

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİN  
ÖRNEK EKSTREMLERİNİN MOMENTLERİ

Ayşe TURAN

Tez Yöneticisi  
Yrd. Doç.Dr. Sinan ÇALIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008



T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİN  
ÖRNEK EKSTREMLERİNİN MOMENTLERİ

Ayşe TURAN

Yüksek Lisans Tezi  
İstatistik Anabilim Dalı

Bu tez .../.../... tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile başarılı/ başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Sinan ÇALIK

Üye: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun .../.../... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

## **TEŞEKKÜR**

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

## İÇİNDEKİLER

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| İçindekiler .....        | I   |
| Tabloların Listesi ..... | II  |
| Eklerin Listesi .....    | III |
| Kısaltmalar .....        | IV  |
| Özet .....               | V   |
| Abstract .....           | VI  |
| Giriş .....              | 1   |

### 1. BÖLÜM

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1.1. Temel Tanım ve Teoremler ..... | 2 |
|-------------------------------------|---|

### 2. BÖLÜM

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları .....                           | 7  |
| 2.2. Kesikli Dağılımdaki Sıra İstatistikleri .....                      | 10 |
| 2.3. Kesikli Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Dağılımları .....         | 11 |
| 2.4. Kesikli Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Bileşik Dağılımları ..... | 12 |
| 2.5. Momentler ve Çarpım Momentleri .....                               | 15 |

### 3. BÖLÜM

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Kesikli Ana Kütlelerin Sıra İstatistiklerine Alternatif Yaklaşım ..... | 18 |
| 3.2. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri .....                   | 19 |
| 3.3. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Momentleri .....       | 20 |

### 4. BÖLÜM

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 4.1. Tartışma ve Sonuç ..... | 29 |
|------------------------------|----|

|                 |    |
|-----------------|----|
| Kaynaklar ..... | 30 |
|-----------------|----|

|                |    |
|----------------|----|
| Özgeçmiş ..... | 32 |
|----------------|----|

### Ekler

#### Ek 1:

Ek 1.1: Tablo 3.3.6' daki beklenen değer için Matlab programı

Ek 1.2: Tablo 3.3.6' daki varyans için Matlab programı

Ek 1.3: Tablo 3.3.7' deki beklenen değer için Matlab programı

Ek 1.4: Tablo 3.3.7' deki varyans için Matlab programı

## TABLoların LİSTESİ

**Tablo 3.3.1:**  $n = 10$  a kadar  $s_n(k)$  değerleri.

**Tablo 3.3.2:** Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun beklenen değerinin cebirsel ifadesi

**Tablo 3.3.3:** Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun varyansının cebirsel ifadesi

**Tablo 3.3.4:** Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değerinin cebirsel ifadesi

**Tablo 3.3.5:** Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun varyansının cebirsel ifadesi

**Tablo 3.3.6:**  $k = 10(10)50(50)100$  ve  $n = 1(1)10$  için kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun beklenen değeri

**Tablo 3.3.7:**  $k = 10(10)50(50)100$  ve  $n = 1(1)10$  için kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değeri

## **EKLERİN LİSTESİ**

### **EK 1:**

**Ek 1.1:** Tablo 3.3.6' daki beklenen değer için Matlab programı

**Ek 1.2:** Tablo 3.3.6' daki varyans için Matlab programı

**Ek 1.3:** Tablo 3.3.7' deki beklenen değer için Matlab programı

**Ek 1.4:** Tablo 3.3.7' deki varyans için Matlab programı

## KISALTMALAR

**cdf:** Kümülatif dağılım fonksiyonu

**pdf:** Olasılık yoğunluk fonksiyonu

**pmf:** Olasılık kütle fonksiyonu

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİN ÖRNEK EKSTREMLERİNİN MOMENTLERİ

Ayşe TURAN

Fırat Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Tez Yöneticisi  
Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

2008, sayfa: 32

Bu çalışma, dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, sıra istatistiklerin dağılımları için literatürdeki çalışmalar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun ve minimumunun momentleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve yapılabilecek çalışmalar tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sıra istatistikleri, momentler, örnek ekstremeleri, kesikli düzgün dağılım.

## **ABSTRACT**

Master's Thesis

# **THE MOMENTS OF SAMPLE EXTREMS OF ORDER STATISTICS FROM DISCRETE UNIFORM DISTRIBUTION**

Ayşe TURAN

Firat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Statistic

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

2008, page: 32

There are four chapters of this study.

In the first chapter, fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter, study in literature for distributions of order statistics are examined.

In the third chapter, the moments of sample maximum and minimum of order statistics from discrete uniform distribution are obtained.

In the final chapter, a discussion of results are summarized and some further research topics are proposed.

**Keywords:** Order statistics, moments, sample extremes, discrete uniform distribution.

## GİRİŞ

Sıra istatistikleri istatistik teorisinin en önemli kavramlarından biri olup, temel istatistik yöntemlerde ve istatistiksel sonuç çıkarımında kullanılmaktadır. Sıra istatistikleri olasılık dağılımlarının moment kuantillerinin tahmin edilmesinde önemli rol oynar. Sıra istatistiklerin bir başka uygulama alanı da güvenilirlik teorisi (reliability theory) dir. Aynı zamanda, teste tabi tutulan  $n$  tane ürünün yaşam zamanlarını gösterdiği için sıra istatistikleri yaşam analizinde de önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle, sıra istatistiklerine dayalı birçok istatistik, dağılımdan bağımsız (distribution free) özelliğinden dolayı parametrik olmayan yöntemlerde geniş şekilde kullanılmaktadır.

Matematiksel istatistiğin temel problemlerinden birisi tesadüfi değişkenin deneysel değerlerini kullanarak onun dağılım fonksiyonunu tahmin etmektir. Bazen dağılım fonksiyonunun analitik ifadesi belli olur, fakat birkaç bilinmeyen parametre içerir. Mesela; poisson ve üstel dağılımlar tek, normal ve gama dağılımları ise iki parametrelidir. Bu parametreler moment denilen sayısal göstergeler ile ifade edilmektedir. Bilinmeyen dağılım fonksiyonu belli koşullar altında momentler yardımıyla tek olarak belirlenebilir. Ayrıca olasılık ve stokastik süreçler için önem taşıyan bazı eşitsizlikler momentler yardımıyla ifade edilmektedir.

Literatürde konumuz ile ilgili çalışmalarda, kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerin ilk iki momentini Khatri (1962) elde etmiştir. Balakrishnan (1986) keyfi sürekli dağılımlardaki  $n$  boyutlu bir örnekteki sıra istatistiklerin tekli ve çarpım momentleri için mevcut olan indirgeme ilişki ve eşitsizliği kesikli durumlar için verilmiştir. Nagaraaja (1992)' deki makalesinde kesikli sıra istatistiklerindeki tüm gelişmeleri açık bir şekilde tartışmıştır. Arnold vd. (1992); Khatri' nin elde ettiği ilk iki momenti farklı bir yolla ispatlamışlardır. Çalık ve Güngör (2005); kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerin  $m$ .inci momentini ispat etmişlerdir. Ayrıca Çalık ve Güngör (2004)' de bir uygulama olarak kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değerini, örnek boyutu  $n = 15$ ' e kadar cebirsel olarak ifade etmişlerdir.

Bu çalışmamızın amacı kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin (maksimum ve minimum) ilk iki momentini ifade etmektir. Bununla birlikte, örnek boyutu  $n = 10$ ' a kadar bu örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansı için cebirsel ifadeler elde etmektir. Ayrıca, Matlab programı kullanarak kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları için sayısal sonuçlar çıkarmaktır.

## I. BÖLÜM

### 1.1. Temel Tanım ve Teoremler

#### Tanım 1.1.1 (Olasılık)

Bir olayın meydana gelmesindeki belirsizliğin ölçülmesinde kullanılan ve değeri 0(sıfır) ile 1(bir) arasında değişen bir sayıdır (Özçelik, 1987).

#### Tanım 1.1.2 ( Tesadüfi Değişken)

$S$ , olasılık ölçüsü olan bir örneklem uzayı ve  $X$  de  $S$ ' nin bütün öğeleri için tanımlanmış gerçel değerli bir fonksiyonsa  $X$ ' e tesadüfi değişken denir (Freund vd., 2002).

#### Tanım 1.1.3 (Olasılık Dağılımı)

Tesadüfi bir değişkenin bir değişim aralığındaki değerleri alabilmesi ihtimallerini ve bunların ifade edilmesinde kullanılan bir formül, tablo veya şekildir (Özçelik, 1987).

