

**MODÜLÜS FONKSİYONLAR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Suzan ZEREN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

OCAK- 2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLÜS FONKSİYONLAR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Suzan ZEREN
(08121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 19.12.2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 05.01.2012

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK

OCAK- 2012

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmamda, yakın ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ' a, desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme ve yüksek lisans burs desteğinden dolayı TÜBİTAK BİDEB' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Suzan ZEREN
ELAZIĞ - 2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	2
3. MODÜLÜS FONKSİYONU ve GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI	7
4. MODÜLÜS FONKSİYONLAR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI	9
4.1. $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z (\Delta_v^m)$ Dizi Uzayları	9
4.2. $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z (\Delta_v^m)$ Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri	23
KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümü giriş kısmı olup, ikinci bölümde konuya ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde modülüs fonksiyonu tanımına ve fark dizilerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde $Z = 0, 1$ veya ∞ olmak üzere modülüs fonksiyonlar dizisi alınarak $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z(\Delta_v^m)$ fark dizi uzayları tanımlanmış, bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri ve bu uzaylar arasındaki bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark Dizi Uzayları, Modülüs Fonksiyonlar Dizisi, Yarmorm.

SUMMARY

GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES DEFINED BY A SEQUENCE OF MODULI

In this study, which is prepared as four chapters, the first chapter is the introduction part. In the second chapter, we give the fundamental definitions and theorems.

In the third chapter, we give the definition of a modulus function and difference sequences.

In the fourth chapter, we define the sequence space $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z (\Delta_v^m)$ using a sequence of moduli where $Z = 0, 1$ or ∞ and we examine some topological properties of these spaces and some inclusion relations between these spaces.

Key Words: Difference Sequence Spaces, Sequence of Moduli, Seminorm.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi
w	:	Bütün diziler uzayı
c	:	Yakınsak diziler uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	:	Sınırlı diziler uzayı
X^α	:	X in α - duali
X^β	:	X in β - duali
X^γ	:	X in γ - duali
Δ_v^m	:	Genelleştirilmiş fark operatörü

1. GİRİŞ

Bugüne kadar modülüs fonksiyonu yardımıyla birçok dizi uzayı tanımlanmış ve bu dizi uzayları genelleştirilmiştir.

Modülüs fonksiyonu tanımı 1953 yılında Nakano [26] tarafından verildi. Daha sonra Ruckle [27] " $\{e_1, e_2, \dots\}$ birim vektörlerinin sınırlı cümlesini bulunduran en küçük FK uzayı var mıdır?" sorusuna cevap ararken,

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\}$$

dizi uzayını, f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımladı.

Modülüs fonksiyonu veya modülüs fonksiyonlar dizisi kullanılarak Maddox [24], Kızmaz [21], Et ve Çolak [14], Gaur ve Mursaleen [17], Bektaş ve Çolak [4], Et ve Esi [15], Et ve diğerleri [13], Bataineh [2] ve birçok kişi tarafından bazı dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların çeşitli özellikleri incelenmiştir. Biz bu çalışmada, Atıcı ve Bektaş [1] tarafından tanımlanan fark dizi uzaylarını genelleştireceğiz ve bu yeni dizi uzaylarının bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

- i) $x + y = y + x$
- ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- iv) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
- v) $1.x = x$
- vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [23].

Tanım 2.2. X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

- N1) $\|x\| \geq 0$
- N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (λ skaler)
- N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir. N2) şartı $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ şartı ile değiştirilirse yarınorm elde edilir [22].

Tanım 2.3. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsak ise $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır [22].

Tanım 2.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ iken

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [22].

Tanım 2.5. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [22].

Tanım 2.6. X , K cisim üzerinde bir lineer uzay olsun. $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa g ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$\text{i) } g(\theta) = 0$$

$$\text{ii) } g(x) = g(-x)$$

$$\text{iii) } g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$

$$\text{iv) } \mu \rightarrow \mu_0, x \rightarrow x_0 \text{ iken } \mu x \rightarrow \mu_0 x_0$$

dir. iv) şartını $\mu \rightarrow \mu_0, g(x - x_0) \rightarrow 0$ iken $g(\mu x - \mu_0 x_0) \rightarrow 0$ şeklinde ifade edebiliriz. Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g ye total paranorm denir [23].

Tanım 2.7. X boş olmayan bir cümle olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$\text{i) } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{ii) } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{iii) } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartlarını sağlarsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [23].

Tanım 2.8. $X = (X, d)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir. [22].

Tanım 2.9. Bir Frechet uzayı, bir tam lineer metrik uzay veya buna denk olarak bir tam total paranormlu uzaydır. X koordinatsal sürekli bir Frechet uzayı olacak şekilde ω nın bir lineer alt uzayı olsun. Bu durumda X bir FK uzayı veya bir Frechet Koordinat uzayı adını alır [6].

Tanım 2.10. Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin cümlesini ω ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere ω , $x + y = (x_k + y_k)$ ve $\alpha x = (\alpha x_k)$ şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. ω nın her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [18].

