetime, Helices and Frenet Vectors

1. GİRİŞ

Birçok bilim dalı ile olan ilgisi nedeniyle diferansiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biri eğriler teorisidir. Örneğin; ekonomide sayısal verilerin eğriler sayesinde yorumlandığı, kalp grafisinde eğrinin davranışı bizim için önemli ipuçlarını vermektedir. Diğer taraftan eğrilerin diferansiyel geometrik özelliklerini ve onların çeşitli matematiksel yapılarla olan ilişkilerini incelemek son derece önemlidir.

Eğriler teorisi kadar önemli bir çalışma alanı ise yüzeyler teorisidir. Hatta genellikle eğriler teorisi yüzeyler teorisile birlikte anılmaktadır.

Eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisinin çalışma yöntemi iki farklı metoda dayanır. Klasik diferansiyel geometri olarak adlandırılan birinci yöntemi diferansiyel ve integral hesabın başlangıcıyla birlikte ortaya çıkmıştır. Daha açık bir dille ifade etmek gerekirse klasik diferansiyel geometri eğriler ve yüzeylerin yerel özelliklerini araştırır.

İkinci yöntem ise global diferansiyel geometri olup yerel özelliklerin eğrinin veya yüzeyin tümünün davranışı üzerindeki etkilerinin araştırıldığı metottur.

Her iki metot da diferansiyel geometrinin en ilginç ve onu en iyi temsil eden parçaları eğriler ve yüzeylerle ilgili çalışmalar olduğunu ortaya koymaktadır.

Diferansiyel geometrinin diğer bilim dallarıyla bağlantısını kuran ve uygulama alanını oluşturan sahası Minkowski (Lorentz) uzayıdır. Minkowski (Lorentz) uzayında iç çarpımın farklı olması geometrik yapıların değişmesine ve beklenmedik sonuçlar ortaya çıkmasına olanak sağlamaktadır.

Gerek Öklid uzayında gerekse Minkowski (Lorentz) uzayında eğrilerin en ilginç olanlarından bir tanesi helislerdir. Helislerle günlük hayatımızdan sarmaşık, minaredeki merdiven olarak örnek vermemiz mümkündür.

1985 yılında T. Ikawa Lorentzian M manifoldu üzerinde bir time-like α eğrisinin sabit k_1 ve k_2 eğriliklerine karşılık gelen dairesel helis için,

$$\nabla_X \nabla_X \nabla_X X - K \nabla_X X = 0, \quad K = k_1^2 - k_2^2$$

şeklinde diferansiyel denklemi elde etmiştir.

N. Ekmekçi ve H.H. Hacısalihoğlu, 1996 yılında T. Ikawa'nın bu sonucunu k_1 ve k_2 değişkenler, fakat $\frac{k_1}{k_2}$ sabit alarak genelleştirmiş ve çok önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

H. Balgetir, M. Bektaş ve M. Ergüt, 2001 yılında 3-boyutlu Lorentzian M manifoldunda Cartan çatısına göre bir null eğri karakterizasyonu elde etmişlerdir.

Daha sonra benzer çalışmalar 2004 yılında M. Bektaş tarafından Pseudo-Galelian uzayında regle yüzeyler için yapılmıştır.

Benzer yapılar kurularak Heisenberg gruplar için M. Bektaş ve E. Turhan ve V. Asil, tarafından 2004 yılında yapılmıştır.

Bu çalışmada “ Characterizations of Space-like General helices in Lorentzian manifolds ” ve “ On the helices of Lorentzian manifolds ” makalelerindeki ispat yöntemleri kullanılarak Minkowski 4- uzayındaki S_1^3 küresinin eğrileri için önemli karakterizasyonlar ifade ve ispat edilmiştir.

2. BÖLÜM

2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1 :

A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı da V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa buradaki A ya V vektör uzayı üzerinde bir afin uzay adı verilir.

$$(A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$$

$$(A2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \vec{\alpha} \in V \text{ için } f(P,Q) = \vec{\alpha} \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır}$$

(Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.2 :

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak ,

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.3 :

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E^n$ şeklinde diferensiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne E^n de bir eğri adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.4 :

E^n n-boyutlu Öklid uzayında ,

$$S_r^{n-1} = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2, \quad |\vec{\Delta f}| \neq 0, \quad r \in \mathbb{R} \quad r=\text{sabit} \}$$

nokta cümlesine bir (n-1) - boyutlu bir hiperküre veya kısaca (n-1) – küre denir. (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.5 :

M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir manifold denir(Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.6 :

M sayılabilir baza sahip bir Hausdorff uzay olsun. Eğer M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir(Murat İşcan, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, 2008).

Tanım 2.1.7 :

M bir diferensiyellenebilir manifold ve bir noktası $p \in M$ olsun. Bir

$$X_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin P noktasındaki tanjant vektörü ise, X_p ye M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.8 :

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \xrightarrow{\text{birebir ve örten}} \bigcup_{p \in M} T_M(p)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.9 :

M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere ,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde simetrik, bilineer, pozitif tanımlı dönüşüme M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği ya da diferensiyellenebilir metrik denir. Bu metrik ile M ikilisine, yani $(M, \langle , \rangle)$ e Riemann manifoldu denir, kısaca M ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.10 :

$\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğri olmak üzere α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı $T(s)$, asli normal vektör alanı $N(s)$ ve binormal vektör alanı $B(s)$ olsun. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğri için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir ve

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde matris gösterimine sahiptir(Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.11 :

$\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisinin tanjant doğruları sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α ya bir silindirik helis (genel helis) denir.

$\alpha(s)$ nin bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{k}$ nin sabit olmasıdır (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Tanım 2.1.12 :

Eğer Tanım 2.1.9 da τ ve k sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Tanım 2.1.13 :

$M, N \subset E^n$ eğrileri sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin sırasıyla ,

$$\{T(s), N(s), B(s)\} \text{ ve } \{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$$

Frenet 3- ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{N(s), N^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine Bertrand çifti denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.14 :

$M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasında E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir (Turgut, 1995).

2.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Tanım ve Teoremler**Tanım 2.2.1 :**

R^3 üzerinde $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle, \rangle_L : R^3 \times R^3 \rightarrow R$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer , nondejenerete metrik tensörüne R^3 üzerinde Lorentz metriği denir (O'Neill, B, 1983).

Bu çalışma boyunca $\langle, \rangle_L$ yerine $\langle, \rangle$ kullanılacaktır.

Tanım 2.2.2 :

R^3 üzerinde Lorentz metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen

$\{R^3, \langle, \rangle\}$ ikilisine 3- boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca Lorentz uzayı denir ve L^3 ile gösterilir (O'Neill, B, 1983).

Tanım 2.2.3 :

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in L^3$ olsun. Eğer,
 $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0$ ise $\vec{X}$ e time-like vektör,
 $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle > 0$ ise $\vec{X}$ e space-like vektör,
 $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0$ ise $\vec{X}$ e null vektör,
adı verilir(O'Neill,B,1983).