#### Tanım 1.1.4 (Kümülatif Dağılım Fonksiyonu)

$X$ , olasılık fonksiyonu  $P$  olan bir  $S$  örnek uzayında tanımlanmış bir tesadüfi değişken olsun. Herhangi bir gerçel değer  $x$  için,  $X$ ' in kümülatif dağılım fonksiyonu gerçel sayılar kümesinde  $x$ ' e eşit veya ondan küçük değerleri alan ve  $S$  örnek uzayında  $X$  tesadüfi değişkeni ile ilişkili olan olasılıktır. Bu fonksiyon,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

eşitliğiyle ifade edilir (Aytaç, 1994).

#### Tanım 1.1.5 (Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu)

Değerleri  $f(x)$  olan bir fonksiyon,

1.  $f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty,$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

şartlarını sağhyorsa  $f(x)$ ' e  $X$  sürekli tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

#### Tanım 1.1.6 (Kesikli Tesadüfi Değişken)

Tanım aralığı sonlu ya da sayılabilir sonsuz elemanlı olan tesadüfi değişkenlere kesikli tesadüfi değişken denir (Freund vd., 2002).

**Tanım 1.1.7 (Olasılık Fonksiyonu)**

$X$  kesikli bir tesadüfi değişkense,

$$f(x) = P(X = x)$$

ile verilen fonksiyona  $X$ ' in olasılık fonksiyonu denir (Freund vd., 2002).

**Tanım 1.1.8 (Bileşik Olasılık Dağılımı)**

$X$  ile  $Y$  kesikli tesadüfi değişkenler ise,

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

ile gösterilen fonksiyona  $X$  ile  $Y$ ' nin bileşik olasılık dağılımı denir (Freund vd., 2002).

**Tanım 1.1.9 (Bernoulli Olasılık Dağılımı)**

Tesadüfi deneylerde her deneme birbirinden bağımsız ve her denemedeki muhtemel sonuç sayısı iki ise,  $p$  parametrelili,

$$P(x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad , \quad x = 0, 1$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olasılık dağılımına, bernoulli olasılık dağılımı denir (Özçelik, 1987).

**Tanım 1.1.10 (Binom Olasılık Dağılımı)**

Tesadüfi deneylerde her deneme birbirinden bağımsız ve her denemedeki muhtemel sonuç sayısı iki ise,  $p$  parametrelili,

$$Pb(x; p : n, ) = \frac{n!}{x!(n - x)!} p^x q^{n-x}$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olasılık dağılımına, binom olasılık dağılımı denir (Wilks, 1962).

**Tanım 1.1.11 (Maltinom Olasılık Dağılımı)**

Tesadüfi deneylerde her deneme birbirinden bağımsız ve her denemedeki muhtemel sonuç sayısı ikiden fazla ise,  $P_1, \dots, P_k$  parametrelili,

$$P_m(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k : n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} P_1^{x_1} . P_2^{x_2} \dots P_k^{x_k}$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olasılık dağılımına, multinom olasılık dağılımı denir (Wilks, 1962).

**Tanım 1.1.12 (Marjinal Dağılım)**

$X$  ve  $Y$  kesikli tesadüfi değişkenler,  $f(x, y)$  de bunların  $(x, y)$  noktasındaki ortak olasılık dağılımı ise,

$$g(x) = \sum_y f(x, y)$$

ile gösterilen fonksiyona  $X$ ' in marjinal dağılımı denir. Benzer biçimde,

$$h(y) = \sum_x f(x, y)$$

ile gösterilen fonksiyona  $Y$ ' nin marjinal dağılımı denir (Freund vd., 2002).

**Tanım 1.1.13 (Düzgün Dağılım)**

$X$  tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

$X$  tesadüfi değişkenine, düzgün dağılmış tesadüfi değişken ve  $f(x)$ ' e sürekli düzgün dağılım denir. Kümülatif düzgün dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir (Aytaç, 1994).

**Tanım 1.1.14 (Kesikli Düzgün Dağılım)**

Bir  $X$  tesadüfi değişkeni,

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k \text{ için}$$

olasılık fonksiyonuna sahip ise  $X$ ' e kesikli düzgün dağılım denir. Burada  $i \neq j$  iken  $x_i \neq x_j$  olur (Freund vd., 2002).

**Tanım 1.1.15 (Normal Dağılım)**

$X$  bir tesadüfi değişken olmak üzere,  $\mu$  (ortalama) ve  $\sigma$  (standart sapma) parametrelerine bağlı,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olasılık dağılımına, normal olasılık dağılımı denir (Özçelik, 1987).

**Tanım 1.1.16 (Beta Fonksiyonu)**

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanmış fonksiyona beta fonksiyonu denir (Giri, 1975).

**Tanım 1.1.17 (Gamma Fonksiyonu)**

Bir  $X$  tesadüfi değişkeni,

$$g(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{değilse} \end{cases}$$

ile gösterilen fonksiyona sahipse  $X$  e gamma tesadüfi değişkeni denir. Burada  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  dir (Freund vd., 2002).

**Tanım 1.1.18 (Stokastik Bağımsızlık)**

$f_1(x_1)$  ve  $f_2(x_2)$  sırasıyla  $X_1$  ve  $X_2$ ' nin marjinal yoğunluk fonsiyonları ve  $f$  de  $X_1$  ve  $X_2$ ' nin bileşik yoğunluk fonksiyonu olmak üzere,  $X_1$  ve  $X_2$  tesadüfi değişkenlerinin stokastik olarak bağımsız olması için gerek ve yeter şart  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$  olmasıdır (Hogg and Craig, 1978).

**Teorem 1.1.1.**

Eğer  $X$ , ihtimal fonksiyonu  $f(x)$  ve kümülatif dağılım fonksiyonu  $F(x)$ ' e sahip sürekli bir tesadüfi değişken ise,

$$f(x) = F'(x)$$

eşitliği vardır (Hogg and Craig, 1978).

**Teorem 1.1.2.**

Bir tesadüfi değişken olan  $X$ ' in aralığı  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$  değerlerinden oluşuyorsa,  $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$  ve  $i = 2, 3, \dots, n$  için,

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

olur (Freund vd., 2002).

**Teorem 1.1.3.**

$X_1, X_2, \dots, X_n$ , sürekli  $F$  dağılım fonsiyonuna sahip bir örneklem olmak üzere,  $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$  bu örneklemde sıra istatistiklerini gösterir.

$$U_{1:n} = F(X_{1:n}), U_{2:n} = F(X_{2:n}), \dots, U_{n:n} = F(X_{n:n})$$

olmak üzere  $U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}, (0, 1)$  aralığındaki düzgün dağılımdan alınmış örneklemin sıra istatistikleridir (David, 1981).

**Teorem 1.1.4.**

$X_1, X_2, \dots, X_n$  birbirinden bağımsızsa,

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n)$$

olur (Freund vd., 2002).

**Teorem 1.1.5.**

$X$ , destek kümesi  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  olan kesikli bir tesadüfi değişken olsun. O zaman, sağ taraftaki momentler her zaman mevcut olmak üzere,

$$\mu_{i:n} = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F_{i:n}(x)]$$

ve

$$\mu_{i:n}^{(2)} = 2 \sum_{x=0}^{\infty} x [1 - F_{i:n}(x)] + \mu_{i:n}$$

dır (Arnold vd 1992).

## 2.BÖLÜM

### 2.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$  örneklemini artan sırada  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  biçiminde sıralansın. Bu sıralanmış  $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$  tesadüfi değişkenlerine sıra istatistikleri denir. Burada  $X_{r:n}$   $n$  boyutlu örneklemin  $r.inci$  sıra istatistiği olarak adlandırılır.  $1.inci$  sıra istatistiği,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ve  $n.inci$  sıra istatistiği,

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

şeklindedir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  tesadüfi değişkenleri olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x)$  ve kümülatif dağılım fonksiyonu  $F(x)$  olan mutlak sürekli bir anakütleden seçilen tesadüfi bir örneklem olsun.

$1 \leq r \leq n$  olmak üzere  $X_{r:n}$ ' in ( $r.inci$  sıra istatistiğinin) olasılık fonksiyonunu,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1.1)$$

olarak çıkarabiliriz.