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.11. X bir dizi uzayı olsun.

$$X^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \forall x \in X \text{ için}\},$$

$$X^\beta = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \forall x \in X \text{ için}\},$$

$$X^\gamma = \{a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty, \forall x \in X \text{ için}\}$$

olsun. X^α , X^β ve X^γ ya, sırasıyla, X in α -, β - ve γ -duali denir. α -dualine Köthe - Toeplitz duali, β -dualine genelleştirilmiş Köthe - Toeplitz duali denir. $\emptyset \subset X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ olduğu kolayca gösterilebilir. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olsun. $X \subset Y$ ise $X^\eta \subset Y^\eta$ dir [19].

Tanım 2.12. X bir dizi uzayı olsun.

i) $|\alpha_k| \leq 1$ olacak şekildeki tüm (α_k) dizileri için $(x_k) \in X$ iken $(\alpha_k x_k) \in X$ ise X e normal veya solid dizi uzayı denir.

ii) X tüm basamak uzaylarının kanonik ön resimlerini kapsıyorsa, X e monoton dizi uzayı denir.

iii) $X = X^{\alpha\alpha}$ ise X e perfektir denir.

iv) $\pi(k)$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin bir permütasyonu olmak üzere $(x_k) \in X$ iken $(x_{\pi(k)}) \in X$ ise X e simetrik dizi uzayı denir.

v) $(x_k), (y_k) \in X$ iken $(x_k y_k) \in X$ ise X e dizi cebiri denir [19].

Sonuç 2.13. X perfektir $\Rightarrow X$ normaldir $\Rightarrow X$ monotondur [19].

Tanım 2.14. X boş olmayan bir cümle ve τ , X in alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya, X için bir topoloji ve (X, τ) çiftine de bir topolojik uzay denir.

T1) $X, \emptyset \in \tau$ dur.

T2) τ nun keyfi sayıdaki elamanlarının birleşimi yine τ nun bir elemanıdır.

T3) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanın arakesiti yine τ ya aittir [23].

Tanım 2.15. X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve bir topolojik uzay olsun. Eğer vektör uzayının toplama ve skalerle çarpma işlemleri verilen topolojiye göre sürekli ise X e topolojik vektör uzayı denir [19].

Tanım 2.16. $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_0$ bir X vektör uzayı üzerinde iki norm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $a \|x\|_0 \leq \|x\| \leq b \|x\|_0$ olacak şekilde pozitif a ve b sayıları varsa $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_0$ normları eşdeğerdir denir [22].

Lemma 2.17. q_1 ve q_2 , X üzerinde iki yarınorm olsun. Bu taktirde q_1 yarınormunun q_2 den daha kuvvetli olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $q_2(x) \leq Kq_1(x)$ olacak şekilde sabit bir $K > 0$ sayısının var olmasıdır [29].

Teorem 2.18. (Minkowski eşitsizliği) $\forall k$ için $a_k, b_k \geq 0$ olmak üzere

a) $0 < p \leq 1$ ise

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p + \sum_{k=1}^n b_k^p$$

b) $p \geq 1$ ise

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizlikleri sağlanır [23].

Aşağıdaki eşitsizlik bu çalışmada sık sık kullanılacaktır.

$p = (p_k)$ kesin pozitif sayıların bir dizisi olsun. $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $H = \sup_k p_k < \infty$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\} \quad (2.1)$$

dir [23].

3. MODÜLÜS FONKSİYONU ve GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ

UZAYLARI

Tanım 3.1 Aşağıdaki özellikleri sağlayan $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna modülüs fonksiyonu adı verilir.

- i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii) $\forall x, y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- iii) f artandır,
- iv) f sıfır noktasında sağdan süreklidir.

ii) den elde edilen $|f(x) - f(y)| \leq f(|x - y|)$ eşitsizliğinden ve iv) den bir f modülüs fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında sürekli olduğu görülür.

f modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir.

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızmaz [21] tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızmaz, $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların $\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Et ve Çolak [14], $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi, $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların $\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$ ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

Et ve Esi [15], $v = (v_k)$ sıfırdan farklı kompleks terimli herhangi bir dizi, $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_v^0 x = (v_k x_k)$, $\Delta_v x = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$, $\Delta_v^m x = (\Delta_v^m x_k) = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$ ve

$$\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$$

olmak üzere, Et ve Çolak [14] ın tanımladığı uzayları

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c_0\}\end{aligned}$$

şeklindeki uzaylara genelleştirdiler. Aynı zamanda $\ell_\infty(\Delta_v^m)$, $c(\Delta_v^m)$ ve $c_0(\Delta_v^m)$ dizi uzaylarının

$$\|x\|_v = \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

Teorem 3.2. Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [16].

Teorem 3.3. Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [16].

4. MODÜLÜS FONKSİYONLAR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, $Z = 0, 1$ veya ∞ notasyonunu göstermek üzere modülüs fonksiyonlar dizisi yardımıyla $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z(\Delta_v^m)$ fark dizi uzayları tanımlanmış, bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri ve bu uzaylar arasındaki bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir.