Tanım 2.2.4 :

$X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$ olmak üzere

$$* : L^3 \times L^3 \rightarrow L^3$$

$$(X, Y) \rightarrow X * Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3 - (x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

şeklinde tanımlı $*$ operatörüne L^3 de Lorentz anlamında vektörel çarpım denir. Bu tanımı R^3 deki vektörel çarpım ifadesine benzer olarak,

$$\vec{X} * \vec{Y} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buna göre

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in L^3$ olmak üzere,

- i. $\langle \vec{X} * \vec{Y}, \vec{Z} \rangle = \det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$
- ii. $(\vec{X} * \vec{Y}) * \vec{Z} = \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle \vec{X} - \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle \vec{Y}$
- iii. $\langle \vec{X}, \vec{X} * \vec{Y} \rangle = 0$
- iv. $\langle \vec{Y}, \vec{X} * \vec{Y} \rangle = 0$

dir. Gerçekten,

$$\text{i)} \quad \vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in L^3$$

$$\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$$

$$\vec{Z} = (z_1, z_2, z_3) \in L^3$$

olmak üzere,

$$X * Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3 - (x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

ve

$$\langle \vec{X} * \vec{Y}, \vec{Z} \rangle = z_1 x_2 y_3 - z_1 x_3 y_2 + z_2 x_3 y_1 - z_2 x_1 y_3 + x_1 y_2 z_3 - x_2 y_1 z_3$$

ve

$$\det (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = z_1 x_2 y_3 - z_1 x_3 y_2 + z_2 x_3 y_1 - z_2 x_1 y_3 + x_1 y_2 z_3 - x_2 y_1 z_3$$

olduğundan ,

$$\langle \vec{X} * \vec{Y}, \vec{Z} \rangle = \det (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

elde edilir.

ii) Direkt hesaplama ile

$$\begin{aligned} (\vec{X} * \vec{Y}) * \vec{Z} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & -(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= (z_3 x_3 y_1 - z_3 x_1 y_3 + z_2 x_1 y_2 - z_2 x_2 y_1) \vec{e}_1 \\ &\quad + (z_3 x_3 y_2 - z_3 x_2 y_3 + z_1 x_2 y_1 - z_1 x_1 y_2) \vec{e}_2 \\ &\quad + (z_2 x_3 y_2 - z_2 x_2 y_3 + z_1 x_3 y_1 - z_1 x_1 y_3) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

1.terime $z_1 x_1 y_1$, 2. terime $z_2 x_2 y_2$ ve 3.terime $z_3 x_3 y_3$ ifadeleri bir eklenip bir çıkarılacak olursa,

$$\begin{aligned} (\vec{X} * \vec{Y}) * \vec{Z} &= \{z_3 x_3 y_1 - z_3 x_1 y_3 + z_2 x_1 y_2 - z_2 x_2 y_1 + z_1 x_1 y_1 - z_1 x_1 y_1\} \vec{e}_1 \\ &\quad + \{z_3 x_3 y_2 - z_3 x_2 y_3 + z_1 x_2 y_1 - z_1 x_1 y_2 + z_2 x_2 y_2 - z_2 x_2 y_2\} \vec{e}_2 \\ &\quad + \{z_2 x_3 y_2 - z_2 x_2 y_3 + z_1 x_3 y_1 - z_1 x_1 y_3 + z_3 x_3 y_3 - z_3 x_3 y_3\} \vec{e}_3 \\ &= (-x_1 z_1 - x_2 z_2 + x_3 z_3) (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3) \\ &\quad + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \\ &= -\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3) \\ &\quad + \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan,

$$(\vec{X} * \vec{Y}) * \vec{Z} = -\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle \vec{Y} + \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle \vec{X}$$

elde edilir.

iii) i) den dolayı

$$\langle \vec{X}, \vec{X} * \vec{Y} \rangle = \det (\vec{X}, \vec{X}, \vec{Y})$$

$$= 0$$

dir.

iv) i) den dolayı

$$\langle \vec{Y}, \vec{X} * \vec{Y} \rangle = \det (\vec{Y}, \vec{X}, \vec{Y}) \\ = 0$$

dir(Balgetir H, Bektaş M, Ergüt M ,2001).

Tanım 2.2.5 :

L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M ye L^3 de bir space-like yüzey denir(Beem and Ehrlich,1981).

Tanım 2.2.6 :

L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M ye L^3 de bir time-like yüzey denir(Beem and Ehrlich,1981).

Tanım 2.2.7 :

$\alpha \subset L^3$ Lorentz uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere,

- i) $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise $\alpha(s)$ time-like eğri,
- ii) $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ ise $\alpha(s)$ space-like eğri,
- iii) $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise $\alpha(s)$ null eğri ,

olarak adlandırılır (O'Neill,B,1983).

Tanım 2.2.8 :

L^3 , 3- boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayında verilen bir l doğrusunun verilen bir $\eta(I)$ eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle bir yüzey elde edilebiliyorsa bu yüzeye 3-boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzey denir. $\eta(I)$ eğrisine dayanak eğrisi, l doğrusuna regle yüzeyin ana doğrusu denir(Turgut,1995).

Tanım 2.2.9 :

V bir n -boyutlu vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear form

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

olsun. $\forall v \in V$ için $\langle \xi, v \rangle = 0$ olacak şekilde bir $\xi \neq 0 \in V$ vektörü mevcut ise g ye V üzerinde dejenere simetrik bilinear form denir. Aksi takdirde g ye nondejenere denir.

Buradan g nin nondejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ ise } u = 0$$

olmasıdır. Bir V reel vektör uzay üzerindeki simetrik bilinear form V uzayının alt uzayı üzerine dejenere veya nondejenere bir bilinear form indirger (Duggal ve Bejancu, 1996).

3.BÖLÜM

Bu bölümde kullanılan kavramlar “ New Special Surfaces in de Sitter 3-Space ” adlı ve “ H.S. Abdel Aziz ” yazarlı makaleden alınmıştır.

3.1. De Sitter 3-Uzayında Yeni Özel Yüzeyler

4- boyutlu Minkowski space–time uzayını R_1^4 ile gösterelim. R^4 Öklid uzayında standart flat metrik,

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$$

ile verilir. (x_1, x_2, x_3, x_4) , R_1^4 ün bir dikdörtgensel koordinat sistemidir. Herhangi

$a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ için R^4 deki Lorentz metrik,

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4$$

olarak tanımlanır.

R_1^4 standart bazına göre $\langle \rangle$ in matris formundaki gösterimi

$$\mu = \text{diag} (1, 1, 1, -1)$$

dir. R_1^4 de sıfırdan farklı x vektörleri $\langle x, x \rangle > 0$ ya da $x=0$, $\langle x, x \rangle < 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0$ olmalarına göre sırasıyla space-like, time-like ve null olarak sınıflandırılırlar. Genel olarak $\vec{0}$ vektörü space-like vektör olarak alınır. Bir x vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$$

ile verilir. Bu yüzden eğer $\langle x, x \rangle = \mp 1$ ise x birim vektördür. Bir time-like x vektörü için $\langle x, x \rangle < 0$ olduğundan normun tanımı sadece space-like vektörler için geçerlidir.

Tanım 3.1.1:

$x \in R_1^4$ ve $\langle, \rangle$ Lorentz iç çarpımı olmak üzere,

$$S_1^3 = \{x \in R_1^4 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

şeklinde tanımlı uzaya de Sitter 3-uzayı denir.