$1 \leq r \leq s \leq n$  olmak üzere  $X_{r:n}$  ve  $X_{s:n}$  sıra istatistiklerin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{r,s:n}(x, y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} \\ &\quad [1-F(y)]^{n-s} f(x)f(y), \quad -\infty < x < y < \infty \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

biçimindedir.

$X_{r_1:n} \leq X_{r_2:n} \leq \dots \leq X_{r_k:n}$ ,  $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ , ( $1 \leq k \leq n$ ) olmak üzere  $k \leq n$  sayıda sıra istatistiklerin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\dots(n-r_k)!} [F(x_1)]^{r_1-1} \\ &\quad [F(x_2) - F(x_1)]^{r_2-r_1-1} \times \dots \times [1-F(x_k)]^{n-r_k} f(x_1) \\ &\quad f(x_2) \dots f(x_k), \quad -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k < \infty \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \infty, x_0 = -\infty \\ r_{k+1} &= n, r_0 = 0 \end{aligned}$$

şartlarının sağlanması durumunda  $f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k f(x_i) \prod_{i=0}^k \frac{[F(x_{i+1}) - F(x_i)]^{r_{i+1} - r_i - 1}}{(r_{i+1} - r_i - 1)!} \quad (2.1.4)$$

olarak yazılabilir. Buna göre  $n$  tane  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  sıra istatistiklerin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n!f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) & , x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

biçimindedir. (David, 1981).

Denklem (2.1.5)' de tüm  $n$  sıra istatistiklerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu gözönüne alındığında  $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{r-1:n})$  ve  $(X_{r+1:n}, \dots, X_{n:n})$  değişkenleri üzerinden integral alınırsa  $(1 \leq r \leq n)$   $X_{r:n}$ ' in marjinal yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= n!f(x) \left\{ \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1)\dots f(x_{r-1})dx_1\dots dx_{r-1} \right\} \\ &\times \left\{ \int_x^\infty \dots \int_x^{x_{r+2}} f(x_{r+1})\dots f(x_n)dx_{r+1}\dots dx_n \right\} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

olarak elde edilebilir. Doğrudan integral alınarak,

$$\int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^{x_3} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1)f(x_2)\dots f(x_{r-1})dx_1dx_2\dots dx_{r-1} \quad (2.1.7)$$

$$= \frac{[F(x)]^{r-1}}{(r-1)!} \quad (2.1.8)$$

ve

$$\begin{aligned} &\int_x^\infty \dots \int_x^{x_{r+3}} \int_x^{x_{r+2}} f(x_{r+1})f(x_{r+2})\dots f(x_n)dx_{r+1}dx_{r+2}\dots dx_n \\ &= \frac{[1 - F(x)]^{n-r}}{(n-r)!} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

elde edilir. (2.1.8) ve (2.1.9) deklemleri (2.1.6) denkleminde yerine yazılırsa  $X_{r:n}$ ' in  $(1 \leq r \leq n)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu için (2.1.1) denklemi bulunur.

(2.1.1)' den ( $r = 1$  ve  $r = n$  aldığımızda) en küçük ve en büyük sıra istatistiklerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını sırasıyla,

$$f_{1:n}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x), -\infty < x < \infty \quad (2.1.10)$$

ve

$$f_{n:n}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x), -\infty < x < \infty \quad (2.1.11)$$

yazarız.

En küçük ve en büyük sıra istatistiklerin dağılım fonksiyonlarını kolayca (2.1.10) ve (2.1.11)' deki olasılık yoğunluk fonksiyonlarının integrallerini alarak,

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, -\infty < x < \infty \quad (2.1.12)$$

ve

$$F_{n:n}(x) = [F(x)]^n, -\infty < x < \infty \quad (2.1.13)$$

olarak çıkarırız.

Genel olarak (2.1.1)' de  $X_{r:n}$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonunun integrali alınarak  $X_{r:n}$  in dağılım fonksiyonu elde edilebilir. Farklı bir yöntemle  $X_{r:n}$ ' in dağılım fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} \leq x) \\ &= \Pr(X_1, X_2, \dots, X_n \text{ lerin en az } r \text{ tanesi } x' \text{ e eşit ve ondan küçüktür}) \\ &= \sum_{i=r}^n \Pr(X_1, X_2, \dots, X_n \text{ lerin tam olarak } i \text{ tanesi } x' \text{ e eşit ve ondan küçüktür}) \\ &= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

olarak da çıkarabiliriz. Böylece  $X_{r:n}$ ' in  $(1 \leq r \leq n)$  kümülatif dağılım fonksiyonunu basitçe  $n$  denemede başarılı olanların  $F(x)$ ' li binom dağılımı ( $r$ ' den başlayarak) olasılığı olduğunu buluruz. (2.1.14) denkleminde  $r = 1$  ve  $r = n$  aldığımızda sırasıyla (2.1.12) ve (2.1.13)' deki ifadeleri elde edebiliriz. Bundan başka,

$$\sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \int_0^p \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, 0 < p < 1 \quad (2.1.15)$$

eşitliğini kullanarak (2.1.14)' deki benzer olarak  $X_{r:n}$ ' in kümülatif dağılım fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, \\ &= I_{F(x)}(r, n-r+1), -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

olarak yazabiliriz. Burada  $I$  incomplete beta fonksiyonudur. (2.1.16)' daki  $F_{r:n}(x)$ ' in ifadesi ister sürekli ister kesikli olsun herhangi bir keyfi anakütle için sağlanır. Bununla birlikte anakütlenin mutlak sürekli olduğu farz edildiğinde (2.1.16)' daki kümülatif dağılım fonksiyonu ifadesinin diferensiyeli alınarak  $X_{r:n}$ ' in  $(1 \leq r \leq n)$  olasılık yoğunluk fonksiyonunu (2.1.1)' de verildiği gibi elde edebiliriz.

## 2.2. Kesikli Dağılımdaki Sıra istatistikleri

Şimdi  $r$ .inci sıra istatistiği için üç ifade elde edeceğiz. İlk ikisi  $F_{r:n}(x)$  ifadesine dayandırılmıştır. Sonuncusu ise çok terimli argümente dayandırılmıştır.

### Yaklaşım 1 (Binom Toplamı)

Teorem 1.1.2. gereğince  $F_{r:n}(x)$  ifadesini sağlayan denklem kesikli durumda  $X_{r:n}$ ' in herbir mümkün  $x$  değeri için,

$$f_{r:n}(x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-) \quad (2.2.1)$$

dir. Bu nedenle,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \{ [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i} - [F(x-)]^i [1-F(x-)]^{n-i} \} \quad (2.2.2)$$

yazabiliriz. Benzer olarak  $F_{r:n}(x)$  için negatif binom toplam formu kullanılabilir.

### Yaklaşım 2 (Beta İntegral Formu)

Hesaplama, amaçları için önceki ifadede daha iyidir.  $f_{r:n}(x)$  için bir ifade beta integral formunda kesikli sıra istatistiklerin bağımlı yapılarını çalışmak için faydalıdır. (2.1.1) ve (2.2.1)' de verilen  $F_{r:n}(x)$ ' in formu kullanılarak yapılır. Bir başka deyişle,

$$f_{r:n}(x) = C(r; n) \int_{F(x-)}^{F(x)} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du, \quad (2.2.3)$$

dir. Burada,

$$C(r; n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \quad (2.2.4)$$

dir.

### Yaklaşım 3 (Çoklu Argument)

Mutlak sürekli durumlarda, çoklu denemeleri gerektiren bir argument (2.2.2) ile verilen  $X_{r:n}$ ' in pdf' sini elde etmek için kullanılmıştır. Fakat  $X_{r:n}$ ' in pmf' si için sonuç ifadesini bulmak zordur. Çünkü kesikli tesadüfi değişkenler için sıra istatistiklerin dağılımı genelde daha karmaşıktır.

Bunun için bir  $X$  gözlem değeri için şu üç farklı olayı gözönüne alalım;  $\{X < x\}$ ,  $\{X = x\}$ ,  $\{X > x\}$ . Bu olayların olasılıkları sırasıyla  $F(x-)$ ,  $f(x)$  ve  $1 - F(x)$ ' dir.  $\{X_{r:n} = x\}$  olayı  $r(n - r + 1)$  farklı şekilde meydana gelebilir;  $i = 0, 1, \dots, r-1$  ve  $s = 0, 1, \dots, n-r$  olmak üzere  $(r-1-i)$  tane gözlem değeri  $x$ ' den küçük,  $(n-r-s)$  tanesi  $x$ ' den büyük ve kalanları ise  $x$  değerine eşittir. O halde,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{n! [F(x-)]^{r-1-i} [1 - F(x)]^{n-r-s} [f(x)]^{s+i+1}}{(r-1-i)!(n-r-s)!(s+i+1)!}$$

yazarız. Burada  $x = 0$  ise  $F(x-) = 0$ ' dir.