4.1. $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z(\Delta_v^m)$ Dizi Uzayları

Bu çalışma boyunca, $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olmak üzere, pozitif sayıların azalmayan $+\infty$ 'a ıraksayan bir dizisi olsun. Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması, $n = 1, 2, \dots$ için $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $t_n(x) \rightarrow L$ oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi (V, λ) - toplanabilirdir denir ve (V, λ) - kuvvetli toplanabilir dizilerin cümlesi

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0, \text{ bir } L \text{ sayısı için} \right\}$$

ile gösterilir.

Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması, Δ_v^m fark operatörü ve modülüs fonksiyonlarının bir dizisi de kullanılarak Tanım 4.1.1 de yeni bir dizi uzayı tanımlanacaktır.

Tanım 4.1.1. $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi, X , topolojisi bir $\mathbb{Q}$ cümlesinin q sürekli yarınormları tarafından tanımlanmış bir yerel konveks Hausdorff topolojik lineer uzayı ve $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $\omega(X)$ ile

X üzerinde tanımlı bütün dizilerin uzayını gösterelim. $v = (v_k)$ sıfırdan farklı kompleks sayıların herhangi bir dizisi ve $u = (u_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, yeni genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını bir L sayısı için,

$$\begin{aligned} [V, \lambda, F, p, q, u]_1(\Delta_v^m) &= \left\{ x \in \omega(X) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} = 0 \right\}, \\ [V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m) &= \left\{ x \in \omega(X) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} = 0 \right\}, \\ [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m) &= \left\{ x \in \omega(X) : \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

Yukarıda tanımlanan dizi uzayları $m \geq 1$ için bazı sınırsız diziler içerir.

Örnek 4.1.2. $X = \mathbb{C}$, her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k(x) = x$, $q(x) = |x|$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$, $v = (1, 1, \dots)$, her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ve $u_k = 1$ olsun. Bu taktirde $(k^m) \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ dir. Fakat $(k^m) \notin l_\infty$ dir.

Teorem 4.1.3. (p_k) pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z(\Delta_v^m)$, $\mathbb{C}$ kompleks cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

İspat: $x, y \in [V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

dir. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, μ_α ve μ_β , $|\alpha| \leq \mu_\alpha$, $|\beta| \leq \mu_\beta$ olacak şekilde pozitif tam sayılar ve $H = \sup_k p_k < \infty$ olmak üzere,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [u_k f_k(q(\Delta_v^m(\alpha x_k + \beta y_k)))]^{p_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\alpha \Delta_v^m x_k + \beta \Delta_v^m y_k))]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(|\alpha| q(\Delta_v^m x_k) + |\beta| q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(|\alpha| q(\Delta_v^m x_k)) + f_k(|\beta| q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} \\
&\leq D(\mu_\alpha)^H \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} + D(\mu_\beta)^H \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} \\
&\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

dir. Bu taktirde $\alpha x + \beta y \in [V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ bulunur ki bu da istenendir. Teorem $Z = 1, \infty$ için benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 4.1.4. $[V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ uzayı, $M = \max(1, \sup_k p_k)$ olmak üzere

$$G_\Delta(x) = \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır.

İspat: $x = \theta$ için $\Delta_v^m x_k = 0$, $q(\Delta_v^m x_k) = 0$ ve f modülüs fonksiyonu tanımından $G_\Delta(\theta) = 0$ bulunur.

$$\begin{aligned}
G_\Delta(-x) &= \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m(-x_k)))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&= \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(-\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&= \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(|-1| q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&= \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&= G_\Delta(x)
\end{aligned}$$

bulunur.

Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m(x_k + y_k)))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k + \Delta_v^m y_k)))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k) + q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k)) + f_k(q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} + \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} + \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m y_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan eşitsizliğin sol tarafının sonlu olduğu elde edildiğinden

$G_\Delta(x + y) \leq G_\Delta(x) + G_\Delta(y)$ eşitsizliği bulunur.

Skaler çarpımın sürekli olduğunu ispatlayalım. α sıfırdan farklı herhangi bir kompleks sayı olsun. $|\alpha| \leq \mu_\alpha$ olacak şekilde bir μ_α pozitif tamsayısı bulunabilir. $H = \sup_k p_k < \infty$ olmak üzere

$$G_\Delta(\alpha x) = \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m(\alpha x_k)))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\alpha \Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(|\alpha| q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq (\mu_\alpha)^{\frac{H}{M}} \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&= (\mu_\alpha)^{\frac{H}{M}} G_\Delta(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $G_\Delta(x)$, $[V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ de sonlu iken $G_\Delta(\alpha x)$ de sonludur.