Fizikte bir time-like x vektörü için norm $\|x\| = \sqrt{-\langle x, x \rangle}$ olarak da tanımlanabilir. Bu aslında fiziksel bir anlam taşır. Yani eğer $x(t)$, S_1^3 de bir time-like eğri ise

$$\|x'(t)\| = \sqrt{-\langle x'(t), x'(t) \rangle}$$

bir hareketli parçacık tarafından geçilen zamandır. Bu izafiyette proper- time olarak adlandırılır. Burada $\langle a, b \rangle = 0$ ise a ve b vektörlerine ortogonaldır denir. Herhangi $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in R^4$ vektörleri için Lorentz vektörel çarpımı,

$$a \times b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k & -l \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır. $\times$, S_1^3 ün vektörel çarpımı ve (i, j, k, l) , R_1^4 ün kanonik formudur. Bu durumda

$$(\langle e, \langle a \times b \times c \rangle \rangle) = \det(e, a, b, c) \quad e \in R_1^4$$

elde edilir.

Tanım 3.1.2 :

Eğer bir yüzey üzerindeki indirgenmiş metrik bir Lorentz metrik ise S_1^3 de bir yüzey bir time-like yüzey olarak adlandırılır. Bu durumda yüzeyin normali bir space-like vektördür.

Tanım 3.1.3 :

Eğer bir yüzey üzerindeki indirgenmiş metrik bir Riemann metrik ise S_1^3 de bir yüzey bir space-like yüzey olarak adlandırılır. Bu herhangi $p \in M$ için M nin tanjant düzlemi $T_p M$ bir space-like düzlem(space-like vektör içeren) olma şartına eşittir. Bu durumda $N_p M$ normal uzay bir time-like düzlemdir.

3.2. Minkowski S_1^3 Uzayında Space-like Eğrilerin Temel Geometrisi

Lorentz uzayın bir pozitif eğrilikle, daha kesin bir ifadeyle bir pozitif parçalı eğrilikle de sitter uzayı olarak adlandırıldığı iyi bilinir. De sitter 3-uzayı

$$S_1^3 = \{x \in R_1^4 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde space-like yüzeyler üzerindeki eğriler olarak space-like ve Bertrand eğrileri çalışılacaktır. Bundan dolayı ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve teoremleri verelim.

$$\eta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^3$$

$$t \rightarrow \eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t))$$

dönüşümü S_1^3 uzayında düzgün regüler bir eğri olsun ($\eta'(t) \neq 0$ her $t \in I$ için).

Eğer η eğrisinin her noktasında tanjant vektörler sırasıyla ,

$\langle \eta', \eta' \rangle > 0$, $\langle \eta', \eta' \rangle < 0$ ya da $\langle \eta', \eta' \rangle = 0$ şartlarını sağlarsa η eğrisi sırasıyla space-like , time-like ya da null olabilir. $t_0 \in I$ için $\eta(t_0)$ dan ölçülen bir space-like eğrisinin yay uzunluğu

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\eta'(t)\| dt \quad (3.2.1)$$

ve buradan $\|\eta'(s)\| = 1$ olduğu belirlenir. $\eta'(s) = \frac{d\eta}{ds}$ dir. Bundan dolayı eğer eğri $\|\eta'(s)\| = 1$ şartını sağlarsa η space-like eğrisinin yay parametresi ile parametrelendiğini söyleyebiliriz. Üstelik eğer $\langle \eta'(s), \eta'(s) \rangle = \mp 1$ ise η bir birim hızlı eğridir.

Her bir birim hızlı space-like $\eta : I \rightarrow S_1^3$ eğrisinin $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bir pseudo ortonormal çatısıyla ilgili olduğu iyi bilinir. Space-like teğet vektör, space-like asli normal vektör ve time-like binormal vektör sırasıyla $T = T(s)$, $N = N(s)$, $B = B(s)$ ile gösterilir. Bu durumda T, N, B Frenet vektörleri tarafından sağlanan Serret-Frenet denklemleri,

$$\left. \begin{aligned} \eta'(s) &= T(s) \\ T'(s) &= -\eta(s) + k(s)N(s) \\ N'(s) &= k(s)\delta(\eta(s))T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= \tau(s)N(s) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

ile verilir. $\delta(\eta(s)) = -\text{sign}(N(s))$ ve $k(s)$ ve $\tau(s)$ η eğrisinin, sırasıyla, s noktasındaki eğrilik ve torsiyonudur. Ayrıca

$$k(s) = \|T'(s) + \eta(s)\|, \quad (3.2.3)$$

ve

$$\tau(s) = \frac{\delta(\eta(s))}{k^2(s)} \det(\eta(s), \eta'(s), \eta''(s), \eta'''(s)) \quad (3.2.4)$$

dir. $k(s) \neq 0$ şeklindedir. T, N, B vektörleri $\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = 1$, $\langle B, B \rangle = -1$ denklemlerini sağlar. $B(s)$, $\{T, N\}$ ye dik olan tek time-like birim vektör olduğundan,

$$B = \frac{\eta(s) \times T \times N}{\|\eta \times T \times N\|}$$

dir.

$$\|\eta \times T \times N\| = -\langle \eta(s) \times T(s) \times N(s), \eta(s) \times T(s) \times N(s) \rangle$$

ve $T(s) = \eta'$ teğettir. Ayrıca

$$\langle T'(s), T'(s) \rangle > 1$$

olması durumunda,

$$N(s) = \frac{T'(s) + \eta(s)}{\|T'(s) + \eta(s)\|}$$

birim vektörü vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \eta(s) \wedge \eta'(s) \wedge \eta''(s) &= \eta(s) \wedge T(s) \wedge (-\eta(s) + k(s)N(s)) \\ &= k(s) \eta(s) \wedge T(s) \wedge N(s) \\ &= k(s) B(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.2 :

η_1 ve η_2 $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $s \in I$ ile verilen iki regüler eğri olsun. (T_1, N_1, B_1) ve (T_2, N_2, B_2) sırasıyla $\eta_1(s)$ ve $\eta_2(s)$ noktasındaki $T_{\eta_1(s)}S_1^3$ ve $T_{\eta_2(s)}S_1^3$ tanjant uzaylarının çatıları olsunlar. Eğer $s \in I$ noktasında η_1 ve η_2 nin asli normal doğruları eşit ise η_1 bir Bertrand eğrisi olarak adlandırılır. Bu durumda diğer η_2 eğrisi η_1 in Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır ve

$$\eta_2(s) = \frac{1}{\alpha} \eta_1(s) + \lambda N_1(s) \quad , \quad \forall s \in I \quad , \quad \alpha \text{ sabit, } \alpha \neq 0,1 \quad (3.2.5)$$

dir.

Teorem 3.2.1 :

Eğer $(\eta_1, \eta_2) \subset S_1^3$ de bir Bertrand eğri çifti ise λ sabittir ve (3.2.5) denklemi ile tanımlanır.

Teorem 3.2.2 :

η_1 ve $\eta_2 \subset S_1^3$ ün iki regüler eğrisi olsun. (η_1, η_2) bir Bertrand eğri çiftidir ancak

$$pk_1(s) + q\tau_1(s) = 1 \quad (3.2.6)$$

şeklinde bir lineer bağımlılık mevcuttur. Burada p ve q sıfırdan farklı sabitler, $k_1(s)$ ve $\tau_1(s)$ sırasıyla eğrilik ve torsiyondur.