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= r \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{r-1}{i} \binom{n-r}{s} [F(x-)]^{r-1-i} [1 - F(x)]^{n-r-s} f(x) \\ &\quad \times \int_0^1 [y f(x)]^i [(1-y) f(x)]^s dy \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

### 2.3. Kesikli Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Dağılımları

$X_{r:n} (1 \leq i \leq n)$ ' in cdf' u,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} \leq x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \\ &= \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Kümülatif dağılımı bir binomial formda yazmanın yerine,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-1-i}{r-1} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r-i}, -\infty < x < \infty$$

olarak negatif binomial formda da ifade edilebilir.

Yukarıda verilen tüm ifadelerin ister sürekli ister süreksiz olsun herhangi bir keyfi anakütle için sağlanmış olduğu tetkik edilir.

Kesikli anaküteller için  $X_{r:n}$  ( $1 \leq r \leq n$ )' in olasılık kütle fonksiyonu (2.2.1)' den,

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} = x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-) \\ &= \int_{F(x-)}^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. Özel durumda daima,

$$f_{1:n}(x) = [1 - F(x-)]^n - [1 - F(x)]^n$$

ve

$$f_{n:n}(x) = [F(x)]^n - [F(x-)]^n$$

yazabiliriz..

#### 2.4. Kesikli Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Bileşik Dağılımları

Sıra istatistiklerin bileşik dağılımları benzer olarak çıkarılabilirse bile doğal olarak çok daha karmaşıktır. Örneğin:  $X_{r:n}$  ve  $X_{s:n}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ )' lerin bileşik cdf' sinin,

$$\begin{aligned} F_{r,s:n}(x) &= F_{s:n}(x_s), x_r \geq x_s \text{ için} \\ F_{r,s:n}(x) &= \sum_{j=s}^n \sum_{i=r}^j \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} [F(x_r)]^i [F(x_s) - F(x_r)]^{j-i} \\ &\quad \times [1 - F(x_s)]^{n-j}, x_r < x_s \text{ için} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

olduğu gösterilebilir. Bu ifade ister sürekli ister kesikli herhangi bir anakütle için sağlar.

Kesikli anaküteller için  $X_{r:n}$  ve  $X_{s:n}$  ( $1 \leq r \leq s \leq n$ )' lerin bileşik olasılık kütle fonksiyonu (pmf) (2.4.1)' den,

$$\begin{aligned}
f_{r,s:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} = x_r, X_{s:n} = x_s) \\
&= F_{r,s:n}(x_r, x_s) - F_{r,s:n}(x_r-, x_s) - F(x_r, x_s-) + F_{r,s:n}(x_r-, x_s-)(2.4.2)
\end{aligned}$$

elde edilebilir.

Şimdi  $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$  için  $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$  sıra istatistiklerin bileşik olasılık kütle fonksiyonu incelenecektir. Bunun için de önce  $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$  sıra istatistiklerin bileşik fonksiyonu bulunacaktır.  $1 \leq m \leq n$  olmak üzere  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  değerleri için,

$$\begin{aligned}
(x_1 = \dots = x_{i_1}) &< (x_{i_1+1} = \dots = x_{i_2}) < \dots < (x_{i_{m-2}+1} = \dots = x_{i_{m-1}}) \\
&< (x_{i_{m-1}+1} = \dots = x_{i_m}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m = n
\end{aligned} \quad (2.4.3)$$

geçerli olsun. O zaman  $i_0 = 0$  kabul edilirse,

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{s=1}^m \frac{[f(x_{i_s})]^{i_s - i_{s-1}}}{(i_s - i_{s-1})!} \quad (2.4.4)$$

elde edilir. Bu son ifade bir integral olarak yazılabilir. Bunun için,

$$D = \left\{ (u_1, \dots, u_n) : u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n, F(x_{i_s}-) \leq u_t \leq F(x_{i_s}) \right. \\ \left. 1 \leq s \leq m, i_{s-1} + 1 \leq t \leq i_s \right\} \quad (2.4.5)$$

tanımlanırsa,

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \int_D du_1 du_2 \dots du_n \quad (2.4.6)$$

olur.  $1 \leq s \leq m$  ve  $i_0 = 0$  olmak üzere,

$$A_s = \left\{ (u_{i_{s-1}+1}, u_{i_{s-1}+2}, \dots, u_{i_s}) : u_{i_{s-1}+1} \leq \dots \leq u_{i_s} \text{ ve } u_{i_{s-1}+1} \leq t \leq u_{i_s} \text{ için } F(x_{i_s}-) \leq u_t \leq F(x_{i_s}) \right\} \quad (2.4.7)$$

ise  $D = \bigcup_{s=1}^m A_s$  yazılabilir. Her bir  $A_s$  kümesinde belli sayıda  $x$  değerleri eşittir;  $x_{i_{s-1}+1} = \dots = x_{i_s}$ . Bu kümelerdeki integraller aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\int_{A_s} du_{i_{s-1}+1} du_{i_{s-1}+2} \dots du_{i_s} = \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{F(x_{i_s})} \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{u_{i_s}} \dots \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{u_{i_{s-1}+3}} \int_{F(x_{i_{s-1}})}^{u_{i_{s-1}+2}} du_{i_{s-1}+1} du_{i_{s-1}+2} \dots du_{i_s} \quad (2.4.8)$$

O halde,

$$\int_{A_s} du_{i_{s-1}+1} du_{i_{s-1}+2} \dots du_{i_s} = \frac{[F(x_{i_s}) - F(x_{i_{s-1}})]^{i_s - i_{s-1}}}{(i_s - i_{s-1})!} = \frac{[f(x_{i_s})^{i_s - i_{s-1}}]}{(i_s - i_{s-1})!} \quad (2.4.9)$$

dir.

Şimdi (2.4.6) kullanılarak  $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$  için  $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$  sıra istatistiklerin bileşik olasılık kütle fonksiyonu hesaplanacaktır.  $k < n$  ise  $x_{r_1} \leq x_{r_2} \leq \dots \leq x_{r_k}$  için

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}) = \sum f_{1,2,\dots,k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.4.10)$$

Buradaki toplam  $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}$  hariç  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  koşulunu sağlayan  $x_i$  değerleri üzerinden alınmıştır. O halde  $D_l$  kümeleri  $x_i$  değerlerinin değişik biçimlerde eşitlik durumlarını göstermek üzere,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}) = n! \sum_l \int_{D_l} du_1 du_2 \dots du_n \quad (2.4.11)$$

$$\cup_l D_l = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n, F(x_{r_i-}) \leq u_{r_i} \leq F(x_{r_i}), 1 \leq i \leq k\}$$

$$B_i = \{(u_{r_{i-1}+1}, u_{r_{i-1}+2}, \dots, u_{r_i-1}) : u_{r_{i-1}+1} \leq u_{r_{i-1}+2} \leq \dots \leq u_{r_i-1} \leq u_{r_i}\} \quad (2.4.12)$$

için

$$\begin{aligned} \int_{B_i} du_{r_{i-1}+1} du_{r_{i-1}+2} \dots du_{r_i-1} &= \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_i}} \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_i-1}} \dots \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_{i-1}+2}} \int_{u_{r_{i-1}}}^{u_{r_{i-1}+1}} du_{r_{i-1}+1} du_{r_{i-1}+2} \dots du_{r_i-1} \\ &= \frac{(u_{r_i} - u_{r_{i-1}})^{r_i - r_{i-1} - 1}}{(r_i - r_{i-1} - 1)!} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}) &= C(r_1, r_2, \dots, r_k : n) \int_B \left\{ \prod_{i=1}^k (u_{r_i} - u_{r_{i-1}})^{r_i - r_{i-1} - 1} \right\} \\ &\quad (1 - u_{r_k})^{n - r_k} du_{r_1} \dots du_{r_k} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

olarak hesaplanır. Burada  $r_0 = 0$  ve  $u_0 = 0$

$$C(r_1, r_2, \dots, r_k : n) = \frac{n!}{(n - r_k)! \prod_{i=1}^k (r_i - r_{i-1} - 1)!} \quad (2.4.15)$$

ve (2.4.14) açık bir şekilde,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k : n}(x) = \frac{n!}{(r_1 - 1)!(r_2 - r_1 - 1)! \dots (n - r_k)!} \int_B u_{r_1}^{r_1-1} (u_{r_2} - u_{r_1})^{r_2-r_1-1} \times (u_{r_k} - u_{r_{k-1}})^{r_k-r_{k-1}-1} (1 - u_{r_k})^{n-r_k} du_{r_1} \dots du_{r_k}, \quad (2.4.16)$$

olarak yazılabilir.

$$B = \{(u_{r_1}, u_{r_2}, \dots, u_{r_k}) : u_{r_1} \leq u_{r_2} \leq \dots \leq u_{r_k}, F(u_{r_i}-) \leq u_{r_i} \leq F(u_{r_i}), i = r_1, r_2, \dots, r_k \}$$

ile verilen  $k$  boyutlu bir uzaydır.