Şimdi $G_\Delta(x) \neq 0$ olmak üzere $[V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ uzayında herhangi bir sabit x için $\alpha \rightarrow 0$ olsun. $|\alpha| < 1$ için modülüs fonksiyonunun tanımından $n > n(\varepsilon)$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\alpha \Delta_v^m x_k))]^{p_k} < \varepsilon$$

dur. Aynı zamanda, $1 \leq n \leq n(\varepsilon)$ için, α yeterince küçük alırsa modülüs fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\alpha \Delta_v^m x_k))]^{p_k} < \varepsilon$$

olur. Son iki eşitsizlikten $\alpha \rightarrow 0$ için $G_\Delta(\alpha x) \rightarrow 0$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5. $F = (f_k)$ ve $G = (g_k)$ modülüs fonksiyonlarının birer dizisi olsunlar. q_1 ve q_2 birer yarınorm, $p = (p_k)$ ve $t = (t_k)$ kesin pozitif reel sayıların birer dizisi olsun. Bu taktirde

- (i) $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z(\Delta_v^m) \cap [V, \lambda, G, p, q, u]_Z(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F + G, p, q, u]_Z(\Delta_v^m)$,
- (ii) $[V, \lambda, F, p, q_1, u]_Z(\Delta_v^m) \cap [V, \lambda, F, p, q_2, u]_Z(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q_1 + q_2, u]_Z(\Delta_v^m)$,
- (iii) q_1 yarınormu q_2 yarınormundan daha kuvvetliyse $[V, \lambda, F, p, q_1, u]_Z(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q_2, u]_Z(\Delta_v^m)$,
- (iv) q_1 yarınormu q_2 yarınormuna denkse $[V, \lambda, F, p, q_1, u]_Z(\Delta_v^m) = [V, \lambda, F, p, q_2, u]_Z(\Delta_v^m)$,
- (v) $[V, \lambda, F, p, q_1, u]_Z(\Delta_v^m) \cap [V, \lambda, F, t, q_2, u]_Z(\Delta_v^m) \neq \emptyset$

dir.

İspat: (i) $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_1(\Delta_v^m) \cap [V, \lambda, G, p, q, u]_1(\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde bir L sayısı için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [g_k(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [(f_k + g_k)(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L)) + g_k(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\leq D \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} + D \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [g_k(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu taktirde $x \in [V, \lambda, F + G, p, q, u]_1(\Delta_v^m)$ dir.

(ii) $x \in [V, \lambda, F, p, q_1, u]_1(\Delta_v^m) \cap [V, \lambda, F, p, q_2, u]_1(\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde bir L sayısı için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [g_k(q_2(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k((q_1 + q_2)(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L) + q_2(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L)) + f_k(q_2(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\leq D \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} + D \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_2(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\rightarrow 0\end{aligned}$$

dir. Böylece $x \in [V, \lambda, F, p, q_1 + q_2, u]_1 (\Delta_v^m)$ elde edilir.

(iii) q_1 yarınormu q_2 yarınormundan daha kuvvetli olsun ve $x \in [V, \lambda, F, p, q_1, u]_1 (\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde bir L sayısı için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. M pozitif bir sayı, $\mu, |M| \leq \mu$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, $H = \sup_k p_k < \infty$ olmak üzere her $k \in I_n$ için

$$q_2(\Delta_v^m x_k - L) \leq M q_1(\Delta_v^m x_k - L)$$

dir. Her bir f_k modülüs fonksiyonunun artan, $p_k > 0$ ve $\lambda_n > 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_2(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(M q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\leq \mu^H \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $x \in [V, \lambda, F, p, q_2, u]_1 (\Delta_v^m)$ elde edilir.

(iv) q_1 ve q_2 yarınormları denk yarınormlar olsun. Bu taktirde her $x \in \omega(X)$ için $a q_1(x) \leq q_2(x) \leq b q_1(x)$ olacak şekilde $a, b > 0$ sayıları mevcuttur. $x \in [V, \lambda, F, p, q_1, u]_1 (\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde bir L sayısı için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dur. q_1 ve q_2 yarınormları denk yarınormlar olduğundan $b > 0$ için $q_2(\Delta_v^m x_k - L) \leq b q_1(\Delta_v^m x_k - L)$ yazılabilir. $|b| \leq \mu_b$ olacak şekilde bir μ_b pozitif tamsayısı ve $H = \sup_k p_k < \infty$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_2(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(b q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\leq (\mu_b)^H \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olduğundan $x \in [V, \lambda, F, p, q_2, u]_1(\Delta_v^m)$ bulunur. Böylece $[V, \lambda, F, p, q_1, u]_1(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q_2, u]_1(\Delta_v^m)$ kapsaması elde edilir.

$x \in [V, \lambda, F, p, q_2, u]_1(\Delta_v^m)$ olsun. q_1 ve q_2 yarınormları denk yarınormlar olduğundan $a > 0$ için $aq_1(\Delta_v^m x_k - L) \leq q_2(\Delta_v^m x_k - L)$ ve $q_1(\Delta_v^m x_k - L) \leq \frac{1}{a}q_2(\Delta_v^m x_k - L)$ yazılabilir. $|\frac{1}{a}| \leq \mu_a$ olacak şekilde bir μ_a pozitif tamsayısı ve $H = \sup_k p_k < \infty$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_1(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k \left[f_k \left(\frac{1}{a} q_2(\Delta_v^m x_k - L) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq (\mu_a)^H \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q_2(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

bulunur ki bu da $[V, \lambda, F, p, q_2, u]_1(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q_1, u]_1(\Delta_v^m)$ olduğunu gösterir. Elde edilen diğer kapsama bağıntısı da gözönüne alınırsa $[V, \lambda, F, p, q_1, u]_1(\Delta_v^m) = [V, \lambda, F, p, q_2, u]_1(\Delta_v^m)$ eşitliği elde edilir.