Teorem 3.2.3 :

S_1^3 de bir (η_1, η_2) Bertrand eğri çifti olsun. Bertrand eğrisinin karşılıklı noktalarında τ_1 ve τ_2 torsiyonlarının çarpımı sabittir. Burada τ_1 ve τ_2 sırasıyla η_1 ve η_2 eğrilerinin torsiyonlarıdır.

Sonuç 3.2.1 :

$\eta_1 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^3$, $k_1(s) \neq 0$, $\tau_1(s) \neq 0$ olacak şekilde bir space-like eğri olsun. η_1 bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak $p \neq 0$ olacak şekilde bir gerçel sayı mevcuttur öyle ki

$$p(\tau_1'(s)k_1(s) - k_1'(s)\tau_1(s)) - \tau_1'(s) = 0$$

dir.

η_1 in Bertrand çifti

$$\eta_2(s) = \frac{1}{\alpha} \eta_1(s) + p N_1(s), \quad \alpha \neq 0, 1$$

ile verilir.

İspat :

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 ü kullanarak bir η_1 space-like eğrisi bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak $p \neq 0$ olacak şekilde bir gerçel sayı mevcuttur öyle ki

$$pk_1(s) + q\tau_1(s) = 1$$

dir. Başka bir deyişle $p \neq 0$ olacak şekilde bir gerçel sayı mevcuttur öyle ki

$$\frac{(1-pk_1(s))}{\tau_1(s)} \text{ sabittir.}$$

Bu son eşitliğin her iki tarafı diferensiyellenerek,

$$p(\tau_1'(s)k_1(s) - k_1'(s)\tau_1(s)) = \tau_1'(s) \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Bu iddianın tersi de doğrudur.

3.3.Space-like Eğriler ile Özel Space-like Regle Yüzeyler

Space-like yüzeylerin çalışması izafiyet teorisinde ve diferensiyel geometri dışındaki ilginç konulardan birini temsil eder. Bu bölümde space-like eğrilerle ilgili yeni özel space-like yüzeylerin bazı geometrik özelliklerini vereceğiz. Bu yüzeylerin tekilliği tartışılır.

$$\eta : I \rightarrow S_1^3$$

S_1^3 de s yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir birim hızlı diferensiyellenebilir bir space-like eğri olsun. Bu durumda bir doğrultman eğri η eğrisi boyunca hareket edince 2-boyutlu space-like regle yüzey olarak ,

$$M(s,v) : I \times \mathbb{R} \rightarrow S_1^3$$

alabiliriz. Bu

$$M : \Phi_{(\eta,L)}(s,v) = \eta(s) + v L(s) \quad \text{tüm } (s,v) \in I \times \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}$$

şeklinde parametrelendirilmiştir.

Bu durumda $\eta(s)$ space-like eğrisine esas eğri , L ye de doğrultman eğri denir.

Tanım 3.3.1 :

$$\Phi_{(\eta,N)}(s,v) = \eta(s) + vN(s) \quad (3.3.1)$$

ile tanımlanan bir space-like $\Phi_{(\eta,N)}(s,v)$ yüzeyi bir η eğrisinin asli normal yüzeyi olarak adlandırılır.

Φ nin s ve v ye göre türevini alarak,

$$\Phi_s = \eta' + vN' \quad , \quad \Phi_v = N(s)$$

elde edilir.

Not edelim ki ,

$$\text{rank}[\Phi_s, \Phi_v] = \text{rank}[\eta'(s) + vN'(s)]$$

dir. Buradan

$$\Phi_s = (1 + vk(s)\delta(\eta(s))) T(s) + v \tau(s)B(s) \quad (3.3.2)$$

ve

$$\Phi_v = N(s) \quad (3.3.3)$$

dir.

(3.3.2) ve (3.3.3) vektörleri lineer bağımlıdır ancak ve ancak

$$(1 + vk(s)\delta(\eta(s))) = 0 \quad (3.3.4)$$

dir. (3.3.4) ten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (1 + vk(s)\delta(\eta(s))) T(s) \wedge N(s) + v \tau(s) B(s) \wedge N(s) \quad (3.3.5)$$

bulunur. Bu denklemi (3.3.2) denklemi ile karşılaştırılarak görülebilir ki

i) Eğer Φ silindirik ise ,

$$k_{(s_0)}\delta(\eta(s_0)) = \tau(s_0) = 0$$

ve eğer silindirik değil ise ,

$$k_{(s_0)}\delta(\eta(s_0)) = \tau(s_0) \neq 0$$

dir. (3.3.1) yüzeyinin tekil noktası , Serret-Frenet formülleri kullanılarak,

$$(1 + vk(s_0)\delta(\eta(s_0))) T(s_0) \wedge N(s_0) + v \tau(s_0) B(s_0) \wedge N(s_0) = 0 \quad (3.3.6)$$

dir.

ii) (s_0, v_0) bir tekil noktadır ancak ve ancak $\tau(s_0) = 0$ dır. Dolayısıyla $\Phi_{(\eta, N)}$ asli normal yüzey $\tau(s_0) \neq 0$ iken tekil değildir.

iii) Φ nin tekilliği ,

$$\{(s, v) : v = -\frac{1}{k(s)\delta(\eta(s))}, s \in I\}, \quad k(s) \neq 0 \quad (3.3.7)$$

ile verilir. Şimdi herhangi birim hızlı space-like ,

$$\eta : I \rightarrow S_1^3$$

eğrisi için $k(s) \neq 0$ şartı altında bir $\eta(s)$ space-like eğrisi boyunca E ve $\bar{E}$ gibi iki vektör alanı tanımlanabilir. Yani,

$$E = -\tau(s)T(s) + k(s)\delta(\eta(s))B(s) \quad (3.3.8)$$

ve

$$\bar{E} = -\left(\frac{\tau(s)}{k(s)\delta(\eta(s))}\right)T(s) + B(s) \quad (3.3.9)$$

olur.

Burada E ve $\bar{E}$ vektörlerine sırasıyla $\eta(s)$ in Darboux ve değiştirilmiş Darboux vektör alanları denilebilir.

Tanım 3.3.2 :

$$\Psi : (s, v) = \eta(s) + vE(s)$$

ile tanımlanan bir $\Psi_{(\eta, E)}(s, v)$ space-like yüzeyi, $\eta(s)$ space-like eğrisinin geliştirilebilir rektifiye yüzeyi olarak adlandırılır.

(3.3.9)denkleminde,

$$\bar{E}'(s) = \frac{\eta}{\delta(\eta(s))} \frac{\tau}{k} - \frac{1}{\delta(\eta(s))} \left(\frac{\tau}{k} \right)' T$$

elde edilir. Bundan dolayı $(s_0, v_0) \in \Psi_{(\eta, \bar{E})}$ nin bir tekil noktasıdır ancak ve ancak

$$\frac{1}{\delta(\eta(s_0))} \left(\frac{\tau}{k} \right)' (s_0) \neq 0 \quad , \quad \left(\left(\frac{\tau k' - k \tau'}{k^2 \delta(\eta(s_0))} \right) (s_0) \neq 0 \right)$$

$$\text{ve} \quad \delta(\eta(s_0)) \left[\left(\frac{\tau}{k} \right)' (s_0) \right]^{-1}$$

bulunur.