## 2.5. Momentler ve Çarpım Momentleri

$\mu_{i:n}^{(k)}$  ve  $E(X_{i:n}^k)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ile sıra istatistiklerin tekli momentlerini tanımlayalım.

Açıktır ki bu momentler sürekli durumda,

$$\begin{aligned} \mu_{i:n}^{(k)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{i:n}(x) dx \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x) dx \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

ile ve kesikli durumda,

$$\mu_{i:n}^{(k)} = \sum_x x^k f_{i:n}(x), 1 \leq i \leq n \quad (2.5.2)$$

ile hesaplanabilir.

Standart düzgün dağılıma ait sıra istatistikleri kullanılarak (2.5.1) formülü daha sade bir biçimde yazılabilir. Bunun için önce sıra istatistiklerin önemli bir özelliği ifade edilecektir.

$U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}$  sürekli standart düzgün dağılımdan tesadüfi seçilmiş bir örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. Eğer  $F(x)$  sürekli ise  $U = F(x)$  dönüşümü ile  $X$  tesadüfi değişkeni  $U$  standart düzgün tesadüfi değişkenine dönüşür. Bu durumda  $F(X_{i:n})$  ile  $U_{i:n}$  tesadüfi değişkenlerinin dağılımı birbirine eşittir. Bu kısaca,

$$F(X_{i:n}) \stackrel{d}{=} U_{i:n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.3)$$

şeklinde gösterilecektir.

$F$  dağılım fonksiyonunun ters fonksiyonu,

$$F^{-1}(y) = \sup \{x : F(x) \leq y\} \quad (2.5.4)$$

olmak üzere herhangi bir  $F$  dağılım fonksiyonu için

$$F^{-1}(U_i) \stackrel{d}{=} X_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.5)$$

$F^{-1}$  sıralamayı koruyan bir fonksiyon olduğundan,

$$F^{-1}(U_{i:n}) \stackrel{d}{=} X_{i:n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.6)$$

olacaktır.

O halde (2.5.6) kullanılarak,

$$\mu_{i:n}^{(k)} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 [F^{-1}(u)]^k u^{i-1} (1-u)^{n-i} du \quad 1 \leq i \leq n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.5.7)$$

Bu ifadede beta fonksiyonu bulunduğu gözönüne alınırsa  $g_{i:n}(u)$ ,  $Beta(i, n+1-i)$  yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\mu_{i:n}^{(k)} = \int_0^1 [F^{-1}(u)]^k g_{i:n}(u) du, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 1 \quad (2.5.8)$$

yazılabilir.

Benzer olarak  $\mu_{i,j:n}^{(k,l)}$  ve  $E(X_{i:n}^k, X_{j:n}^l)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ile sıra istatistiklerin çarpım momentlerini tanımlayalım. Açıkthat ki bu momentler sürekli durumda,

$$\begin{aligned} \mu_{i,j:n}^{(k,l)} &= \int \int_{x < y} x^k y^l f_{i,j:n}(x, y) dx dy \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \int \int_{x < y} x^k y^l [F(x)]^{i-1} [F(y) - F(x)]^{j-i-1} \\ &\quad \times [1 - F(y)]^{n-j} f(x) f(y) dx dy \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

ile ve kesikli durumda,

$$\mu_{i,j:n}^{(k,l)} = \sum_{x \leq y} \sum x^k y^l f_{i,j:n}(x, y), 1 \leq i \leq j \leq n \quad (2.5.10)$$

ile hesaplanabilir.

Sıra istatistiklerin varyansı  $Var(X_{i:n})$ ,  $\sigma_{i,i:n}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ile tanımlanmıştır ve

$$\sigma_{i:n}^2 = Var(X_{i:n}) = \mu_{i:n}^{(2)} - \mu_{i:n}^2, (1 \leq i \leq n) \quad (2.5.11)$$

olarak hesaplanabilir.

Benzer olarak sıra istatistiklerin kovaryansı,  $\sigma_{i,j:n}$   $1 \leq i \leq j \leq n$  ile tanımlanmıştır ve

$$\sigma_{i,j:n} = Cov(X_{i:n}, X_{j:n}) = \mu_{i,j:n} - \mu_{i:n}\mu_{j:n}, 1 \leq i \leq j \leq n \quad (2.5.12)$$

olarak hesaplanabilir. Burada  $\mu_{i,j:n} = E(X_{i:n}X_{j:n})$  dir.

### 3.BÖLÜM

#### 3.1. Kesikli Ana Kütlelerin Sıra İstatistiklerine Alternatif Yaklaşım

$X$ ,  $f(k) = \Pr(X = k)$  olasılık kütle fonksiyonlu (pmf) ve  $F(k) = \Pr(X \leq k)$  kümülatif olasılık kütle fonksiyonlu (cdf)  $0, 1, 2, \dots$  değerlerini alan bir kesikli tesadüfi değişken olsun. Farzedelim ki;  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $X$ ' de olduğu gibi aynı pmf' li  $n$  tane bağımsız ve aynı dağılmış tesadüfi değişken olsun.  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  uygun sıralı istatistikler olsun.  $f_{r:n}(x)$ ,  $X_{r:n}$ ' in olasılık kütle fonksiyonunu Yaklaşım 1' den,

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} = x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-) \\ &= \sum_{i=r}^n C(i:n) \{[F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} - [F(x-)]^i [1 - F(x-)]^{n-i}\} \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Yaklaşım 2' den,

$$\sum_{i=r}^n C(i:n) [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} = \int_0^{F(x)} r C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du, \quad 0 < u < 1$$

ve

$$f_{r:n}(x) = \int_{F(x-)}^{F(x)} r C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$$

yazabiliriz.

Özel olarak  $r = 1$  için  $X_{1:n}$ ' in pmf' si,

$$f_{1:n}(x) = n \int_{F(x-)}^{F(x)} (1-u)^{n-1} du = [\bar{F}(x-)]^n - [\bar{F}(x)]^n, \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x)$$

ve  $r = n$  için  $X_{n:n}$ ' in pmf' sini,

$$f_{n:n}(x) = n \int_{F(x-)}^{F(x)} u^{n-1} du = [F(x)]^n - [F(x-)]^n$$

olarak elde edebiliriz.

$1 \leq r \leq s \leq n$  olmak üzere  $X_{r:n}$  ve  $X_{s:n}$ ' in bileşik pmf' sini,

$$\begin{aligned}
f_{r,s:n}(x,y) &= \Pr(X_{r:n} = x, X_{s:n} = y) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{n-s} \sum_{u+w \leq s-r-1}^{u,w=0} C(r-i-1, r+w, s-1-u, s+j : n) \\
&\quad \{[F(x-)]^{r-1-i} [F(x)]^{w+1+i}\} [F(y-) - F(y)]^{s-u-r-w-1} \\
&\quad [F(y)]^{u+1+j} [1 - F(y)]^{n-s-j}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Basit olarak verilen ifadeden,

$$\begin{aligned}
f_{r,s:n}(x,y) &= \Pr(X_{r:n} = x, X_{s:n} = y) \\
&= r(s-r) C(r, s : n) \int_{F(x-)}^{F(x)} \int_{F(y-)}^{F(y)} \alpha^{r-1} (\beta - \alpha)^{s-r-1} (1 - \beta)^{n-s} d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

elde edilir.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$  'in bileşik pmf' si,

$$\begin{aligned}
f_{r_1, r_2, \dots, r_k : n}(x_1, x_2, \dots, x_k) &= C(r_1, r_2, \dots, r_k : n) \\
&\quad \int_D \prod_{i=1}^k (r_i - r_{i-1}) (u_i - u_{i-1})^{r_i - r_{i-1} - 1} (1 - u_k)^{n - r_k} du_1 du_2 \dots du_k
\end{aligned}$$

dir.