(v) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $u_k = 1$ alınırsa [1] nolu referanstan ispat elde edilir.

Teorem 4.1.6. $X, [V, \lambda, F, q, u]_Z$ yi gösterebilir ve $m \geq 1$ olsun. Bu taktirde $X(\Delta_v^{m-1}) \subset X(\Delta_v^m)$ dir ve bu kapsama kesindir. Ayrıca bütün $i = 1, 2, \dots, m-1$ için $X(\Delta_v^i) \subset X(\Delta_v^m)$ dir ve bu kapsama da kesindir.

İspat: $x \in [V, \lambda, F, q, u]_\infty(\Delta_v^{m-1})$ olsun. Bu taktirde

$$\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^{m-1} x_k))] < \infty$$

dir. Her bir f_k bir modülüs fonksiyonu ve modülüs fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))] &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1}))] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^{m-1} x_k) + q(\Delta_v^{m-1} x_{k+1}))] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^{m-1} x_k))] + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^{m-1} x_{k+1}))] \\ &< \infty \end{aligned}$$

dur. Böylece $[V, \lambda, F, q, u]_{\infty}(\Delta_v^{m-1}) \subset [V, \lambda, F, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m)$ elde edilir. Benzer yolla $i = 1, 2, \dots, m-1$ için $[V, \lambda, F, q, u]_Z(\Delta_v^i) \subset [V, \lambda, F, q, u]_Z(\Delta_v^m)$ olduğu gösterilebilir.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $v_k = 1$, $u_k = 1$, $q(x) = |x|$, $\lambda_n = n$ ve $f_k(u) = u$ olmak üzere $x = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ olup

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f_k(q(\Delta^m x_k))] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \\ &= \frac{1}{n} nm! \\ &= m! \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $x \in [V, \lambda, F, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m)$ olduğunu gösterir. Yukarıdaki şartlar tekrar gözönüne alınarak $x = (k^m)$ için

$$\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m!(k + (m-1)/2)$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f_k(q(\Delta^{m-1} x_k))] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^{m-1} x_k| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m!(k + (m-1)/2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{m!(m-1)}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m!k \\ &= m! \left(\frac{(m-1)}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \right) \\ &\rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $x \notin [V, \lambda, F, q, u]_{\infty}(\Delta_v^{m-1})$ olduğunu gösterir. Bu taktirde $X(\Delta_v^{m-1}) \subset X(\Delta_v^m)$ kapsaması kesindir.

Teorem 4.1.7 $0 < p_k \leq t_k$ ve (t_k/p_k) sınırlı olsun. Bu taktirde

- (i) $[V, \lambda, F, t, q, u]_0(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$,
- (ii) $[V, \lambda, F, t, q, u]_1(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q, u]_1(\Delta_v^m)$,
- (iii) $[V, \lambda, F, t, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m)$

dir.

İspat: Sadece (i) ispatlanacaktır. $x \in [V, \lambda, F, t, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{t_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. $\omega_k = [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{t_k}$ ve her k için $0 \leq \mu \leq \mu_k \leq 1$ olmak üzere $\mu_k = \frac{p_k}{t_k}$ olsun.

(z_k) ve (s_k) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$\omega_k \geq 1$ iken $s_k = 0$, $z_k = \omega_k$ ve $\omega_k < 1$ iken $s_k = \omega_k$ ve $z_k = 0$ olsun. Bu taktirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\omega_k = z_k + s_k$, $\omega_k^{\mu_k} = z_k^{\mu_k} + s_k^{\mu_k}$ elde edilir. $z_k^{\mu_k} \leq z_k \leq \omega_k$ ve $s_k^{\mu_k} \leq s_k^{\mu_k}$ bulunur.

Hölder eşitsizliği gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k \omega_k^{\mu_k} &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k (z_k^{\mu_k} + s_k^{\mu_k}) \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k z_k^{\mu_k} + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k s_k^{\mu_k} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k \omega_k + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k s_k^{\mu_k} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k \omega_k + \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k s_k \right)^{\mu} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

bulunur. Bu taktirde $\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ yani $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.8. $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi ve her $t > 0$ için $\sup_k u_k [f_k(t)]^{p_k} < \infty$ olsun. Bu taktirde $[V, \lambda, F, p, q, u]_1 (\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, F, p, q, u]_{\infty} (\Delta_v^m)$ dir.

İspat: $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_1 (\Delta_v^m)$ olsun. $H = \sup_k p_k < \infty$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L + L))]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L) + q(L))]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L)) + f_k(q(L))]^{p_k} \\
&\leq D \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k - L))]^{p_k} + D \sup_k u_k [f_k(q(L))]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

dir. Böylece $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ elde edilir.