Teorem 3.3.1 :

$k(s) \neq 0$ olmak üzere bir space-like

$$\eta : I \rightarrow S_1^3$$

eğrisi için aşağıdakiler denktir.

i) Bir space-like η eğrisi için geliştirilebilir rektifiye

$$\Psi_{(\eta, \bar{E})} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S_1^3$$

yüzeyi tekil olmayan bir yüzeydir.

ii) Bir space-like η eğrisi bir silindirik helistir.

iii) Bir space-like η eğrisinin geliştirilebilir rektifiye $\Psi_{(\eta, \bar{E})}$ yüzeyi bir silindirik yüzeydir.

İspat :

Önceki hesaplamaları kullanarak $I \times \mathbb{R}$ de her noktada $\Psi_{(\eta, \bar{E})}$ nin singüler olmaması için gerek ve yeter şartın

$$\frac{1}{\delta(\eta(s_0))} \left(\frac{\tau}{k} \right)' (s_0) = 0$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu bir space-like η eğrisinin bir silindirik helis olması anlamına gelir. Diğer taraftan,

$$E'(s) = \frac{\eta}{\delta(\eta(s))} \frac{\tau}{k} - \frac{1}{\delta(\eta(s))} \left(\frac{\tau}{k} \right)' (s) T(s)$$

dir. $\Psi_{(\eta, \bar{E})}(s, v)$ geliştirilebilir rektifiye yüzeyi silindiriktir ancak ve ancak $E'(s) = 0$ dir. Bu yüzden (ii) şartı (iii) şartına eşittir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.2 :

Kabul edelim ki

$$\eta : I \rightarrow S_1^3$$

Bertrand eğrisi olan bir space-like eğri olsun. $\Phi_{(\eta, N)}$ asli normal yüzeyi bir tekil noktaya sahiptir ancak ancak η bir düzlemsel eğridir. Bu durumda $\Phi_{(\eta, N)}$ nin görüntüsü S_1^3 de bir düzlemdir.

İspat :

Eğer $\tau(s_0) = 0$ olacak şekilde bir $s_0 \in I$ noktası mevcutsa η bir düzlemsel eğridir. Diğer taraftan $\Phi_{(\eta, N)}$ nin tekil noktası $\tau(s_0) = 0$ olacak şekilde $s_0 \in I$ noktası ile ilişkilidir. Bu da teoremin son iddiasının ispatını tamamlar.

4.BÖLÜM

4.1. Genel Helisler

Teorem 4.1.1 :

$\eta : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı space-like eğri ve $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bu eğrinin pseudo ortonormal çatısı olsun. Bu durumda birim hızlı η eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$T''' - \bar{K}T' = 3k'N' + \eta \quad (4.1.1)$$

olmasıdır. Burada

$$\bar{K} = (-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2)$$

dir.

Not : Bu çalışma boyunca $T=T(s)$, $N=N(s)$, $B=B(s)$, $k=k(s)$, $\tau = \tau(s)$ alınacaktır.

İspat :

Kabul edelim ki η bir genel helis olsun. (4.1.1) denkleminin sağlandığını göstereceğiz. (3.2.2) denkleminde,

$$T' = -\eta + kN$$

ve tekrar diferensiyellenerek,

$$\begin{aligned} T'' &= -\eta' + k'N + kN' \\ &= -T + k'N + k(k\delta T + \tau B) \\ &= -T + k'N + k^2\delta T + k\tau B \end{aligned}$$

ve ikinci kez diferensiyellenerek,

$$\begin{aligned} T''' &= -T' + k''N + k'N' + 2kk'\delta T + k^2\delta T' + (k\tau)'B + k\tau B' \\ &= -(-\eta + kN) + k''N + k'(k\delta T + \tau B) + 2kk'\delta T + k^2\delta(-\eta + kN) + \\ &\quad (k\tau)'B + k\tau(\tau N) \\ &= \eta - kN + k''N + kk'\delta T + k'\tau B + 2kk'\delta T - \eta\delta k^2 + k^3\delta N + (k\tau)'B + \\ &\quad k\tau^2N \end{aligned}$$

veya

$$T''' = (3kk'\delta)T + (-k + k'' + k^3\delta + k\tau^2)N + (k'\tau + (k\tau)')B + (1 - \delta k^2)\eta$$

bulunur. η bir genel helis olduğundan,

$$\frac{k}{\tau} = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad k'\tau = k\tau'$$

ve

$$N = \frac{1}{k} T'$$

olduğu kullanılarak,

$$T'''' = (3kk'\delta)T + (-k + k'' + k\tau^2)\frac{1}{k} T' + 3k'\tau B + (1 - \delta k^2)\eta + k^3\delta N$$

ve buradan ,

$$T'''' = (3kk'\delta)T + \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2\right) T' + 3k'\tau B + \eta - \delta\eta k^2 + k^3\delta N$$

veya

$$T'''' = (3kk'\delta)T + \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2\right) T' + 3k'\tau B + \eta + \delta k^2 \underbrace{(-\eta + kN)}_{=T'}$$

olup Serret-Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T'''' &= (3kk'\delta)T + \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2\right) T' + 3k'\tau B + \eta + \delta k^2 T' \\ &= 3kk'\delta T + \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2\right) T' + 3k'\tau B + \eta \\ &= \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2\right) T' + 3k'\tau B + 3kk'\delta T + \eta \\ &= \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2\right) T' + 3k' \underbrace{(\tau B + \delta kT)}_{=N'} + \eta \end{aligned}$$

$$T'''' = \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2\right) T' + 3k' N' + \eta$$

ve böylece

$$T'''' - \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2\right) T' = 3k' N' + \eta$$

elde edilir. Burada

$$\left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2\right) = \bar{K}$$

alınırsa (4.1.1) denklemi elde edilir.

Tersine (4.1.1) denkleminin sağlandığını kabul edelim. η eğrisinin bir genel helis olduğunu göstereceğiz. Serret-Frenet formüllerinden,

$$N = \frac{1}{k} T'$$

olduğundan,

$$N' = \frac{-k'}{k^2} T' + \frac{1}{k} T''$$

ve

$$N'' = \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' T' - \frac{k'}{k^2} T'' - \frac{k'}{k^2} T'' + \frac{1}{k} T'''$$

veya

$$N'' = \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' T' - 2 \frac{k'}{k^2} T'' + \frac{1}{k} T'''$$

bulunur.

$$T''' = \bar{K}T' + 3k'N' + \eta$$

denklemleri bir önceki denklemde yerine yazılarak,

$$N'' = \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' T' - 2 \frac{k'}{k^2} T'' + \frac{1}{k} (\bar{K}T' + 3k'N' + \eta)$$

veya

$$N'' = \left\{ \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' + \frac{\bar{K}}{k} \right\} T' - 2 \frac{k'}{k^2} T'' + \frac{3k'}{k} N' + \frac{\eta}{k}$$

elde edilir.