Burada

$$r_0 = 0, u_0 = 0 \text{ ve } \int_D = \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} \dots \int_{F(x_k-)}^{F(x_k)}$$

dir.

### 3.2. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri

$X, S = \{1, 2, \dots, k\}$  destek kümesi olan kesikli düzgün anakütledeki tesadüfi değişken olsun. O zaman bir  $X, [1, k]$  kesikli düzgündür.  $X$ ' in  $x \in S$  için pmf' si  $f(x) = \frac{1}{k}$  ve cdf' si  $F(x) = \frac{x}{k}$  ile verilmiştir. Bu nedenle  $r$ .inci sıra istatistiğin cdf' si,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x}{k}\right)^i \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{n-i}, x \in S$$

ile verilir.

Doğrudan  $x$  ve  $k$  seçimiyle binomial dağılımın cdf' si için tablolar da kullanılabilir. Örneğin  $k = 10$ ,  $S'$  de her  $x$  için  $x = 10p$ ,  $p = 0, 1(0, 1)1, 0$  olarak ifade edilebilir. Böylece  $x \in S$  için

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

binomial tablodan okunabilir ve  $f_{r:n}(x)$ ' de (2.2.1) kullanılarak elde edilebilir.

### 3.3. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Momentleri

Farzedelim ki  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olasılık kütle fonksiyonu  $f(x) = \frac{1}{k}$ , kümülatif dağılım fonksiyonu  $F(x) = \frac{x}{k}$ ,  $x = 1, 2, \dots, k$  olan  $n$  tane bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli anakütlerdeki düzgün tesadüfi değişkenlerdir. O zaman  $X_{r:n}$ ' in pmf' sini (2.2.3)' den,

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \int_{F(x-)}^{F(x)} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \\ &= \int_{(x-1)/k}^{x/k} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada  $C(r:n)$  (2.2.4)' de verilmiştir.

Özel olarak  $r = 1$  ve  $r = n$  için sırasıyla,

$$f_{1:n}(x) = \left( \frac{k+1-x}{k} \right)^n - \left( \frac{k-x}{k} \right)^n, \quad x = 1, 2, \dots, k \quad (3.3.1)$$

ve

$$f_{n:n}(x) = \left( \frac{x}{k} \right)^n - \left( \frac{x-1}{k} \right)^n, \quad x = 1, 2, \dots, k \quad (3.3.2)$$

yazabiliriz.

$X_{1:n}$ ' in ilk iki momentleri sırasıyla,

$$E(X_{1:n}) = \sum_{x=1}^k x \left[ \left( \frac{k+1-x}{k} \right)^n - \left( \frac{k-x}{k} \right)^n \right] = \sum_{i=1}^k \left( \frac{k+1-i}{k} \right)^n \quad (3.3.3)$$

ve

$$E(X_{1:n}^2) = \sum_{x=1}^k x^2 \left[ \left( \frac{k+1-x}{k} \right)^n - \left( \frac{k-x}{k} \right)^n \right] = \sum_{i=1}^k (2i-1) \left( \frac{k+1-i}{k} \right)^n \quad (3.3.4)$$

olarak elde edilir.

$X_{n:n}$  ' in ilk iki momenti sırasıyla,

$$E(X_{n:n}) = \sum_{x=1}^k x \left[ \left( \frac{x}{k} \right)^n - \left( \frac{x-1}{k} \right)^n \right] = \sum_{i=1}^{k-1} (-1) \left( \frac{i}{k} \right)^n + k \quad (3.3.5)$$

ve

$$E(X_{n:n}^2) = \sum_{x=1}^k x^2 \left[ \left( \frac{x}{k} \right)^n - \left( \frac{x-1}{k} \right)^n \right] = \sum_{i=1}^{k-1} (-2i-1) \left( \frac{i}{k} \right)^n + k^2 \quad (3.3.6)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, (3.3.3) ve (3.3.4)' dan örnek minimumunun varyansını

$$\begin{aligned} \sigma_{1:n}^2 &= E(X_{1:n}^2) - E(X_{1:n})^2 \\ &= \sum_{i=1}^k (2i-1) \left( \frac{k+1-i}{k} \right)^n - \left[ \sum_{i=1}^k \left( \frac{k+1-i}{k} \right)^n \right]^2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

ve benzer şekilde (3.3.5) ve (3.3.6)' den örnek maksimumunun varyansını,

$$\begin{aligned} \sigma_{n:n}^2 &= E(X_{n:n}^2) - E(X_{n:n})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (-2i-1) \left( \frac{i}{k} \right)^n + k^2 - \left[ \sum_{i=1}^{k-1} (-1) \left( \frac{i}{k} \right)^n + k \right]^2 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

olarak elde edebiliriz.

(3.3.3), (3.3.5), (3.3.7) ve (3.3.8)' in sağ tarafındaki toplamların hesaplanabilmesi için

$$s_n(k) = 1^n + 2^n + \dots + k^n = \sum_{i=1}^k i^n \quad (3.3.9)$$

toplamını kullanabiliriz. Bu toplamın  $n = 10$ ' a kadar cebirsel ifadelerini Zwillinger, D., (1996) elde etmiştir. Bu ifadeler Tablo 3.3.1' de verilmiştir.

Bununla birlikte (3.3.3), (3.3.5), (3.3.7) ve (3.3.8)' deki eşitliklerin  $n = 10$ ' a kadar (3.3.9) toplamı kullanılarak kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları cebirsel olarak elde edilmiş ve bu sonuçlar Tablo 3.3.2, Tablo 3.3.3, Tablo 3.3.4 ve Tablo 3.3.5' de verilmiştir.

Ayrıca, (3.3.3), (3.3.5), (3.3.7) ve (3.3.8) eşitlikleri için Matlab programı kullanılarak  $k = 10 (10) 50 (50) 100$  ve  $n = 1 (1) 10$  için kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları için sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar Tablo 3.3.6 ve Tablo 3.3.7’ de verilmiştir.

**Tablo 3.3.1**

$n = 10$ ’ a kadar  $s_n(k)$  değerleri

| $n$ | $s_n(k)$                                                         |
|-----|------------------------------------------------------------------|
| 1   | $1/2k(k+1)$                                                      |
| 2   | $1/6k(2k^2+3k+1)$                                                |
| 3   | $1/4k^2(k+1)^2$                                                  |
| 4   | $1/30k(2k^2+3k+1)(3k^2+3k-1)$                                    |
| 5   | $1/12k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)$                                      |
| 6   | $1/42k(2k^2+3k+1)(3k^4+6k^3-3k+1)$                               |
| 7   | $1/24k^2(k+1)^2(3k^4+6k^3-k^2-4k+2)$                             |
| 8   | $1/90k(2k^2+3k+1)(5k^6+15k^5+5k^4-15k^3-k^2+9k-3)$               |
| 9   | $1/20k^2(k+1)^2(2k^6+6k^5+k^4-8k^3+k^2+6k-3)$                    |
| 10  | $1/66k(2k^2+3k+1)(3k^8+12k^7+8k^6-18k^5-10k^4+24k^3+2k^2-15k+5)$ |

**Tablo 3.3.2**

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun beklenen değerin cebirsel ifadesi

| $n$ | $\mu_{1:n}$                                                        |
|-----|--------------------------------------------------------------------|
| 1   | $1/2 (k + 1)$                                                      |
| 2   | $1/6k^{-1} (2k^2 + 3k + 1)$                                        |
| 3   | $1/4k^{-1} (k^2 + 2k + 1)$                                         |
| 4   | $1/30k^{-3} (6k^4 + 15k^3 + 10k^2 - 1)$                            |
| 5   | $1/12k^{-3} (2k^4 + 6k^3 + 5k^2 - 1)$                              |
| 6   | $1/42k^{-5} (6k^6 + 21k^5 + 21k^4 - 7k^2 + 1)$                     |
| 7   | $1/24k^{-5} (3k^6 + 12k^5 + 14k^4 - 7k^2 + 2)$                     |
| 8   | $1/90k^{-7} (10k^8 + 45k^7 + 60k^6 - 42k^4 + 20k^2 - 3)$           |
| 9   | $1/20k^{-7} (2k^8 + 10k^7 + 15k^6 - 14k^4 + 10k^2 - 3)$            |
| 10  | $1/66k^{-9} (6k^{10} + 33k^9 + 55k^8 - 66k^6 + 66k^4 - 33k^2 + 5)$ |