Teorem 4.1.9. $0 < \inf p_k \leq \sup p_k < \infty$ ve $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $[V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$,
- (ii) $[V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$,
- (iii) $\forall t > 0$ için $\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} < \infty$.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): $[V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olsun. $[V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olduğundan $[V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): (ii) sağlansın ve kabul edelim ki (iii) sağlanmasın. Bu taktirde en az bir $t > 0$ için

$$\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} = \infty$$

dır ve bu nedenle

$$\frac{1}{\lambda_{n_i}} \sum_{k \in I_{n_i}} u_k [f_k(i^{-1})]^{p_k} > i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların bir (n_i) artan dizisi mevcuttur. $x = (x_k)$ dizisini

$$\Delta_v^m x_k = \begin{cases} i^{-1}, & k \in I_{n_i}, i = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [q(\Delta_v^m x_k)]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur ki bu da $x \in [V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ olduğunu gösterir. (4.1.1) den dolayı $x \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olur ki bu da bir çelişkidir. Bu nedenle (iii) sağlanmalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $x \in [V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olsun ve (iii) eşitsizliği sağlansın. Kabul edelim ki $x \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} = \infty \quad (4.1.2)$$

elde edilir. Her k için $q(\Delta_v^m x_k) = t$ olsun. Bu taktirde (4.1.2) den dolayı

$$\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} = \infty$$

bulunur ki bu da (iii) ile çelişir. Bu nedenle (i) sağlanır. Böylece (iii), (i) yi gerektirir.

Teorem 4.1.10. $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ ve $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) $[V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$,
- (ii) $[V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$,
- (iii) $\forall t > 0$ için $\inf_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} > 0$.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): $[V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ olsun. $[V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subset [V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olduğundan $[V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): (ii) sağlansın ve kabul edelim ki (iii) sağlanmasın. Bu taktirde en az bir $t > 0$ için

$$\inf_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} = 0$$

dir ve bu durumda

$$\frac{1}{\lambda_{ni}} \sum_{k \in I_{n_i}} u_k [f_k(i)]^{p_k} < \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1.3)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların bir (n_i) artan dizisi bulunabilir. $x = (x_k)$ dizisini

$$\Delta_v^m x_k = \begin{cases} i, & k \in I_{n_i}, i = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu taktirde (4.1.3) den $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ elde edilir, fakat $x \notin [V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ bulunur ki bu da (ii) ile çelişir. O halde (iii) sağlanmalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (i): (iii) sağlansın ve kabul edelim ki $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ fakat $x \notin [V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde $n \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (4.1.4)$$

dır. $\varepsilon > 0$ için $k \in I_{n'}$ ve $q(\Delta_v^m x_k) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir n' sayısı vardır. Bu nedenle

$$[f_k(\varepsilon)]^{p_k} \leq [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k}$$

dir ve (4.1.4) den

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(\varepsilon)]^{p_k} = 0$$

bulunur ki bu da (iii) ile çelişir. Dolayısıyla (i) sağlanmalıdır. Bu taktirde (iii), (i) yi gerektirir.

Teorem 4.1.11. $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ ve $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $[V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart her $t > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} = \infty \quad (4.1.5)$$

olmasıdır.

İspat. Gereklik için $[V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ olsun ve kabul edelim ki (4.1.5) sağlanmasın. Bu taktirde

$$\frac{1}{\lambda_{n_i}} \sum_{k \in I_{n_i}} u_k [f_k(t_0)]^{p_k} \leq K < \infty, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1.6)$$

olacak şekilde bir t_0 sayısı ve pozitif tamsayıların bir (n_i) artan dizisi bulunabilir. $x = (x_k)$ dizisini

$$\Delta_v^m x_k = \begin{cases} t_0, & k \in I_{n_i}, i = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. (4.1.6) dan $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m)$ fakat $x \notin [V, \lambda, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ olduğu elde edilir. Bu taktirde (4.1.5) sağlanmalıdır.

Yeterlik için (4.1.5) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim ve $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde her bir n için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \leq K < \infty \quad (4.1.7)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Kabul edelim ki $x \notin [V, \lambda, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon > 0$ ve $k \in I_n'$ için $q(\Delta_v^m x_k) \geq \varepsilon_0$ olacak şekilde bir n' tamsayısı mevcuttur. Modülüs fonksiyonu tanımını ve her k için $p_k > 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$[f_k(\varepsilon_0)]^{p_k} \leq [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k}$$

dir ve böylece her k için (4.1.7) gözönüne alınırsa en az bir $K > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(\varepsilon_0)]^{p_k} \leq K < \infty$$

elde edilir. Bu da (4.1.5) ile çelişir. O halde $[V, \lambda, F, p, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ bulunur.

Teorem 4.1.12. $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ ve $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $[V, \lambda, p, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart her $t > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} = 0 \quad (4.1.8)$$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik için $[V, \lambda, p, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ olsun ve kabul edelim ki (4.1.8) sağlanmasın. Bu taktirde en az bir $t_0 > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(t)]^{p_k} = L \neq 0 \quad (4.1.9)$$

diyelim. $k = 1, 2, \dots$ için $x_k = t_0 \sum_{u=0}^{k-m} \binom{m+k-u-1}{k-u}$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisini tanımlayalım. Bu dizi için $\Delta_v^m x_k = t_0$ dir. Bu durumda $x \in [V, \lambda, p, q, u]_{\infty}(\Delta_v^m)$ fakat

(4.1.9) dan $x \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ elde edilir ki bu da kapsama bağıntısıyla çelişir. O halde (4.1.8) sağlanmalıdır.