T'' ve N' değerleri son eşitlikte kullanılırsa,

$$N'' = \left\{ \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' + \frac{\bar{K}}{k} \right\} T' - 2 \frac{k'}{k^2} (-T + k'N + k^2\delta T + k\tau B) + \frac{3k'}{k} \left(\frac{-k'}{k^2} T' + \frac{1}{k} T'' \right) + \frac{\eta}{k}$$

veya

$$N'' = \left\{ \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' + \frac{\bar{K}}{k} \right\} T' + 2 \frac{k'}{k^2} T - 2 \frac{k'^2}{k^2} N - 2k'\delta T - 2 \frac{k'}{k} \tau B - 3 \frac{k'^2}{k^3} T' + 3 \frac{k'}{k^2} T'' + \frac{\eta}{k}$$

veya

$$N'' = \left\{ \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' + \frac{\bar{K}}{k} - 3 \frac{k'^2}{k^3} \right\} T' + \left(2 \frac{k'}{k^2} - 2k'\delta \right) T + \left(-2 \frac{k'^2}{k^2} \right) N - 2 \frac{k'}{k} \tau B + 3 \frac{k'}{k^2} T'' + \frac{\eta}{k} \quad (4.1.2)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$N' = k\delta T + \tau B$$

ise

$$N'' = \delta k'T + \delta k T' + \tau'B + \tau B'$$

$$\begin{aligned}
&= \delta k' T + \delta k T' + \tau' B + \tau(\tau N) \\
N'' &= \delta k' T + \delta k T' + \tau' B + \tau^2 N
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

bulunur.

Böylece (4.1.2) ve (4.1.3) karşılaştırılırsa,

$$\tau' = -2 \frac{k'}{k} \tau$$

ve

$$\frac{\tau'}{\tau} = -2 \frac{k'}{k}$$

dir. Her iki tarafın integrali alınırsa $\frac{k}{\tau} = \text{sabit}$ ve η eğrisi bir genel helis olur.

Teorem 4.1.2 :

$\eta : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı space-like eğri ve $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bu eğrinin pseudo ortonormal çatısı olsun. Bu durumda birim hızlı η eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$T'''' - 3 \frac{k'}{k} T'' - \left\{ -1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2 - 3 \frac{k'^2}{k^2} \right\} T' - \eta = 0 \tag{4.1.4}$$

olmasıdır. Burada $T=T(s)$, $N=N(s)$, $B=B(s)$ $k=k(s)$ ve $\tau(s)$ dir.

İspat :

Kabul edelim ki η bir genel helis olsun. (4.1.4) denkleminin sağlandığını göstereceğiz.

$$\eta' = T$$

$$T' = -\eta + kN$$

$$N' = k\delta T + \tau B$$

$$B' = \tau N$$

formülleri kullanılarak Teorem 4.1.1 de

$$T'''' = \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2 \right) T' + 3k' N' + \eta$$

olduğu gösterilmişti. Oysa

$$N = \frac{1}{k} T'$$

olup,

$$N' = \frac{-k'}{k^2} T' + \frac{1}{k} T''$$

olduğundan,

$$T''' = \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2 \right) T' + 3k' \left(\frac{-k'}{k^2} T' + \frac{1}{k} T'' \right) + \eta$$

veya

$$T''' - \left(-1 + \frac{k''}{k} + \tau^2 + \delta k^2 - 3 \frac{k'^2}{k^2} \right) T' - 3 \frac{k'}{k} T'' - \eta = 0$$

elde edilir.

Tersine (4.1.4) denklemi sağlansın. Bu durumda η space-like eğrisinin genel helis olduğunu göstereceğiz.

$$N' = k\delta T + \tau B$$

ifadesinden,

$$B = \frac{1}{\tau} N' - \frac{k\delta}{\tau} T$$

ve buradan

$$B' = -\frac{\tau'}{\tau^2} N' + \frac{1}{\tau} N'' - \left(\frac{k\delta}{\tau} \right)' T - \frac{k\delta}{\tau} T'$$

ve

$$N = \frac{1}{k} T'$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$B' = -\frac{\tau'}{\tau^2} \left(\frac{-k'}{k^2} T' + \frac{1}{k} T'' \right) + \frac{1}{\tau} \left\{ \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' T' - \frac{k'}{k^2} T'' - \frac{k'}{k^2} T''' + \frac{1}{k} T'''' \right\} \\ - \left(\frac{k\delta}{\tau} \right)' T - \frac{k\delta}{\tau} T'$$

$$B' = \frac{k'\tau'}{k^2\tau^2} T' - \frac{\tau'}{k\tau^2} T'' + \frac{1}{\tau} \left(\frac{-k'}{k^2} \right)' T' - 2 \frac{k'}{k^2\tau} T'' + \frac{1}{k\tau} T''' - \left(\frac{k\delta}{\tau} \right)' T - \frac{k\delta}{\tau} T'$$

$$B' = \frac{k'\tau'}{k^2\tau^2} T' - \frac{\tau'}{k\tau^2} T'' + \frac{1}{\tau} \left(\frac{-k''k^2 + 2kk'k'}{k^4} \right) T' - 2 \frac{k'}{k^2\tau} T'' + \frac{1}{k\tau} T''' \\ - \left(\frac{\delta k'\tau - k\delta\tau'}{\tau^2} \right) T - \frac{k\delta}{\tau} T'$$

$$B' = \frac{k'\tau'}{k^2\tau^2} T' - \frac{\tau'}{k\tau^2} T'' - \frac{k''}{\tau k^2} T' + 2 \frac{k'^2}{\tau k^3} T' - 2 \frac{k'}{k^2\tau} T'' + \frac{1}{k\tau} T''' - \frac{\delta k'}{\tau} T \\ + \frac{k\delta\tau'}{\tau^2} T - \frac{k\delta}{\tau} T'$$

olur. Bu denkleme

$$\frac{k'\tau}{k^2\tau^2} T'', \frac{k'^2}{\tau k^3} T', \frac{\tau}{k} T', \frac{\eta}{k\tau}$$

terimleri eklenip çıkarılırsa,

$$B' = \frac{1}{k\tau} \left(T''' - 3 \frac{k'}{k} T'' - \left\{ \frac{k''}{k} - 3 \frac{k'^2}{k^2} + \delta k^2 + \tau^2 \right\} T' \right) + \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{\tau} \right)' T'' \\ + \left(\frac{\tau}{k} + \frac{k'\tau'}{k^2\tau^2} - \frac{k'^2}{\tau k^3} \right) T' - \delta \left(\frac{k'}{\tau} - \frac{k\tau'}{\tau^2} \right) T + \frac{1}{k\tau} T' - \frac{1}{k\tau} T' + \frac{\eta}{k\tau} - \frac{\eta}{k\tau}$$

veya

$$B' = \frac{1}{k\tau} \left[T''' - 3 \frac{k'}{k} T'' - \left\{ -1 + \frac{k''}{k} - 3 \frac{k'^2}{k^2} + \delta k^2 + \tau^2 \right\} T' - \eta \right] \\ + \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{\tau} \right)' T'' + \left(\frac{\tau}{k} - \frac{k'}{k^3} \left(\frac{k}{\tau} \right)' \right) T' - \delta \left(\frac{k}{\tau} \right)' T - \frac{1}{k\tau} T' + \frac{\eta}{k\tau}$$

elde edilir.

$$B' = \tau N$$

eşitliği ve son eşitlik göz önüne alınırsa,

$$\frac{k}{\tau} = \text{sabit}$$

olur. Yani space-like eğri bir genel helistir.