**Tablo 3.3.3**

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun varyansının cebirsel ifadesi

| $n$ | $\sigma_{1:n}^2$                                                                                                                 |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $1/12 (k^2 - 1)$                                                                                                                 |
| 2   | $1/36k^{-2} (2k^2 + 1) (k^2 - 1)$                                                                                                |
| 3   | $1/240k^{-2} (9k^2 - 1) (k^2 - 1)$                                                                                               |
| 4   | $1/900k^{-6} (24k^6 - 21k^4 - 19k^2 + 1) (k^2 - 1)$                                                                              |
| 5   | $1/1008k^{-6} (20k^6 - 36k^4 - 15k^2 + 7) (k^2 - 1)$                                                                             |
| 6   | $1/1764k^{-10} (27k^{10} - 78k^8 + 6k^6 + 78k^4 - 13k^2 + 1) (k^2 - 1)$                                                          |
| 7   | $1/2880k^{-10} (35k^{10} - 145k^8 + 93k^6 + 213k^4 - 120k^2 + 20) (k^2 - 1)$                                                     |
| 8   | $1/8100k^{-14} (80k^{14} - 445k^{12} + 575k^{10} + 715k^8 - 1499k^6 + 541k^4 - 111k^2 + 9) (k^2 - 1)$                            |
| 9   | $1/13200k^{-14} (108k^{14} - 772k^{12} + 1571k^{10} + 911k^8 - 5821k^6 + 4389k^4 - 1683k^2 + 297) (k^2 - 1)$                     |
| 10  | $1/4356k^{-18} (30k^{18} - 267k^{16} + 767k^{14} - 25k^{12} - 3622k^{10} + 5690k^8 - 3572k^6 + 1444k^4 - 305k^2 + 25) (k^2 - 1)$ |

**Tablo 3.3.4**

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değerin cebirsel ifadesi

| $n$ | $\mu_{n:n}$                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------------------|
| 1   | $1/2 (k + 1)$                                                       |
| 2   | $1/6k^{-1} (4k^2 + 3k - 1)$                                         |
| 3   | $1/4k^{-1} (3k^2 + 2k - 1)$                                         |
| 4   | $1/30k^{-3} (24k^4 + 15k^3 - 10k^2 + 1)$                            |
| 5   | $1/12k^{-3} (10k^4 + 6k^3 - 5k^2 + 1)$                              |
| 6   | $1/42k^{-5} (36k^6 + 21k^5 - 21k^4 + 7k^2 - 1)$                     |
| 7   | $1/24k^{-5} (21k^6 + 12k^5 - 14k^4 + 7k^2 - 2)$                     |
| 8   | $1/90k^{-7} (80k^8 + 45k^7 - 60k^6 + 42k^4 - 20k^2 + 3)$            |
| 9   | $1/20k^{-7} (18k^8 + 10k^7 - 15k^6 + 14k^4 - 10k^2 + 3)$            |
| 10  | $1/66k^{-9} (60k^{10} + 33k^9 - 55k^8 + 66k^6 - 66k^4 + 33k^2 - 5)$ |

**Tablo 3.3.5**

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun varyansının cebirsel ifadesi

| $n$ | $\sigma_{n:n}^2$                                                                                                                 |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $1/12 (k^2 - 1)$                                                                                                                 |
| 2   | $1/36k^{-2} (2k^2 + 1) (k^2 - 1)$                                                                                                |
| 3   | $1/240k^{-2} (9k^2 - 1) (k^2 - 1)$                                                                                               |
| 4   | $1/900k^{-6} (24k^6 - 21k^4 - 19k^2 + 1) (k^2 - 1)$                                                                              |
| 5   | $1/1008k^{-6} (20k^6 - 36k^4 - 15k^2 + 7) (k^2 - 1)$                                                                             |
| 6   | $1/1764k^{-10} (27k^{10} - 78k^8 + 6k^6 + 78k^4 - 13k^2 + 1) (k^2 - 1)$                                                          |
| 7   | $1/2880k^{-10} (35k^{10} - 145k^8 + 93k^6 + 213k^4 - 120k^2 + 20) (k^2 - 1)$                                                     |
| 8   | $1/8100k^{-14} (80k^{14} - 445k^{12} + 575k^{10} + 715k^8 - 1499k^6 + 541k^4 - 111k^2 + 9) (k^2 - 1)$                            |
| 9   | $1/13200k^{-14} (108k^{14} - 772k^{12} + 1571k^{10} + 911k^8 - 5821k^6 + 4389k^4 - 1683k^2 + 297) (k^2 - 1)$                     |
| 10  | $1/4356k^{-18} (30k^{18} - 267k^{16} + 767k^{14} - 25k^{12} - 3622k^{10} + 5690k^8 - 3572k^6 + 1444k^4 - 305k^2 + 25) (k^2 - 1)$ |

**Tablo 3.3.6**

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun beklenen değeri ve varyansı

| $k$ | $n$ | $\mu_{1:n}$ | $\sigma_{1:n}^2$ | $k$ | $n$ | $\mu_{1:n}$ | $\sigma_{1:n}^2$ |
|-----|-----|-------------|------------------|-----|-----|-------------|------------------|
| 10  | 1   | 5.5000      | 8.2500           | 40  | 1   | 20.5000     | 133.2500         |
|     | 2   | 3.8500      | 5.5275           |     | 2   | 13.8375     | 88.8611          |
|     | 3   | 3.0250      | 3.7084           |     | 3   | 10.5063     | 59.9583          |
|     | 4   | 2.5333      | 2.6167           |     | 4   | 8.5083      | 42.6167          |
|     | 5   | 2.2083      | 1.9288           |     | 5   | 7.1771      | 31.6905          |
|     | 6   | 1.9784      | 1.4716           |     | 6   | 6.2268      | 24.4303          |
|     | 7   | 1.8080      | 1.1536           |     | 7   | 5.5146      | 19.3820          |
|     | 8   | 1.6773      | 0.9241           |     | 8   | 4.9611      | 15.7377          |
|     | 9   | 1.5743      | 0.7533           |     | 9   | 4.5187      | 13.0244          |
|     | 10  | 1.4914      | 0.6229           |     | 10  | 4.1572      | 10.9513          |
| 20  | 1   | 10.5000     | 33.2500          | 50  | 1   | 25.5000     | 208.2500         |
|     | 2   | 7.1750      | 22.1944          |     | 2   | 17.1700     | 138.8611         |
|     | 3   | 5.5125      | 14.9583          |     | 3   | 13.0050     | 93.7083          |
|     | 4   | 4.5167      | 10.6167          |     | 4   | 10.5067     | 66.6167          |
|     | 5   | 3.8542      | 7.8810           |     | 5   | 8.8417      | 49.5476          |
|     | 6   | 3.3821      | 6.0630           |     | 6   | 7.6529      | 38.2058          |
|     | 7   | 3.0291      | 4.7988           |     | 7   | 6.7617      | 30.3195          |
|     | 8   | 2.7555      | 3.8861           |     | 8   | 6.0689      | 24.6266          |
|     | 9   | 2.5374      | 3.2065           |     | 9   | 5.5150      | 20.3879          |
|     | 10  | 2.3597      | 2.6872           |     | 10  | 5.0621      | 17.1495          |

|    |    |         |         |     |    |         |          |
|----|----|---------|---------|-----|----|---------|----------|
| 30 | 1  | 15.5000 | 74.9167 | 100 | 1  | 50.5000 | 833.2500 |
|    | 2  | 10.5056 | 49.9722 |     | 2  | 33.8350 | 555.5278 |
|    | 3  | 8.0083  | 33.7083 |     | 3  | 25.5025 | 374.9583 |
|    | 4  | 6.5111  | 23.9500 |     | 4  | 20.5033 | 266.6167 |
|    | 5  | 5.5139  | 17.8016 |     | 5  | 17.1708 | 198.3571 |
|    | 6  | 4.8024  | 13.7160 |     | 6  | 14.7907 | 153.0017 |
|    | 7  | 4.2694  | 10.8751 |     | 7  | 13.0058 | 121.4653 |
|    | 8  | 3.8555  | 8.8242  |     | 8  | 11.6178 | 98.7006  |
|    | 9  | 3.5250  | 7.2972  |     | 9  | 10.5075 | 81.7515  |
|    | 10 | 3.2550  | 6.1304  |     | 10 | 9.5992  | 68.8024  |