Yeterlik için kabul edelim ki (4.1.8) sağlansın ve $x \in [V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olsun. Bu taktirde her k ve en az bir $K > 0$ için $q(\Delta_v^m x_k) \leq K < \infty$ dir. Bu durumda

$$[f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \leq [f_k(K)]^{p_k}$$

elde edilir. (4.1.8) eşitliği kullanılarak

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} \leq \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(K)]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Bu durumda $[V, \lambda, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m) \subseteq [V, \lambda, F, p, q, u]_0 (\Delta_v^m)$ kapsaması elde edilir.

4.2. $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z (\Delta_v^m)$ Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri

Teorem 4.2.1. $m \geq 1$ için $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z (\Delta_v^m)$ dizi uzayları normal (solid) değildir.

İspat: $X = \mathbb{C}$, her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k(x) = x$, $p_k = 1$, $u_k = 1$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$, $q(x) = |x|$, $v = (1, 1, \dots)$ ve $m = 1$ olsun. Bu şartlar altında $(x_k) = (k^m) \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ dir, fakat $\alpha_k = (-1)^k$ için $(\alpha_k x_k) \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ dir. Bu nedenle $[V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ dizi uzayı solid değildir.

Gerçekten $(x_k) = (k)$ olup $\Delta x_k = -1$ olduğu için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k| \\ &= \frac{1}{n} n \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $(x_k) \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ dir.

$(\alpha_k x_k) = ((-1)^k k)$ dizisine Δ operatörü uygulanırsa

$m = 1$ için $\Delta(\alpha_k x_k) = (-1)^k k - (-1)^{k+1}(k+1) = (-1)^k(2k+1)$ olup

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m(\alpha_k x_k)))]^{p_k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k x_k| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| (-1)^k(2k+1) \right| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (2k+1) \\ &\rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

bulunur. İşleme benzer şekilde devam edilirse $(x_k) \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ iken $(\alpha_k x_k) \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ olduğu görülür.

Sonuç 4.2.2. $m \geq 1$ için $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z(\Delta_v^m)$ dizi uzayları perfect değildir.

İspat: Sonuç 2.13 den verilen uzaylar normal (solid) olmadıklarından perfect değildir.

Teorem 4.2.3. $m \geq 1$ için $[V, \lambda, F, p, q, u]_1(\Delta_v^m)$ ve $[V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ dizi uzayları simetrik değildir.

İspat: X, p, f_k, q, u, v ve λ Teorem 4.2.1' in ispatındaki şartları sağlamak üzere $(x_k) = (k^m) \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ dir. (x_k) yı yeniden düzenleyerek elde ettiğimiz

$$(y_k) = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_9, x_5, x_{16}, x_6, x_{25}, x_7, x_{36}, x_8, x_{49}, x_{10}, \dots)$$

şeklindeki (y_k) dizisi için $(y_k) \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ olur.

Uyarı 4.2.4. $m \geq 2$ için $[V, \lambda, F, p, q, u]_0(\Delta_v^m)$ uzayı simetrik değildir.

Teorem 4.2.5. $[V, \lambda, F, p, q, u]_Z(\Delta_v^m)$ dizi uzayları dizi cebiri değildir.

İspat: X, p, f_k, q, u, v ve λ Teorem 4.2.1' in ispatındaki şartları sağlasın. $x = (k^{m-2})$ ve $y = (k^{m-2})$ dizilerini düşünelim. $x, y \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ olduğu halde $x.y \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty(\Delta_v^m)$ dir.

Gerçekten $x = (k^{m-2})$ dizisi için $m = 3$ için $x = (k)$ olup

$$\Delta^3 x_k = x_k - 3x_{k+1} + 3x_{k+2} - x_{k+3} = 0$$

$m = 4$ için $x = (k^2)$ olup

$$\Delta^4 x_k = x_k - 4x_{k+1} + 6x_{k+2} - 4x_{k+3} + x_{k+4} = 0$$

$m = 5$ için $x = (k^3)$ olup

$$\Delta^5 x_k = x_k - 5x_{k+1} + 10x_{k+2} - 10x_{k+3} + 5x_{k+4} - x_{k+5} = 0$$

dir. Bu şekilde devam edilirse $m \geq 3$ için $\Delta^m x_k = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu taktirde her bir $m \geq 3$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} u_k [f_k(q(\Delta_v^m x_k))]^{p_k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $x \in [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olduğunu gösterir. Fakat $x.y = (k^{2m-4})$ dizisi için $x.y \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ dir. Gerçekten

$m = 3$ için $xy = (k^2)$ olup

$$\Delta^3(x_k y_k) = x_k y_k - 3x_{k+1} y_{k+1} + 3x_{k+2} y_{k+2} - x_{k+3} y_{k+3} = 0$$

$m = 4$ için $xy = (k^4)$ olup

$$\Delta^4(x_k y_k) = x_k y_k - 4x_{k+1} y_{k+1} + 6x_{k+2} y_{k+2} - 4x_{k+3} y_{k+3} + x_{k+4} y_{k+4} = 24$$

$m = 5$ için $xy = (k^6)$ olup

$$\begin{aligned} \Delta^5(x_k y_k) &= x_k y_k - 5x_{k+1} y_{k+1} + 10x_{k+2} y_{k+2} - 10x_{k+3} y_{k+3} + 5x_{k+4} y_{k+4} - x_{k+5} y_{k+5} \\ &= -720k - 5 \end{aligned}$$

dir. Bu şekilde devam edilirse $x.y \notin [V, \lambda, F, p, q, u]_\infty (\Delta_v^m)$ olduğu görülür.