Sonuç 4.1.1 :

$\eta : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı space-like eğri ve $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bu eğrinin pseudo ortonormal çatısı olsun. Bu durumda birim hızlı η eğrisinin bir dairesel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$T''' - (-1 + \tau^2 + \delta k^2) T' - \eta = 0 \quad (4.1.5)$$

olmasıdır. Burada $T=T(s)$ $k=k(s)$ ve $\tau = \tau(s)$ dir.

İspat :

Teorem 4.1.2 de k ve τ sabit alınırsa eşitliğin sağlandığı kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.3 :

$\eta : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı space-like eğri ve $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bu eğrinin pseudo ortonormal çatısı olsun. Bu durumda birim hızlı η eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$N'' - (\delta k^2 + \tau^2)N - \frac{k'}{k} N' + \eta \delta k = 0 \quad (4.1.6)$$

olmasıdır. Burada $N=N(s)$ dir.

İspat :

$$N' = k\delta T + \tau B$$

ifadesi diferensiyellenirse,

$$\begin{aligned} N'' &= \delta k'T + \delta k T' + \tau'B + \tau B' \\ &= \delta k'T + \delta k(-\eta + kN) + \tau'B + \tau(\tau N) \\ N'' &= \delta k'T - \delta \eta k + \delta k^2 N + \tau'B + \tau^2 N \\ &= (\delta k^2 + \tau^2)N + \delta k'T + \tau'B - \delta \eta k \end{aligned}$$

bulunur.

η bir genel helis olduğundan,

$$\frac{k}{\tau} = \text{sabit}$$

ve

$$k'\tau = k \tau'$$

dir.

Böylece

$$\begin{aligned} N'' &= \delta k' \left(\frac{1}{k\delta} N' - \frac{\tau}{k\delta} B \right) + \tau' \left(\frac{1}{\tau} N' - \frac{k\delta}{\tau} T \right) + (\delta k^2 + \tau^2)N - \delta \eta k \\ &= \frac{k'}{k} N' - \frac{k'\tau}{k} B + \frac{\tau'}{\tau} N' - \frac{\tau'}{\tau} k\delta T + (\delta k^2 + \tau^2)N - \delta \eta k \\ &= \left(\frac{k'}{k} + \frac{\tau'}{\tau} \right) N' - \frac{k'\tau}{k} B - \frac{\tau'k\delta}{\tau} T + (\delta k^2 + \tau^2)N - \delta \eta k \\ &= \left(\frac{k'}{k} + \frac{\tau'}{\tau} \right) N' - k'\tau \left(\frac{\tau}{k\tau} B + \frac{k\delta}{k\tau} T \right) + (\delta k^2 + \tau^2)N - \delta \eta k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{k'}{k} + \frac{\tau'}{\tau} - \frac{k'\tau}{k\tau} \right) N' + (\delta k^2 + \tau^2)N - \delta\eta k \\
&= \left(\frac{k'\tau + k\tau' - k'\tau}{k\tau} \right) N' + (\delta k^2 + \tau^2)N - \delta\eta k \\
&= \frac{k'}{k} N' + (\delta k^2 + \tau^2)N - \delta\eta k
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$N'' = (\delta k^2 + \tau^2)N + \frac{k'}{k} N' - \eta\delta k$$

ve buradan

$$N'' - \frac{k'}{k} N' + \eta\delta k - (\delta k^2 + \tau^2)N = 0$$

elde edilir.

Tersine (4.1.6) denklemi sağlansın. η nın bir genel helis olduğunu göstereceğiz.

$$N' = k\delta T + \tau B$$

olduğundan,

$$T = \frac{1}{k\delta} N' - \frac{\tau}{k\delta} B$$

olur.

Bu ifade diferensiyellenirse,

$$T' = -\frac{k'}{k^2\delta} N' + \frac{1}{k\delta} N'' - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{k} \right)' - \frac{\tau}{k\delta} B'$$

$$T' = -\frac{k'}{k^2\delta} N' + \frac{1}{k\delta} N'' - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{k} \right)' - \frac{\tau^2}{k\delta} N$$

bulunur. Bu denkleme η ve kN terimleri eklenip çıkarılırsa,

$$T' = \frac{1}{k\delta} \left(N'' - \frac{k'}{k} N' - (\delta k^2 + \tau^2)N + \eta k\delta \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{k} \right)' B - \eta + kN$$

elde edilir. Burada (4.1.5) denklemi göz önüne alınır ve

$$T' = -\eta + kN$$

olduğu kullanılırsa,

$$\left(\frac{\tau}{k} \right)' = 0$$

olur ve buradan $\frac{\tau}{k} = \text{sabit}$

elde edilir. Yani η space-like eğrisi bir genel helistir.

Sonuç 4.1.2 :

$\eta : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı space-like eğri ve $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bu eğrinin pseudo ortonormal çatısı olsun. Bu durumda birim hızlı η eğrisinin bir dairesel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$N'' + \eta k \delta - (\delta k^2 + \tau^2)N = 0 \quad (4.1.7)$$

dir. Burada $N=N(s)$ dir.

İspat :

Teorem (4.1.3) de k ve τ sabit alınır sa eşitliğin sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 4.1.4 :

$\eta : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı space-like eğri ve $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bu eğrinin pseudo ortonormal çatısı olsun. Bu durumda birim hızlı η eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$B''' - 3 \frac{\tau'}{\tau} B'' - \left(\frac{\tau''}{\tau} + \tau^2 + \delta k^2 - 3 \frac{\tau'^2}{\tau^2} \right) B' + \delta \eta k \tau = 0 \quad (4.1.8)$$

Burada $B=B(s)$ dir .

İspat :

η nın bir genel helis olduğunu kabul edelim. (4.1.8) denkleminin sağlandığını göstereceğiz.

$$B' = \tau N$$

ifadesi diferensiyellenirse,

$$B'' = \tau' N + \tau N'$$

$$= \tau' N + \tau (k \delta T + \tau B)$$

$$B'' = \tau' N + k \tau \delta T + \tau^2 B$$

ve ikinci kez diferensiyellenirse,

$$B''' = \tau'' N + \tau' N' + 2 \tau \tau' B + \tau^2 B' + \delta (k \tau)' T + \delta k \tau T'$$

$$= \tau'' N + \tau' (k \delta T + \tau B) + 2 \tau \tau' B + \tau^2 (\tau N) + \delta (k \tau)' T + \delta k \tau (-\eta + k N)$$

veya

$$\begin{aligned} B''' &= \tau'' N + \tau' k \delta T + \tau' \tau B + 2\tau' \tau B + \tau^3 N + \delta(k\tau)' T - \delta\eta k\tau + \delta k^2 \tau N \\ &= 3\tau' \tau B + (\tau'' + \tau^3 + \delta k^2 \tau) N + (\tau' k \delta + \delta(k\tau)') T - \delta\eta k\tau \\ &= 3\tau' \tau B + (\tau'' + \tau^3 + \delta k^2 \tau) N + 3\delta k \tau' T - \delta\eta k\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$N = \frac{1}{\tau} B'$$

olduğundan,

$$N' = \frac{-\tau'}{\tau^2} B' + \frac{1}{\tau} B''$$

olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} B''' &= 3\tau' \underbrace{(\tau B + \delta k T)}_{= N'} + (\tau'' + \tau^3 + \delta k^2 \tau) \frac{1}{\tau} B' - \delta\eta k\tau \\ B''' &= 3\tau' \left(-\frac{\tau'}{\tau^2} B' + \frac{1}{\tau} B'' \right) + \left(\frac{\tau''}{\tau} + \tau^2 + \delta k^2 \right) B' - \delta\eta k\tau \\ B''' &= -3 \frac{\tau'^2}{\tau^2} B' + 3 \frac{\tau'}{\tau} B'' + \left(\frac{\tau''}{\tau} + \tau^2 + \delta k^2 \right) B' - \delta\eta k\tau \end{aligned}$$

veya

$$B''' = \left(\frac{\tau''}{\tau} + \tau^2 + \delta k^2 - 3 \frac{\tau'^2}{\tau^2} \right) B' + 3 \frac{\tau'}{\tau} B'' - \delta\eta k\tau$$

elde edilir.