**Tablo 3.3.7**

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değeri  
ve varyansı

| $k$ | $n$ | $\mu_{n:n}$ | $\sigma_{n:n}^2$ | $k$ | $n$ | $\mu_{n:n}$ | $\sigma_{n:n}^2$ |
|-----|-----|-------------|------------------|-----|-----|-------------|------------------|
| 10  | 1   | 5.5000      | 8.2500           | 40  | 1   | 20.5000     | 133.2500         |
|     | 2   | 7.1500      | 5.5275           |     | 2   | 27.1625     | 88.8611          |
|     | 3   | 7.9750      | 3.7084           |     | 3   | 30.4937     | 59.9583          |
|     | 4   | 8.4667      | 2.6167           |     | 4   | 32.4917     | 42.6167          |
|     | 5   | 8.7918      | 1.9288           |     | 5   | 33.8229     | 31.6905          |
|     | 6   | 9.0216      | 1.4716           |     | 6   | 34.7732     | 24.4303          |
|     | 7   | 9.1920      | 1.1536           |     | 7   | 35.4854     | 19.3820          |
|     | 8   | 9.3227      | 0.9241           |     | 8   | 36.0389     | 15.7377          |
|     | 9   | 9.4257      | 0.7533           |     | 9   | 36.4813     | 13.0244          |
|     | 10  | 9.5086      | 0.6229           |     | 10  | 36.8428     | 10.9513          |
| 20  | 1   | 10.5000     | 33.2500          | 50  | 1   | 25.5000     | 208.2500         |
|     | 2   | 13.8250     | 22.1944          |     | 2   | 33.8300     | 138.8611         |
|     | 3   | 15.4875     | 14.9583          |     | 3   | 37.9950     | 93.7083          |
|     | 4   | 16.4833     | 10.6167          |     | 4   | 40.4933     | 66.6167          |
|     | 5   | 17.1458     | 7.8810           |     | 5   | 42.1583     | 49.5476          |
|     | 6   | 17.6179     | 6.0630           |     | 6   | 43.3471     | 38.2058          |
|     | 7   | 17.9709     | 4.7988           |     | 7   | 44.2383     | 30.3195          |
|     | 8   | 18.2445     | 3.8861           |     | 8   | 44.9311     | 24.6266          |
|     | 9   | 18.4626     | 3.2065           |     | 9   | 45.4850     | 20.3879          |
|     | 10  | 18.6403     | 2.6872           |     | 10  | 45.9379     | 17.1495          |

|    |    |         |         |     |    |         |          |
|----|----|---------|---------|-----|----|---------|----------|
| 30 | 1  | 15.5000 | 74.9167 | 100 | 1  | 50.5000 | 833.2500 |
|    | 2  | 20.4944 | 49.9722 |     | 2  | 67.1650 | 555.5278 |
|    | 3  | 22.9917 | 33.7083 |     | 3  | 75.4975 | 374.9583 |
|    | 4  | 24.4889 | 23.9500 |     | 4  | 80.4967 | 266.6167 |
|    | 5  | 25.4861 | 17.8016 |     | 5  | 83.8292 | 198.3571 |
|    | 6  | 26.1976 | 13.7160 |     | 6  | 86.2093 | 153.0017 |
|    | 7  | 26.7306 | 10.8751 |     | 7  | 87.9942 | 121.4653 |
|    | 8  | 27.1445 | 8.8242  |     | 8  | 89.3822 | 98.7006  |
|    | 9  | 27.4750 | 7.2972  |     | 9  | 90.4925 | 81.7515  |
|    | 10 | 27.7450 | 6.1304  |     | 10 | 91.4008 | 68.8024  |

## TARTIŞMA ve SONUÇ

Teorem 1.1.4 ü kullanarak kesikli düzgün dağılımın örnek maksimumunun beklenen değer ve varyansını cebirsel olarak elde etmek mümkündür.[14], [15].Teorem 1.1.4 ü kullanarak kesikli düzgün dağılımın örnek minimumunun beklenen değer ve varyansını cebirsel olarak elde etmek kolay değildir. Bu çalışmada, (3.3.5), (3.3.7), (3.3.9) ve (3.3.10) da ifade edilen kesikli düzgün dağılımdaki örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyanslarının daha kolay elde edilebilirliği gösterilmiştir.

Sonuç olarak; (3.3.5), (3.3.7), (3.3.9) ve (3.3.10) formüllerini kullanmak bu momentlerin bulunmasını kolaylaştırmaktadır. Ayrıca bu formüllerin Matlab 6.5 programı kullanılarak sayısal sonuçları elde edilmiştir. Gelecekteki çalışmalarda kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin *m.inci* momentleri elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

1. Özçelik, S., (1987) Uygulamalı Genel İstatistik, Elazığ.
2. Aytaç, M., (1994) Matematiksel İstatistik, Uludağ Üniv. Basımevi.
3. Freund, J.E., (2002) Mathematical Statistics, İstanbul.
4. Wilks, S.S., (1962) Mathematical Statistics, Toppan Company, Ltd., Tokyo.
5. Giri, N.C., (1975) Introduction to Probability and Statistics, Marcel Dekker, Inc. Newyork.
6. Hogg, R.Y., and Craig, A.T., (1978) Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan Publishing Co., Inc. Newyork.
7. David, H.A., (1970) Order Statistics, John Wiley and Sons, Inc. Newyork.
8. Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N., (1992), A First Course in Order Statistics, John Wiley and Sons, New York.
9. Balakrishnan, N., Cohen, A.C., (1991) Order Statistics and Inference, Academic Pres, Inc. Newyork.
10. Khatri, C. G., (1962) Distribution of Order Statistics for Discrete Case, Ann. Inst. Statist. Math., 14, 167-171.
11. Gibbons, J.D., (1971) Nonparametric Statistical Inference, Mc. Graw-Hill, Kogakusha, Ltd. Tokyo.
12. Hollander, M., Wolfe, D.A., (1973) Nonparametric Statistical Methods, John Wiley and Sons, Inc. Newyork.
13. Wilson, E.D., (1912) Advanced Calculus, Ginn and Company, Boston.
14. Zwillinger, D., (1996) Standard Mathematical Tables and Formulae.
15. Çalik, S., and Güngör, M., (2004), On the Expected Values of the Sample Maximum of Order Statistics from a Discrete Uniform Distribution, Applied Mathematic and Computation, 157, 695-700.

16. Halisdemir, N., Çalik, S., and Gürcan, M., (2007), On the Variances of the Sample Maximum of Order Statistics, (İncelemede)

## ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ' da doğdum. İlk, orta, lise öğrenimimi Elazığ' da tamamladım. 2001 yılında girdiğim Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nden 2005 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı' nda yüksek lisansa başladım. 2007 yılının ekim ayında Fen Bilimleri Enstitüsü' nün açtığı araştırma görevliliğini kazandım. Halen İstatistik Bölümü' nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.

## EKLER

### EK 1:

**Ek 1.1:** Tablo 3.3.6' daki beklenen değer için Matlab programı

```
k=input('k yı gir');
top=0;
for n=1:10
    for i=1:k
        top=top+((k+1-i)/k)^n;
    end
    a(n)=top;
    top=0;
end
disp(a)
```

**Ek 1.2:** Tablo 3.3.6' daki varyans için Matlab programı

```
k=input('k yı gir');
top=0;
top2=0;
for n=1:10
    for i=1:k
        top=top+(2*i-1)*(((k+1-i)/k)^n);
        top2=top2+(((k+1-i)/k)^n);
    end
    top2=(top2)^2;
    b(n)=top-top2;
    top=0;
    top2=0;
end
disp(b)
```

**Ek 1.3:** Tablo 3.3.7' deki beklenen değer için Matlab programı

```
k=input('k yı gir');
top=0;
for n=1:10
for i=1:(k-1)
top=top+((-1)*((i/k)^n));
end
a(n)=k+top;
top=0;
end
disp(a)
```

**Ek 1.4:** Tablo 3.3.7' deki varyans için Matlab programı

```
k=input('k yı gir');
top=0;
top2=0;
for n=1:10
for i=1:k-1
top=top+(-2*i-1)*(i/k)^n;
top2=top2+((-1)*((i/k)^n));
end
top=top+k^2;
top2=top2+k;
b(n)=top-top2^2;
top=0;
top2=0;
end
disp(b)
```