KAYNAKLAR

- [1] **Atıcı, G. and Bektaş, Ç. A.**, 2011. On some new generalized difference sequence spaces defined by a sequence of moduli. *Math. Slovaca.*, **61(5)**, 789-798.
- [2] **Bataineh, A. H. A.**, 2006. On a generalized difference sequence spaces defined by a modulus function and statistical convergence, *Commun. Korean Math. Soc.*, **21(2)**, 261-272.
- [3] **Bektaş, Ç. A.**, 2006. On some difference sequence spaces defined by a sequence of Orlicz functions, *J. Zhejiang Univ. Ser. A.*, **7 (12)**, 2093-2096.
- [4] **Bektaş, Ç. A. and Çolak, R.**, 2003. Generalized difference sequence spaces defined by a sequence of moduli. *Soochow J. Math.*, **29**, 215-220.
- [5] **Bektaş, Ç. A. and Çolak, R.**, 2007. Generalized strongly almost summable difference sequences of order m defined by a sequence of moduli. *Demonstratio Math.*, **40(3)**, 581-591.
- [6] **Bhardwaj, V. K.**, 2003. A generalization of a sequence space of Ruckle. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **95(5)**, 411-420.
- [7] **Connor, J.**, 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad. Math. Bull.* **32**, 194-198.
- [8] **Esi, A.**, 2009. Some classes of generalized difference paranormed sequence spaces associated with multiplier sequences. *J. Comp. Anal. Appl.*, **11(3)**, 536-545.
- [9] **Esi, A. and Tripathy, B. C.**, 2008. On some generalized new type difference sequence spaces defined by a modulus function in a seminormed space. *Fasciculi Math.*, **40**, 15-24.
- [10] **Esi, A., Tripathy, B.C. and Sarma, B.**, 2007. On some new type generalized difference sequence spaces. *Math. Slovaca*, **57(5)**, 475-482.
- [11] **Esi, A. and Işık, M.**, 2005. Some generalized difference sequence spaces. *Thai J. Math.*, **3(2)**, 241-247.
- [12] **Et, M.**, 2006. Spaces of Cesáro difference sequences of order r defined by a modulus function in a locally convex space. *Taiwanese J. Math.*, **10(4)**, 865-879.
- [13] **Et, M., Altın, Y. and Altınok, H.**, 2003. On some generalized difference

sequence spaces defined by a modulus function, *Filomat.*, **17**, 23-33.

[14] **Et, M. and Çolak, R.**, 1995. On some generalized difference sequence spaces. *Soochow J. Math.*, **21**, 377-386.

[15] **Et, M. and Esi, A.**, 2000. On Köthe -Toeplitz duals of generalized difference sequence spaces. *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, **23**, 1-8.

[16] **Et, M. and Nuray, F.**, 2001. Δ^m - Statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32**, 961-969.

[17] **Gaur, A. K. and Mursaleen, M.**, 1998. Difference sequence spaces defined by a sequence of moduli. *Demonstratio Math.*, **31**, 275-278.

[18] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequence of variation and sequence of fourier coefficients, *Math. Zeift.*, **118**, 93-102.

[19] **Kamthan, P. K. and Gupta, M.**, 1981. Sequence spaces and series. Marcel Dekker, New York.

[20] **Khan, V. A. and Ahmad, A.**, 2011. On some generalized difference sequence spaces defined by a sequence of moduli, *IJRRAS*, **7(2)**, 106-110.

[21] **Kızmaz, H.**, 1981. On certain sequence spaces. *Canad. Math. Bull.*, **24**, 169-176.

[22] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.

[23] **Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis. Camb. Univ. Press, Cambridge, Second Edition, London and New York.

[24] **Maddox, I. J.**, 1986. Sequence spaces defined by a modulus. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **100**, 161-166.

[25] **Malkowsky, E. and Savaş, E.**, 2000. Some λ -sequence spaces defined by a modulus. *Arch. Math. (Brn.)*, **36**, 219-228.

[26] **Nakano, H.**, 1953. Concave modulars, *J. Math. Soc. Japan*, **5**, 22-49.

[27] **Ruckle, W. H.**, 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. *Canad. J. Math.*, **25**, 973-978.

[28] **Wilansky, A.**, 1984. Summability through Functional Analysis. Nort-Holland

Mathematics studies, **85**, Nort-Holland.

[29] **Wilansky, A.**, 1964. Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ’ da doğmuşum. İlköğretim ve lise öğrenimimi Elazığ’ da tamamladım. 2004 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği’ ni kazandım. 2008 yılında mezun oldum, aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında ilk yılı "bilimsel hazırlık" olan yüksek lisans öğrenimime başladım. 2009 yılında Elazığ’ da İlköğretim Matematik Öğretmeni olarak göreve başladım ve bu görevi halen devam ettirmekteyim.

Suzan ZEREN