Buradan,

$$B''' - 3 \frac{\tau'}{\tau} B'' - \left(\frac{\tau''}{\tau} + \tau^2 + \delta k^2 - 3 \frac{\tau'^2}{\tau^2} \right) B' + \delta\eta k\tau = 0$$

olup (4.1.8) denklemi elde edilmiş olur.

Tersine (4.1.8) denklemi sağlansın. η nın bir genel helis olduğunu göstereceğiz.

$$N' = k\delta T + \tau B$$

ifadesinde

$$T = \frac{1}{k\delta} N' - \frac{\tau}{k\delta} B$$

yazılabilir. Buradan,

$$T' = -\frac{k'}{k^2\delta} N' + \frac{1}{k\delta} N'' - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{k} \right)' B - \frac{\tau}{k\delta} B'$$

veya

$$T' = -\frac{k'}{k^2\delta} \left(\frac{-\tau'}{\tau^2} B' + \frac{1}{\tau} B'' \right) + \frac{1}{k\delta} \left\{ \left(\frac{-\tau'}{\tau^2} \right)' B' - \frac{\tau'}{\tau^2} B'' - \frac{\tau'}{\tau^2} B'' + \frac{1}{\tau} B''' \right\} \\ - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{k} \right)' B - \frac{\tau}{k\delta} B'$$

veya

$$T' = \frac{k'\tau'}{\delta k^2 \tau^2} B' - \frac{k'}{\delta k^2 \tau} B'' + \frac{1}{\delta k} \left(\frac{-\tau'}{\tau^2} \right)' B' - 2 \frac{\tau'}{\delta k \tau^2} B'' + \frac{1}{\delta k \tau} B''' \\ - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau'k - \tau k'}{k^2} \right) B - \frac{\tau}{k\delta} B' \\ T' = \frac{k'\tau'}{\delta k^2 \tau^2} B' - \frac{k'}{\delta k^2 \tau} B'' + \frac{1}{\delta k} \left[\frac{-\tau''\tau^2 + 2\tau'^2\tau}{\tau^4} \right] B' - 2 \frac{\tau'}{\delta k \tau^2} B'' + \frac{1}{\delta k \tau} B''' \\ - \frac{\tau'}{\delta k} B + \frac{\tau k'}{\delta k^2} B - \frac{\tau}{k\delta} B'$$

elde edilir. Bu son ifadeye

$$\frac{k\tau'}{\delta k^2 \tau^2} B'', \quad \frac{\tau'^2}{\delta k \tau^3} B', \quad \frac{k}{\tau} B', \quad \eta$$

terimleri eklenip çıkarılırsa,

$$T' = \frac{1}{\delta k \tau} \left\{ B''' - 3 \frac{\tau'}{\tau} B'' - \left(\frac{\tau''}{\tau} - 3 \frac{\tau'^2}{\tau^2} + \tau^2 + \delta k^2 \right) B' + \delta \eta k \tau \right\} - \frac{1}{\delta k^2} \left(\frac{k}{\tau} \right)' B'' \\ + \left[\frac{k}{\tau} - \frac{\tau'}{\delta \tau^3} \left(\frac{\tau}{k} \right)' \right] B' - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{k} \right)' B - \eta$$

elde edilir.

(4.1.8) denklemini ve $T' = -\eta + kN$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left(\frac{\tau}{k} \right)' = 0$$

ise

$$\left(\frac{\tau}{k} \right) = \text{sabit}$$

olduğu görülür. O halde η space-like eğrisi bir genel helistir.

Sonuç 4.1.3 :

$\eta : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı space-like eğri ve $\{\eta(s), T(s), N(s), B(s)\}$ bu eğrinin pseudo ortonormal çatısı olsun. Bu durumda birim hızlı η eğrisinin bir dairesel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$B''' - (\tau^2 + \delta k^2)B' + \delta \eta k \tau = 0 \quad (4.1.9)$$

dir.

İspat :

Teorem (4.1.4) de k ve τ sabit alınırse eşitliğin sağlandığı kolayca görülür.

KAYNAKLAR

- T Ikawa**, On curves and submanifolds in an Indefinite Riemannian manifold, Tskuba J.Math., 9(1985), 353-371
- Balgetir H, Bektaş M, Ergüt M** (2001). On a Characterization Null Helix. Bull. Ins.Math. Aca. Sinica, 29(1), 71-78
- Bektaş M** (2004). On Characterization of general helices for ruled surface in the pseudo-Galilean space $G(3)(1)$ -(Part-I). Journal of Mathematics of Kyoto University, 44(3), 523-528
- Turhan E, Bektaş M** (2004). A Characterization For Curves of The Heisenberg Group. International Journal of Pure and Applied Mathematics ,12(4), 493-498.
- Bektaş M , Asil V** (2004). On a Characterization of Helix For Curves of the Heisenberg Group. International Journal of Pure and Applied Mathematics.,15(4)
- Hacısalıhoğlu, H.H.** 1993. Diferensiyel Geometri. Fen Fakültesi, Ankara
- İşcan,M.** 2008. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum
- Izumiya, S. and Takeuchi, N.** 2002. Generic Properties of helices and Bertrand Curves. Journal of Geometry, 74;97-109
- Turgut, A.** 1995. 3-boyutlu Minkowski uzayında space-like ve time-like regle yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , 97 s., Ankara
- Ekmekçi, N.** 1991. Lorentz manifoldları üzerinde eğilim çizgileri. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 54 s., Ankara.
- Beem J. and Ehrlich P.E,** 1981. Global Lorentzian geometry. Marcell Dekker Inc New York.
- O'Neill, B.** 1983. Semi Riemanian geometry with applications to relativity. Academic Press, 468 p. New York
- Duggal , K.L and Bejancu A.** 1996. Light like Submanifolds of Semi Riemanian manifolds and applications. Kluwer Academic Publishers.
- Abdel Aziz, H.S.** New Special Surfaces in de Sitter3-Space. Department of Mathematics, Faculty of Science , Sohag University, Egypt.
- Ekmekçi, N. , Hacısalıhoğlu H.H.**1996. On the helices of a Lorentzian manifolds. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara A.1, 45; 45-50.
- İlarslan, K.** Characterizations of Space-like General Helices in Lorentzian Manifolds. Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Kocatepe University, Afyon-Turkey

ÖZGEÇMİŞ

1989 Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ da tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2012 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.